Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Matea Spajić

Karakteristične funkcije

Završni rad

Osijek, 2015.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Matea Spajić

Karakteristične funkcije

Završni rad

Voditelj: doc. dr. sc. Dragana Jankov Maširević

Osijek, 2015.

Sadržaj

Sažetak

Karakteristične funkcije slučajnih varijabli su važno sredstvo teorije vjerojatnosti zbog svojih značajnih svojstava. Svojstva koja imaju karakteristične funkcije su uvelike olakšala neke probleme teorije vjerojatnosti te ćemo ih zbog toga u ovom radu pobliže upoznati. Za početak ćemo se podsjetiti nekih osnovnih definicija i važnijih teorema koji će nam pomoći da shvatimo što su to karakteristične funkcije. Nakon osnovnih pojmova definirati ćemo karakterističnu funkciju i njezina osnovna svojstva, te navesti dva najznačajnija teorema koja su pomogla da se rad s funkcijama distribucije prelaskom na karakteristične funkcije znatno olakša. Naposljetku ćemo izračunati karakteristične funkcije nekih specifičnih distribucija diskretnih i neprekidnih slučajnih varijabli.

Ključne riječi

Karakteristična funkcija, slučajna varijabla, funkcija gustoće, funkcija distribucije, matematičko očekivanje

Abstract

Characteristic functions of random variables are basic tools of probability theory because of it's significant properties which make problems in probability theory a lot easier. Because of it's significance we will explain them more thoroughly. First of all we will recall some of the base definitions and theorems, which will help us to understand what characteristic functions are. After basic terms we will define characteristic function and it's main properties. Furthermore we will introduce two of the most significant theorems - Inversion theorem and Uniqueness theorem. Lastly we will also calculate characteristic functions of some specific distributions of random variables.

Key words

Characteristic function, random variable, probability density function, distribution function, mathematical expectation

1. Uvod

Početci teorije vjerojatnosti vezani su uz igre na sreću koje se pojavljuju sredinom 17. stoljeća. Do danas se teorija vjerojatnosti značajno razvila i zauzela jednu od najvažnijih uloga u području suvremene matematike, zbog svoje široke primjene. Teorija vjerojatnosti se primjenjuje u različitim matematičkim disciplinama, ali i u drugim područjima kao što su fizika, biologija, medicina, ekonomija i drugdje. Jedno od najjačih analitičkih sredstava teorije vjerojatnosti upravo su karakteristične funkcije. U prvom poglavlju ćemo navesti neke od osnovnih pojmova koje ćemo koristiti u nastavku te neke važnije teoreme i propozicije. Nakon što se podsjetimo osnovnih pojmova, spremni smo definirati karakteristične funkcije te ćemo navesti osnovna svojstva koja su vezana za nju, tj. koje uvjete mora imati neka funkcija da bi bila karakteristična funkcija. Zatim ćemo navesti Teorem jedinstvenosti i Teorem inverzije koji nam osiguravaju ekvivalenciju između funkcija distribucije slučajne varijable i karakteristične funkcije. U zadnjem poglavlju ćemo izračunati karakteristične funkcije nekoliko važnih distribucija slučajnih varijabli.

2. Osnovni pojmovi

Prije nego krenemo detaljnije govoriti o karakterističnim funkcijama definirat ćemo osnovne pojmove teorije vjerojatnosti. Najvažniji od tih pojmova je vjerojatnosni prostor na kojem proučavamo pokuse. Nakon izvođenja pokusa zanima nas ishod koji se dogodio i kojem želimo pridružiti neku vrijednost. Funkcije koje nam pomažu da rezultatu pokusa pridružimo neku vrijednost se nazivaju slučajne varijable. Pojmovi koji su usko vezani uz slučajnu varijablu su funkcija gustoće, funkcija distribucije, njezine numeričke karakteristike i drugi. Sve te pojmove ćemo detaljnije opisati u nastavku kako bismo stvorili bolju predodžbu što je to karakteristična funkcija slučajne varijable i koja je njezina uloga u teoriji vjerojatnosti.

2.1. Pojam i osnovna svojstva vjerojatnosti i slučajne varijable

Osnovni pojmovi teorije vjerojatnosti koji se ne definiraju, nego objašnjavaju primjerima su pokus i njegov ishod. Najjednostavniji primjer pokusa je bacanje simetričnog novčića, poznat kao igra "pismo-glava". Pokus se izvodi tako da se novčić baci u vis iznad neke ravne plohe te kada padne na plohu mogu se dogoditi dvije mogućnosti, a to su da se novčić okrenuo na stranu na kojoj je pismo ili da se okrenuo na stranu na kojoj je glava i te dvije mogućnosti nazivamo ishodom pokusa. Svaki ishod slučajnog pokusa je jedan elementarni događaj i označava se s ω. Skup svih ishoda slučajnog pokusa naziva se skup ili prostor elementarnih događaja i označava s Ω. Sada znamo da skup elementarnih događaja sadrži sve moguće ishode pokusa, a mi proučavamo samo one koji su nam zanimljivi. Na primjer, u našem pokusu nas zanima pri bacanju dva novčića kada će se okrenuti dvije iste strane novčića, tada je naš $\Omega = \{PP, PG, GP, GG\}$, a događaj koji je nama zanimljiv možemo opisati kao podskup od Ω i to kao skup $\{PP, GG\}$. Svi podskupovi od Ω nazivaju se slučajni događaji ili samo događaji. Kako ćemo u nastavku računati vjerojatnost pojedinih događaja, potrebno je definirati pojam vjerojatnosti. Prije toga definirajmo familiju događaja koja će nam biti potrebna za definiranje vjerojatnosti, a nazivamo je σ-algebra.

Definicija 2.1. *Neka je dan neprazan skup Ω. Familija $\mathcal{F}$ podskupova skupa Ω je σ-algebra skupova na Ω ako vrijedi:*

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$,

2. *ZATVORENOST NA KOMPLEMENTIRANJE: ako je $A \in \mathcal{F}$ onda je i $A^c \in \mathcal{F}$,*

3. *ZATVORENOST NA PREBROJIVE UNIJE: ako je dana prebrojiva familija skupova* $(A_i, i \in I) \subseteq \mathcal{F}, I \subseteq \mathbb{N}$, *onda* $\mathcal{F}$ *sadrži i njihovu uniju, tj.* $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$.

Na tako zadanoj familiji definirat ćemo vjerojatnost sljedećom aksiomatskom definicijom.

