SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA MATEMATIKU

Josipa Tataj

Generalizacija

Diplomski rad

Osijek, 2017.

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA MATEMATIKU

Josipa Tataj

Generalizacija

Diplomski rad

Mentorica:
doc. dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2017.

Sadržaj

Uvod **1**

1 Prvi susret s izražavanjem generalizacije **2**

1.1 Izražavanje generalizacije u brojevima 2
1.2 Izražavanje generalizacije u dijagramima i slikama 5
1.2.1 Generalizacija u dijagramima 5
1.2.2 Generalizacija slikovnih nizova 6
1.2.3 Očitavanje površine 8
1.3 Izražavanje generalizacije izvan škole 11

2 Stjecanje iskustva i izražavanje općenitosti **13**

2.1 Izražavanje generalizacije u brojevima 13
2.1.1 Postoci 13
2.1.2 Dimenzije moguće varijacije 13
2.1.3 Napraviti aritmetiku smislenom 14
2.2 Izražavanje generalizacije u dijagramima 16
2.2.1 Dijagrami i grafovi 16
2.2.2 Slikovni niz i prebrojavanje 18
2.2.3 Množenje prikazano na mreži 19

3 Primjeri generalizacije **21**

3.1 Palindrom 21
3.2 Krpanje 23
3.3 Klinovi 28

Zaključak **32**

Sažetak **33**

Literatura **34**

Životopis **35**

Uvod

U ovom radu bavit ćemo se generalizacijom. Generalizacija je važan aspekt u matematici koja prožima sve nastavne cjeline na svim razinama. Suprotno onome što većina ljudi misli, generalizacija se može vidjeti, čak i u male djece (već u vrtiću) i nastavlja se kroz cijelo školovanje. Generalizacija je prijelaz s razmatranja danog skupa objekata na odgovarajuće razmatranje njegovog nadskupa. Ona započinje kada dobijemo osjećaj o osnovnom uzorku.

Kada govorimo o generalizaciji, nemoguće je izbjeći 'drugu stranu novčića', specijalizaciju, odnosno proučavanje određenog slučaja kako bi dobili osjećaj o široj klasi. Specijalizacija se koristi za prikupljanje dokaza, na temelju kojih stvaramo generalizaciju. Izražavajući uzorak koji naslućujemo, stvaramo pretpostavku koju dodatna specijalizacija može podržati ili opovrgnuti. Proces opravdanja pretpostavke uključuje više generalizacije s promjenom naglaska s nagađanja onoga što bi moglo biti točno u poimanje zašto bi to moglo biti točno. Svaki put kada se susretnemo s generalizacijom vrijedi pokušati krenuti s konkretnim slučajevima (specijalizacijom).

U ovom radu, pomoću zadataka namijenjenih učenicima i nastavnicima, upoznat ćemo se s generalizacijom. Radeći na zadacima, a ne samo čitajući tekst, izazvat se će pitanje vlastitog razumijevanja algebarskog mišljenja te oblikovanje vlastitih zadataka. Vrlo je važno, da se radi na zadacima kako bi imali neposredno iskustvo o tome što tekst ističe.

Ako ste nastavnik matematike, možete pronaći način rada koji će imati utjecaj na vaš razred. Od nastavnika se očekuje da prilagode i mijenjaju strukturu i prezentaciju zadataka za učenike, kako bi bili u skladu s njihovim mogućnostima i iskustvima. Važno je da učenici u zadacima uključe sebe te izmjene zadatak.

Također je važno da si uzmete vremena za rad na zadacima, čak i ako oni izgledaju jednostavno. Ukoliko se zadaci čine preteški, možete koristiti predložene strategije (što učiniti kada zaglavimo). U svakom slučaju, predložene strategije mogu koristiti učenici različitih uzrasta. Također, valja naglasiti da rad nudi jedno od mnogo mogućih rješenja.

Prvo i drugo podglavlje fokusira se na mogućnosti izražavanja generalizacije s obzirom na različite kontekste (brojeve, dijagrame, svakodnevni život).

U trećem poglavlju, prolazimo kroz dane zadatke, tako da je objašnjen svaki korak u kojemu koristimo prethodno naučene strategije.

1 Prvi susret s izražavanjem generalizacije

Svaki učenik koji započinje školu može pokazati moć generalizacije i zaključivanje iz pojedinih slučajeva, što je korijen algebre.

Izražavanje generalizacije je prirodni i dio ljudskog zaključivanja. Algebra omogućuje formiranje generalizacije iz iskustva s brojevima i računanjem, formiranje u smislu simbola i upoznavanje pojma uzoraka. Srž pedagoškog problema je omogućavanje učenicima da upotrijebe svoju intuiciju u izražavanju generalizacije.

Prva tri podpoglavlja gledaju izražavanje općenitosti na temelju uzoraka brojeva, grafova i sakodnevnog života.
U zadacima će se tražiti da se napišu brojevi. Važno je da se zaista zapisuju, iz razloga što postoji značajna razlika između zamišljenog broja i zapisanog broja.

1.1 Izražavanje generalizacije u brojevima

Zadatak 1.1.1 *Zapišite broj koji je za 1 veći od višekratnika broja 10. Zapišite drugi. Zapišite još jedan. Koji su njegovi ostaci kada ih dijelimo sa 10?*
Bitno je da učenici zapišu te brojeve. Nije bitan konkretan odgovor, nego odgovor svih učenika tj. što će primijetiti o sebi u izvršavanju zadatka. Učenici nakon prva dva broja postanu odvažniji na temelju iskustva iz prva dva broja. U ovom je zadatku svrha pomoći učenicima kako bi postali svjesni da u bilo kojoj situaciji kad ih se pita za primjer imaju veliki izbor. Nije stvar u izboru koji im prvi padne na pamet nego da razmisle o cijelom skupu s kojim se raspolaže. Prilikom izbora trebaju biti svjesni o postojnju beskonačno mnogo mogućnosti, a da pri tome postoji metoda njihove konstrukcije i temelje za izražavanje generalizacije.
Dok je generaliziranje prirodno, učenicima treba vremena kako bi primijetili svoj smisao za generalizaciju, te im treba vremena da je izraze i ojačaju tu sposobnost.

Zadatak 1.1.2 *Malo je dijete primijetilo kako je* $3+5=5+3$ *i* $2+4=4+2$*, te da je 'bilo što plus bilo što je bilo što plus bilo što'. Što je dijete najvjerojatnije pokušalo izraziti?*
Izjava se može protumačiti, na primjer, da uzmemo 'bilo što' kao neovisnost (na primjer $3+5=17+22$), no čini se u potpunosti moguće da dijete razmišlja na ovaj način. Vjerojatnije tumačenje je to da ako odaberemo bilo koja dva broja onda ćemo dobiti isti odgovor, bez obzira u kojem ih redoslijedu zbrojili.

Djetetova izjava je generalizacija, nadilazi posebne slučaje i bavi se sa beskonačno mnogo mogućih slučajeva. Svaki izraz za generalizaciju, kao u ovom slučaju, treba se analizirat kako bi se izbjeglo pogrešno razumijevanje. Često prvim pokušajem izražavanja generalizacije dobijemo široki spektar, stoga je bitno da se bilo koji dobiveni izraz treba tretirati kao pretpostavka, kao nešto što bi trebali provjeriti i opravdati. Algebra nam pomaže kako bi što preciznije izrazili generalizaciju, a kasnije i zaključili o svojstvima brojeva.

Zadatak 1.1.3.a *Ako trebamo pomnožiti* 32 *s 18, u glavi, kako bi to mogli napraviti?*
Ako to moramo pomnožiti u glavi možemo 32 rastaviti na 30+2 i pomnožiti s 18 ili 18 razmatrati kao $20-2$ i pomnožimo oba broja s 32, te ih onda oduzeti.
Jasno je kako se od učenika ne očekuje da zapamte sve moguće kalkulacije brojeva u skladu sa uzorkom kao što je $(30+2)\cdot$ *nešto*. Umjesto toga, od njih se očekuje da razaberu 'opću metodu'.
Sljedeći se zadatak bavi mogućim varijacijama na ovu temu.

Zadatak 1.1.3.b *Što se može promijeniti u zapisu* $(30 + 2) \cdot$ *nešto, a pritom je i dalje od pomoći u množenju u glavi?*
Možda je najistaknutija varijacija u deseticama: $(30+2) \cdot$ *nešto* predlaže $(40+2) \cdot$ *nešto*, $(50+2) \cdot$ *nešto* itd. Svijest o mogućoj promijeni je svijest o općoj metodi tj. generalizaciji. Nadalje, tu smo već izrazili generalizaciju uvođenjem drugog broja (18 prelazi u *nešto*), nije važno koji je drugi broj jer je lakše množiti kada se brojevi rastave nego kada pokušamo množiti izravno. Jednostavnije je kada dani broj rastavimo na desetice plus jedinice. Umjesto rastavljanja desetice plus 6 ili većeg broja, možemo rastaviti na oduzimanje od 1 do 4. Postoje tri različita svojstva, za zadatak, koja se mogu promijeniti: desetice, 'dodani broj' (jedinice) i broj s kojim množimo.

Zadatak 1.1.3.c *Što je generalizirano u prethodnim zadacima? Pokušajmo izraziti tu generalizaciju.*
Dosta je teško verbalno izraziti generalizaciju. Jedan od pokušaja generalizacije može biti 'množenje u glavi se može jednostavnije izvršiti tako da barem jedan od brojeva zamijenimo s najbližim brojem s kojim je jednostavnije množiti'. Uočimo da smo u izjavi uključili generalizaciju povezivanje barem jednog broja s približnim brojem nije specijalan slučaj, već generalan.

Sljedeći zadatak izaziva učenike da koriste intuiciju kako bi generalizirali.

Zadatak 1.1.4.a *Popunite četvrti red u sljedećem nizu aritmetičkih izjava:*

$(3+2) \cdot (3-2) = 3^2 - 4$
$(4+2) \cdot (4-2) = 4^2 - 4$
$(5+2) \cdot (5-2) = 5^2 - 4$
(6...

Je li to točno? Što mislite što slijedi?
Većina ljudi zna što slijedi: '+', pa onda '2' u zagradi itd. I sljedeći red i red nakon njega... Kada radimo na ovakvim zadacima često postoji pretpostavka da bi učenici trebali vidjeti što učitelji vide. Budući da svatko gleda zadatak na svoj način, učenici ne moraju uvijek vidjeti ono što vide i učitelji. Važno je da učenici imaju vremena razmisliti, formulirati i pokušati izraziti generalizaciju sebi, prije nego što prezentiraju cijelom razredu. Prakticiranjem ovakvih zadataka učenici postaju svjesniji generalizacije, te tako izražavanje generalizacije postaje navika.

Stoga je ponuđen sljedeći zadatak kao upoznavanje sa izražavanjem generalizacije.

Zadatak 1.1.4.b *Dovršite zadane redove po uzoru na prethodni zadatak:*

(37...
(987654321...

Učenici prvo mogu zapisati nekoliko redova koji prate zadanu formu da obrate pozornost na ono što se mijenja i na ono što ostaje isto. Što nam pomaže kako bi otkrili uzorak i zatim ga generalizirali.
Korištenje vrlo velikih brojeva koji su namjerno zastrašujući, kada je u pitanju obavljanje aritmetičkih izračuna s njima, je dobar način da se potakne učenike da budu svjesni generalizacije i da ju upotrijebe.

Dok se krećemo iz reda u red, naše oko prirodno razlikuje stvari koje ostaju svaki put iste i stvari koje se mijenjaju. U prethodno zadatku vidimo da se ponavlja izraz ($+2$), $\cdot$, (-2), $=$ i -4. Naglašavanjem što se mijenja i svjesno ignorirajući što ostaje isto priziva prirodnu sposobnost da otkrije što se mijenja i možemo li imati drugačiju vrijednost.

