Neeuklidska geometrija

Lukanović, Ivana

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Ivana Lukanović

Neeuklidska geometrija

Diplomski rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Ivana Lukanović

Neeuklidska geometrija

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2017.

Sadržaj

Uvod

Cilj ovog rada je dati pregled hiperboličke geometrije i nekih njenih rezultata te usporedbu istih s već dobro poznatim rezultatima euklidske geometrije.
U prvom poglavlju govori se o spornom postulatu o paralelama i pokušajima njegova dokazivanja kroz povijest. Navode se i neki zanimljivi rezultati proizašli iz samih tih pokušaja dokazivanja. Sami kraj ovog poglavlja daje uvid u nastanak neeuklidskih geometrija.

Nakon povijesnog pregleda, drugo i posljednje poglavlje, bavi se jednom posebnom vrstom neeuklidske geometrije, hiperboličkom geometrijom. U ovom poglavlju definira se pravac u novoj geometriji te se objašnjava svojstvo paralelnosti dva pravca. Za razliku od euklidske geometrije, ovdje je moguće da pravci budu i hiperparaleni, što je također detaljnije objašnjeno u ovom poglavlju. Vezano za paralelne pravce uvodi se i funkcija Lobačevskog, kao funkcija kuta paralelnosti. Kao posebnosti ove geometrije, prikazano je da je zbroj kutova u trokutu manji od 180° te da postoji trokut najveće površine. Navode se i tri vrste krivulja te neka njihova svojstva.

Veći dio ovog poglavlja bavi se trigonometrijom u hiperboličkoj geometriji. Najprije je izvedena jednadžba granične krivulje pomoću koje dolazimo do nekih trigonometrijskih formula. Prikazana su i pravila za sinus i kosinus te je dan dokaz osnovne jednadžbe hiperboličke geometrije $\operatorname{th} \alpha = \cos \alpha$, koja nas vodi do jednadžbe kuta paralelnosti. Njen značaj je u tome što pokazuje da je euklidska geometrija zapravo poseban slučaj hiperboličke geometerije.

1 Povijesni pregled

1.1 Pokušaji dokazivanja postulata o paralelama

Starogrčki matematičar Euklid (330. pr. Kr. - 275. pr. Kr.) bio je prvi koji je prikupio sva do tada poznata znanja o geometriji te je na temelju njih sustavno izgradio geometrijski sustav u svom djelu *Elementi.* Upravo zbog ovog deduktivnog načina izlaganja geometrije, gdje polazeći od aksioma logički navodi i dokazuje poučke, *Elementi* postaju glavnim izvorom u proučavanju geometrije i stoljećima nakon Euklida. Pri pisanju *Elemenata* Euklid se u svojim tezama oslanja na tvrdnje koje smatra očiglednima. Navodi pet postulata od kojih su četiri intuitivna. Posebno zanimanje izazvao je peti Euklidov postulat koji tvrdi: "Neka se postulira da, ako pravac koji siječe druga dva pravca tako da je zbroj unutrašnjih kutova s iste strane tog pravca manji od dva prava kuta, onda se ti pravci dovoljno produženi sijeku s one strane pravca gdje je zbroj kutova manji od dva prava kuta." Zbog same neintuitivnosti ovog postulata brojni matematičari su kroz povijest pokušali pokazati da se on ne može smatrati postulatom već da je zapravo teorem. U pokušajima osporavanja petog postulata korištene su razne metode: kontradikcija, pokušaj dokazivanja postulata pomoću preostalih Euklidovih postulata i tvrdnji te čak i dokazivanje tvrdnji ekvivalentnih ovom postulatu. Neki su matematičari čak bili uvjereni da su uspjeli dokazati da je Euklid bio u krivu ne svrstavši ovaj postulat među teoreme, no pomnijim proučavanjem njihovih rezultata uviđa se da su uvijek u pitanju bili sitni logički previdi koje kad uzmemo u obzir dovode do ekvivalentnosti njihove tvrdnje s petim postulatom. Iako ovi pokušaji nisu urodili očekivanim plodom doveli su do zanimljivih rezultata ekvivalentnih Euklidovom postulatu te naposljetku i do otkrića novih geometrija.

1.2 Playfairov aksiom

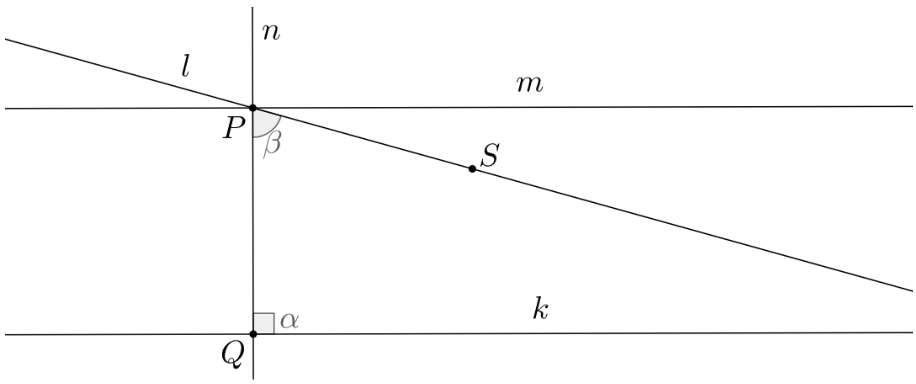
Od mnogobrojnih zamjena za peti postulat, najpoznatiji je Playfairov aksiom. Ovaj oblik postulata je i najzastupljeniji u školskim udžbenicima. Iako ga je u 5. st. iskazao Proklos, a i drugi koriste ovaj iskaz, zasluge se pripisuju škotskom matematičaru Johnu Playfairu (1748. - 1819.).

Aksiom 1. *Kroz danu točku izvan danog pravca može se povući točno jedan pravac paralelan danom pravcu.*

Pokažimo da su Euklidov peti postulat i Playfairov aksiom ekvivalentne tvrdnje. U tu svrhu treba pokazati da Euklidov peti postulat i tvrdnje apsolutne geometrije (sva teorija izvedena iz Euklidovih postulata bez petog postulata) impliciraju Playfairov postulat, te da Playfairov postulat s tvrdnjama apsolutne geometrije implicira peti postulat.

Teorem 1. *a) Euklidov peti postulat i tvrdnje apsolutne geometrije impliciraju Playfairov postulat.*
b) Playfairov postulat i tvrdnje apsolutne geometrije impliciraju Euklidov peti postulat.

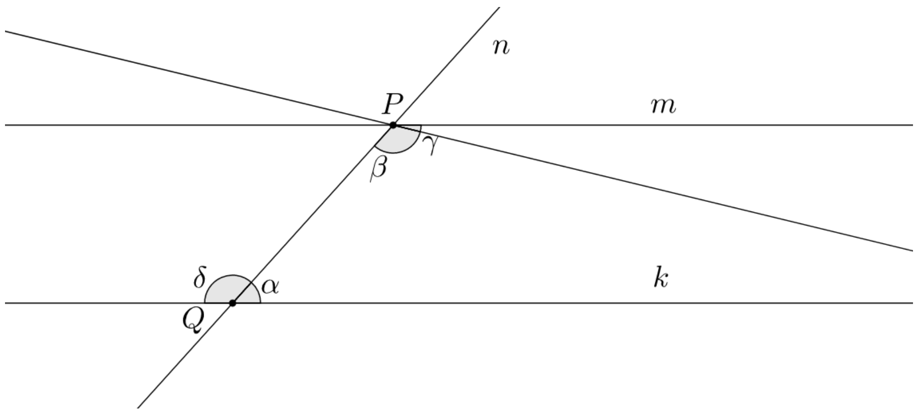
Dokaz. a) Neka su zadani pravac k i točka P izvan tog pravca. Konstruirajmo okomicu n iz točke P na pravac k. Okomicu je moguće konstruirati prema Propoziciji 11 Euklidovih Elemenata. Označimo točku presjeka pravaca n i k s Q. U točki P položimo okomicu m na pravac n.



Slika 1: Dokaz 1 a)

Uočimo da se pravci m i k ne sijeku jer ako bi se sjekli u nekoj točki S, zbroj dva kuta △PQS bi bio 180° što ne može biti jer je prema Propoziciji 17. zbroj bilo koja dva kuta u trokutu manji od 180°.
Da bismo dokazali Playfairov aksiom preostaje još vidjeti da je m jedini takav pravac. Pretpostavimo suprotno. Neka je pravac l takav da prolazi kroz točku P i ne siječe pravac k i neka je S neka točka na pravcu l. Kut $\beta = \angle SPQ < 90°$ pa se prema Euklidovom petom postulatu pravci l i k sijeku. Ovo je kontradikcija s pretpostavkom te je m jedini ovakav pravac čime je dokazan Playfairov aksiom.
b) Neka su dani pravci k i l i neka njih presijeca pravac n u točkama P i Q zatvarajući s njima unutrašnje kutove α i β takve da je $\alpha + \beta < 180°$. Konstruirajmo

pravac m koji prolazi točkom P tako da s pravcem n zatvara kut $\gamma = 180° - \alpha$. Ovo je moguće konstruirati prema Propoziciji 23. Euklidovih *Elemenata* koja kaže da je na danom pravcu u danoj točki moguće konstruirati kut koji je jednak danom kutu.