Definicija 2.2. *Neka je* Ω *neprazan prostor elementarnih događaja i* $\mathcal{F}$ σ*-algebra skupova na njemu. Funkciju* $P\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ *zovemo vjerojatnost na* Ω *ako zadovoljava sljedeća svojstva:*

1. *NENEGATIVNOST VJEROJATNOSTI:* $P(A) \geq 0$, *za sve* $A \in \mathcal{F}$,

2. *NORMIRANOST VJEROJATNOSTI:* $P(\Omega) = 1$,

3. σ *- ADITIVNOST VJEROJATNOSTI: ako je dana prebrojiva familija međusobno disjunktnih skupova* $(A_i, i \in I) \subseteq \mathcal{F}, I \subseteq \mathbb{N}$, *tj.* $A_i \bigcap A_j = \emptyset$ *čim je* $i \neq j$, *tada vrijedi*
$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i).$$

Definicija 2.3. *Uređenu trojku* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *gdje je* $\mathcal{F}$ σ*-algebra na* Ω *i* P *vjerojatnost na* $\mathcal{F}$ *zovemo vjerojatnosni prostor.*

Vjerojatnosni prostor kod kojeg je Ω konačan ili prebrojiv skup, a pridružena σ-algebra je partitivan skup $\mathcal{P}(\Omega)$, zovemo diskretan vjerojatnosni prostor. Vjerojatnost na diskretnom vjerojatnosnom prostoru određujemo zadavanjem vjerojatnosti na jednočlanim podskupovima od Ω, no kada Ω nije diskretan nije moguće definirati vjerojatnost na taj način. Zbog toga uvodimo pojam slučajne varijable koji ćemo razdvojiti na diskretne i neprekidne slučajne varijable.

Definicija 2.4. *Neka je dan vjerojatnosni prostor* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Funkciju* $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *zovemo slučajna varijabla na* Ω *ako je* $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ *za proizvoljan* $B \in \mathcal{B}$, *tj.* $X^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{F}$.

Definicija 2.5. *Neka je dan diskretan vjerojatnosni prostor* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. *Svaka funkcija* $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *je slučajna varijabla i zovemo je diskretna slučajna varijabla.*

Kako bismo si olakšali rad sa diskretnim slučajnim varijablama, koristiti ćemo pregledniji zapis koji nam daje sljedeća definicija.

Definicija 2.6. *Diskretnu slučajnu varijablu X zadajemo tako da zadamo skup svih vrijednosti koje ta slučajna varijabla može primiti, tj. skup $\mathcal{R}(X) = \{x_1, x_2, ...\}$ kojeg nazivamo slika slučajne varijable X i njima pripadne vjerojatnosti $p_i = P(X = x_i)$, za $i = 1, 2, ...$ što pregledno možemo zapisati u obliku tablice*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}.$$

Ovu tablicu nazivamo tablica distribucije, distribucija ili zakon razdiobe.

Prije nego navedemo definiciju neprekidne slučajne varijable, definirat ćemo i što su to nezavisne slučajne varijable u sljedećoj definiciji.

Definicija 2.7. *Neka je dan diskretan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ i neka su $X_1, X_2, ..., X_n$ slučajne varijable na njemu. Kažemo da su $X_1, X_2, ..., X_n$ nezavisne slučajne varijable ako za proizvoljne $B_i \subset \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$, vrijedi*

$$\begin{aligned} P\{X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, ..., X_n \in B_n\} &= P\{\omega \in \Omega; X_1(\omega) \in B_1, X_2(\omega) \in B_2, ..., X_n(\omega) \in B_n\} \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{X_i \in B_i\}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P\{X_i \in B_i\}. \end{aligned}$$

Definicija 2.8. *Neka je dan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Funkciju $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi:*

- $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \{X \leq x\} \in \mathcal{F}$ *za svaki* $x \in \mathbb{R}$,
- *postoji nenegativna realna funkcija realne varijable f_X, takva da vrijedi*

$$P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, \forall x \in \mathbb{R},$$

zovemo neprekidna slučajna varijabla, a funkciju f_X funkcija gustoće slučajne varijable X.

Vjerojatnosna svojstva slučajnih varijabli najčešće su opisana funkcijom distribucije te navodimo njezinu definiciju.

Definicija 2.9. *Neka je dan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i neka je X slučajna varijabla na njemu. Funkciju $F_X\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ koja realnom broju x pridružuje vjerojatnost da dana slučajna varijabla bude manja ili jednaka tom broju, tj. funkciju*

$$F_X(x) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = P\{X \leq x\}$$

zovemo funkcija distribucije slučajne varijable X.

Teorem koji sljedeći navodimo daje nam osnovna svojstva funkcije distribucije.

Teorem 2.1. *Neka je dan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i neka je X slučajna varijabla na njemu sa funkcijom distribucije F_X. Tada vrijede sljedeća svojstva:*

1. *F_X je monotono rastuća funkcija, tj. $x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$,*
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = F_X(-\infty) = 0$,
3. $\lim\limits_{x \to \infty} F_X(x) = F_X(\infty) = 1$,
4. *F_X je neprekidna zdesna, tj. $\lim\limits_{x \downarrow x_0} F_X(x) = F_X(x_0)$.*

Dokaz: Vidi [1, str. 63-64].

Za funkcije distribucije vrijedi i sljedeća korisna propozicija.

Propozicija 2.1. *Neka su F_{X_1} i F_{X_2} funkcije distribucije i neka je*

$$F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x), \qquad x \in C(F_{X_1}) \cap C(F_{X_2}).$$

Tada je $F_{X_1} = F_{X_2}$.

Dokaz: Vidi [5, Propozicija 9.3., str. 258].

Osim funkcija distribucije dodatna pomoć u opisivanju slučajnih varijabli su numeričke karakteristike, zbog svojih generalnih svojstava. Osnovna numerička karakteristika slučajne varijable je matematičko očekivanje, koje ćemo u nastavku definirati za diskretnu i neprekidnu slučajnu varijablu.

Definicija 2.10. *Neka je dan diskretan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ i neka je X slučajna varijabla na njemu. Ako red $\sum\limits_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$ apsolutno konvergira, tj. ako konvergira red $\sum\limits_{\omega \in \Omega} |X(\omega)|P(\{\omega\})$, onda kažemo da slučajna varijabla X ima matematičko očekivanje i broj $E[X] = \sum\limits_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$ zovemo matematičko očekivanje (očekivanje) slučajne varijable X.*

Definicija 2.11. *Neka je* X *neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće* f_X*. Ako je integral* $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx$ *konačan, onda kažemo da slučajna varijabla* X *ima očekivanje i broj*

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

zovemo matematičko očekivanje neprekidne slučajne varijable X*.*

Navest ćemo i nekoliko svojstava matematičkog očekivanja, koja će nam biti potrebna u nastavku. Prije toga ćemo napomenuti kako svojstva koja vrijede kod matematičkog očekivanja za diskretnu slučajnu varijablu, vrijede i za neprekidnu.

Teorem 2.2. (Linearnost matematičkog očekivanja) *Neka su* X *i* Y *dvije slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *takve da postoje očekivanja* $E[X]$ *i* $E[Y]$*. Tada za proizvoljne* $a, b \in \mathbb{R}$*, postoji očekivanje slučajne varijable* $aX + bY$ *i vrijedi*

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y].$$

Dokaz: Vidi [1, Teorem 2.3., str. 87].

Teorem 2.3. *Neka su* $X_1, X_2, ..., X_n$ *nezavisne slučajne varijable. Ako su sve* X_i *nenegativne ili ako je* $E[X_i]$ *konačno za sve* $i = 1, 2, ..., n$*, tada postoji* $E[\prod_{i=1}^{n} X_i]$ *i vrijedi*

$$E[\prod_{i=1}^{n} X_i] = \prod_{i=1}^{n} E[X_i].$$

Dokaz: Vidi [5, Teorem 11.5., str. 357].