Pronađeni uzorak ne prati niz prebrojavanja brojeva jednog po jednog, nego gledanjem što nam govori svaki red: „Produkt od 'nešto' plus 2 puta 'to isto' minus 2 je razlika između njegovog kvadrata i 4“. Primijetimo koliko je teško iskazati generalizaciju riječima zbog probleme koji se odnosi na nešto općenito više, od jednog. Korištenjem simbola čini izraz puno razumljivijim. Stoga ćemo za vrijednosti koje se mijenjaju uvrstiti $\square$ i dobijemo

$(\square + 2) \cdot (\square - 2) = \square^2 - 4.$

Time zaključujemo da kvadratić nije fiksan broj, nego on označava promjenjivu vrijednost. Korištenjem kvadratića došli smo do izraza koji je generaliziran i koji čini generalizaciju puno jasnijom. No, treba naglasiti da je navedeni uzorak samo pretpostavka jer smo ga dobili na temelju intuicije, na što se ne možemo osloniti.

Zamisli broj Igra "Zamisli broj" se većinom odnosi na brojeve s kojima učenici mogu ugodno raditi aritmetiku, a to su obično cijeli brojevi. Kalkulator može biti koristan u zapisivanju specifičnih brojeva ili za proširenja raspona brojeva. U različitim oblicima, Zamisli broj se koristi još od srednjeg vijeka. Adolescenti su često zainteresirani za matematičke sposobnosti da predvide odgovore nakon niz kompleksnih izračuna. No naravno, u svemu tome nam pomaže algebra.

Zadatak 1.1.5. *Zamislite broj od* 1 *do* 10. *Ja vam dodam još toliko. Prijatelj vam da još* 4. *Pola bacite u vodu i meni vratite moje. Ostalo vam je* 2*!*

Odgovor je uvijek 2, bez obzira s kojim brojem započeli. Jedan od pristupa rješavanja ove igre je da se krećemo po brojevnom pravcu, a drugi je pristup da zamislimo broj u glavi. Naravno, kraj može varirati s obzirom na računske operacije.

Moramo se zapitati, kako odgovor može biti neovisan o početnom broju? Iako svaki od sudionika započinje igru određenim brojem, voditelj ne zna koji je broj odabrao svaki sudionik i započinje simbolom koji predstavlja odabrani broj. Da bi vidjeli zašto, zapišimo broj koji smo odabrali (određeni broj, neka je to 7). Sada zapišimo svaki sljedeći izračun kako bi napravili listu, jedan ispod drugog, kao aritmetičku operaciju bez izračunavanja.

7

$7 + 7$

$7 + 7 + 4$

$(7 + 7 + 4) : 2$

$(7 + 7 + 4) : 2 - 7$

Sada umjesto odabranog broja napišimo kvadratić. Moramo pripaziti da ne zamijenimo brojeve koji su zadani u zadatku s kvadratićem. Učinimo sve što možemo učiniti (aritmetički) s brojevima u svom završnom koraku.

$\square$

$\square + \square$

$2\square + 4$

$(2\square + 4) : 2 = \square + 2$

$\square + 2 - \square = 2$

Time smo pokazali da bez obzira na početni broj, koji predstavlja kvadratić, sve se poništi i ostane 2. Na jednostavan način možemo napraviti vlastitu 'igru' Zamisli broj. Što je igra kompliciranija, bit ćemo ovisniji o manipulaciji izraza kako bi ga pojednostavili. Jedan od izraza za dobar Zamisli broj je taj da gradi komplicirani izraz, a onda ga poništi na neočigledan način. Na primjer:

Zamisli broj, dodaj 2; pomnoži s brojem koji ste zamislili; dodaj 1; uzmite korijen broja; oduzmi broj koji ste zamislili; ostane vam 1.

1.2 Izražavanje generalizacije u dijagramima i slikama

Ovo potpoglavlje se nastavlja na temu izražavanja generalizacije, ali u kontekstu očitavanja dijagrama i niza slika. Poziva na moć zamišljanja. Dijagrami su otvoreni za različite načine čitanja koji vode prema različitim rezultatima.

1.2.1 Generalizacija u dijagramima

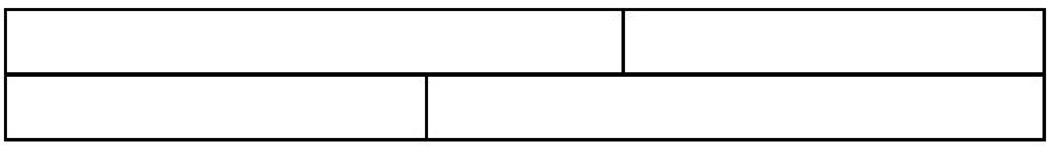
Sljedeći zadatak traži da se zamisli dijagram za svaki od navedenih slučajeva.
Zadatak 1.2.1. *Što je općenito u svakoj od navedenih tvrdnji?*

- *Zbroj kutova bilo kojeg trokuta koji leži u ravnini je* 180°.

- *Ako su poznate duljine triju stranica trokuta, tada se može konstruirati jedinstveni trokut.*

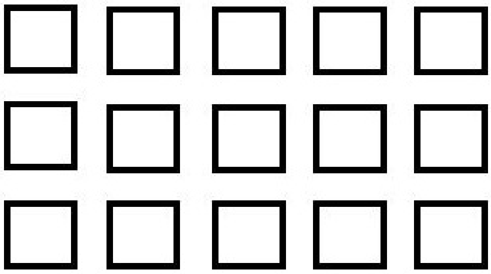
U prvoj izjavi može biti bilo koji trokut, koliko god ekstreman on bio. U drugoj izjavi te tri stranice moraju pripadati točno jednom trokutu, ali izjava je također općenita.
Često je generalizacija unutar izjava skrivena u riječima kao što su *bilo koji* i *jedinstveni (točno određeni)*. Riječ *bilo koji* može se odnositi na proizvoljno odabrani objekt.

Prilike za iskazivanje generalizacije nastaju korištenjem jednostavnih dijagrama. Na primjer, ako imamo dvije dužine ili dva daske, te ih stavimo jedanu do druge i dobijemo zbroj te dvije daske. Možemo staviti bilo koju od dvije daske kao prvu, a zatim drugu dasku.



Slika 1.

Na slici možemo vidjeti da redoslijed slaganja dasaka ne utječe na zbroj njihovih duljina. Ovakvim prikazom djeca mogu sama doći do zaključka da neovisno o redoslijedu zbrajanja dva broja rezultat će uvijek biti isti i time upoznati jedno od osnovnih pravila aritmetike, komutativnost.
Sličan prikaz možemo primijeniti i na množenje. Možemo izbrojati koliko kvadrata ima u pojedinom retku i koliko ima redaka ili možemo izbrojati koliko kvadrata imamo u pojedinom stupcu i koliko ima stupaca.

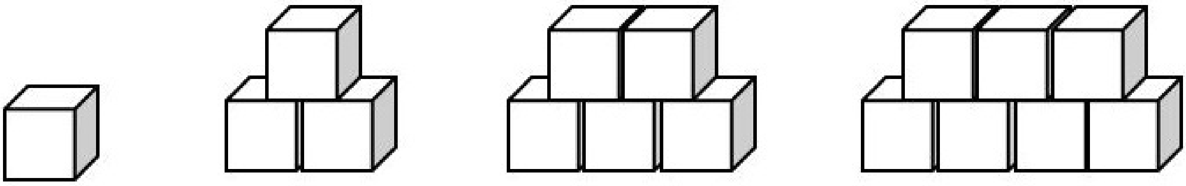


Slika 2.

1.2.2 Generalizacija slikovnih nizova

Mogućnost generalizacije nastaje kada se slijed objekta može brojati.

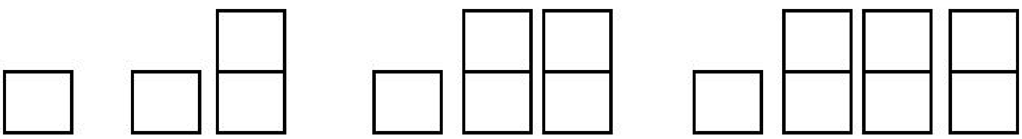
Zadatak 1.2.2.a *Odredite kako će se nastaviti niz slika?*



Slika 3.

Najbolji način da odredimo slikovni niz jest da nacrtamo još neke slike sami kako bi uočili pravilnost, a zatim kako bi postali svjesni kako ih brojati. Kada budemo mogli verbalno izraziti kako se niz nastavlja imao prvi izraz generalizacije. Obično postoji mnogo različitih načina gledanja pomoću kojih brojimo što nam daje priliku za kreativnost. Smisao brojanja u pojedinim slučajevima je postati svjestan kako brojimo. Katkad je jednostavnije nacrtati sliku kako bi prikazali kako brojimo nego opisati riječima. Ovdje ćemo prikazati samo dva, od njih mnogo, načina na koje možemo brojati niz.

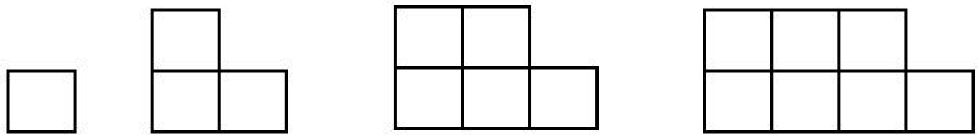
- 1. način



Slika 4.

Prva sličica u nizu ima jednu ciglu. Druga sličica prikazuje jednu ciglu s jednim parom, treća prikazuje jednu ciglu s dva para...

- 2. način



Slika 5.

Možemo gledati kao da imamo dva reda gornji i donji red. Donji red ima uvijek jednu ciglu više nego gornji. Broj cigli u donjem redu odgovara broju slike, dok gornji ima jednu ciglu manje od broja slike.

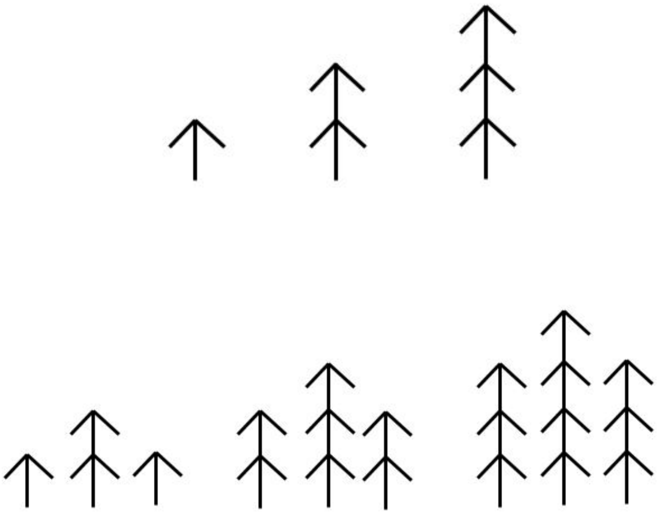
Algebarsko razmišljanje je već započelo. Kako smo pronašli način brojanja bit ćemo u mogućnosti pronaći broj cigli u pojedinom slučaju.

Zadatak 1.2.2.b *Koliko pojedina slika ima cigala?*
Cilj ovog zadatka je doći do zaključka kako općenito izbrojati cigle na pojedinoj slici. Broj sličice označit ćemo s kvadratićem ($\Box$).

- 1. način.
  Broj parova imamo za jedan manje od broja slike tj. $2(\Box - 1)$ i još dodamo jednu početnu ciglu, te dobijemo $2(\Box - 1) + 1 = 2\Box - 1$.

- 2. način.
  U donjem redu je broj cigli jednak broju slike, dok gornji red ima jednu ciglu manje tj. $\Box + (\Box - 1) = 2\Box - 1$.

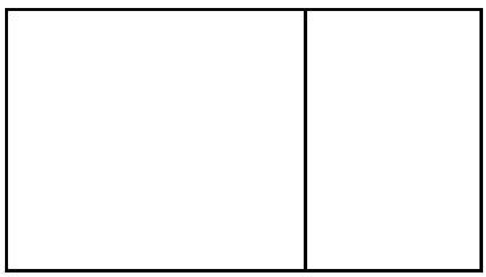
Kada se izražava generalizacija, kao što je u prethodnom zadatku, jako je važno da bude jasan status izraza. Je li to nagađanje ili imamo način da to opravdamo? 'Dva reda cigli, jednu uklonimo iz gornjeg reda' predstavlja obrazloženje. Međutim, uvijek je mudro provjeriti pretpostavku, čak i kada smo gotovo sigurnu u nju, na jedan ili dva primjera, zato što može doći do greške u promatranju uzorka. Ponavljanjem ovakvih zadataka učenici stječu samopouzdanje i postaju odvažniji u otkrivanju uzorka.
Učenici, također, mogu sami stvoriti niz slika te pokušati doći do uzorka. Niz slika vrijednih promatranja može doći iz nepredviđenih trenutaka. Primjerice, crtanjem drveća učenici mogu razviti šumu koja raste na pravilan način, kao što su prikazana dva primjera na slici 6.