Slika 2: Dokaz 1 b)

Uočimo da je kut $\delta = \gamma = 180° - \alpha$ suplementaran kut kutu α. Propozicija 27.*Elemenata* tvrdi da, ako pravac siječe druga dva pravca tvoreći s njima jednake unutarnje izmjenične kutove, onda su ta dva pravca paralelna. Prema tome pravac m je paralelan pravcu k. Pravci k i m su različiti pravci jer $\beta < 180° - \alpha$ i $\gamma = 180° - \alpha \Rightarrow \beta < \gamma$ pa su l i m različiti pravci. Prema Playfairovu postulatu koji kaže da postoji jedan i samo jedan pravac koji prolazi kroz P i paralelan je sa m slijedi da pravac l siječe m. Označimo točku presjeka m i l sa R. Ako se točka R nalazi sa suprotne strane od α i β pravca p, onda bi kut β bio vanjski kut $\triangle PQR$. Propozicija 16. iz Euklidovih *Elemenata*, koja kaže da je vanjski kut trokuta veći od dva nesusjedna unutarnja kuta, povlači da je $\beta > \gamma$, što nije moguće. Prema tome pravci m i l sijeku se s one strane pravca p gdje su α i β unutarnji kutovi. $\square$

1.3 Saccherijev i Lambertov pokušaj dokazivanja petog postulata

Nakon neuspjelih pokušaja dokazivanja petog postulata, u 18. st. Saccheri i Lambert pokušavajući dokazati peti postulat dolaze do rezultata koje predstavljaju početak nove geometrije. Iako obojica pri dokazivanju koriste metodu kontrapozicije do svojih rezultata dolaze neovisno jedan o drugome. Naime među tvrdnjama koje su ekvivalentne petom postulatu nalazi se i poučak o egzistenciji četverokuta s četiri prava kuta. Dokazivanjem ovog poučka indirektno bi bio dokazan i peti postulat. I Saccheri i Lambert polaze od pretpostavke da peti postulat nije istinit te zbog ekvivalentnosti tvrdnji zaključuju da ne može postojati ni četverokut s četiri prava kuta. Saccherijev rezultat bio je ono što se danas naziva Saccherijev četverokut, a Lambert je konstruirao četverokut koji ima tri prava i jedan tupi kut.

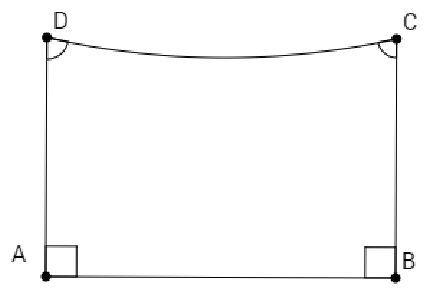
1.3.1 Saccherijev četverokut

U svojoj raspravi *Euclides ab omni naevo vindicatus* Saccheri staje u obranu Euklida tako što pretpostavlja da peti postulat nije istinit i pokušava doći do kontradikcije. Na ovaj način bi pokazao da je Euklid bio u pravu. Osnovni lik Saccherijevih razmatranja je bio četverokut $ABCD$ u kojemu su stranice AD i BC jednake duljine i okomite na bazu AB. Taj četverokut danas je poznat pod nazivom Saccherijev četverokut. Koristeći samo Euklidove propozicije bez petog postulata i njegovih ekvivalentnih tvrdnji, Saccheri je pokazao da su kutovi $\angle ADC$ i $\angle BCD$ jednaki. Spojimo li vrhove A i C te B i D prema Propoziciji 4. *Elemenata* slijedi da su trokuti ABC i BAD sukladni pa je $|\overline{AC}| = |\overline{BD}|$. Sada su prema Propoziciji 8. (*Elementi*) sukladni ADC i BCD. Iz ovoga je $\angle ADC = \angle BCD$. Moguća su samo tri slučaja:

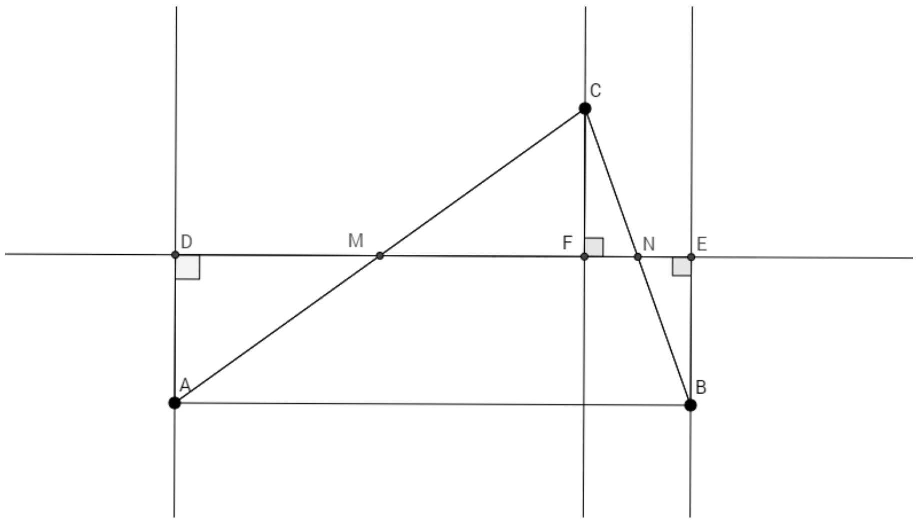
1. **hipoteza tupog kuta** - oba kuta su tupa $\angle ADC = \angle BCD > 90°$
2. **hipoteza šiljastog kuta** - oba kuta su šiljasta $\angle ADC = \angle BCD < 90°$
3. **hipoteza pravog kuta** - oba kuta su pravi kutovi $\angle ADC = \angle BCD = 90°$.

Treći slučaj je ekvivalentan petom postulatu te je njegova istinitost garantirana samo u slučaju da su prvi i drugi slučaj neistiniti. Saccheri se upravo zato orijentirao na pokazivanje kontradikcije ta dva slučaja. Baveći se prvim i drugim slučajem Saccheri dokazuje niz tvrdnji. Jedna od takvih tvrdnji je da u je u slučaju hipoteze tupog kuta suma kutova u trokutu veća od 180°, u slučaju hipoteze šiljastog kuta suma kutova u trokutu manja od 180° te da je u slučaju hipoteze pravog kuta ta suma jednaka 180°. Njegov dokaz je sljedeći.

Dokaz. Neka je dan $\triangle ABC$ i neka je M polovište stranice AC, a N polovište stranice BC. Konstruiramo okomice kroz vrhove A, B i C na stranicu AB (moguće ih je



Slika 3: Saccherijev četverokut



Slika 4: Suma kutova Saccherijevog četverokuta jednaka je sumi kutova $\triangle ABC$

konstruirati prema Propoziciji 11. *Elemenata*) i neka su te okomice redom AD, BE i CF.

Prema Propoziciji 26. (*Elementi*) slijedi da $\triangle ADM \cong \triangle CFM$. Naime $\angle AMD = \angle CMF$ jer su vršni kutovi (Propozicija 15.*Elemenata*), $\angle ADM = \angle BEN = 90°$ i $|AM| = |CM|$ jer je M polovište stranice AC. Analogno se pokaže da je i $\triangle BEN \cong \triangle CNF$. Onda je $|AD| = |CF| = |BE|$. $ABED$ je Saccherijev četverokut s pravim kutovima pri vrhovima D i E. Vrijedi sljedeće:

$$\angle DAB = DAM + MAB = \angle FCM + \angle MAB,$$

$$\angle EBA = EBN + NBA = \angle FCN + \angle NBA.$$

Zbrajanjem ovih tvrdnji dobivamo

$$\angle DAB + \angle EBA = \angle FCM + \angle MAB + \angle FCN + \angle NBA = \angle CBA + \angle CAB + \angle ACB.$$

Dokazano je da je suma kutova Saccherijevog četverokuta jednaka sumi kutova $\triangle ABC$. □

U slučaju da vrijedi hipoteza tupog kuta, oba kuta $\angle DAB$ i $\angle EBA$ bi bila tupa te je suma kutova trokuta veća od 180°. U slučaju da vrijedi hipoteza šiljastog kuta suma je manja od 180°, a sume su jednake u slučaju hipoteze pravog kuta.

Saccheri uspijeva osporiti hipotezu tupog kuta, dokazujući da se ta hipoteza svodi na peti postulat što implicira da je suma kutova u trokutu jednaka 180°. Budući da je pokazano da je u slučaju hipoteze tupog kuta ta suma veća od 180°, dolazimo do kontradikcije s pretpostavkom. No, u ovom dokazu Saccheri koristi i pretpostavku da duljina pravca nije konačna, a danas je poznato da postoje geometrije u kojima to ne mora biti slučaj.

Hipotezu šiljastog kuta nije uspio osporiti, iako je naveo propoziciju da je ta hipoteza neistinita jer je proturječna sa samom prirodom pravca. Saccheri je bio uvjeren da je dokazao propoziciju jer navodi da uz uvjet istinitosti hipoteze šiljastog kuta postoje dva pravca koja se sijeku u beskonačno dalekoj točki i koja u tom sjecištu imaju zajedničku okomicu koja s njima leži u istoj ravnini. Zaključuje da je došao do kontradikcije jer ovakva okomica ne postoji. No, Saccheri je svojstva koja vrijede za likove u konačnosti prenio na one u beskonačnosti.