U nastavku ćemo iskazati još nekoliko poznatih teorema, koji će nam biti potrebni u dokazima koji su vezani uz karakterističnu funkciju.

Teorem 2.4. (Fubinijev teorem) *Neka su* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *i* $(Y, \mathcal{B}, \upsilon)$ *prostori* σ*-konačne mjere, a* $f\colon X \times Y \to [-\infty, \infty]$ *funkcija koja je* $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ *izmjeriva i integrabilna s obzirom na produktnu mjeru* $\mu \otimes \upsilon$*. Tada vrijedi:*

1. *Postoji skup* $N_X \subseteq X$ *mjere nula,* $\mu(N_X) = 0$*, sa svojstvom da je za svaki* $x \in X \backslash N_X$ *fukcija* f_x *integrabilna s obzirom na mjeru* υ*.*

2. *Funkcija* $g\colon X \to \mathbb{R}$ *definirana formulom*

$$g(x) = \begin{cases} \int_Y f_x d\upsilon\,, & \text{ako je } x \in X \backslash N_X \\ 0 & , \text{ ako je } x \in N_X \end{cases}$$

   integrabilna je s obzirom na mjeru μ.

3. *Postoji skup* $N_Y \subseteq Y$ *mjere nula,* $\upsilon(N_X) = 0$, *sa svojstvom da je za svaki* $y \in Y \backslash N_Y$ *fukcija* f^y *integrabilna s obzirom na mjeru* μ.

4. *Funkcija* $h\colon Y \to \mathbb{R}$ *definirana formulom*

$$h(y) = \begin{cases} \int_X f^y d\mu\,, & \text{ako je } y \in Y \backslash N_Y \\ 0 & , \text{ ako je } y \in N_Y \end{cases}$$

   integrabilna je s obzirom na mjeru υ.

5. $\displaystyle\int_{X\times Y} f d(\mu \otimes \upsilon) = \int_Y \left(\int_X f^y d\mu \right) d\upsilon(y) = \int_X \left(\int_Y f_x d\upsilon \right) d\mu(x).$

Dokaz: Vidi [2, Teorem 5.12., str. 176].

Teorem 2.5. (Lebesgueov teorem o dominantnoj konvergenciji) *Neka su* $f, f_n\colon X \to [-\infty, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, Σ*-izmjerive funkcije i neka je* $g\colon X \to [0, \infty]$ *integrabilna funkcija. Ako su ispunjeni sljedeći uvjeti:*

1. $\lim\limits_{n} f_n = f$,

2. *funkcije* f_n *dominirane su funkcijom* g, *tj.* $|f_n| \leq g$, *za svaki* $n \in \mathbb{N}$, *onda su sve funkcije* f *i* f_n, $n \in \mathbb{N}$ *integrabilne i vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Dokaz: Vidi [2, Teorem 4.36., str. 138].

Teorem 2.6. (Weierstrassov teorem aproksimacije) *Neka je* $f \in C([a, b], \mathbb{R})$. *Tada postoji niz polinoma* $p_n(x)$ *koji uniformno konvergira prema* $f(x)$ *na* $[a, b]$.

Dokaz: Vidi [7, Teorem 14.1., str. 1-3].

Napomena 2.1. *Rezultat sličan Weierstrassovom teoremu aproksimacije pojavljuje se kod Fourierovih redova. On tvrdi da neprekidnu* 2π *periodičnu funkciju možemo uniformno aproksimirati na* $\mathbb{R}$ *trigonometrijskim polinomom.*

3. Karakteristična funkcija

Znamo da svojstva slučajnih varijabli opisujemo funkcijama distribucije, no rad s funkcijama distribucije često može biti vrlo kompliciran. Kako bi se olakšao taj problem funkcijama distribucije se pridružuju pripadne karakteristične funkcije. Karakteristične funkcije su korisne jer postoji ekvivalencija između njih i funkcija distribucije, a rad s karakterističnim funkcijama je znatno lakši nego rad s funkcijama distribucije. Nakon što definiramo karakteristične funkcije i navedemo njihova osnovna svojstva, iskazat ćemo i dokazati Teorem o jedinstvenosti koji nam jamči tu ekvivalencju i Teorem inverzije koji nam pokazuje kako se funkcija distribucije i funkcija gustoće u specijalnom slučaju mogu eksplicitno prikazati pomoću svoje karakteristične funkcije.

3.1. Definicija i osnovna svojstva

Definicija 3.1. *Neka je dan vjerojatnosni prostor* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *i slučajna varijabla* X *na njemu s funkcijom distribucije* F_X. *Karakteristična funkcija od* F_X *je funkcija* $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *definirana izrazom*

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) dF_X(x) + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx) dF_X(x),\ t \in \mathbb{R}.$$

Za svaki $t \in \mathbb{R}$ *funkcija* $x \to e^{itx}$ *je neprekidna i budući da je* $|e^{itx}| = 1$, φ_X *je dobro definirana.*

Napomena 3.1. *Ovdje ćemo pokazati da je funkcija* φ_X *uistinu dobro definirana na cijelom* $\mathbb{R}$. *Koristeći trigonometrijski zapis i apsolutnu vrijednost kompleksnog broja vrijedi sljedeće*

$$|e^{itx}| = |\cos(tx) + i \sin(tx)| = \sqrt{\cos^2(tx) + \sin^2(tx)} = 1.$$

Sada prema prethodnoj definiciji i dobivenom rezultatu imamo

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx}| dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dF_X(x) = 1$$

te zaključujemo da je φ_X *dobro definirana.*

Definicija 3.2. *Neka je* X *slučajna varijabla s funkcijom distribucije* F_X. *Karakteristična funkcija* φ_X *slučajne varijable* X *je karakteristična funkcija od* F_X *dana izrazom*

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_X(x) = E[e^{itX}],\ za\ t \in \mathbb{R}.$$

Ako je X diskretna slučajna varijabla sa slikom $\mathcal{R}(X) = \{x_k : k \in I \subseteq \mathbb{N}\}$, te pripadnim vjerojatnostima, $P\{X = x_k\} = p_k$, $k \in I$, tada je

$$\varphi_X(t) = \sum_{k \in I} e^{itx_k} p_k = \sum_{x_k \in \mathcal{R}(X)} \cos(tx_k) p_k + i \sum_{x_k \in \mathcal{R}(X)} \sin(tx_k) p_k.$$

Ako je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f_X, tada je

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) f_X(x) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx) f_X(x) dx.$$

Sada kada smo definirali karakterističnu funkciju, navest ćemo nužna svojstva koja neka funkcija φ_X mora ispunjavati da bi bila karakteristična funkcija slučajne varijable.

Propozicija 3.1. *Karakteristična funkcija $\varphi_X \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ slučajne varijable X mora zadovoljavati sljedeće:*

1. $|\varphi_X(t)| \leq \varphi_X(0) = 1$,
2. $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$,
3. φ_X *je uniformno neprekidna funkcija na* $\mathbb{R}$.