Slika 6.

1.2.3 Očitavanje površine

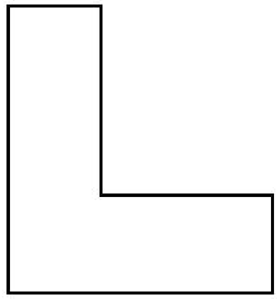
Ukupna površina velikog pravokutnika se može izraziti kao zbroj površina dva manja kvadrata. Zbroj područja od dva manja pravokutnika je površina velikog pravokutnika. Zbog toga što nije rečeno ništa specifično za dani pravokutnik ova je izjava općenita. Algebarska verzija ove generalizacije je:



Slika 7.

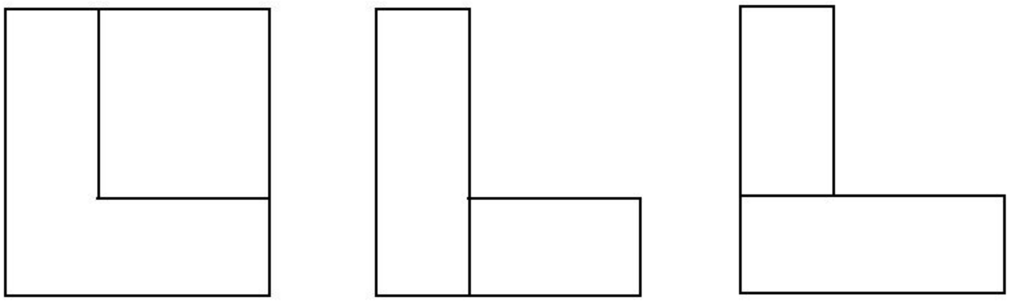
Ako s h označimo duljinu visine, a s a i b širine, onda je površina velikog pravokutnika $h(a+b)$ i površina malih pravokutnika ha i hb, pa vrijedi $h(a+b) = ha+hb$. Iako izrazi $h(a+b)$ i $ha+hb$ izgledaju različito, zaključili smo da su ova dva izraza strogo jednaka. Ovim jednostavnim prikazom smo došli do još jednog aritmetičkog pravila, distributivnost množenja prema zbrajanju.

Zadatak 1.2.4.a *Napišite najmanje dva načina na koji se može rastaviti zadani oblik u pravokutnike kako bi našli njegovu površinu. Cilj je izraziti metodu koja općenito vrijedi za sve 'L-oblike'.*



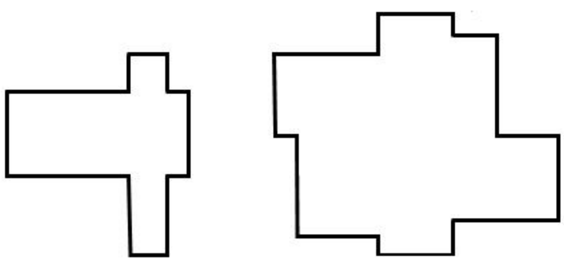
Slika 8.

Ovdje su prikazana tri moguća načina kako možemo rastaviti L-oblik u pravokutnike. U prvom prikazu područje oblika slova L je razlika dva pravokutnika, a u druga dva je zbroj dva pravokutnika.



Slika 8a.

Učenici koristite razne metode pri rastavljanju danog oblika, neki će koristiti određene brojeve, neki će koristiti oblike, a oni koji imaju veće samopouzdanje koristiti će slova. Za kompliciranije oblike, čak i u ravnini, nije uvijek moguće razaznati kako ih rastaviti na pravokutnike na najefikasniji način.
Učenici se često muče sa shvaćanjem kako rastaviti oblik u pravokutnike kako bi našli površinu. Najbolja praksa za učenike je da sami naprave sliku sastavljenu od pravokutnika i rastave ju na minimalan broj pravokutnika. Učenici će prvo započeti s jednostavnim oblicima, a zatim sve težim i težim.
Npr.

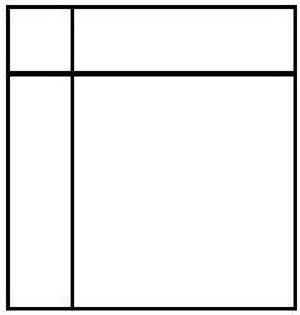


Slika 8b.

Prvo područje je nacrtano pomoću dva pravokutnika koji se preklapaju, ali potrebno nam je najmanje tri pravokutnika kako bi odredili površinu. Dok je drugo područje nacrtano pomoću pet pravokutnika, a isto toliko pravokutnika je potrebno da odredimo površinu tog područja.

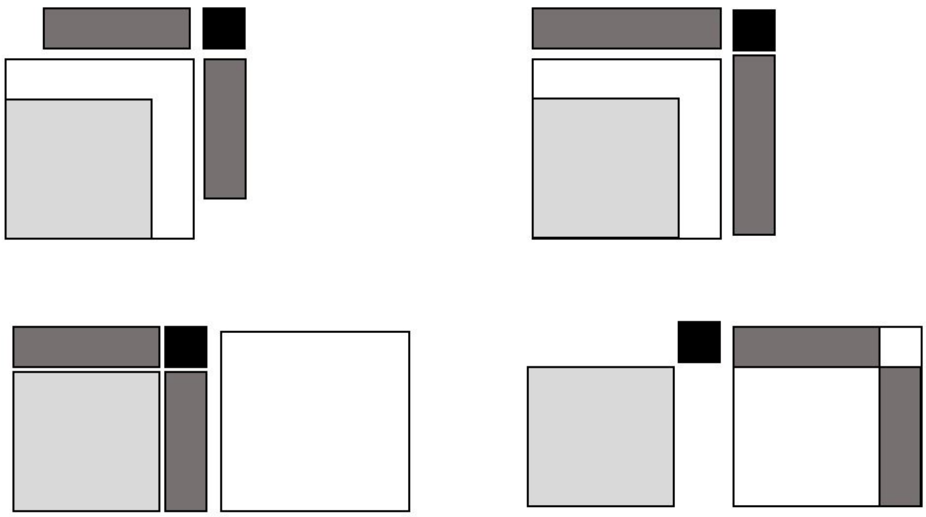
Rastavljanje na kvadrate i pravokutnike daje korisno iskustvo u prepoznavanju odnosa i izražavanju generalizacije koja se odnosi na različite načine računanja sveukupne površine, kao što prikazuje sljedeći zadatak.

Zadatak 1.2.4.b *Interpretirajte zadani lik kao opće izjave o površinama, na što je više moguće načina.*



Slika 9a.

Prva stvar koju treba vidjeti je da je lik sastavljen od manjih likova. Izbor različitih mogućnosti vodi do različitih tumačenja. Obraćanje pozornosti na raspon vrijednosti koje varijabla može poprimiti je važan dio uvođenja simbola, zato što je lakše zaboraviti potrebna ograničenja.



Slika 9b.

Stranice crnog kvadrata označimo s a, a stranice svijetlo sivog kvadrata označimo s b (a i b su duljine stranica, pa su pozitivne).

- Prvi kvadrat. Površina bijelog kvadrata umnjena za površinu svijetlo sivog kvadrata jednaka je površini crnog kvadrata plus površini dva tamno siva pravokutnika.
  Zapis pomoći simbola: $(a+b)^2 - a^2 = b^2 + 2ab$

- Drugi kvadrat. Površina bijelog kvadrata umanjenja za površinu svijetlo sivog kvadrata jednaka je razlici površina dva tamno siva kvadrata i potvršini crnog kvadrata.
  Zapis pomoću simbola: $(a+b)^2 - a^2 = 2(a+b)b - b^2$

- Treći kvadrat. Površina bijelog kvadrata jednaka je zbroju površina zatamnjenih kvadrata i oba pravokutnika.
  Zapis pomoću simbola: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

- Četvrti kvadrat. Ako površinu bijelog kvadrata umanjimo za površinu dvaju pravokutnika, dobivena površina jednaka je zbroju površina zatamnjenih kvadrata.
  Zapis pomoću simbola: $(a+b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$

Dijagrami područja su otvoreni za nekoliko različitih čitanja koje vode prema različitim izrazima.

1.3 Izražavanje generalizacije izvan škole

Ovo potpoglavlje nudi zadatake namijenjeni obraćanju pažnje na izražavanje generalizacije izvan škole. Kupci žele znati koliko će ih nešto koštati, a poduzetnici moraju osmisliti politiku postavljanja cijena, kao što su popusti i popusti na količinu. Prema tome, poduzetnici koriste algebarsko razmišljanje čak i kad koriste kalkulator ili proračunske tablice.
Pošto je korištenje riječi dosta komplicirano, matematičari koriste oznake (odnosno simbole) za predmete o kojima pričaju. Od prvog susreta učenika s algebrom učenici znaju da se u algebri koriste slova. Nažalost, većina učenika nikad ne otkriju za što ta slova služe ili za što se koriste. Za učenike je vrlo važno da shvate bit mogućnosti razgovaranja i manipuliranja s vrijednostima koje im još nisu poznate. Kvadratić koji smo upotrebljavali u odjeljku 1.1 služi kao koristan prijelaz između neformalnosti riječi i formalnosti slova. Nakon određenog vremena upotrebljavanja kvadratića, korištenje jednog slova će se vjerojatno pojaviti spontano kao smanjenje napora.

Zadatak 1.3.1. Od riječi do slova
Za svaku sljedeću rečenicu izrazi generalizaciju pomoću riječi i simbola:

- Biljka izraste $2cm$ dnevno. Zapišite njezinu visinu nakon nekoliko dana.
- Brzina automobila je dva puta veća od brzine vlaka.
- Broj minuta u određenom broju sati, određenom broju dana.
- Broj dana u određenom tjednu.

Većina učenika će krenuti s specijalizacijom kako bi uočili što se događa:

Koliko će narasti biljka za 3 dana? Dobijemo: $2+2+2=6 \rightarrow 2 \cdot 3 = 6$.
Koliko će narasti biljka za 4 dana? Dobijemo: $2+2+2+2=8 \rightarrow 2 \cdot 4 = 8$
Zaključujemo da je visina biljke jednaka broju dana puta 2. $\rightarrow$ $v(visina\ biljke) = 2 \cdot n(broj\ dana)$.

Povećavanjem samopouzdanja učenici će pokušati direktno napisati izraz simbolima:

Brzina automobila v_a jednaka je 2 puta brzina autobusa v_b $\rightarrow$ $v_a = 2 \cdot v_b$.
Jedan sat ima 60 minuta. Stoga za bilo koji broj sati h imamo 60 puta h minuta (m). $\rightarrow$ $m = 60 \cdot h$

Svaki puta kada je generalizacija prvi put izražena ona ima status pretpostavke, to je pokušaj kako bi nešto izrazili. No, lako je moguće da postoje nedostaci ili u izrazu ili u opažanju toga što se izražava. U matematičkom svijetu se sve rečeno uzima kao pretpostavka koju treba dokazati.

Zadatak 1.3.2.a *U skladištu trgovine dobivate 20% popusta, ali morate platiti porez na promet (PDV) 15%. Što bi radije, oduzeli popust prije ili poslije PDV-a?*
Jedan od pristupa je taj da se oba slučaj isprobaju na spomenutom predmetu vrijednom $100kn$.

popusta	20% od $100kn$ je $20kn$	porez	15% od $100kn$ je $15kn$
	$100kn - 20kn = 80kn$		$100kn + 15kn = 115kn$
porez	15% od $80kn$ je $12kn$	popust	20% od $115kn$ je $23kn$
konačna cijena	$80kn + 12kn = 92kn$		$115kn - 23kn = 92kn$

Zaključujemo da neovisno što prvo računamo (popust ili porez) konačna cijena će biti ista. No, ne znamo je li naš zaključak valjan (nismo ga dokazli), stoga on ostaje samo pretpostavka.