1.3.2 Lambertov četverokut

Lambertovim četverokutom smatramo četverokut kojemu su tri kuta prava, a četvrti kut može biti pravi, šiljasti ili tupi kut. Kao i Saccheri postavlja tri hipoteze za četvrti kut:

1. **hipoteza tupog kuta** - kut je tupi $\angle BCD > 90°$
2. **hipoteza šiljastog kuta** - kut je šiljast $\angle BCD < 90°$

3. **hipoteza pravog kuta** - kut je pravi $BCD = 90°$.

Hipotezu tupog kuta osporava na isti način kao i Saccheri koristeći pretpostavku da se pravac može proizvoljno produžiti, no za razliku od Saccherija tvrdi da nije očigledno da hipoteza šiljastog kuta nije istinita. I iz njegovih pokušaja osporavanja ove hipoteze proizlaze brojne posljedice. Jedna od značajnijih je ta da je uz pretpostavku da vrijedi hipoteza tupog kuta, eksces (višak) kuta proporcionalan površini trokuta. Ovo znači da što je veći trokut to je veći i eksces. U uvjetima istinitosti hipoteze šiljastog kuta pokazuje da je defekt (manjak) kuta proporcionalan površini trokuta.

Lambert je bio svjestan da sferni trokuti imaju svojstvo da im je suma kutova veća od 180° i da je površina proporcionalna ekscesu s konstantom proporcionalnosti r^2 gdje je r radijus sfere $S(O, r)$. Zbog uvjerenja da se hipoteza tupog kuta ogleda u sfernoj geometriji, vjerovao je da bi se hipoteza šiljastog kuta odražavala na sferi imaginarnog radijusa jer zamjenom r s $i \cdot r$ gdje je i imaginarna jedinica, kvadriranjem se pojavljuje $-$ te u toj proporcionalnosti eksces prelazi u defekt.

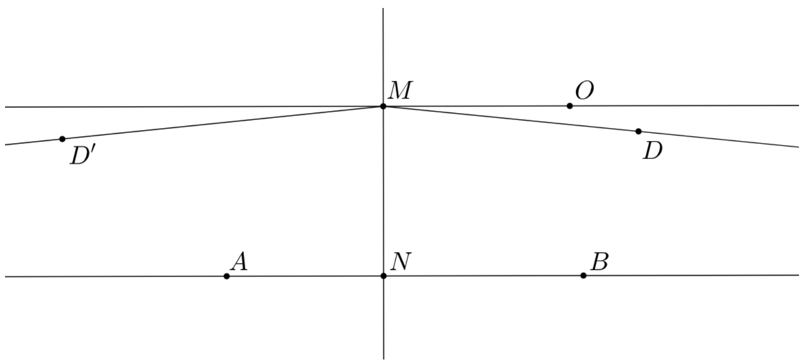
1.4 Nastanak neeuklidske geometrije

Nakon mnogih neuspjelih pokušaja dokazivanja petog postulata, matematičari dolaze na ideju o neovisnosti petog postulata o ostalim aksiomima, što bi značilo da bi zamjenom tog postulata mogli dobiti geometriju jednako valjanu Euklidovoj. Na ovu ideju prvi su došli Gauss, Bolyai i Lobačevski.
Iako Gauss prvi dolazi na ideju da se zamjenom petog Euklidovog postulata može izgraditi nova geometrija (koju on naziva neeuklidskom geometrijom), svoja razmišljanja nikad nije objavio. Nakon Gaussa na ovu ideju nadolazi Janos Bolyai (1802. - 1860.) koji svoja otkrića objavljuje kao dodatak u očevoj knjizi *Tentamen*. Njegov otac, koji je bio Gaussov prijatelj, upoznaje Gaussa s razmišljanjima svoga sina, ali budući da Gauss nije imao namjeru publicirati svoje radove, Bolyai nije dobio nikakvo daljnje priznanje. Neovisno o Bolyaiju do istih, ali puno bolje razrađenih, rezultata dolazi i ruski matematičar Nikolaj Ivanovič Lobačevski (1792. - 1856.). Poput Bolyaija pokušava na indirektan način izvesti peti postulat iz ostalih Euklidovih aksioma i postulata. Nakon što ne uspijeva u svom naumu, Lobačevski izdvaja aksiome apsolutne geometrije i pridodaje im aksiom suprotan od Euklidovog petog postulata, koji je danas poznat u sljedećem obliku.

Aksiom 2 (Aksiom hiperboličke geometrije)**.** *Postoje barem dva pravca paralelna danom pravcu koja prolaze točkom koja se nalazi izvan tog pravca.*

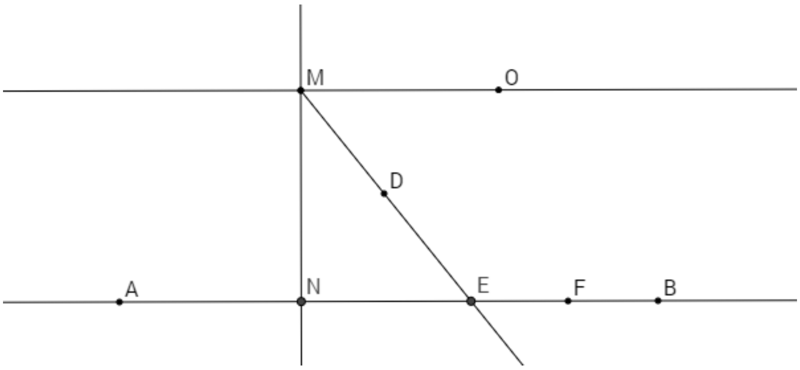
Time je Lobačevski izgradio novu geometriju koja nije proturječna euklidskoj i sama po sebi je logična, a naziva se hiperboličkom geometrijom ili neeuklidskom geometrijom Lobačevskog.

U novoj geometriji Lobačevski jasno definira paralele: " Svi pravci, koji u ravnini imaju istu početnu točku, dijele se s obzirom na drugi dani pravac u istoj ravnini u dvije skupine: one koji sijeku i one koji ne sijeku dani pravac. Granični pravci obaju skupina tih pravaca zovu se paralele danog pravca." Neka je dan pravac AB i točka M izvan njega . Spustimo okomicu iz točke M na pravac AB. Točku presjeka okomice i pravca AB označimo sa N.



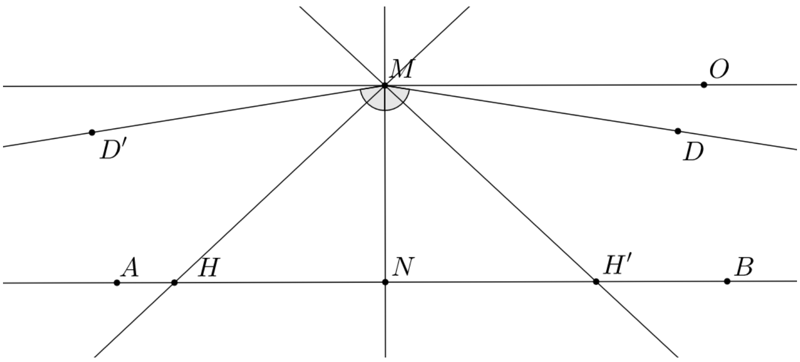
Slika 5: Paralelni pravci u geometriji Lobačevskog

Povucimo okomicu na MN kroz točku M. Neka je O bilo koja točka na tom pravcu. Pravci koje prolaze točkom M i leže u desnoj poluravnini NMO mogu se podijeliti u dva skupa: I_1 i I_2. U skupu I_1 nalaze se svi pravci koji sijeku AB, a u I_2 nalaze se svi oni koji ne sijeku AB. Ako za sve pravce koji prolaze točkom M i leže u NMO uzmemo da je MN početni pravac, onda svaki pravac u I_1 prethodi svakom pravcu u I_2, tj. polazeći od pravca redom od MN najprije dolazimo do pravaca koji sijeku AB, a onda do onih koji ne sijeku AB. Sada postoji pravac MD koji dijeli pravce u dva skupa. Pravac MD ili siječe ili ne siječe AB pa mora biti ili prvi pravac u I_2 ili zadnji pravac u I_1. Ako bi MD bio zadnji pravac u I_1 onda siječe pravac AB u točki E. Odaberemo li neku točku F na AB tako da se točka E nalazi između N i F,onda se i pravac MF nalazi u I_1 što je kontradikcija s tim da je MD zadnji pravac u I_1.



Slika 6: Pravac MD je prvi pravac u I_2

Pravac MD je prvi od onih koji ne sijeku AB i za njega kažemo da je paralelan pravcu AB. Analognim promatranjem lijeve poluravnine dolazimo do druge paralele $MD^{'}$. Paralele MD i $MD^{'}$ simetrične su s obzirom na MN, tj. zatvaraju iste kutove s okomicom MN. Da bismo ovo pokazali pretpostavimo suprotno: neka je $\angle DMN < \angle D^{'}MN$.