Dokaz:

1. Za svaki $t \in \mathbb{R}$ prema definiciji karakteristične funkcije i Napomeni 3.1. vrijedi

$$|\varphi_X(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_X(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx}| dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dF_X(x) = 1 = F_X(\infty).$$

Također vrijedi

$$\varphi_X(0) = E[e^{i \cdot 0 \cdot x}] = E[e^0] = E[1] = 1,$$

pa zaključujemo

$$|\varphi_X(t)| \leq \varphi_X(0) = 1.$$

2. Koristeći se svojstvom kompleksnog konjugiranja i definicijom karakteristične funkcije za svaki $t \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\varphi_X(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{e^{itx}} dF_X(x) = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_X(x)} = \overline{\varphi_X(t)}.$$

3. Još nam preostaje dokazati da je φ_X uniformno neprekidna na $\mathbb{R}$. Uzmimo proizvoljne $t, h \in \mathbb{R}$ te pogledajmo apsolutnu vrijednost karakteristične funkcije φ_X u danim vrijednostima. Tada je

$$\begin{aligned}
|\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t+h)x} dF_X(x) - \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_X(x) \right| \\
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i(t+h)x} - e^{itx}) dF_X(x) \right| \\
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} \cdot e^{ihx} - e^{itx}) dF_X(x) \right| \\
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} (e^{ihx} - 1) dF_X(x) \right|.
\end{aligned}$$

Koristeći predznanje iz integralnog računa, znamo da na integrale možemo primjeniti nejednakost trokuta. Navedena tvrdnja i rezultat koji smo dobili u Napomeni 3.1. će nam pojednostaviti prethodni izraz

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} (e^{ihx} - 1) dF_X(x) \right| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{itx} (e^{ihx} - 1) \right| dF_X(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{ihx} - 1 \right| dF_X(x).
\end{aligned}$$

Pogledajmo sada podintegralnu vrijednost, primjećujemo da $|e^{ihx} - 1| \to 0$ za $h \to 0$, osim toga vrijedi

$$|e^{ihx} - 1| \leq |e^{ihx}| + |1| \leq 2.$$

Zaključujemo da su ispunjeni uvjeti Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji, te vrijedi sljedeće

$$\lim_{h \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{ihx} - 1 \right| dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 0 dF_X(x) = 0.$$

Dakle, φ_X je uniformno neprekidna na $\mathbb{R}$.

$\square$

Propozicija 3.1. daje nužne uvjete koje karakteristična funkcija mora zadovoljiti. U nastavku ćemo navesti Bochnerov teorem koji sadrži nužne i dovoljne uvjete kako bi za danu funkciju $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ znali odrediti kada je ona karakteristična. Prije toga ćemo definirati kada je funkcija φ_X pozitivno semidefinitna, jer ćemo takve funkcije koristiti u Bochnerovom teoremu. Osim toga navest ćemo Teorem neprekidnosti koji će nam biti potreban u dokazu tog teorema.

Definicija 3.3. *Funkcija* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *je pozitivno semidefinitna ako je*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g(t_i - t_j)\alpha_i\overline{\alpha_j} \geq 0$$

za proizvoljno n*, te za proizvoljne* $t_1, t_2, ..., t_n \in \mathbb{R}$ *i za* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{C}$.

Teorem 3.1. (Teorem neprekidnosti) *Neka je* $(F_{X_n}, n \in \mathbb{N})$ *niz funkcija distribucije i* $(\varphi_{X_n}, n \in \mathbb{N})$ *odgovarajući niz karakterističnih funkcija.*

1. *Ako* $F_{X_n} \xrightarrow{w} F_X$*, gdje je* F_X *funkcija distribucije, tada* $\varphi_{X_n}(t) \to \varphi_X(t)$ *za sve* $t \in \mathbb{R}$*, gdje je* φ_X *karakteristična funkcija od* F_X.

2. *Ako za svaki* $t \in \mathbb{R}$ *postoji* $\lim_n \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t)$ *i ako je funkcija* φ_X *neprekidna u* $t = 0$*, tada je* φ_X *karakteristična funkcija funkcije distribucije* F_X *i vrijedi* $F_{X_n} \xrightarrow{w} F_X$.

Dokaz: Vidi [5, Teorem 13.18., str 480].

Teorem 3.2. (Bochnerov teorem) *Funkcija* $\varphi_X\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *je karakteristična funkcija ako i samo ako je ona pozitivno semidefinitna i neprekidna u nuli.*

Dokaz:

$\Rightarrow$ Neka je $\varphi_X\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ karakteristična funkcija. Trebamo pokazati da je φ_X pozitivno semidefinitna i neprekidna u nuli. Prethodno smo u Propoziciji 3.1. dokazali da je φ_X neprekidna na cijelom $\mathbb{R}$, prema tome neprekidna je i u nuli. Preostalo nam je još pokazati da je φ_X pozitivno semidefinitna, tj. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \varphi_X(t_i - t_j)\alpha_i\overline{\alpha_j} \geq 0$. Prije nego nastavimo sa dokazom, napomenut ćemo da se u dokazu koristimo nekim već poznatim činjenicama o svojstvima kompleksnog konjugiranja i tvrdnjama o integralima. Tada je

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \varphi_X(t_i - t_j)\alpha_i\overline{\alpha_j} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_i - t_j)x}\right] \alpha_i\overline{\alpha_j} dF(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} e^{i(t_i - t_j)x}\alpha_i\overline{\alpha_j}\right] dF(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} e^{it_i x}e^{-it_j x}\alpha_i\overline{\alpha_j}\right] dF(x)
\end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i e^{it_i x} \overline{\alpha_j e^{it_j x}} \right] dF(x)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{it_i x} \right|^2 dF(x) \geq 0.$$

Zaključujemo da je φ_X je pozitivno semidefinitna. Sada još trebamo dokazati drugi smjer.

$\Leftarrow$ Pretpostavimo sada da je φ_X pozitivno semidefinitna i neprekidna u nuli, treba pokazati da je φ_X karakteristična funkcija. Za proizvoljne $x \in \mathbb{R}$ i $n > 0$ postoji integral

$$I(x) = \frac{1}{n} \int_0^n \int_0^n \varphi_X(v-w) e^{-i(v-w)x} dw dv.$$

Ako prethodni integral aproksimiramo Riemmanovim sumama i iskoristimo pretpostavku teorema da je φ_X pozitivno semidefinitna, zaključujemo da je $I(x) \geq 0$. Uvedimo supstituciju tako da je $u = v - w$. Tada iz $0 \leq w + u \leq n$ i $0 \leq w \leq n$ sljedi

$$\begin{aligned}
I(x) &= \frac{1}{n} \int_{-n}^{0} \varphi_X(u) e^{-iux} \left(\int_{-u}^{n} dw \right) du + \frac{1}{n} \int_{0}^{n} \varphi_X(u) e^{-iux} \left(\int_{0}^{n-u} dw \right) du \\
&= \frac{1}{n} \int_{-n}^{0} \varphi_X(u) e^{-iux} (n+u) du + \frac{1}{n} \int_{0}^{n} \varphi_X(u) e^{-iux} (n-u) du \\
&= \int_{-n}^{n} \varphi_X(u) e^{-iux} \left(1 - \frac{|u|}{n} \right) du.
\end{aligned}$$

Definiramo novu funkciju φ_{X_n} tako da je

$$\varphi_{X_n}(u) = \begin{cases} \varphi_X(u) \left(1 - \frac{|u|}{n} \right) & , |u| \leq n \\ 0 & , |u| > n \end{cases},$$

zbog toga možemo integral $I(x)$ napisati kao $I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{X_n}(u) e^{-iux} du$.