Zadatak 1.3.2.b *'Popust od 20% je isto kao da platimo 80% od cijene' je specijalni slučaj. Pokušaj generalizirati tu izjavu.*
Je li slično za dodavanje PDV-a?

Trebamo generalizirati izjave:

- ako oduzmemo 20% od cijene isto je što i platiti 80% od cijene, tj. plaćamo 0.8 puta cijena.
- ako dodamo 15% cijeni isto je što i platiti 115%, tj. plaćamo 1.15 puta cijena.

Oduzeti popust D% od orginalne cijene je isto što i platiti $(100 - D)$% od cijene. Označimo PDV s P. Dodajući PDV je isto što i platiti $(100 + P)$% od cijene.
Pogledajmo sljedeće izraze:

- $(100 - D)$% od $(100 + P)$% od cijene, tj. $(100 - D)\%\cdot$ (100+P)% $\cdot C$
- $(100 + P)$% od $(100 - D)$% od cijene, tj. $(100 + P)\% \cdot (100 - D)\% \cdot C$

Kako smo dobili umnožak postotaka i cijene znamo da u množenju nije bitan redoslijed množenja tj. znamo da je množenje komutativno. Zaključujemo da su dva dana izraza jednaka, time smo dokazali da će kupac jednako platiti, bez obzira oduzme li mu se popust prije ili posije dodavanja PDV-a.

U zadatku 1.3.2 naglasak je na specijalizaciji, što znači okretanje prema konkretnom slučaju, tj. primjeru. Iskušavanje pojedinih slučajeva je dobar način da bi smo dobili osjećaj o tome što se događa s danim problemom, što će nam pomoći pri generalizaciji. Također, iskušavanje pojedinih slučajeva je važno za testiranje pretpostavke, ali nikako nije dovoljno da ju dokažemo, jedino ukoliko ne isprobamo sve moguće slučajeve. Jedna od ključnih točaka algebre je da može 'isprobati' beskonačno mnogo slučajeva pomoću simbola.

2 Stjecanje iskustva i izražavanje općenitosti

Ovo nam poglavlje govori o prelasku sa slova koja su označavala opće brojeve prema korištenju slova koji nam govore o dosad nepoznatom broju.

2.1 Izražavanje generalizacije u brojevima

2.1.1 Postoci

Općeniti slučajevi se mogu smatrati kao najmanje ograničenje: uzmemo neki objekt koji ćemo promatrati, kao što je broj, vrijednost tog broja može biti bilo koja. Zanimljive stvari se događaju kada na brojeve stavimo ograničenja, kao što su: mora biti cijeli broj, mora biti između 5 i 7, mora biti neparan ili neki drugi uvjet. Sada ćemo iskusiti kakve posljedice ostavljaju ograničenja.

Zadatak 2.1.1.a *Izaberi broj, dodaj 10%. S koliko morate pomnožiti izabrani broj da bi rezultat bio isti? Što događa kada umanjimo za 10%?*
Učenici će često započeti s konkretnim brojevima, te na taj način pokušati shvatiti kako ide račun prije nego što krenu na opći izraz.

$70 \cdot 0.1 = 7$, $70 + 7 = 77$ ili $70 \cdot 1.1 = 77$
$70 \cdot 0.1 = 7$, $70 - 7 = 63$ ili $70 \cdot 0.9 = 63$

Kod postotaka je bitno da znamo da kada određeni postotak $i\%$ dodajemo broju to je isto kao da smo taj broj pomnožili s $1 + \frac{i}{100}$. Kada oduzimamo određeni postotak $i\%$ je isto kao da množimo s $1 - \frac{i}{100}$.

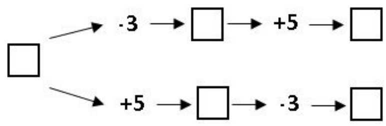
Zadatak 2.1.1.b *Prvo ćemo dodati 10% i onda na to dodati još 10%. Koliko je ukupno povećanje u postocima? Što se dogodi ako povećamo za 5%, pa onda za 10%? Generalizirajte.*
Ovaj puta možemo odmah koristiti simbole. Kod manipuliranja sa simbolima potrebno je samopouzdanje, no jednom kada shvatimo simbole moći ćemo njima upravljati kao i s brojevima.
Primamljivo je pretpostaviti da je spoj tih postotaka zapravo njihova suma (što je najčešća pogreška učenika). No, prvo ćemo dodati 10%, pa tek onda dobivenom broju dodamo još 10%.
Označimo s a i b dane postotke. Tada je zadani račun $(1 + \frac{a}{100}) \cdot (1 + \frac{b}{100})$ jednak $(1 + \frac{b}{100}) \cdot (1 + \frac{a}{100})$ jer je množenje komutativno. $(1 + \frac{a}{100}) \cdot (1 + \frac{b}{100}) = 1 + \frac{a+b+\frac{ab}{100}}{100}$. Tako da je ukupni postotak povećanja zbroj postotaka, te njihov umnožak podijeljenj sa 100.

Zadatak 2.1.1.c *Kada dodate određeni postotak nekom broju, koliko morate oduzeti kako bi dobili originalni broj? Generalizirajte.*
Zadatak je zapravo postavljanje veze između: koje smanjenje će vratiti na početni broj kada smo prvo radili povećanje i koje povećanje će vratiti na početni broj ako smo prvo radili smanjenje. Postavljamo si pitanje koji je to inverzni ili obrnuti ključ koji će raditi tu operaciju. Suština te veze je da smanjenje treba poništiti povećanje i obrnuto, tada treba vrijediti $(1 - \frac{a}{100})(1 + \frac{b}{100}) = 1$ (nema promjene na broj). Veza između poreza i popusta kako bi dobili originalnu cijenu je zapravo primjer ograničenja: prvo ograničenje (povećanje postotka) utječe na drugo ograničenje (smanjenje postotka).

2.1.2 Dimenzije moguće varijacije

Svaki zadatak može biti proširen na način da se učenik bavi osnovnim mogućnostima varijacija. U početku učenici razvijaju svoje aritmetičke vještine, a onda steknu dovoljno znanja da sami mogu izmišljati i istraživati zadatke koristeći dimenzije mogućih varijacija.

Zadatak 2.1.2. *Zapiši broj. Desno gore pomnoži s 3 i onda dodajte 5. Desno dolje dodaj 5, pa pomnoži s 3. Ta dva rješenja će se razlikovati za 10. Zašto?*



Slika 10.

Isprobajmo s brojem 5.

$5 \cdot 3 + 5 = 20$

$(5 + 5) \cdot 3 = 30$

$\rightarrow 30 - 20 = 10$

Pokušajmo napisati općenito (umjesto 5 stavimo a):

$a \cdot 3 + 5 = 3 \cdot a + 5$

$(a + 5) \cdot 3 = 3 \cdot a + 15$

$3 \cdot a + 5 - (3 \cdot a + 15) = 10$

Time smo pokazali da je razlika 10 bez obzira koji početni broj odabrali tj. 10 je nepromjenjiv dok se početni broj mijenja. S jedne strane, ovaj zadatak se bavi odnosom između dva opća izraza,a s druge strane jedan opći izraz povezuje rezultate dobivene različitim rutama.
Bitno je za učenike da na određenom nivou počnu cijeniti i spontano shvaćati koje su dimenzije mogućih varijacija i domet dopuštenih promjena raspoloživih u svakom zadatku. U ovom zadatku dimenzije mogućih varijacija uključuju 3 i 5, a operacije su zbrajanje i množenje koje se mogu mijenjati, no može se slagati i više operacija.

2.1.3 Napraviti aritmetiku smislenom

Izražavanje općenitosti je zajedničko svim područjima matematike, uključujući i aritmetiku. Računanje u sljedećem zadatku može se provesti 'u glavi' tj. dovoljna nam je mentalna aritmetika.

Zadatak 2.1.3. *Specijaliziranje i generaliziranje*
Spoji pojedine jednakosti lijeve strane s odgovarajućim općim izjavama s desne strane. Zatim pokaži da te izjave uvijek vrijede.

$83 \cdot 87 = 7221$	Produkt dva dvoznamenkasta broja gdje je umnožak desetica i umnožak jedinica isti, jednak je produktu tih brojeva s njihovim obrnutim znamenkama (zamijenimo desetice i jedinice).
$26 \cdot 31 = 62 \cdot 13$	Umnožak dva dvoznamenkasta broja jednak je razlici kvadrata sume ta dva broja i kvadrata razlike ta dva broja podijeljenog s 4.
$36 \cdot 76 = 2736$	Umnožak dva dvoznamenkasta broja koji imaju jednake desetice, a zbroj njihovih jedinica je 10 jednak je umnošku desetice s brojem koji je za jedan veći od njega, a zatim dodan produkt jedinica.
$57 \cdot 23 = \frac{(57+23)^2-(57-23)^2}{4}$	Umnožak dva dvoznamenkasta broja s jednakim jedinicama i s deseticama takvim da je njihov zbroj 10, jednak je umnošku desetica zbrojenih s jedinicom, a zatim dodan kvadrat jedinica.

Produkt dva dvoznamenkasta broja, gdje je umnožak desetica i umnožak jedinica isti, jednak je produktu tih brojeva s njihovim obrnutim znamenkama (zamijenimo desetice i jedinice) $\Rightarrow 26 \cdot 31 = 62 \cdot 13$. Kako bi pokazali da izjava uvijek vrijedi potrebno je napisati opći izraz, uključujući i ograničenja, te koristiti algebarsku manipulaciju kako bi opravdali tvrdnju. Tako broj 26 možemo napisati kao $20+6 = 2 \cdot 10 + 6$. Svaki dvoznamenkasti broj možemo napisati u općem obliku $10A+B$, gdje A označava znamenku desetice, a B znamenku jedinice. Pa izjavu možemo napisati u općem obliku $(10A+B) \cdot (10C+D)$ uz uvjet $A \cdot C = B \cdot D$.
Umnožak dva dvoznamenkasta broja jednak je razlici kvadrata some ta dva broja i kvadrata razlike ta dva broja podijeljenog s 4. $\Rightarrow 57 \cdot 23 = \frac{(57+23)^2-(57-23)^2}{4}$
Ako prvi faktor označimo s x, a drugi s y, slijedi:

$$\begin{aligned}
\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4} &= \frac{x^2+2xy+y^2-(x^2-2xy+y^2)}{4} \\
&= \frac{x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2}{4} \\
&= \frac{2xy+2xy}{4} \\
&= \frac{4xy}{4} \\
&= x \cdot y
\end{aligned}$$

Umnožak dva dvoznamenkasta broja koji imaju jednake desetice, a zbroj njihovih jedinica je 10, jednak je umnošku desetice s brojem koji je za jedan veći od njega, a zatim dodan produkt jedinica. $\Rightarrow 83 \cdot 87 = 7221$
Označimo: $(10A+B) \cdot (10C+D)$, uz uvjete $A = C$, $B+D = 10 \Rightarrow B = 10-C$

$$\begin{aligned}
(10A+B)\cdot(10A+D) &= 100A^2+10AD+10AB+BD\\
&= 100A^2+10AD+10A(10-D)+BD\\
&= 100A^2+10AD+100A-10AD+BD\\
&= 100A(A+1)+BD
\end{aligned}$$

Umnožak dva dvoznamenkasta broja s jednakim jedinicama i s deseticama takvim da je njihov zbroj 10, jednak je umnošku desetica zbrojenih s jedinicom, a zatim dodan kvadrat jedinica. $\Rightarrow 36\cdot 76=2736$
Označimo: $(10A+B)\cdot(10C+D)$, uz uvjete $B=D$, $A+C=10 \Rightarrow A=10-C$

$$\begin{aligned}
(10A+B)\cdot(10C+B) &= 100AC+10AB+10BC+B^2\\
&= 100AC+10B(10-C)+10BC+B^2\\
&= 100AC+100B-10BC+10BC+B^2\\
&= 100AC+100B+B^2\\
&= 100(AC+B)+B^2
\end{aligned}$$