Slika 7: Paralele zatvaraju jednake kutove s MN

Sada zbog graničnih pravaca postoji pravac $MD^{''}$ između pravaca MN i $MD^{'}$ koji siječe AB u točki H tako da je $\angle HMN = \angle DMN$. Neka je $H^{'}$ točka sa suprotne strane od MN takva da je $|HN| = |H^{'}N|$. Prema S-K-S poučku $\triangle HMN \cong \triangle H^{'}MN$ pa vrijedi $\angle HMN = \angle H^{'}MN$ pa je $\angle H^{'}MN = \angle DMN$. Slijedi da $MH^{'}$ siječe AB što ne može biti jer MD ne siječe AB. To znači da slučaj $\angle DMN < \angle D^{'}MN$ nije moguć. Na sličan način pokaže se da nije moguće ni $\angle DMN > \angle D^{'}MN$ pa je $\angle DMN = \angle D^{'}MN$.

Kutove $\angle DMN$ i $\angle D^{'}MN$ nazivamo *kutovima paralelnosti*, a $\overline{MN}$ *distancijom paralelnosti*. Lako se vidi da $\angle DMN \leq 90°$ i $\angle D^{'}MN \leq 90°$ jer kada bi ti kutovi bili tupi ti pravci bi morali biti iznad pravaca paralelnosti te ne bi bili prvi od onih pravaca koji ne sijeku AB. U slučaju da je $\angle DMN = \angle D^{'}MN = 90°$ pravci paralelnosti bili bi jedan te isti pravac (to je slučaj Euklidova aksioma o paralelama).
U euklidskoj geometriji kut paralelnosti je pravi kut, a može se pokazati da je u hiperboličkoj geometriji taj kut uvijek šiljasti kut.

Iako se hiperbolička geometrija pokazuje jednako valjanom kao i euklidska, njena prvotna neprihvaćenost pripisuje se nedostaku njene primjene u stvarnom svijetu. U početku se čvrsto vjerovalo da je euklidska geometrija ta koja opisuje stanje prostora u kojem živimo, dok je hiperbolička geometrija ništa više od lijepih rezultata. Osim hiperboličke geometrije jedna od prvih neeuklidskih geometrija je i Riemannova ili eliptička geometrija. Osnovni uvjet na kojem se temelji eliptička geometrija je da vrijedi da se svaka dva pravca iste ravnine sijeku. Naziv je dobila po njemačkom matematičaru Georg Friedrich Bernhard Riemannu (1826. - 1866.) koji prvi uočava njeno postojanje. Iako neeuklidske geometrije imaju primjenu u fizici u ovom radu bavit ćemo se samo hiperboličkom geometrijom.

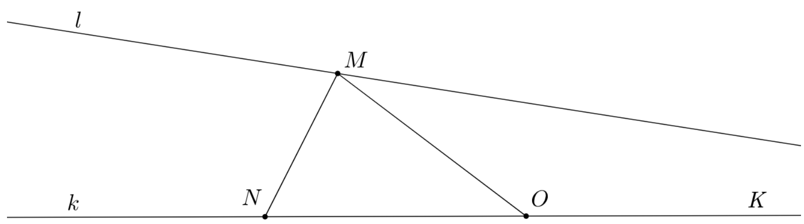
2 Hiperbolička geometrija

Hiperboličkom geometrijom smatramo geometriju u kojoj vrijede aksiomi apsolutne geometrije i aksiom hiperboličke geometrije kao aksiom paralelnosti. Ravnina u kojoj vrijede aksiomi hiperboličke geometrije naziva se *hiperboličkom ravninom* ili *ravninom Lobačevskog*. Isto tako prostor u kojemu ovo vrijedi naziva se *hiperbolički prostror* ili *prostor Lobačevskog*.

2.1 Pravci u hiperboličkoj geometriji

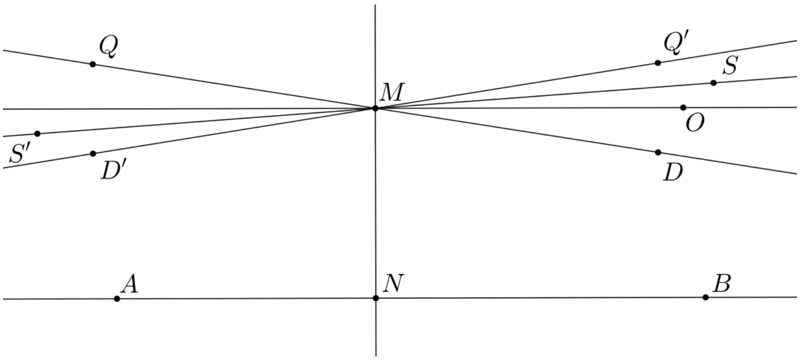
U prethodnom dijelu vidjeli smo koje pravce smatramo paralelnima u hiperboličkoj geometriji. Navedimo sada njihovu definiciju.

Definicija 1. *Neka je k bilo koji pravac i M bilo koja točka izvan tog pravca te N neka točka na pravcu k. Pravac l koji prolazi točkom M, koji ne siječe k i koji je takav da svaki polupravac iz točke M, koji se nalazi s desne strane točke N siječe k, zovemo pravcem paralelnim s pravcem k kroz M prema K, gdje je K beskonačno daleka zajednička točka ovih pravaca. Oznaka je $l \overset{M}{\underset{K}{\parallel}} k$.*



Slika 8: Paralelni pravci

Uvedimo iste oznake za pravce kao na slici 9 i uzmimo točku Q na tom pravcu s lijeve strane točke N i isto tako neka je točka Q' točka na pravcu MD' s desne strane točke N. Neka je SS' pravac koji prolazi točkom M ali unutar kutova $\angle DMQ'$ i $\angle D'MQ$. Pravac SS' ne siječe AB jer bi u suprotnom i MD morao sjeći AB, što ne može biti. SS' nije ni paralela s AB jer su s AB paralelni jedino polupravci MD i MD'. Iako je polupravac MD paralelan s AB, polupravac MQ nije niti paralelan s AB niti ga siječe.

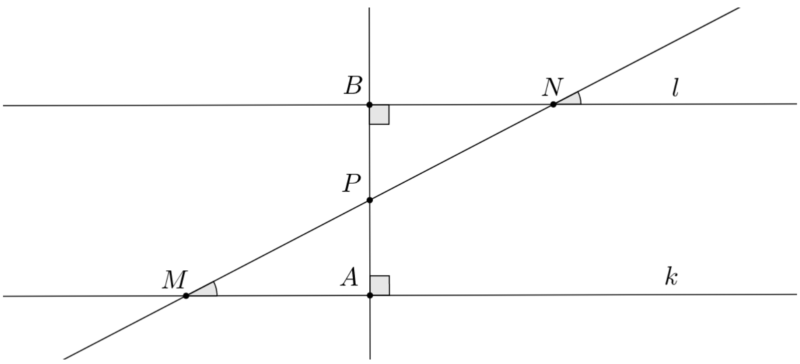


Slika 9: Hiperparalelni pravci

Definicija 2. *Za pravce k i l u istoj ravnini koji nisu paralelni niti se međusobno sijeku kažemo da su hiperparalelni ili divergentni.*

Teorem 2. *Neka su k i l dva pravca takva da u presjeku s transverzalom zatvaraju jednake protukutove. Pravci k i l su hiperparalelni.*

Dokaz. Neka transverzala t siječe pravce k i l redom u točkama N i M. Označimo pripadne kutove sa α i β. Ako je $\alpha = \beta = 90°$, pravac l bio bi hiperparalelan jer ne siječe pravac k, a budući da je kut paralelnosti uvijek šiljasti kut, l nije paralelan s k. Pretpostavimo da je $\alpha = \beta < 90°$.



Slika 10: Euklidski pravci

Polovištem P od $\overline{MN}$ povucimo okomicu na pravce k i l. Sjecišta okomice s pravcima k i l označimo redom s A i B. Trokuti $\triangle AMP$ i $\triangle BNP$ su sukladni prema K - K - S poučku. Slijedi da je $\angle APM = \angle BPN$ pa $\overline{AP}$ i $\overline{BP}$ leže na istom pravcu. Zaključujemo da je $\overline{AB}$ zajednička okomica pravaca k i l. Pravci k i l su hiperparalelni jer nisu paralelni niti se sijeku. □

Za hiperparalelnost vrijedi i tvrdnja:

Teorem 3. *Ako su pravci k i l okomiti na pravac m, onda su oni hiperparalelni.*

2.2 Funkcija Lobačevskog

Definicija 3. *Neka je dan pravac AB i točka M točka koja ne leži na tom pravcu. Neka je N nožište okomice iz M na AB i neka je pravac MD pravac paralelan s pravcem AB. Kut $\angle NMD$ nazivamo kutom paralelnosti.*

$\overline{MN}$ zovemo distancijom paralelnosti. Oznaka za kut paralelnosti je $\Pi(\overline{MN})$ pri čemu funkciju $\Pi : \mathbb{R}^+ \to \langle 0, \frac{\Pi}{2} \rangle$ nazivamo funkcijom Lobačevskog.

Teorem 4. *Jednake dužine imaju jednake kutove paralelnosti.*

Iz Bolyaijeve klasične konstrukcije može se vidjeti da za bilo koji dani segment možemo pronaći kut paralelnosti te da za bilo koji šiljasti kut možemo odrediti distanciju paralelnosti.
Pokazuje se da vrijedi i sljedeće:

- Ako je $p_1 = p_2$, onda $\Pi(p_1) = \Pi(p_2)$.
- Ako je $p_1 < p_2$, onda $\Pi(p_1) > \Pi(p_2)$.
- Ako je $p_1 > p_2$, onda $\Pi(p_1) < \Pi(p_2)$.