Sada ćemo prethodnu jednakost pomnožiti s obje strane izrazom $\frac{1}{2\pi} \left(1 - \frac{|x|}{X} \right) e^{ivx}$ i zatim ćemo dobiveni izraz integrirati u granicama od $-X$ do X, pri čemu je $X > 0$. Primjenom navedenog imamo

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-X}^{X}\left(1-\frac{|x|}{X}\right)I(x)e^{ivx}dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{X_n}(u)e^{-iux}\int_{-X}^{X}\left(1-\frac{|x|}{X}\right)e^{ivx}dxdu \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{X_n}(u)\int_{-X}^{X}\left(1-\frac{|x|}{X}\right)e^{ix(v-u)}dxdu \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{X_n}(u)\int_{0}^{X}2\left(1-\frac{|x|}{X}\right)\cos(x(v-u))dxdu \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{X_n}(u)\frac{\sin^2\frac{1}{2}X(v-u)}{X(v-u)^2}du.
\end{aligned}
$$

Kako je $\left(1-\frac{|x|}{X}\right) \geq 0$ za $x \in (-X, X)$ i $I(x) \geq 0$, tada lijeva strana prethodne jednadžbe ima oblik karakteristične funkcije do na konstantu. Pogledajmo sada limes desne strane jednadžbe kada $X \to \infty$, on je jednak $\varphi_{X_n}(u)$. Budući da je funkcija $\varphi_{X_n}(u)$ limes niza karakterističnih funkcija i neprekidna je u nuli, zaključujemo da je $\varphi_{X_n}(u)$ karakteristična funkcija. Osim toga je $\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n} = \varphi_X$, te prema Teoremu neprekidnosti sljedi da je φ_X karakteristična funkcija i time je naš teorem dokazan.

$\square$

Kao zadnje svojstvo navest ćemo tvrdnje koje vrijede za afinu transformaciju slučajne varijable X, odnosno za $Y = aX + b$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ i za sumu n nezavisnih slučajnih varijabli.

Teorem 3.3. *1. Neka je X slučajna varijabla s karakterističnom funkcijom φ_X i $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Karakteristična funkcija slučajne varijable $Y = aX + b$ je dana izrazom*

$$\varphi_Y(t) = \varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\varphi_X(at),\ t \in \mathbb{R}.$$

2. Neka su $X_1, X_2, ..., X_n$ nezavisne slučajne varijable s karakterističnim funkcijama $\varphi_{X_k}(t)$, $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Tada je karakteristična funkcija slučajne varijable $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$ dana izrazom

$$\varphi_Y(t) = \varphi_{\sum_{k=1}^{n} X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}(t).$$

Dokaz:

1. Neka je X slučajna varijabla i Y njezina afina transformacija. Koristeći se definicijom karakteristične funkcije slučajne varijable i svojstvima matematičkog očekivanja koja smo naveli u Teoremu 2.2. i Teoremu 2.3. dobivamo

$$\varphi_Y(t) = \varphi_{aX+b}(t) = E[e^{it(aX+b)}] = E[e^{itb}e^{itaX}] = E[e^{itb}]E[e^{itaX}] = e^{ibt}\varphi_X(at).$$

2. Neka su $X_1, X_2, ..., X_n$ nezavisne slučajne varijabe i $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Iskoristimo sada svoje dosadašnje znanje o karakterističnim funkcijama. Tada je

$$\varphi_Y(t) = \varphi_{\sum_{k=1}^{n} X_k}(t) = E[e^{it\sum_{k=1}^{n} X_k}] = E[\prod_{k=1}^{n} e^{itX_k}].$$

   Prema Teoremu 2.3., sljedi

$$E[\prod_{k=1}^{n} e^{itX_k}] = \prod_{k=1}^{n} E[e^{itX_k}] = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t).$$

$\square$

3.2. Teorem inverzije

Najvažniji rezultati vezani uz karakteristične funkcije iskazani su u sljedećim teoremima. Teorem jedinstvenosti nam daje $1-1$ korespodenciju između karakteristične funkcije i njoj pripadne funkcije distribucije. Naime, ako dvije slučajne varijable imaju jednake karakteristične funkcije, onda one imaju jednake funkcije distribucije.

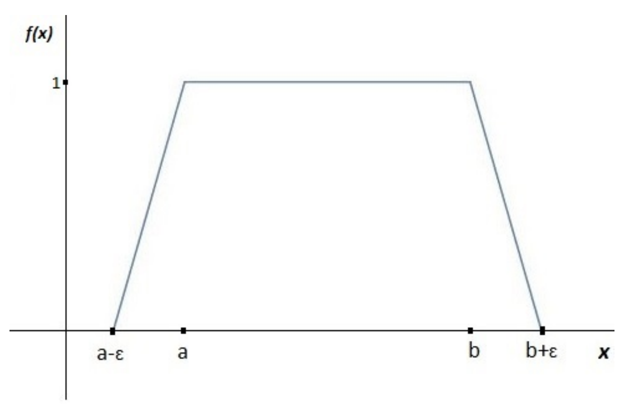
Teorem 3.4. (Teorem jedinstvenosti) *Neka su F_{X_1} i F_{X_2} funkcije distribucije na $\mathbb{R}$ i neka one imaju istu karakterističnu funkciju, tj. za sve $t \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_{X_1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_{X_2}(x).$$

Tada je $F_{X_1} = F_{X_2}$.

Dokaz:

Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a < b$ te neka je $\varepsilon > 0$. Promotrimo funkciju $f^{(\varepsilon)}$, čiji je graf prikazan na Slici 1.,



Slika 1: Graf funkcije $f^{(\varepsilon)}$

te dokažimo da vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(\varepsilon)}(x) dF_{X_1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(\varepsilon)}(x) dF_{X_2}(x).$$

Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $[a-\varepsilon, b+\varepsilon] \subset [-n, n]$ i neka je $(\delta_n, n \in \mathbb{N})$ niz, takav da je $1 \geq \delta_n \downarrow 0$ za $n \to \infty$. Restringirana funkcija $f^{(\varepsilon)}|_{[-n,n]}$ je neprekidna i prima jednake vrijednosti u rubnim točkama. Sada prema Weierstrassovom teoremu aproksimacije i Napomeni 2.1. možemo funkciju $f^{(\varepsilon)}|_{[-n,n]}$ uniformno aproksimirati trigonometrijskim polinomima. Dakle, postoji konačna suma

$$f_n^{(\varepsilon)}(x) = \sum_k a_k e^{i\frac{\pi x k}{n}}$$

tako da vrijedi

$$\sup_{-n \le x \le n} |f^{(\varepsilon)}(x) - f_n^{(\varepsilon)}(x)| \le \delta_n.$$