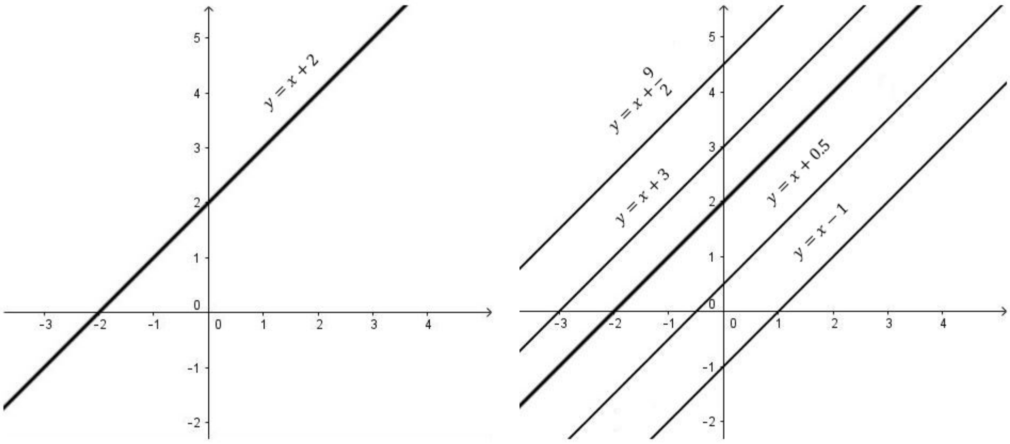
Dajući učenicima da biraju stavku iz kolekcije i da traže što ga izdvaja od drugih je korisno jer im pomaže da razrade i postanu svjesni svoje moći raspoznavanja.
Verbalni izrazi navode na opća svojstva brojeva i njihovih umnožaka. Također, zadaci u ovom dijelu nam sugeriraju da usavršavanje aritmetike zapravo uključuje algebarsko razmišljanje (svaka 'metoda' je zapravo generalizacija).

2.2 Izražavanje generalizacije u dijagramima

2.2.1 Dijagrami i grafovi

Uključujući slikovni niz, broj različitih komponenata koje su potrebne za n-tu sliku se može odrediti i tablično. Ovaj odjeljak uključuje primjere slikovnih nizova i niza brojeva.

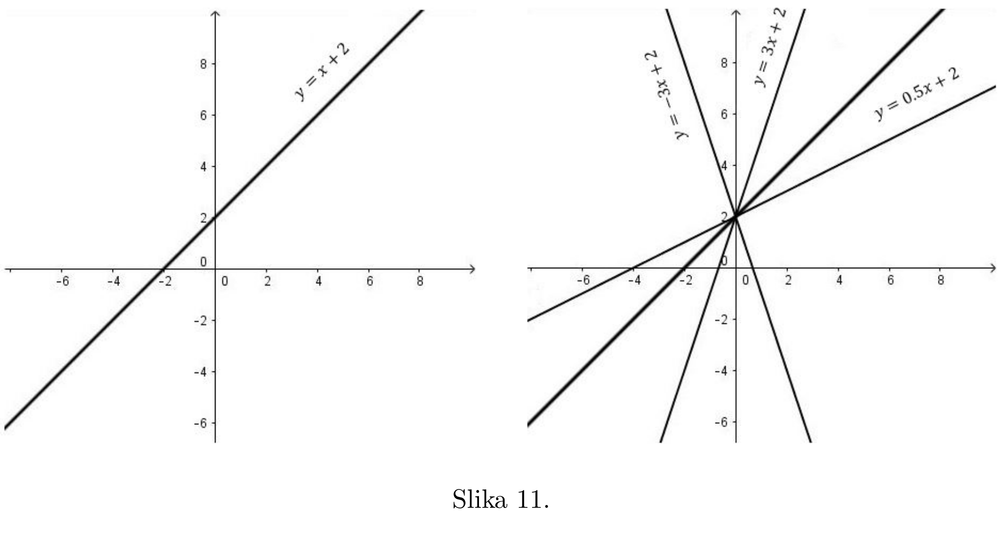
Zadatak 2.2.1.a *Zamislite pravac koji leži u ravnini koja ima označene koordinatne osi. Zamislite kopiju pravaca koja se nalazi na vrhu originala kao da ga prekriva. Sada kopiju povlačite prema x-osi. Što će se dogoditi s jednadžbom pravaca dok ju povlačite?*
Počnite ispočetka, ali povlačite pravac prema y-osi. Što se događa s jednadžbom pravaca?
Na prvu može izgledati zahtjevno ili apstraktno, ali možemo izabrati točno određeni slučaj koji želimo promatrati. Odaberimo jednadžbu pravca koji će nam predstavljati original, npr. $y=x+3$



Slika 11.

Na temelju odabranih slučajeva zaključujemo da koeficijent smjera uvijek ostaje isti (uvijek je 1), a slobodni koeficijent se mijenja kako pomičemo pravac. Također, možemo uočiti geometrijsku interpretaciju danog slučaja. Vidimo da su svi dani pravci paralelni, pa možemo pretpostaviti da su pravci paralelni ako njihove jednadžbe imaju jednak koeficijent smjera.

Zadatak 2.2.1.b *Zamislite pravac koji leži u ravnini koja ima označene koordinatne osi. Vaš pravac mora presijecati x i y os. Zamislite kopiju danog pravaca koja se nalazi na originalu kao da ga pokriva. Sada rotirajte kopiju oko točke gdje original siječe y-os. Kakav učinak to ima na jednadžbu pravaca?*



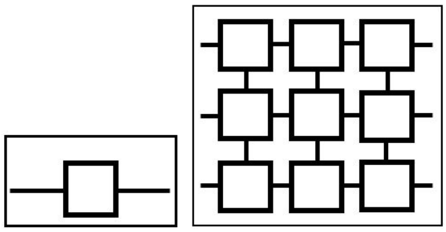
Slika 11.

U ovom slučaju slobodni koeficijent ostaje isti, a koeficijent smjera (nagib pravaca) se mijenja, dok je u prthodnom slučaju bilo obrnuto. Na grafu možemo primjetiti da svi navedeni pravci prolaze kroz točku 2.

2.2.2 Slikovni niz i prebrojavanje

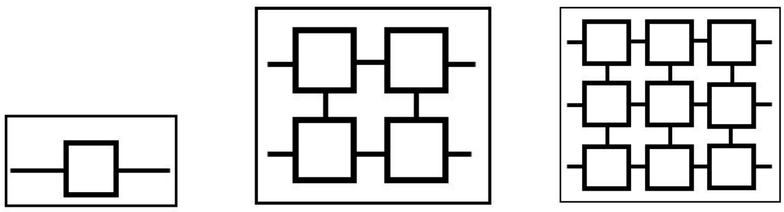
U odjeljku 1.2. imali smo primjer slikovnog niza u kojem smo trebali izbrojati komponente.
Budući da je ovo plodno područje istraživanja za učenike koji mogu izgraditi svoje slikovne nizove koristeći svoje elemente, slijedi nam sličan primjer.

Zadatak 2.2.2.a *Prikazane slike su prva i treća u nizu, a napravljene su od dužina i kvadrata. Sami sebi probajte verbalno opisati kako napraviti sliku koja će biti dio slikovnog niza sastavljena od navedena dva elementa (moraju biti prvi i treći). Koliko dužine i kvadrata je potrebno za n-tu sliku u vašem poretku? Koliko će* $\top$ *spojeva biti (prva slika ima dva spoja:* $\dashv$ *i* $\vdash$*, dok treća slika u nizu ima još* $\top$ *i* $\perp$ *spojeve.)*



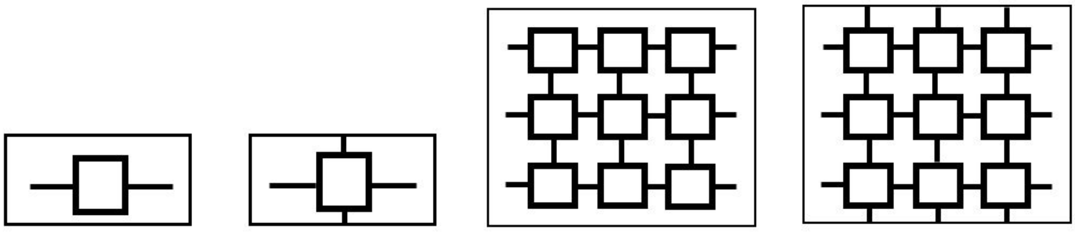
Slika 12.

Po uzoru na prvu i treću sliku konstruirat ćemo drugu da uočimo pravilnost i prebrojimo kvadrate i segmente tj. da pronađemo uzorak. Jedan od načina je prikazan u sljedećoj tablici.



broj kvadrata	1	$2{\cdot}2$	$3{\cdot}3$
broj dužina	2	$2{\cdot}3 + 2 \cdot 1$	$3{\cdot}4 + 3 \cdot 3$

Broj kvadrata jednak je kvadratu broja slika, te broj dužina u redovima jednak je umnošku broja slike u nizu i broja slike uvećane za 1, a broj dužina u stupcima jednak je umnošku broja slike i broja slike umanjene za 1 tj. ako je broj slike n $\Rightarrow n^2$ je broj kvadrata, a $n(n+1)+n(n-1)$ je broj dužina u recima i stupcima.
Vrlo je važno da se odlučimo za pravilo koje generira sve slike u nizu jer ponekad ne postoji jedinstveno pravilo određivanja prema nekoliko primjera.
Još jedno od pravila može biti: susjedni kvadrati su povezani dužinoma, te imamo vodeće i prateće dužine na lijevom i desnom kraju slike. Ovo pravilo vrijedi samo za neparno numerirane slike. Za parno numerirane slike pravilo je da imamo isti broj kvadrata kao na prethodnoj slici, ali s dužinama koje vire s vrhova i dna kvadrat (kao što je prikazano na slici 13.)



Slika 13.

Ekstremno bi pravilo bilo kada bismo dopustili da se na parnom mjestu nalazi bilo koja slika, što otežava predviđanje broja potrebnih komponenata.
Ponekad različito izražavanje pravila će dati iste slike, a time i isto brojanje. Drugi puta će biti drugačije slike, pa će se i drugačije brojati. Stoga je bitno da se utvrde pravila kako bi točno znali brojati.
Svaki način organiziranja brojanja uključuje naglašavanje određenih aspekata (a time ignoriramo druge) što dovodi do različitih izraza. Traženje različitih načina brojanja pojačava naše iskustvo jer obično možemo vidjeti više načina kako nešto prebrojati što dovodi k različitim izrazima poopćenja. Tako 'Rec što vidiš' i 'Gledaj što radiš' su zapravo načini na koji obraćamo pažnju na ono što se mijenja (detalje) i na ono što ostaje isto (struktura), stječemo iskustvo kroz specijalizaciju (radeći pažljivo pojedinačne slučajeve) kako bi ih mogli generalizirati.

2.2.3 Množenje prikazano na mreži

U ovom dijelu smo koristili dijagrame kako bi prikazali različite matematičke fenomene: geometrijske veze, brojanje koje dolazi od niza slika i sad imamo predložak za aritmetičke kalkulacije.
U prvom poglavlju predložena je korisna metoda množenja. Pr. $32 \cdot 58$ možemo zapisati kao
$(30 + 2) \cdot (60 - 2)$.
Također je dobro prikazati množenje u mreži, što je jedan korak između mentalne metode i dugačkog množenja.
Zadatak 2.2.4.a *Što je isto, a što različito kod danih računa?*

$\times$	70	5	
100	7000	500	7500
20	1400	100	1500
3	210	15	225
	8610	615	9225

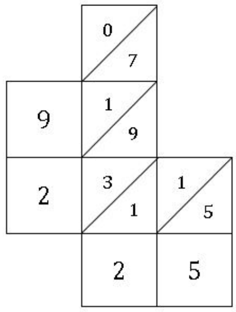
$\times$	$7x$	5	
x^2	$7x^3$	$5x^2$	$7x^3 + 5x^2$
$2x$	$14x^2$	$10x$	$14x^2 + 10x$
3	$21x$	15	$21x + 15$
	$7x^3 + 14x^2 + 21x$	$5x^2 + 10x + 15$	$7x^3 + 19x^2 + 13x + 15$

Slika 14.