Već smo naveli da za distanciju paralelnosti a možemo pronaći kut α. Tada možemo pronaći i kut $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Za kut paralelnosti $\frac{\pi}{2} - \alpha$ možemo naći odgovarajuću distanciju paralelnosti a', koju nazivamo komplementarnim segmentom od a. Prema tome vrijedi:

$$\Pi(a') = \frac{\pi}{2} - \Pi(a).$$

2.3 Zbroj kutova trokuta

Može se pokazati da vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 5 (Legendrov teorem)**.** *Zbroj kutova trokuta manji je ili jednak* $180°$.

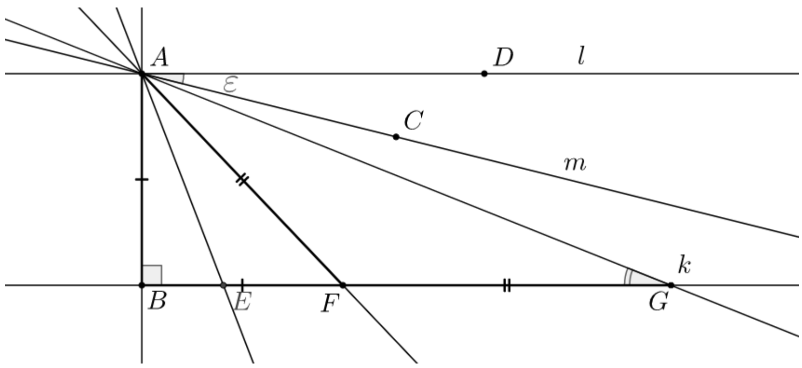
Pri dokazu ovog teorema ne koristi se Euklidov peti postulat pa ovaj teorem pripisujemo apsolutnoj geometriji. Uz pretpostavku da vrijedi Euklidov peti postulat, pokazuje se da je zbroj kutova trokuta baš 180°. Slučaj da je zbroj kutova trokuta manji od 180° dobijemo ako za pretpostavku uzmemo aksiom hiperboličke geometrije. Da bismo ovo pokazali navedimo najprije potreban korolar.

Definicija 4. *Defekt kuta u trokutu definira se kao* $d = 180° - S$*, gdje je* S *oznaka za zbroj kutova u trokutu.*

Korolar 1. *Ako postoji trokut pozitivnog kutnog defekta, onda svi trokuti imaju pozitivan kutni defekt.*

Teorem 6. *Zbroj kutova trokuta u hiperboličkoj ravnini manji je od* 180°.

Dokaz. Zbog prethodno navedenog Korolara 1, dovoljno je pokazati da postoji trokut čiji je zbroj kutova manji od 180°. Neka je dan pravac k i točka A koja ne leži na tom pravcu. Sa B označimo nožište okomice konstruirane iz točke A na pravac k. Konstruirajmo i okomicu l na pravac AB u točki A (Da se pravci k i l ne sijeku dokazano je u apsolutnoj geometriji.). Sa m označimo bilo koji pravac koji prolazi točkom A, a paralelan je s pravcem k. Takav pravac postoji prema Aksiomu hiperboličke geometrije 2. Neka je C točka na pravcu m takva da se nalazi između pravaca k i l i neka je D točka na pravcu l takva da se nalazi s iste strane pravca AB kao i točka C. Kut $\angle DAC$ je kut pozitivne mjere ϵ. Mjera kuta BAC onda iznosi $90° - \epsilon$. Sada zaključujemo da je za svaku točku E pravca k, koja se nalazi s desne strane točke B $\angle BAE < \angle BAC$.



Slika 11: Zbroj kutova trokuta

Na pravac k nanesimo dužinu BA počevši od točke B. Novu točku na pravcu k označimo s F. Vrijedi $|BA| = |BF|$. Uočimo da je trokut $\triangle ABF$ jednakokračni pravokutni trokut pa mjera kuta $\angle BAF$ može iznositi najviše $45°$. Odredimo li na pravcu k točku G koja se nalazi s desne strane točke F takvu da je $|FA| = |FG|$, vidimo da kut $\angle GFA$ može iznositi najmanje $180° - 45° = 135°$. Budući da je $\triangle GFA$ jednakokračan trokut čiji kut iznosi $\angle GFA \geq 135°$, kut $\angle FGA \leq \frac{180°-135°}{2} = 22.5°$. Nastavimo li provoditi ovaj postupak doći ćemo do točke H takve da je kut $\angle AHB < \epsilon$. Za zbroj kutova S u trokutu $\triangle AHB$ vrijedi:

$$S = \angle ABH + \angle BHA + \angle HAB$$

$$S < 90° + (90° - \epsilon) + \epsilon$$

$$S < 180°.$$

□

Teorem 7. *Zbroj kutova u trokutu nije isti za sve trokute.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno: svi trokuti imaju isti zbroj kutova. Neka je dan $\triangle ABC$ i neka se točka D nalazi na stranici $\overline{BC}$. Povlačenjem dužine $\overline{AD}$ dobili smo dva nova trokuta $\triangle ABD$ i $\triangle ADC$. Prema pretpostavci, da svi trokuti imaju isti zbroj kutova, vrijedi da trokuti $\triangle ABD$, $\triangle ADC$ i $\triangle ABC$ imaju isti zbroj kutova. Trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle ABD$ imaju isti zbroj kutova pa:

$$\angle BAC + \angle CBA + \angle ACB = \angle BAD + \angle DBA + \angle ADB,$$

$$\angle BAD + \angle DAC + \angle CBA + \angle ACB = \angle BAD + \angle DBA + \angle ADB$$

Sada je

$$\angle DAC + \angle DCA = \angle BDA.$$

$\angle BDA$ i $\angle CDA$ zajedno daju ispruženi kut pa je:

$$\angle BDA = 180° - \angle CDA.$$

Promotrimo li zbroj kutova trokuta $\triangle ADC$ dobijemo:

$$\angle DAC + \angle DCA + \angle CDA = 180° - \angle CDA + \angle CDA = 180°.$$

To nije moguće prema Teoremu 6 pa zaključujemo da je pretpostavka pogrešna. Ovime smo dokazali da nemaju svi trokuti isti zbroj kutova. □

2.4 Površina trokuta u hiperboličkoj geometriji

Formula za računanje površine u euklidskoj geometriji izvedena je iz formule za površinu pravokutnika. Naime ako povučemo jednu od dijagonala pravokutnika, podijelit ćemo pravokutnik na dva pravokutna trokuta. Budući da znamo izračunati površinu pravokutnika, a nastala dva trokuta su sukladna, površina jednog od ovih pravokutnih trokuta dobije se kao polovica površine pravokutnika. Površina proizvoljnog trokutam može se izračunati kao zbroj površina dvaju pravokutnih trokuta koje dobijemo povlačenjem visine u početnom trokutu. U hiperboličkoj geometriji vrijedi sljedeći teorem:

Lema 1. *U hiperboličkoj geometriji ne postoje pravokutnici.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji pravokutnik $ABCD$. Dijagonalom $\overline{AC}$ podijelimo pravokutnik na dva trokuta. Zbroj kutova od oba trokuta je manje od 180°. Kako je zbroj svih kutova u ovim trokutima ekvivalentan zbroju kutova u pravokutniku slijedi da zbroj kutova pravokutnika mora biti manje od 360° što je kontradikcija s tim da zbroj kutova pravokutnika iznosi 360°. □

Zbog toga površinu trokuta u hiperboličkoj geometriji smatramo pozitivnim brojem s tim da pri određivanju površine trokuta moraju vrijediti svojstva:

- Nepromjenjivost i kongruencija - Sukladni trokuti imaju istu površinu.
- Aditivnost - Rastavimo li trokut na dva nova trokuta spajanjem vrha i neke točke na nasuprotnoj stranici, površina početnog trokuta jednaka je zbroju površina nastalih trokuta.

Površinu trokuta u hiperboličkoj geometriji računamo pomoću defekta jer je površina trokuta proporcionalna defektu, što nam govori teorem:

Teorem 8. *Postoji nenegativna konstanta r takva da za bilo koji trokut $\triangle ABC$ vrijedi*

$$P_{\triangle ABC} = r^2 \cdot (\pi - \alpha - \beta - \gamma),$$

gdje su α, β i γ kutovi $\triangle ABC$.

Osim klasičnih, konačnih, trokuta u hiperboličkoj geometriji postoje i trokuti koje nazivamo jednokrajnik, dvokrajnik i trokrajnik. Jednokrajnik je trokut koji ima dvije paralelne stranice pa mu se jedan vrh nalazi u beskonačnosti. Za dvije stranice tog trokuta koje su paralelne smatramo da zatvaraju kut od $0°$. Dvokrajnik je trokut kojemu su dvije stranice paralelne s trećom, odnosno ima dva vrha u beskonačnosti. Trokut kojemu se sva tri vrha nalaze u beskonačnosti nazivamo trokrajnik. U trokrajniku svake dvije stranice su međusobno paralelne u određenom smjeru. Zbroj svih kutova trokrajnika iznosi $0°$.

Za razliku od euklidske geometrije, u hiperboličkoj geometriji postoji trokut najveće površine.

Korolar 2. *Površina trokuta u hiperboličkoj geometriji iznosi najviše $r^2\pi$, gdje je r nenegativna konstanta.*

Budući da je defekt kuta d uvijek manji od $180°$ i vrijedi da je površina proporcionalna defektu, slijedi:

$$P_{\triangle ABC} < r^2 \cdot d.$$

Gauss je pokazao da je jedini trokut koji ima površinu $r^2\pi$ trokrajnik.