Proširimo funkciju $f_n^{(\varepsilon)}$ na cijeli $\mathbb{R}$ i primijećujemo da je

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n^{(\varepsilon)}(x)| \le 2.$$

Iz pretpostavke teorema da F_{X_1} i F_{X_2} imaju jednaku karakterističnu funkciju sljedi da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n^{(\varepsilon)}(x) dF_{X_1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n^{(\varepsilon)}(x) dF_{X_2}(x).$$

Označimo sa $M = max\{F_{X_1}(\infty), F_{X_2}(\infty)\}$, pa dobivamo sljedeće

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\infty}^{\infty} f^{(\varepsilon)}(x) dF_{X_1}(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f^{(\varepsilon)}(x) dF_{X_2}(x) \right| &= \left| \int_{-n}^{n} f^{(\varepsilon)} dF_{X_1}(x) - \int_{-n}^{n} f^{(\varepsilon)} dF_{X_2}(x) \right| \\
&\le \left| \int_{-n}^{n} f_n^{(\varepsilon)} dF_{X_1}(x) - \int_{-n}^{n} f_n^{(\varepsilon)} dF_{X_2}(x) \right| \\
&\quad + 2M\delta_n \\
&\le \left| \int_{-\infty}^{\infty} f_n^{(\varepsilon)} dF_{X_1}(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f_n^{(\varepsilon)} dF_{X_2}(x) \right| \\
&\quad + 2M\delta_n + 2\mu_{F_{X_1}}([-n, n]^e) \\
&\quad + 2\mu_{F_{X_2}}([-n, n]^e),
\end{aligned}$$

gdje su $\mu_{F_{X_1}}$ i $\mu_{F_{X_2}}$ mjere inducirane redom s F_{X_1} odnosno F_{X_2}. Desna strana prethodnog izraza teži prema nuli kada $n \to \infty$, dakle vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(\varepsilon)} dF_{X_1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(\varepsilon)} dF_{X_2}(x).$$

Primjetimo, kada $\varepsilon \to 0$ vrijedi $f^{(\varepsilon)}(x) \to K_{[a,b]}(x)$, gdje je $K_{[a,b]}(x)$ funkcija definirana na sljedeći način

$$K_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1\,, \; x \in [a, b] \\ 0\,, \; x \notin [a, b] \end{cases} .$$

Ukoliko na jednakost $\int_{-\infty}^{\infty} f^{(\varepsilon)}(x)dF_{X_1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(\varepsilon)}(x)dF_{X_2}(x)$ primjenimo Lebesgueov teorem o dominantnoj konvergenciji, dobivamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_{[a,b]}(x)dF_{X_1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{[a,b]}(x)dF_{X_2}(x).$$

Prema tome kako smo definirali funkciju $K_{[a,b]}$ iz prethodne jednakosti sljedi $F_{X_1}(b) - F_{X_1}(a) = F_{X_2}(b) - F_{X_2}(a)$, ako je a točka u kojoj su i F_{X_1} i F_{X_2} neprekidne, tj. $a \in C(F_{X_1}) \cap C(F_{X_2})$. Pustimo $a \to -\infty$ po skupu $C(F_{X_1}) \cap C(F_{X_2})$, tada prema svojstvima funkcija distribucije znamo da je $F_{X_1}(-\infty) = F_{X_2}(-\infty) = 0$ i zbog Propozicijie 2.1. sljedi $F_{X_1} = F_{X_2}$.

□

Nastavit ćemo s drugim važnim teoremom, Teoremom inverzije i njegovim dokazom.

Teorem 3.5. (Teorem inverzije) *1. Ako je φ_X karakteristična funkcija slučajne varijable X s funkcijom distribcije F_X i ako su a i b proizvoljne točke neprekidnosti funkcije F_X takve da je $a < b$, tada vrijedi:*

$$F_X(b) - F_X(a) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \varphi_X(t)dt$$

2. Ako je $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_X(t)|dt < \infty$, tada slučajna varijabla X ima funkciju gustoće f_X, tj. X je neprekidna slučajna varijabla i vrijedi

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi_X(t)dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Osim toga, f_X je neprekidna i ograničena funkcija.

Dokaz:

1. Označimo sa $I(T)$ izraz, za $a < b$,

$$I(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \varphi_X(t)dt,$$

koji možemo zapisati na sljedeći način

$$\begin{aligned} I(T) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \varphi_X(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}dF_X(x)\right] dt \\ &= \int_{-T}^{T} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{it(x-a)} - e^{it(x-b)}}{2\pi it}\right] dF_X(x)dt. \end{aligned}$$

Kako bi prethodni izraz još pojednostavili, želimo zamjeniti integrale. Prije toga potrebno je provjeriti je li podintegralna funkcija ograničena kako bi mogli primjeniti Fubinijev teorem. Dakle, sređivanjem podintegralne funkcije i primjenom nejednakosti trokuta na integral sljedi

$$\begin{aligned}\left|\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}e^{itx}\right| &= \left|\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\right|\left|e^{itx}\right| \\ &= \left|\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\right|\cdot 1 \\ &= \left|\int_a^b e^{-itx}dx\right| \\ &\leq \int_a^b \left|e^{-itx}\right|dx \\ &= b-a.\end{aligned}$$

Primjenjujući prethodni rezultat, pogledajmo sljedeći integral

$$\int_{-c}^{c}\int_{-\infty}^{\infty}(b-a)dtdF_X(x) = 2c(b-a)F_X(\infty) < \infty.$$

Sada smijemo zamjeniti integrale i vrijedi

$$I(T) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-T}^{T}\left[\frac{e^{it(x-a)}-e^{it(x-b)}}{2\pi it}\right]dF_X(x)dt.$$

U nastavku ćemo iskoristiti trigonometrijski zapis $\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ i neparnost sinusa te dobivamo

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-T}^{T}\frac{e^{it(x-a)}-e^{it(x-b)}}{2\pi it}dt\right]dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\Bigg[&\frac{1}{\pi}\int_0^T\frac{\sin t(x-a)}{t}dt \\ &-\frac{1}{\pi}\int_0^T\frac{\sin t(x-b)}{t}dt\Bigg]dF_X(x).\end{aligned}$$

Znamo da općenito vrijedi

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin(\alpha x)}{x}dx = sign(\alpha)\frac{\pi}{2},$$

gdje je $sign(\alpha)$ predznak od α koji može biti -1, 0 ili 1, zavisno o tome je li α manji, jednak ili veći od nule. U našem slučaju α su $x-a$ i $x-b$, te ćemo sve pregledno zapisati ovako

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin(\alpha t)}{t}dt = \begin{cases}\frac{1}{2} & ,\ \alpha > 0 \\ 0 & ,\ \alpha = 0 \\ -\frac{1}{2} & ,\ \alpha < 0\end{cases}.$$