Prije nego krenemo stvarati generalizacije, trebamo napraviti sami jedan primjer kako bi otkrili ili provjerili strukturu. Primijetite da dolje desna ćelija služi kao provjera aritmetike jer se može izračunati na dva različita načina. Ako u desnoj tablici x zamjenimo brojem 10 dobit ćemo lijevu tablicu.
Općenito načelo je da se svaki zbroj redaka i zbroj stupaca pridodaje istom konačnom rješenju. Računi

organizirani u tablice nam omogućuju lakše praćenje onoga što treba napraviti, ali je korisno imati 'priču' da kada se ponovno budemo susreli s tablicama da znamo što činiti. Ovo tablično proširenje mentalne metode formira međukorak između mentalne metode i dugačkog množenja, ali zadržava potenciju na 10 unutar ćelija.
Učenike možemo upoznati s Gelosian tablicom množenja koja izostavlja potenciju na 10.
Zadatak 2.2.4.b *Metoda množenja prikazana u ovom primjeru naziva se Galosian množenje. Po čemu su iste, a po čemu se razlikuju ova metoda i metoda iz zadatka* 2.2.4.*a?*

		7	5	×
		7	5	1
	07	14	10	2
9	19	21	15	3
2	31	15		
2	5			



Slika 15.

Množitelj 123 je pomaknut u desno kako bi bilo dovoljno mjesta za odgovor jer se Gelosianovo množenje pomiče od desnog gore ruba prema lijevom dolje.
Dvoznamenkasti brojevi 07, 19, 31, i 15 su dijagonalne sume unutarnjih ćelija od podebljanog kvadrata, a jednoznamenkasti brojevi su dobiveni dijagonalnim dopunjavanjem, dodjelom znamenke dijagonalno, kako je prikazano u tablici desno.

	$7x$	5	
	$7x^3$	$5x^2$	$1x^2$
$7x^3$	$14x^2$	$10x$	$2x$
$19x^2$	$21x$	15	3
$31x$	15		

Slika 16.

Ovo dijagonalno dopunjavanje funkcionira samo kada je baza koja se koristi za brojeve ista bazi kao kod ćelija (baza 10). Stoga prelazimo na algebru, te zadnja faza u 'dijagonalizaciji' se ne primjenjuje. Ali ostatak funkcionira u redu, sve dok se unosi u ćeliji tretiraju kao koeficijenti od potenciranja na x, tablica bilježi sve produkte kao koeficijent potenciranja na x.

$(7x + 5)(x^2 + 2x + 3) = 7x^3 + 19^2 + 31x + 15$

Različiti stupanjevi pouzdanosti s različitim prikazom igra veliku ulogu jer kada je sva pažnja usmjerena na detalje tada smo manje svjesni mogućih varijacija i generalizacije. Svaki pokušaj generalizacije, svaka svjesnost mogućih varijacija uključuje uviđanje značajki, onih koje se mogu promijeniti i onih koje ostaju iste, te detektiraju vezu između njih.

3 Primjeri generalizacije

3.1 Palindrom

Palindrom

Broj kao što je 12321 *nazivamo palindrom jer čitanjem broja obrnutim redoslijedom (od iza) i čitanjem pravilnim redom (od naprijed) dobijemo isti broj. Moj prijatelj tvrdi da su svi palindromi s* 4 *znamenke djeljivi s* 11*. Je li to istina?*

Za početak:

- Želimi pronaći neki palindrom s 4 znamenke.
- Vjerujemo li u danu tvrdnju prijatelja?
- Što želimo pokazati?

Jedini razuman način za početka je specijalizacija. Želimo dobiti osjećaj za brojeve koje promatramo. Navedimo neke od palindroma.

$747, 88, 6, \ldots$

Zadatak se odnosi na četveroznamenkaste palindrome, kao što su:

1221, 3003, 6996, 7557,...

Što želimo? Želimo pokazati da su svi takvi palindromi djeljivi s 11.

Pokušavajući s konkretnim brojevima pogledamo da li bi tvrdnja prijateja mogla biti točna. No, ne možmo biti u potpunosti sigurni u njezinu točnost na temelju konkretnih slučajeva (specijalizacije) osim ako ćemo testirati za sve četveroznamenkaste palindrome (oko njih 90). Bolje je pokušati dobiti neke od ideja o uzorku.

Pokušajmo nekoliko konkretnih slučajeva:

$1221 : 11 = 111$

$3003 : 11 = 273$

$6996 : 11 = 636$

$7557 : 11 = 687$

Ali ne vidimo neki očiti uzorak u njima. To nas dovodi do važne točke u specijalizaciji. Odabir slučajng primjera je dobar način za dobivanje ideje o tome što je uključeno u zadatak i je li naša pretpostavka točna. No, kada samo u potrazi za uzorkom uspjeh je vjerojatniji ako se specijalizacija vrši sustavno.

Kako možemo biti sustavni u ovom slučaju?

- Koji je najmanji četveroznamenkasti palindrom?
- Koji je sljedeći najmanji?
- Kako se jedan palindrom može promijeniti u drugi?

Jedan način je započeti s najmanjim četveroznamenkastim palindromom (to je 1001) i zatim ih slagati po veličini:

$1001, 1111, 1221, 1331, \ldots$

Provjera prijateljeve izjave:

$1001 : 11 = 91$

$1111 : 11 = 101$

$1221 : 11 = 111$

$1331 : 11 = 121$

To ne samo da podržava izjavu prijatelja već nam sugerira puno više. Primijetimo da palindromi svaki put rastu za 110, te količnik svaki put raste za 10.
Sada vidimo zašto je tvrdnja prijatelja istinita. Razlika između uzastopnih četveroznamenkastih palindroma je 110. Najmanji takav palindrom 1001 je djeljiv s 11, kao i 110. Budući da su svi ostali palindromi dobiveni iz 1001 dodavanjem 110 tada su svi četveroznamenkasti palindromi djeljivi s 11. Izjava je dokazana.
Ili nije? Je li rješenje pokriva sve moguće slučajeve tj. sve četveroznamenkaste palindrome? Pogledajmo bolje. Ako se svi palindromi mogu konstruirati dodajući 110 broju 1001, onda će svi tako dobiveni brojevi imati 1 kao znamenku jedinice. No, nisu. Npr. 7557 znamenka jedinice je 7. Što je pošlo po krivu? Specijalizacija je dovela do uzorka na kojem smo temeljili rješenje (razlika uzastopnih palindroma je 110), ali ovaj uzorak ne odgovara za sve palindrome jer smo pronašli jedan primjer koji ne odgovara tom uzorku (svi palindromi ne završavaju s 1). Problem leži u prebrzom zaključku, na temelju tri razlike. No specijalizacija nam opet može pomoći ovaj puta za označavanje slabosti u uzorku.
Pogledajmo danu tablicu:

Palindromi	1881	1991	2002	2112	2222	2332
Razlika	110	11	110	110	110	

Ovaj puta ćemo nastaviti opreznije, u raspoloženju nevjerice. Čini se da se uzorak uzastopnih palindroma razlikuje za 110, osim kada se znamenke tisućice promjene tada je razlika 11. Ta specijalizacija nam nameće da je to osnovni uzorak, daje uvid da uzorak može biti točan. Sada tražimo opći razlog zašto novi uzorak vrijedi.
Uzastopni palindromi koji imaju istu znamenku tisućice moraju imati istu znamenku jedinice, da bi bio palindrom. Tako se brojevi razlikuju samo u trećoj i drugoj znamenki, gdje su obje veće za 1. Dakle, razlika je 110. Uzastopni palindromi koji se razlikuju u znamenki tisućice nastaju dodavanjem 1001 (za povećanje tisućice i jedinice) i oduzimanjem 990 (kako bi smanjili drugu i treću znamenku s 9 na 0). $1001 - 990 = 11$.
U oba slučaja razlika je djeljiva s 11. Ako je najmanji četveroznamenkasti palindrom djeljiv s 11, onda su svi.
Pogledajmo gdje je sve korištena specijalizacija:

- Pomogla nam je da shvatimo pitanje.
- Vodila nas da otkrijemo formu četveroznamenkastih palindroma.
- Da pogledamo je li prijateljeva tvrdnja može biti točna.
- Sustavna specijalizacija nam je pomogla da nađemo uzorak i dobijemo ideju zašto je tvrdnja točna.
- Ispitivanje, je li uzorak ispravan ili nije.

Argument dan u rješenju nipošto nije najelegantniji, ali naš cilj nije elegancija. Prvi pokušaj je rijetko jednak riješenu iz knjige.
Ako smo vještiji i sigurni sa simbolima tada ćemo za proizvoljan broj koristiti simbol, takvim pristupom možemo doći brže do rješenja. Na primjer, možemo primijetiti da svaki četveroznamenkasti palindrom ima oblik $\overline{ABBA}$ gdje su A i B znamenke od 0 do 9. Takav broj možemo zapisati

$$
\begin{aligned}
1000A + 100B + 10B + A &= (1000 + 1) \cdot A + (100 + 1) \cdot B \\
&= 1001A + 110B \\
&= 11 \cdot 91A + 11 \cdot 10B \\
&= 11 \cdot (91A + 10B)
\end{aligned}
$$

Ukoliko učenici imaju problema s praćenjem ovog slučaja mogu ga specijalizirati i pokušati uvesti brojeve umjesto slova (npr. $A = 3$ I $B = 4$). Mogu koristiti konkretne vrijednosti za A i B dok ne dobiju osjećaj za uzorak izražen u simbolima. Elegantno rješenje kao što je prikazano nema znakova specijalizacije jer je prikazano pomoću simbola. Dan je opći uzorak koji se može primijeniti za sve četveroznamenkaste palindrome. Međutim, kako bi došli do tog uzorka moramo biti dovoljno vješti s oznakama koje smo uveli (četveroznamenkasti palindromi s decimalnim zapisom slova A i B). Specijalizacija nam pomaže da razumijemo pitanje (istražimo o čemu je pitanje), te stvara osjećaj sigurnosti i opuštenosti u nepoznatim situacijama.

3.2 Krpanje

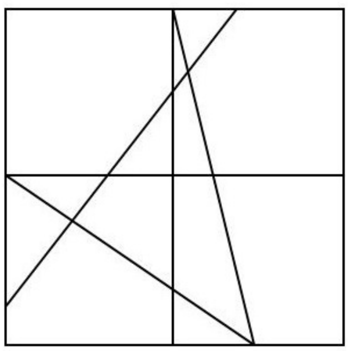
Krpanje

Nacrtaj kvadrat i nekoliko crta u bilo kojem rasporedu tako da crte prolaze preko tog kvadrata i dijele ga na nekoliko područja. Zadatak je obojiti ta područja tako da susjedna područja budu obojana različitom bojom. Područja koja imaju zajedničku točku ne smatra se susjednim. Koliko nam je najmanje boja potrebno da bi obojili takav kvadrat.

Koraci:

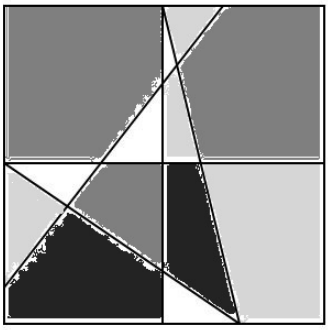
- Razjasniti pitanje specijalizirajući zadatak.
- Što znamo? Kako je zadatak konstruiran?
- Što želimo pronaći?
- Moramo biti sustavni.

Što nas pita pitanje? Pokušajmo započeti primjerom (specijalizacija) kako bi vidjeli što se događa.