2.5 Granična krivulja ili oricikla

Ranije smo već spomenuli da u hiperboličkoj geometriji pravci u ravnini mogu biti međusobno paralelni, hiperparalelni i mogu se sijeći, pa prema tome razlikujemo tri vrste pramena pravaca:

1. Eliptički pramen - skup svih pravaca ravnine koji prolaze jednom točkom u konačnosti

2. Parabolički pramen - beskonačan skup pravaca ravnine koji prolaze istom beskonačno dalekom točkom

3. Hiperbolički pramen - skup svih pravaca ravnine koji imaju zajedničku okomicu.

Obzirom na ove pramenove pravaca razlikujemo tri vrste fundamentalnih krivulja u hiperboličkom prostoru. To su krivulje koje sijeku pravce pramena pod pravim kutem. Navedene krivulje su:

1. Kružnica ili cikla - krivulja koja siječe pravce konvergentnog pramena. Središte kružnice leži u vrhu pramena.

2. Granična krivulja ili oricikla - krivulja koja siječe pravce paraboličkog pramena.

3. Hipercikla - krivulja koja siječe pravce hiperboličkog pramena.

Osima određene fundamentalne krivulje nazivamo sve pravce pramena te krivulje. Centrom granične krivulje nazivamo beskonačno daleku točku kroz koju prolaze svi paralelni pravci pramena pravca. Centar graniče krivulje leži u vrhu pramena pravca. Koncentričnim graničnim krivuljama smatramo granične krivulje koje imaju isti centar. Može se pokazati da ove krivulje imaju sljedeća svojstva:

1. Granične krivulje hiperboličke geometrije u euklidskoj geometriji odgovaraju krugu beskonačno velikog radijusa.

2. Svake dvije granične krivulje su međusobno kongruentne.

3. Na istoj graničnoj krivulji ili na bilo koje dvije granične krivulje, tetive jednake duljine odsijecaju lukove jednake duljine te lukovima jednakih duljina odgovaraju tetive jednakih duljina.

2.6 Trigonometrija u hiperboličkoj geometriji

Do trigonometrijskih formula u hiperboličkoj ravnini dolazimo pomoću svojstava granične krivulje. Navedimo najprije dva teorema koji vrijede za koncentrične granične krivulje:

Teorem 9. *Ako su A, B i A_1, B_1 točke u kojima koncentrične krivulje sijeku dvije svoje osi, onda je $|AA_1| = |BB_1|$.*

Teorem 10. *Ako su A, A', A'' točke granične krivulje i B, B', B'' točke u kojima osi kroz A, A' i A'' siijeku koncentričnu graničnu krivulju, onda*

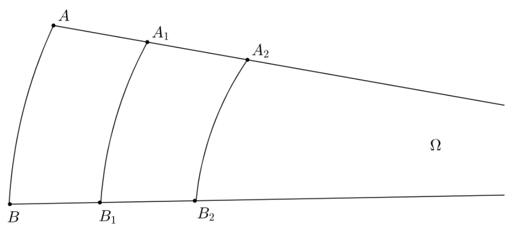
$$luk \quad AA' : luk \quad AA'' = luk \quad BB' : luk \quad BB''.$$

Promatrajmo sada graničnu krivulju s centrom Ω i neka su A i B dvije točke na toj krivulji. Duljinu luka između njih označimo sa s. Na zraci $A\Omega$ odredimo točke $A_1, A_2, A_3, ...$ takve da je $|AA_1| = |A_1A_2| = |A_2A_3| = itd.$ Neka su točke $B_1, B_2, B_3, ...$ točke u kojima koncentrične granične krivulje kroz $A_1, A_2, A_3, ...$ sijeku zraku $B\Omega$. Prema Teoremu 9 vrijedi $|AA_1| = |BB_1| = |B_1B_2| = |B_2B_3| = itd.$ Ako označimo lukove $A_1B_1, A_2B_2, ...$ sa $s_1, s_2, ...$ onda prema svojstvu 3 i Teoremu 10 vrijedi:

$$s : s_1 = s_1 : s_2 = s_2 : s_3 = itd.$$

Možemo odabrati jedinični segment AA_1 takav da je ovaj omjer jednak e, pri čemu je e baza prirodnog logaritma. Sada je

$$s : s_1 = s_1 : s_2 = s_2 : s_3 = ... = e.$$



Slika 12: Koncentrične granične krivulje

Označimo duljinu segmenta AA_1 s x. Može se pokazati da omjeri $s : s_1, s_1 : s_2$, $s_2 : s_3$... ovise samo o x. Ovime dolazimo do sljedećeg teorema:

Teorem 11. *Ako je $AA'BB'$ lik ograničen s dvije koncentrične granične krivulje AB i $A'B'$ i pravcima AA' i BB', vrijedi*

$$s_x = se^{-x},$$

pri čemu su s i s_x duljine lukova AB i $A'B'$, x duljina segmenata AA' i BB' pri čemu je AB vanjska , a $A'B'$ unutarnja krivulja.

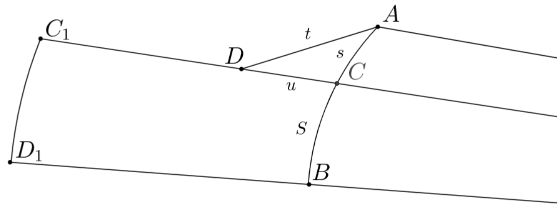
2.6.1 Jednadžba granične krivulje

Prije nego što navedemo jednadžbu granične krivulje navedimo neke rezultate koji će nam biti potrebni, a do kojih se dolazi iz činjenice da za kut paralelnosti $\frac{\pi}{4}$ možemo pronaći odgovarajuću distanciju paralelnosti (prema poglavlju 2.2).
Vrijedi:

$$e^u = \operatorname{ch} t, \tag{1}$$

$$s = S \operatorname{th} t, \tag{2}$$

pri čemu je S duljina luka granične krivulje koja prolazi točkom čija tangenta je paralelna s osi krivulje u suprotnom smjeru od nje (za kut paralelnosti $\frac{\pi}{4}$), s duljina luka AC ($s < S$), t duljina AD, u duljina DC, pri čemu je D točka presjeka pravca $C\Omega$ i tangente iz A na graničnu krivulju.



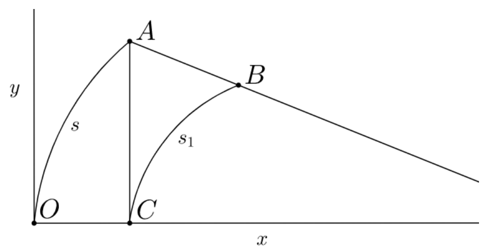
Slika 13: Tangenta na graničnu krivulju

Odredimo sada jednadžbu granične krivulje. Neka su Ox i Oy dva pravca koja zatvaraju pravi kut i neka je A točka na graničnoj krivulji koja prolazi točkom O i čija je os Ox. Iz točke A povucimo okomicu na os granične krivulje. Sjecište označimo s C. Neka je B točka na $A\Omega$ u kojoj koncentrična granična krivulja koja prolazi točkom C siječe $A\Omega$. Označimo luk OA s s i CB s s_1. Prema teoremu 9 vrijedi da je $|AB| = |OC|$ i ta duljina iznosi x. Duljina od AC iznosi y. Primjenom (1) slijedi jednadžba granične krivulje kroz točku O s osi x:

$$e^x = \operatorname{ch} y. \tag{3}$$

Vrijedi i $s = s_1 e^x$ pa prema (2) slijedi:

$$s = S \operatorname{sh} y. \tag{4}$$

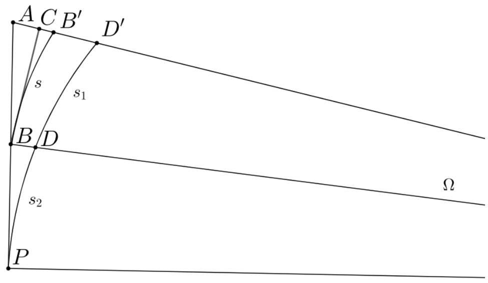


Slika 14: Jednadžba granične krivulje

2.6.2 Trigonometrija pravokutnog trokuta

Neka je $\triangle ABC$ pravokutan, s pravim kutom pri vrhu C. Produžimo stranicu AC kroz C i povucimo paralelu s AC kroz B - $B\Omega$. Isto tako produžimo i AB kroz

B do točke P tako da vrijedi $\Pi(p) = \angle BAC$, pri čemu duljinu od AP označimo s p. Presjek koncentričnih graničnih krivulja, čiji je centar Ω i koje prolaze točkama B i P, s osima označimo s B', D i D'.