Iz prethodno navedenog vidimo kako je funkcija $\frac{1}{\pi}\int_0^T \frac{\sin(\alpha t)}{t}dt$ neprekidna po T i postoji limes te funkcije kada $T \to \infty$ i on je konačan, zbog čega zaključujemo da je dana funkcija uniformno ograničena. Dakle, postoji M, $0 < M < \infty$, takav da vrijedi $\left|\frac{1}{\pi}\int_0^T \frac{\sin(\alpha t)}{t}dt\right| \leq M$ za sve T i α. U nastavku ćemo primjeniti Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji, jer smo prethodno zaključili da su ispunjeni uvjeti tog teorema. Primjenom navedenog, vrijedi

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty} I(T) &= \lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^T \frac{\sin(t(x-a))}{t}dt - \frac{1}{\pi}\int_0^T \frac{\sin(t(x-b))}{t}dt\right]dF_X(x)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} L(x,a,b)dF_X(x)\end{aligned}$$

gdje je

$$L(x,a,b) = \begin{cases} 1 \text{ , } a < x < b \\ \frac{1}{2} \text{ , } x = a \text{ ili } x = b \\ 0 \text{ , } x < a \text{ ili } x > b \end{cases}.$$

Nakon djelovanja limesa, vrijedi sljedeće

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty} I(T) = &\int_{(-\infty,a)}\left[-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]dF_X + \int_{\{a\}}\left[0-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]dF_X\\ &+\int_{(a,b)}\left[\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]dF_X + \int_{\{b\}}\left[\frac{1}{2}-0\right]dF_X\\ &+\int_{(b,\infty)}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right]dF_X\\ = &\int_a^b \left[\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]dF_X\\ = &\, F_X(b) - F_X(a)\end{aligned}$$

jer su $a, b \in C(F_X)$.

2. Želimo dokazati, ako je $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_X(t)|dt < \infty$, tada funkcija distribucije F_X slučajne varijable X ima funkciju gustoće f_X za koju vrijedi,

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi_X(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Prvo ćemo pokazati da je f_X integrabilna na $[a, b]$ tj. da je ograničena i neprekidna. Znamo da je funkcija φ_X integrabilna što povlači da je f_X dobro definirana i ograničena. Preostalo je još pokazati da je f_X neprekidna na $\mathbb{R}$, za taj dokaz potrebno je ponoviti sličan postupak koji smo naveli u dokazu Propozicije 3.1.(3). Dakle, funkcija gustoće f_X je integrabilna na $[a,b]$ pa sada možemo računati određeni integral funkcije gustoće,

$$\int_a^b f_X(x)dx = \int_a^b \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi_X(t)dt\right]dx.$$

Prethodno smo već zaključili da funkcija gustoće zadovoljava uvjete Fubinijevog teorem, pa ćemo ga iskoristiti

$$\begin{aligned}\int_a^b \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi_X(t)dt\right]dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_X(t)\left[\int_a^b e^{-itx}dx\right]dt \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\varphi_X(t)\left[\int_a^b e^{-itx}dx\right]dt \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\varphi_X(t)dt.\end{aligned}$$

Primjećujemo da smo dobili isti izraz kao u 1. dijelu teorema, prema tome znamo da vrijedi

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\varphi_X(t)dt = F_X(b)-F_X(a),$$

za $a,b\in C(F_X)$. Budući da je integral neprekidna funkcija svojih granica, zaključujemo da je

$$F_X(b)-F_X(a) = \int_a^b f_X(x)dx \text{ za sve } a,b\in\mathbb{R}, \text{ takve da je } a<b.$$

Kada pustimo $a\to-\infty$ sljedi $F_X(b) = \displaystyle\int_{-\infty}^{b} f_X(x)dx$, za $b\in\mathbb{R}$. Prema tome kako je F_X funkcija distribucije slučajne varijable X, možemo zaključiti da je f_X funkcija gustoće od X.

$\square$

4. Primjeri karakterističnih funkcija nekih slučajnih varijabli

U ovom poglavlju ćemo izračunati karakteristične funkcije nekoliko distribucija slučajnih varijabli koje se zbog svoje velike važnosti često koriste u praksi i koje prepoznajemo po njihovim specifičnim svojstvima.

Primjer 4.1. (Bernoullijeva distribucija) *U stvarnom životu nas često zanima kolika je vjerojatnost da se neki događaj realizirao ili da se nije realizirao, a te realizacije često zovemo uspjeh, odnosno neuspjeh. Takvi pokusi kod kojih slučajna varijabla može primiti točno dvije vrijednosti su opisani Bernoullijevom distribucijom, gdje je* $\mathcal{R}(X) = \{0, 1\}$, *a pridružene vjerojatnosti su* $p = P(X = 1)$ *i* $q = 1 - p = P(X = 0)$. *Sada prema definiciji karakteristične funkcije sljedi*

$$\varphi_X(t) = \sum_{i \in \mathcal{R}(X)} e^{itx_i} p_i = e^0(1-p) + e^{it}p = 1 - p + e^{it}p = q + e^{it}p.$$

Primjer 4.2. (Binomna distribucija) *Za slučajnu varijablu* X *koja opisuje broj uspjeha u* n *nezavisnih ponavljanja i gdje nas pri svakom izvođenju pokusa zanima samo je li se neki događaj dogodio ili ne, kažemo da ima Binomnu distribuciju. Neka je* $n \in \mathbb{N}$ *i* $p \in (0, 1)$, *slučajna varijabla* X *prima vrijednosti iz skupa* $\{0, 1, 2, ..., n\}$ *s pripadnim vjerojatnostima* $p_i = P\{X = i\} = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$. *Na taj način je dana Binomna distribucija s parametrima* n *i* p *koju označavamo* $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. *Karakterističnu funkciju računamo*

$$\varphi_X(t) = \sum_{i=0}^{n} e^{itx_i} p_i = \sum_{i=0}^{n} e^{itx_i} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$

Prema Binomnom teoremu koji tvrdi da je $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, *gdje su* $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *sljedi*

$$\sum_{i=0}^{n} e^{itx_i} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = (pe^{it} + 1 - p)^n.$$

Dakle, karakteristična funkcija za slučajnu varijablu X *s Binomnom distribucijom je* $\varphi_X(t) = (pe^{it} + 1 - p)^n$.

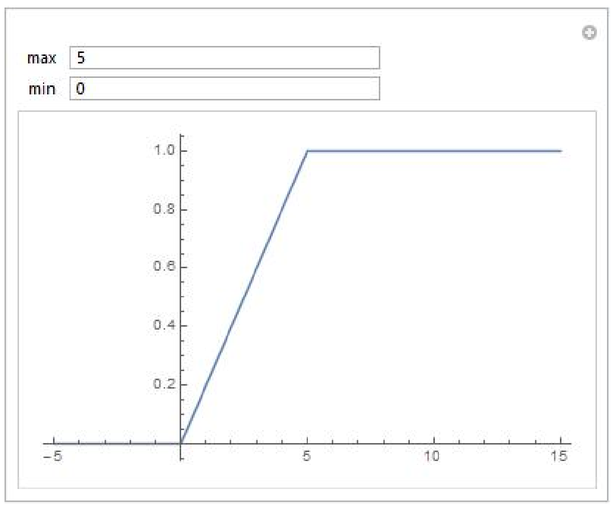
Primjer 4.3. (Uniformna distribucija) *Uniformna distribucija slučajne varijable* X *veže se uz pokuse za koje je poznato da mogu primiti vrijednosti iz ograničenog intervala* (a, b), *ali pritom ne preferiramo neko područje. Preciznije, za neprekidnu* *slučajnu varijablu X kažemo da ima uniformnu distribuciju na intervalu (a, b), gdje je $a < b$, ako joj je funkcija gustoće dana izrazom*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , x \in (a,b) \\ 0 & , x \notin (a,b) \end{cases}.$$

Označavamo je s $X \sim \mathcal{U}(a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, takvi da je $a < b$. Funkcija distribucije uniformne slučajne varijable je dana na sljedeći način

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, a) \\ \frac{x-a}{b-a} & , x \in [a,b) \\ 1 & , x \in [b, \infty) \end{cases}$$

i njezin graf za $X \sim \mathcal{U}(0, 5)$vidimo na Slici 2.