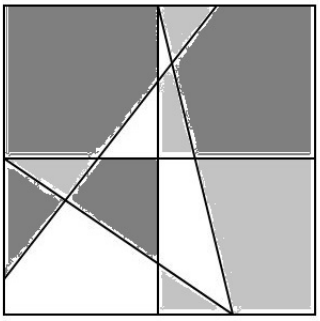
Slika 17.

Ovih pet crta formira 13 područja. Znamo da moramo obojiti susjedna područja različitom bojom. Ovdje je jedan način bojanja s četiri boje:



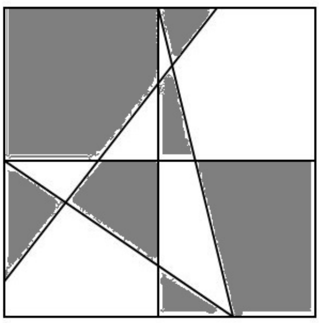
Slika 18.

Želimo pronaći minimalan broj boja potrebnih kako bi obojili dan kvadrat. Je li četiri boje minimalan broj boja koji nam je potreban za bojanje kvadrata. Pokušajmo s tri boje.



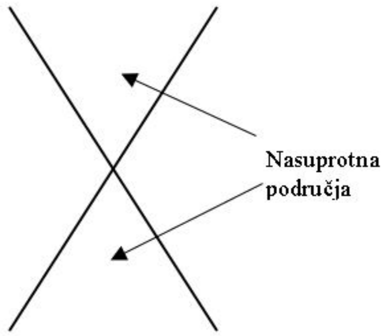
Slika 19.

Uspjeh! Pokušajmo ponovno koristeći samo dvije boje.



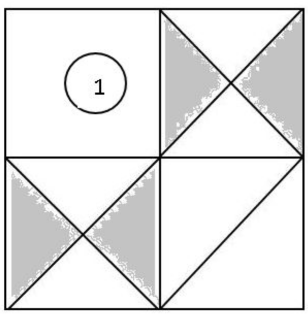
Slika 20.

Opet smo uspjeli. Očito je da jedna boja nije dovoljna, pa zaključujemo da je potrebno najmanje dvije boje. Kako smo bojali područja primijetili smo da 'nasuprotna' područja bojamo istom bojom (generalizacija).



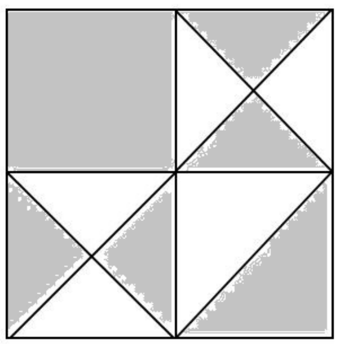
Slika 21.

Hoće li dvije boje uvijek biti dovoljne? Provjerimo na sljedećem primjeru, upotrijebit ćemo dvije boje i iskoristiti 'nasuprotno' pravilo (opet specijalizacija).



Slika 22.

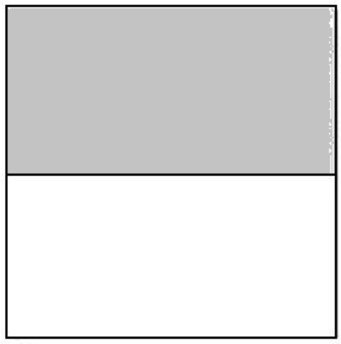
AHA! 'Nasuprotno' pravilo ne funkcionira. Kada su siva područja obojana 'nasuprotnim' pravilom, područje (1) ne može biti obojano ni sivo ni bijelo. Ostala područja imaju isti problem. Ili trebamo više boja ili odustati od 'nasuprotnog' pravila. Koji put trebamo slijediti?
Pokušajmo ponovno upotrijebiti dvije boje, ali izostaviti 'nasuprotno' pravilo.



Slika 23.

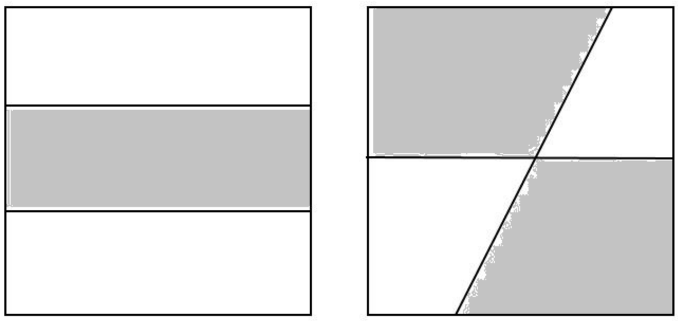
Kako nam je ovaj pokušaj bio uspješan primjećujemo da kada obojimo jedno područje lako je obojati ostatak. Području susjednom od obojenog područja treba biti dodijeljena druga boja - 'susjedno' pravilo. Odustali smo od 'nasuprotnog' pravila, ali sada pretpostavljamo da svaki raspored područja može biti obojano s najmanje dvije boje (generaliziranje onoga što bi mogla biti istina).
U ovom trenutku nemamo puno dokaza za tu pretpostavku. Kako se možemo uvjeriti da ta pretpostavka

vrijedi? Sustavnom specijalizacijom.
Jedna crta:



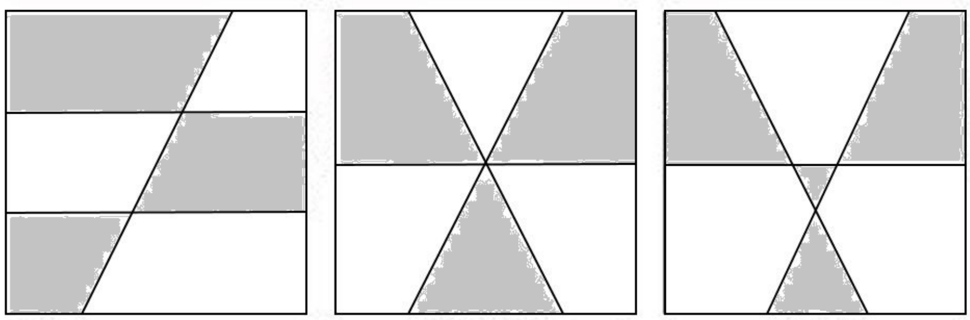
Slika 24.

Dvije crte:



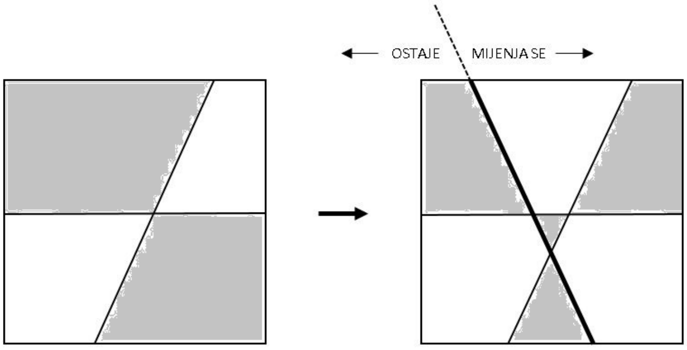
Slika 25.

Tri crte:



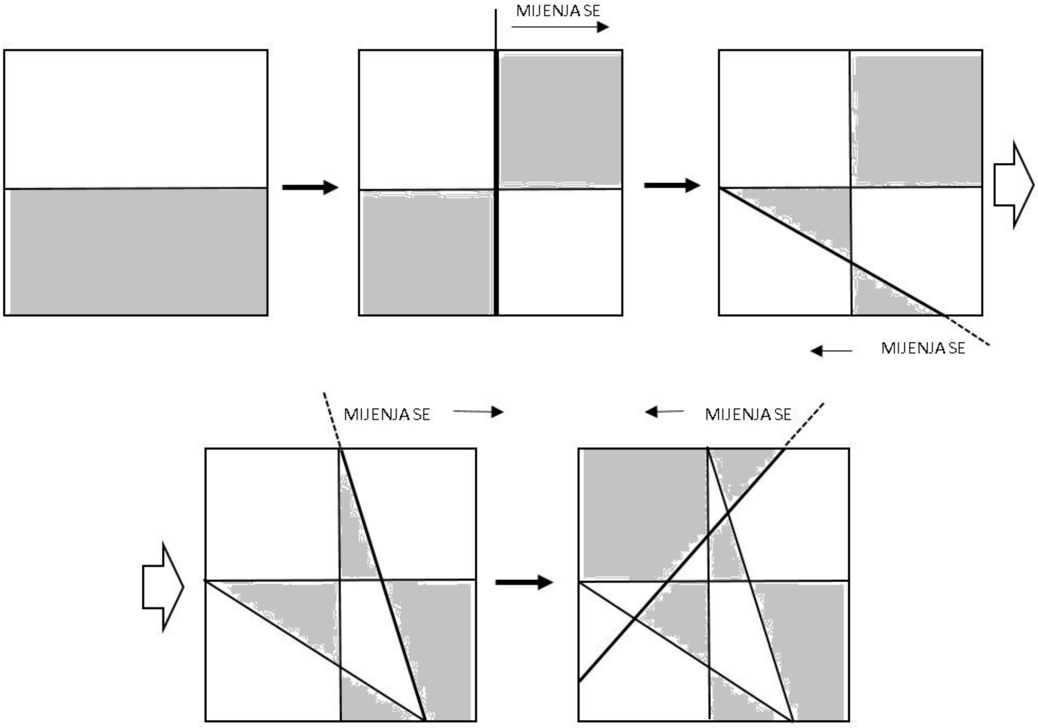
Slika 26.

Kako smo radili sustavno, gledajući što se događa kada dodamo novu crtu uočili smo zašto su nam dvije boje uvijek dovoljne. Kada dodamo novu crtu neka stara područja podijeljena su na dva dijela. Tada jedna strana (nastala dodavanjem nove crte) ostaje isto obojana, dok druga strana (nove crte) mora promijeniti boje područja. Pogledajmo kako to funkcionira s tri crte:



Slika 27.

Ponovno provjerimo. Testirajmo metodu pokušavajući obojiti prvi primjer.



Slika 28.

Ova metoda funkcionira na ovom primjeru. Cijeli kvadrat je ispravno obojan jer

- svako područje pored nove crte ispravno je obojano jer su susjedna područja obojana drugom bojom u odnosu na prethodno bojanje.
- susjedna područja uz nove crte su također drugačije obojana.

Tako je cijeli kvadrat s dobnim novim crtama ispravno obojan.

Je li to bila samo sreća da je naš novi način dao isto bojanje kao pravi pokušaj? Što bi se dogodilo kada bi crte dodali drukčijim redoslijedom? Bi li to dalo drugačije bojanje? Što ako ravne crte zamijenimo zakrivljenim? Pogledajmo neke od navedenih pitanja jer je to samo postavljenje rezultata u širem kontekstu da ga razumijemo u potpunosti.
Druga tehnika za razumijevanje cijelog rješenja je da dobro pogledamo što smo učinili. Bilješke koje

vodimo tokom rješavanja problema su vrlo bitne jer nam mogu pomoći. Izuzetno je važno pogledati što smo sami napravili. Kada su bilješke zapisane možemo ih kritički ispitati na način koji nije moguć ako ih pamtimo samo u glavi jer puno toga što smo radili tokom rješavanja problema zaboravimo.
Pogledajmo gdje smo koristili specijalizaciju:

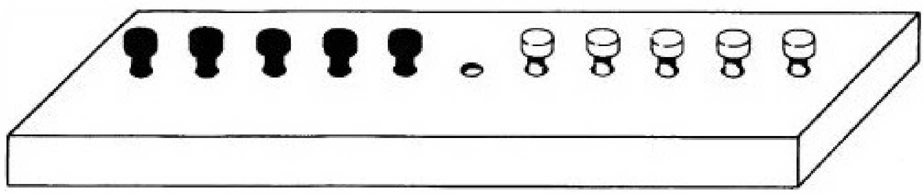
- nasumični odabir uzorka, kako bi dobili osjećaj za dani problem
- sustavna specijalizacija, kako bi pripremili područje za generalizaciju
- testiranje generalizacije

Rješenje također prikazuje nekoliko načina kako koristiti generalizaciju. Generaliziranje specijalnih rezultata vodi nas do pretpostavke da svako područje može biti obojano s dvije različite boje. Također, nas generaliziranje vodi do 'nasuprotnog' pravila (koje je bilo netočno) i do 'susjednog' pravila (koje se pokazalo točnim), a na kraju smo tehniku bojanja temeljili na uvođenju crte po crte.