Slika 15: Trigonometrija pravokutnog trokuta

Radi jednostavnosti uvedimo oznake $BB' := s$, $DD' := s_1$ i $PD := s_2$ te $BD = u$. Napomenimo samo da u sljedećim zapisima trigonometrijskih funkcija, oznake predstavljaju mjere segmenata, a ne same segmente. Prema (4) imamo

$$s = S \operatorname{sh} a,$$

odnosno

$$s_1 e^u = S \operatorname{sh} a.$$

Prema (2) vrijedi

$$s_1 + s_2 = S \operatorname{th} p$$

i

$$s_2 = S \operatorname{th}(p - c).$$

Iz (1) slijedi:

$$e^u = \operatorname{ch}(p - c).$$

Vidimo da je onda

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh} a &= \frac{s_1 e^u}{S} \\
&= \frac{(S \operatorname{th} p - s_2) \cdot \operatorname{ch}(p-c)}{S} \\
&= \frac{(S \operatorname{th} p - S \operatorname{th}(p-c)) \cdot \operatorname{ch}(p-c)}{S} \\
&= (\operatorname{th} p - \operatorname{th}(p-c))(\operatorname{ch}(p-c)) \\
&= \Big(\frac{\operatorname{sh} p}{\operatorname{ch} p} - \frac{\operatorname{sh}(p-c)}{\operatorname{ch}(p-c)}\Big)(\operatorname{ch}(p-c)) \\
&= \frac{\operatorname{sh} p \cdot \operatorname{ch}(p-c) - \operatorname{sh}(p-c) \cdot \operatorname{ch} p}{\operatorname{ch} p} \\
&= \frac{\operatorname{sh} c}{\operatorname{ch} p}.
\end{aligned}$$

Zapišimo formulu u drugom obliku:

$$\operatorname{sh} c = \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} p. \tag{5}$$

Ova formula povezuje hipotenuzu, stranicu i nasuprotni kut pravokutnog trokuta. Može se pokazati da vrijede i formule:

$$\operatorname{th} a = \frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{sh} p}. \tag{6}$$

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b. \tag{7}$$

$$\operatorname{th} a = \operatorname{th} r \cdot \operatorname{th} c, \tag{8}$$

gdje je r distancija paralelnosti koja odgovara kutu pri vrhu B.

2.6.3 Trigonometrija nepravokutnog trokuta

Neka je dan $\triangle ABC$ sa stranicama a, b i c te kutovima α, β i γ. Distancije paralelnosti za kutove α, β i γ označimo redom s p, r i t. Pokažimo kako u ovom slučaju pravilo za sinus glasi

$$\operatorname{sh} a : \operatorname{sh} b : \operatorname{sh} c = \operatorname{sech} p : \operatorname{sech} r : \operatorname{sech} t,$$

pri čemu je $\operatorname{sech} p = \frac{1}{\operatorname{ch} p}, \operatorname{sech} r = \frac{1}{\operatorname{ch} r}$ i $\operatorname{sech} t = \frac{1}{\operatorname{ch} t}$.

Dokaz. Neka je dan šiljastokutan trokut $\triangle ABC$. Povucimo okomicu iz vrha A i nožište označimo s N. Neka je n duljina od AN. Iz (5) slijedi da u trokutu $\triangle ABN$ vrijedi

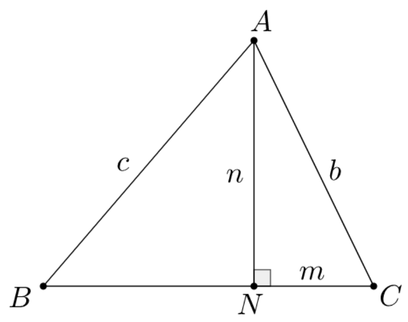
$$\operatorname{sh} c = \operatorname{sh} n \cdot \operatorname{ch} r,$$

a u $\triangle ACN$

$$\operatorname{sh} b = \operatorname{sh} n \cdot \operatorname{ch} t.$$

Izjednačavanjem dobivamo

$$\operatorname{sh} b : \operatorname{sh} c = \operatorname{sech} r : \operatorname{sech} t.$$



Slika 16: Trigonometrija nepravokutnog trokuta

Odabirom vrha B, na analogan način dobivamo:

$$\operatorname{sh} a : \operatorname{sh} c = \operatorname{sech} p : \operatorname{sech} t.$$

Prema tome vrijedi

$$\operatorname{sh} a : \operatorname{sh} b : \operatorname{sh} c = \operatorname{sech} p : \operatorname{sech} r : \operatorname{sech} t.$$

□

Do istog rezultata dolazimo ako je jedan kut trokuta tupi, pomoću svojstva komplementa koje smo naveli u poglavlju 2.2. Rezultat za pravokutan trokut nam daje jednakost (5). Pokažimo kako pravilo za kosinus glasi

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \cdot \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \cdot \operatorname{sh} c \cdot \operatorname{th} p.$$

Dokaz. Neka je dan šiljastokutan trokut $\triangle ABC$. Povucimo okomicu iz vrha A i nožište označimo s N. Neka je n duljina od AN, m duljina CN. Onda je duljina od BN jednaka $a - m$. Prema jednakosti (7) u trokutu $\triangle ABN$ vrijedi

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch}(a-m) \operatorname{ch} n,$$

a u trokutu $\triangle ACN$ vrijedi

$$\operatorname{ch} b = \operatorname{ch} n \operatorname{ch} m.$$

Iz jednakosti (8) slijedi

$$\operatorname{th}(a-m) = \operatorname{th} c \operatorname{th} r. \tag{9}$$

Uvrštavanjem prve jednadžbe u jednadžbu za $\operatorname{ch} b$ dobijemo

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} b &= \frac{\operatorname{ch} c \operatorname{ch} m}{\operatorname{ch}(a-m)} \\
&= \frac{\operatorname{ch} c(\operatorname{ch} a \operatorname{ch}(a-m) - \operatorname{sh} a \operatorname{sh}(a-m))}{\operatorname{ch}(a-m)} \\
&= \operatorname{ch} a \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} a \operatorname{ch} c \operatorname{th}(a-m) \\
&= \operatorname{ch} a \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} c \operatorname{th} r.
\end{aligned}$$

Ako je jedan kut trokuta tupi dobijemo isti rezultat ako iskoristimo svojstvo komplementa graničnog kuta. □

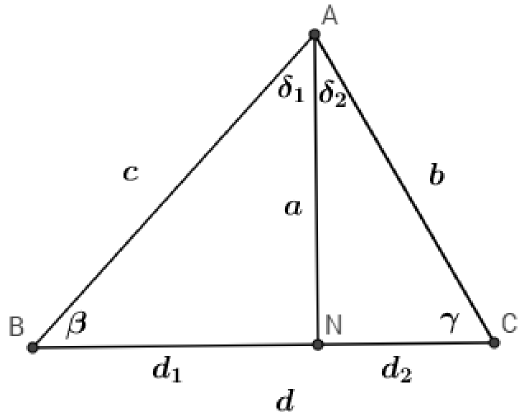
2.6.4 Trigonometrijske funkcije kuta

Osnovna jednadžba hiperboličke geometrije glasi

$$\operatorname{th} a = \cos \alpha,$$

pri čemu je $\alpha = \Pi(a)$. Pokažimo da to vrijedi.

Dokaz. Neka je dana funkcija $f(\alpha)$ definirana s jednadžbom $\cos f(\alpha) = \operatorname{th} a$, pri čemu za a uzimamo da ovisi o kutu α, odnosno $a = \Delta(\alpha)$. a ovisi o kutu α jer želimo pokazati da tvdnja vrijedi za a koji je odgovarajuća distancija kuta paralelnosti α. Za $\alpha = \frac{\pi}{2}$ vrijedi da je $a = 0, \operatorname{th} a = 0, \cos f(\alpha) = 0$, odnosno $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$. Kad je $\alpha = 0$ vrijedi da je $a = \infty, \operatorname{th} a = 1, \cos f(\alpha) = 1$, to jest $f(0) = 0$. Kad se a povećava od 0 do ∞, $f(\alpha)$ se smanjuje od $\frac{\pi}{2}$ do 0. Promotrimo sada trokut $\triangle ABC$ koji nije pravokutan. Povucimo okomicu iz vrha A na BC i sjecište označimo s N.



Slika 17: Trokut $\triangle ABC$ s označenim elementima

Označimo $|BC| = d, |AB| = c, |AC| = b, \angle ABC = \beta, \angle BCA = \gamma$, $\angle BAC = \delta, \angle BAN = \delta_1, \angle CAN = \delta_2, NC = d_2, BN = d_1, AN = a$. Neka je $\Pi(p') = \delta_1, \Pi(p'') = \delta_2$ i $\Pi(p) = \delta$. Prema formuli za kosinus, izvedenoj u prethodnom poglavlju vrijedi

$$\operatorname{ch} d = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \operatorname{th} p,$$

odnosno

$$\operatorname{th} p = \frac{\operatorname{ch} c \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} d}{\operatorname{sh} c \operatorname{sh} b}.$$

Prema $\cos f(\delta) = \operatorname{th} \Delta(\delta)$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
\cos f(\delta) &= \frac{\operatorname{ch} c \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} d}{\operatorname{sh} c \operatorname{sh} b} \\
&= \frac{\operatorname{ch} c \operatorname{ch} b}{\operatorname{sh} c \operatorname{sh} b} - \frac{\operatorname{ch} d}{\operatorname{sh} c \operatorname{sh} b} \\
&= \operatorname{cth} b \operatorname{cth} c - \frac{\operatorname{ch}(d_2 + d_1)}{\sin b \sin c} \\
&= \operatorname{cth} b \operatorname{cth} c - \frac{\operatorname{ch} d_2 \operatorname{ch} d_1}{\operatorname{sh} b \operatorname{sh} c} - \frac{\operatorname{sh} d_2 \operatorname{sh} d_1}{\operatorname{sh} b \operatorname{sh} c}.
\end{aligned}$$