Slika 2: Funkcija distribucije uniformne slučajne varijable

Pogledajmo sada postupak računanja karakteristične funkcije

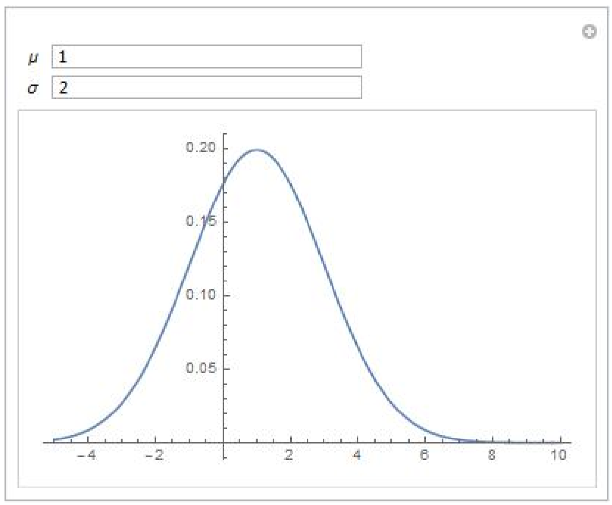
$$\begin{aligned} \varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x) dx &= \int_a^b e^{itx} \frac{1}{b-a} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{itx} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b (\cos(tx) + i \sin(tx)) dx \\ &= \frac{1}{it(b-a)} \left[e^{itb} - e^{ita} \right]. \end{aligned}$$

Dakle, karakteristična funkcija neprekidne slučajne varijable s uniformnom distribucijom je $\varphi_X = \dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$.

Primjer 4.4. (Normalna distribucija) *Za neprekidnu slučajnu varijablu X na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ kažemo da ima normalnu ili Gaussovu distribuciju s parametrima μ i σ^2 ako je njezina funkcija gustoće dana s*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ x \in \mathbb{R},\ \text{gdje su } \mu \text{ i } \sigma \text{ realni brojevi i } \sigma > 0.$$

Funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable za $\mu = 1$ i $\sigma = 2$ prikazana je na Slici 3.



Slika 3: Funkcija gustoće slučajne varijable

Označavamo je s $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Funkcija distribucije je dana formulom

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt,\ x \in \mathbb{R}.$$

Prvo ćemo napraviti afinu transformaciju slučajne varijable $X = \dfrac{Y-\mu}{\sigma}$ pa dobivamo sljedeće

$$X = \frac{Y-\mu}{\sigma} \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma X = Y - \mu \qquad \Longrightarrow \qquad Y = \sigma X + \mu.$$

Prema Teoremu 3.2.(1) o svojstvima karakteristične funkcije znamo da vrijedi

$$\varphi_Y(t) = \varphi_{\sigma X + \mu}(t) = e^{i\mu t}\varphi_X(\sigma t)$$

što ćemo iskoristiti na kraju. Sada odredimo karakterističnu funkciju standardne normalne distribucije slučajne varijable $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, čija je gustoća dana s $f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},\ x \in \mathbb{R}$. Tada je

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right] dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{itx} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k x^k}{k!} \right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} x^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} x^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx
\end{aligned}$$

Pogledajmo sada podintegralnu funkciju i označimo je s $g(x) = x^k e^{-\frac{x^2}{2}}$. *Funkcija* g *je parna za paran* k, *odnosno neparna kada je* k *neparan i vrijedi sljedeće*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx = ((-1)^k + 1) \int_0^{\infty} y^k e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Zatim ćemo dobiveni izraz uvrstiti na odgovarajuće mjesto, nakon čega φ_X *izgleda ovako*

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ((-1)^k + 1) \int_0^{\infty} y^k e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Kako bismo imali pregledniji račun uvest ćemo supstituciju $s = \frac{y^2}{2}$. *Tada je*

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((-1)^k + 1)(it)^k}{k!\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (2s)^{\frac{k}{2}} e^{-s} (2s)^{-\frac{1}{2}} ds \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((-1)^k + 1)(it)^k}{k!\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} 2^{\frac{k}{2}} s^{\frac{k}{2}} e^{-s} 2^{-\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}} ds \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((-1)^k + 1)(it)^k}{k!\sqrt{2\pi}} 2^{\frac{k-1}{2}} \int_0^{\infty} s^{\frac{k-1}{2}} e^{-s} ds.
\end{aligned}$$

Iintegral u prethodnoj jednakosti odgovara definiciji Gama funkciji, tj. $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$, *pri čemu je* $x > 0$, *te je prethodni izraz jednak*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{((-1)^k + 1)(it)^k}{k!\sqrt{2\pi}} 2^{\frac{k-1}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2} \right).$$

Primjetimo sada da su sumandi jednaki nuli za sve neparne k, zbog toga ćemo sumirati samo po parnim k i vrijedi

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((-1)^{2n}+1)(it)^{2n}}{(2n)!\sqrt{2\pi}} 2^{n-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(it)^{2n}}{(2n)!\sqrt{\pi}} 2^{n-1}\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right).\end{aligned}$$

U nastavku ćemo iskoristiti svojstva koja vrijede za Gamma funkciju, odnosno $\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x)$ te nakon toga $\Gamma(x) = (x-1)!$. Kada to uvrstimo u prethodnu jednakost dobit ćemo rješenje

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^{2n}}{2^n(2n)!} \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^{2n}}{2^n n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{t^2}{2}\right)^n}{n!} = e^{-\frac{t^2}{2}}, \qquad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Za kraj ćemo prethodni rezultat uvrsititi u početni izraz i dobiti karakterističnu funkciju slučajne varijable Y,

$$\varphi_Y(t) = e^{i\mu t}\varphi_X(\sigma t) = e^{i\mu t - \frac{(\sigma t)^2}{2}}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Literatura

[1] M. Benšić, N. Šuvak, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Sveučilište J.J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2014.

[2] D. Jukić, *Mjera i integral*, Sveučilište J.J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2012.

[3] A.F. Karr, *Probability*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[4] P.A.P. Moran, *An introduction to probability theory*, Oxford University Press, 1968.

[5] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[6] http://www.mathos.unios.hr/images/homepages/nsuvak/vjerojatnost/materijali9.pdf

[7] http://www.mast.queensu.ca/ speicher/Section14.pdf