3.3 Klinovi

Klinovi

Deset klinova od dvije boje postavljenja su u nizu od 11 rupa kao što je prikazano. Želimo zamijeniti crne i bijele klinove, ali je dopušteno samo da se klinovi pomaknu u susjednu rupu ili da preskoče jedan klin. Je li moguće napraviti tu razmjenu? Koliki je najmanji broj poteza?



Slika 30. (vidi [2,str. 52])

Prvo ćemo pokušati napraviti razmjenu jer želimo saznati je li to moguće. Nakon par pokušaja imamo na umu nekoliko pravila koja smo uočili, ali moramo biti sigurni je li ono točno, isprobavajući ga. Možemo uvesti pravilo da nam se klinovi ne mogu kretati unatrag. Strategija koja čuva jednu boju zajedno neće raditi jer dobijemo prostor koji ne možemo iskoristiti. Pokušajmo specijalizirati slučaj. Što bi bila specijalizacija u ovom kontekstu? Pokušajmo krenuti s manje klinova. S jednim klinom sa svake strane je lako. Slijedimo vlastite upute i sustavni bilježimo što radimo.
Označimo crni klin s C, a bijeli s B i praznu rupu označit ćemo s __.

	Početak	C __ B
klizanje	C ide desno	__ C B
preskok	B ide lijevo	B C __
klizanje	C ide desno	B __ C

Sada pokušajmo s četiri klina.

	Početak	$C\ C\ \_\ B\ B$
klizanje	C ide desno	$C\ \_\ C\ B\ B$
preskok	B ide lijevo	$C\ B\ C\ \_\ B$
klizanje	C ide desno	$C\ B\ \_\ C\ B$
preskok	B ide lijevo	$B\ C\ C\ B\ \_$

Strategija koju smo sad koristili ostavlja dva klina iste boje jedan pored drugog i tada smo blokirani. AHA! Naša strategija mora imati veze s održavanjem različitih boja tj. susjedni klinovi moraju biti različite boje (pretpostavka). Nakon par pokušaja otkrijemo kako slijedi to načelo i kako obavljamo razmjenu s dva klina na svakoj strani.

1	$C\ C\ \_\ B\ B$
2	$C\ \_\ C\ B\ B$
3	$C\ B\ C\ \_\ B$
4	$C\ B\ C\ B\ \_$
5	$C\ B\ \_\ B\ C$
6	$\_\ B\ C\ B\ C$
7	$B\ \_\ C\ B\ C$
8	$B\ B\ C\ \_\ C$
9	$B\ B\ \_\ C\ C$

Sad možemo probati s više klinova i vidjeti da li isti princip radi. Možemo napraviti razmjenu, iako još uvijek nismo sigurni u našu metodu. Trebamo ju zapisati i pažljivo je provjeriti.

Napravili smo dovoljno primjera da vidimo zašto se to događa. Sada se možemo pitati koliko je poteza potrebno.
Napravimo tablicu. Izbrojimo koliko je potrebno poteza da završimo s prebacivanjem klinova.

Broj klinova na svakoj strani	Minimalni broj poteza
1	3
2	8
3	15
4	24
5	35

Dakle, minimalni broj poteza za 5 klinova na svakoj strani je 35 poteza, ali želimo znati minimalan broj poteza za bilo koji broj klinova (na jednoj strani). Gledajući uzorak broj poteza vodi nas do pretpostavke: broj poteza uvijek za jedan manji od kvadrata broja klinova (na jednoj strani) $+1$. Zašto baš kvadrata od $(klin+1)$? 6 klinova treba dati $(7 \cdot 7) - 1$ kao minimalan broj poteza.
Možemo izraziti generalizaciju:

$$broj\ poteza = (k+1)^2 - 1$$

gdje je k broj klinova na svakoj strani.
Zanima nas odgovor na pitanje 'Zašto?' Želimo objasniti uzorak koji smo našli, ali kako možemo saznati više? Pokušajmo sa specijalizacijom. Pogledajmo pažljivije poteze. Imamo dvije različite vrste poteza: klizanje i preskok. Potražimo uzorak u svakom od njih tj. vratimo se na početak i prebrojimo klizanje i preskoke (odvojeno).

Broj klinova na svakoj strani	Broj klizanja	Broj skokova
1	2	1
2	4	4
3	6	9
4	8	16
5	10	25

AHA! Pogledajmo. Broj skokova je kvadrat broja klinova na svakoj strani, a broj klizanja jednak je ukupnom broju klinova. Ali zašto? Ne možemo biti u potpunosti zadovoljni uzorkom (koji je najuvjerljiviji, ali još uvijek je pretpostavka) jer trebamo otkriti vezu između pravila i brojeva.
Ako pogledamo bolje vidimo da broj klizanja plus broj skokova mora biti jednak broju mjesta (pozicija) koje klinovi moraju prijeći.

S C __ B	svaki klin se mora pomaknuti 2 mjesta, što ukupno daje 4 mjesta.
S C C __ B B	svaki klin se mora pomaknuti 3 mjesta, što ukupno daje 12 mjesta.
S C C C __ B B B	svaki klin se mora pomaknuti 4 mjesta, što ukupno daje 24 mjesta.

Sada je uzorak jasniji. Ako je broj klinova sa svake strane k tada se svaki klin pomakne $(k+1)$ mjesta. Prema tome je ukupno

$2 \cdot k \cdot (k+1)$

mjesta. Riješili smo i provjerili pomoćno pitanje, ali kakve veze ima s pravim pitanjem?
Koliko imamo skokova? Svaki klin mora proći sve klinove druge boje. Svaki puta kada se to dogodi potreban je skok. Tako svaki bijel klin mora preskočiti ili biti preskočen od strane svakog crnog klina, tako da je svaki bijeli klin ima k skokova, kao i crni klin. Tada sveukupno imamo $k \cdot k$ skokova (što smo uočili u posljednjoj tablici).
Što sve znamo?

$Ukupan\ broj\ mjesta = 2 \cdot k \cdot (k+1)$

$Ukupan\ broj\ skokova = klin \cdot klin$

Svaki skok se broji kao dva mjesta.

$$\begin{aligned} Ukupan\ broj\ mjesta &= broj\ klizanja + 2 \cdot broj\ skokova \\ Broj\ klizanja &= ukupan\ broj\ mjesta - 2 \cdot broj\ skokova \\ &= 2 \cdot k \cdot (k+1) - 2 \cdot k^2 \\ &= 2 \cdot k \end{aligned}$$

Sada možemo pronaći ukupan broj poteza

$$\begin{aligned} Ukupan\ broj\ poteza &= skokovi + klizanje \\ &= k^2 + 2 \cdot k \\ &= k \cdot (k+2) \end{aligned}$$

Ključna ideja nije bila zadovoljavajuća za uzorak, tražeći razlog zašto bi pretpostavka mogla biti točna dovelo nas je do rastavljanja ideje na manje dijelove (klizanje i skokove). Ključni trenutak je bio kada smo shvatili koliko smo često išli dalje bez opreza i preciznosti. Što bi u budućnosti trebali raditi.
Ako pogledamo rješenje, otkrivamo da je pretpostavka o broja poteza započela s

$(k+1)^2 - 1$

ali je završila s

$k \cdot (k+2)$

Dakle,

$$\begin{aligned}(k+1)^2 - 1 &= (k+1) \cdot (k+1) - 1 \\ &= k \cdot k + 2 \cdot k\end{aligned}$$

nakon svega ta dva izraza su jednaka. Nije lako primijetiti takve detalje, stoga je bitno da uzmemo vremena za temeljit pregled.

Ako provjerimo rješenje vidjet ćemo da nismo jasno izdvojili zašto ovaj izračun daje minimalan broj poteza. Niti smo razmišljali o odnosu između naše strategije i minimalnog broja poteza. Budući da je ukupan broj mjesta fiksan i klinovi se ne kreću unatrag broj poteza će biti minimalan, kada je broj skokova maksimalan. Jedini način da se poveća broj skokova je kada bi klinovi preskakali klinove iste boje, ali ta razmijene nam ne bi dala uspjeh.

Zaključak

Cilj ovog diploskog rada je potaknuti čitatelje da sudjeluju u zadacima i time razvijaju matematičko mišljenje, te nastavnicima ponuditi ideju za poticanjem generalizacije u nastavi. Jedna od pretpostavki u ovom radu je da svatko više uživa u razvijanju vlastitih zadataka, nego u obavljanju rutinskih zadataka koji ne nude mogućnost vlastitog izbora ili inicijative. Uočavanje i otkrivanje uzoraka je dio ljudske intuicije tj. dio ljudske prirode.

Stoga je bitno da učitelji imaju ideju o mogućnostima koje im nude zadaci ili nastavne jedinice. Ohrabrujući učenike da konstruiraju vlastite primjere, kako bi pojačali njihovu kreativnost te kako bi postali svjesni raspona mogućnosti koje mogu birati, da bi razvili smisao za generalizaciju. Vrlo je bitno učenicima pružiti izazov, ali da taj izazov bude izvediv, no ne i prelagan. Važno je učenicima podići svijest o opsegu generalizacije i snazi njezinog korištenja, ne samo u algebri, nego u svim područjima matematike. Učenici će postati vještiji u objašnjavanju i opravdavanju svog mišljenja, a takva matematika će imati smisla, kao što bi ona zapravo i trebala biti za učenike - razumna i smislena. Ukoliko nastavnici nisu svjesni njezine prisutnosti i važnosti da učenici rade na izražavanju vlastite generalizacije, tada zanemaruju razvijanje matematičkog mišljenja, jer je generalizacija važan korak u njegovom razvijanju . Svjesnost te činjenice i mogućnosti da se uklopi u nastavu je vrlo važan cilj matematike.

Sažetak

Cilj ovog diplomskog rada je potaknuti čitatelje da sudjeluju u zadacima i time razvijaju matematičko mišljenje. Prolazeći kroz dane zadatke namijenjene učenicima i nastavnicima, upoznajemo se s generalizacijom. Ona omogućuje da učenici tokom rješavanja zadataka, razmišljaju o sebi na novi način i time nauče uspješnije prevladavati poteškoće u matematici i oslanjati se na vještine koje imaju svi učenici. U posljednjem dijelu rada, nalaze se detaljno riješeni zadaci, koji nam daju smjernice kako razmišljati kada zapnemo u zadatku.

Generalization

Summary The purpose of this thesis is to encourage readers to participate, problem solving and the develop mathematical thinking. Going through the given tasks designed for students and teachers with witch we are introduced to generalization, enables students to think of themselves, in new way, while solving tasks and by doing so, they are learning how to successfully overcome difficulties in mathematics and how to rely on the skills known to all students. In the last part of the thesis, there are step by step solutions which are used as guidelines on how to think when stuck on a problem.

Keywords: Generalization, specialization, pattern

Literatura

[1] L. BURTON, J. MASON, K. STACEY *Thinking Mathematically*, Pearson Education, Harlow, 2010.

[2] J. GRATIM, S. JONSTON-WILDER, J. MASON *Developing Thinking in Algebra*, Paul Chapman Publiishing, London, 2005.

[3] Z. KURNIK, *Generalizacija*, Matematika i škola, 4 (2000), 147-154.

[4] S. VAROŠANEC, *Neke metode rješavanja problemskih zadataka*, Poučak, 1 (2002), 32-38.

Životopis

Zovem se Josipa Tataj i dolazim iz Čepina. Rođena sam 07. ožujka 1993. godine u Osijeku. Osnovnu školu pohađala sam u OŠ "Vladimir Nazor" u Čepinu gdje se stvorila ljubav prema matemtici. Godine 2007. upisala sam Opću gimnaziju u Osijeku gdje sam odlučila da želim podučavati djecu. Završetkom srednje škole, upisala sam Nastavnički studi matematike i informatike na Odjelu za matematiku Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijek. Od 2001. do 2017. sam trenirala košarku u Košarkaškom klubu "Mursa".