Prema (5) vidimo da je

$$\frac{\operatorname{sh} d_1}{\operatorname{sh} c} = \frac{1}{\operatorname{ch} p'} = \sin f(\delta_1),$$

$$\frac{\operatorname{sh} d_2}{\operatorname{sh} b} = \frac{1}{\operatorname{ch} p''} = \sin f(\delta_2).$$

Sada je

$$\frac{\operatorname{sh} d_2 \operatorname{sh} d_1}{\operatorname{sh} b \operatorname{sh} c} = \sin f(\delta_1) \sin f(\delta_2).$$

Iz (9) slijedi da je $\operatorname{th} a = \operatorname{th} c \operatorname{th} p'$, pa je

$$\begin{aligned}
\operatorname{cth} c \operatorname{cth} b &= \frac{1}{\operatorname{th} c \operatorname{th} b} \\
&= \frac{1}{\frac{\operatorname{th} a}{\cos f(\delta_1)} \cdot \frac{\operatorname{th} a}{\cos f(\delta_2)}} \\
&= \frac{\cos f(\delta_1) \cdot \cos f(\delta_2)}{\operatorname{th}^2 a} \\
&= \operatorname{cth} a^2 \cos f(\delta_1) \cos f(\delta_2).
\end{aligned}$$

Iz (7) i (8) primjenom na pravokutan trokut $\triangle ABN$ dobijemo

$$\operatorname{th} p' = \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{th} c} = \frac{\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} a}}{\frac{\operatorname{sh} c}{\operatorname{ch} c}}$$

$$\frac{\operatorname{th} p'}{\operatorname{sh} a} = \frac{\operatorname{ch} c}{\operatorname{ch} a \operatorname{sh} c} = \frac{\operatorname{ch} d_1 \operatorname{ch} a}{\operatorname{ch} a \operatorname{sh} c} = \frac{\operatorname{ch} d_1}{\operatorname{sh} c}.$$

Primjenom (7) i (8) na pravokutan trokut $\triangle ANC$ slijedi

$$\operatorname{th} p'' = \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{th} b} = \frac{\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} a}}{\frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{ch} b}}$$

$$\frac{\operatorname{th} p''}{\operatorname{sh} a} = \frac{\operatorname{ch} b}{\operatorname{ch} a \operatorname{sh} b} = \frac{\operatorname{ch} d_2 \operatorname{ch} a}{\operatorname{ch} a \operatorname{sh} b} = \frac{\operatorname{ch} d_2}{\operatorname{sh} b}.$$

Sada je

$$\frac{\operatorname{ch} d_2 \operatorname{ch} d_1}{\operatorname{sh} b \operatorname{sh} c} = \frac{\operatorname{th} p'}{\operatorname{sh} a} \cdot \frac{\operatorname{th} p''}{\operatorname{sh} a} = \frac{\cos f(\delta_1) \cdot \cos f(\delta_2)}{\operatorname{sh}^2 a}.$$

Prema tome imamo

$$
\begin{aligned}
\cos f(\delta) &= \cos f(\delta_1 + \delta_2) \\
&= \cos f(\delta_1) \cdot \cos f(\delta_2) \cdot \operatorname{cth}^2 a - \frac{\cos f(\delta_1) \cdot \cos f(\delta_2)}{\operatorname{sh} a^2} - \sin f(\delta_2) \sin f(\delta_1) \\
&= \cos f(\delta_1) \cos f(\delta_2) \Big(\operatorname{cth}^2 a - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 a} \Big) - \sin f(\delta_2) \sin f(\delta_1) \\
&= \cos f(\delta_1) \cos f(\delta_2) \Big(\frac{\operatorname{ch}^2 a}{\operatorname{sh}^2 a} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 a} \Big) - \sin f(\delta_2) \sin f(\delta_1) \\
&= \cos f(\delta_1) \cos f(\delta_2) \Big(\frac{\operatorname{ch}^2 a - 1}{\operatorname{sh}^2 a} \Big) - \sin f(\delta_2) \sin f(\delta_1) \\
&= \cos f(\delta_1) \cos f(\delta_2) \Big(\frac{\operatorname{sh}^2 a}{\operatorname{sh}^2 a} \Big) - \sin f(\delta_2) \sin f(\delta_1) \\
&= \cos f(\delta_1) \cos f(\delta_2) - \sin f(\delta_2) \sin f(\delta_1) \\
&= \cos(f(\delta_1) + f(\delta_2)).
\end{aligned}
$$

Za $\delta_1 = \delta_2 = 0$ imamo $f(\delta_1) = f(\delta_2) = f(\delta_1 + \delta_2) = 0$ pa je prema tome $f(\delta_1 + \delta_2) = f(\delta_1) + f(\delta_2)$. Ovo je funkcijska jednadžba iz koje izvodimo neprekidnu funkciju $f(\delta_1)$. Možemo zapisati $f(x + y) = f(x) + f(y)$, pri čemu je $f(0) = 0$ i $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$. Zbog toga vrijedi

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(y+h) - f(y)}{h}.$$

Uzimajući limes prethodnog izraza kada h teži prema 0 dobivamo $f'(x) = f'(y)$, pa je $f'(x)$ konstanta te je $f(x) = Ax + B$. Uvrštavanjem $f(0) = 0$ i $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ lako dobijemo da je $B = 0$ i $A = 1$ pa je $f(x) = x$. Ovime smo dokazali da vrijedi $\cos f(\alpha) = \operatorname{th} a$. □

Koristeći upravo izvedenu jednadžbu mogu se i ostale hiperboličke funkcije prikazati preko trigonometrijskih funkcija:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sh} a &= \cot \alpha, \\
\operatorname{ch} a &= \operatorname{cosec} \alpha, \\
\operatorname{cth} a &= \sec \alpha, \\
\operatorname{sech} a &= \sin \alpha, \\
\operatorname{cosech} a &= \operatorname{tg} \alpha.
\end{aligned}
$$

Uvrštavanjem u formule za sinus i kosinus izvedenih u poglavlju 2.6.3 dobivamo njihov sljedeći zapis:

$$\operatorname{sh} a : \operatorname{sh} b : \operatorname{sh} c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma,$$

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos\alpha,$$

pri čemu su a, b, c stranice, a α, β, γ odgovarajući kutovi tog trokuta.

2.7 Jednadžba kuta paralelnosti

U poglavlju 2.6.4 smo pokazali da vrijedi $\operatorname{th} a = \cos\alpha$. Iskoristimo li to da pogledamo čemu je jednako

$$\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

dobivamo

$$\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\operatorname{th}\alpha}{1+\operatorname{th}\alpha}.$$

Budući da je izraz s lijeve strane jednakosti jednak $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$ i da su $\operatorname{sh} a = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ te $\operatorname{ch} a = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ uočavamo

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = e^{-2a}.$$

Kut α je šiljasti kut pa je

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = e^{-a}.$$

Uzmemo li u obzir kut paralelnosti slijedi zapis

$$\operatorname{tg}\frac{\Pi(p)}{2} = e^{-p}.$$

Do sada smo uzimali da nam je jedinica mjere e, no ako za jedinicu mjere uzmemo neki drugi broj a, koji je veći od 1. Rezultat granične krivulje je tada $s_x = sa^{-x}$. Zamjenom $a = e^{\frac{1}{k}}$ slijedi $s_x = se^{-\frac{x}{k}}$. Jednadžba kuta paralelnosti je sada

$$\operatorname{tg}\frac{\Pi(p)}{2} = e^{-\frac{p}{k}}.$$

Ovu zamjenu provodimo i u svim ostalim jednadžbama koje smo izveli, tako da će svaka od njih sadržavati parametar k. Pustimo li da k teži prema ∞, vidimo da kut paralelnosti prelazi u $\frac{\Pi}{2}$, a i ostale formule postaju ekvivalentne onima u euklidskoj geometriji. Iz ovoga dolazimo do bitnog zaključka da se euklidska geometrija zapravo javlja kao poseban slučaj hiperboličke geometrije. Ovo nam daje odgovor na pitanje koje su si postavljali brojni matematičari kroz povijest, pitanje o primjenjivosti hiperboličke geometrije na stvarni svijet u kojem živimo. Naime jer iako se eksperimentalno pokazuje da je zbroj kutova u trokutu jednak $180°$, uz naravno dopuštena odstupanja, to ne znači nužno da je geometrija prostora u kojem živimo euklidska. Sada je moguće da je to zapravo hiperbolička geometrija sa jako velikim parametrom k.

Sažetak

U ovom radu pobliže se upoznajemo s neeuklidskom geometrijom, odnosno jednim njenim dijelom - hiperboličkom geometrijom kao geometrijom suprotnom od euklidske. Prvo poglavlje prikazuje postulat o paralelama koji postaje glavnim zanimanjem brojnih matematičara kroz povijest. Sama neintuitivnost ovog postulata dovodi do brojnih neočekivanih rezultata te naposlijetku i do nastanka nove neeuklidske geometrije. Pokazuje se da je nova geometrija jednako valjana kao i euklidska, no zbog čvrstih uvjerenja da je euklidska geometrija ta u kojoj se ogledaju pravila našeg prostora, hiperbolička geometrija ne poprima pozornost koju zaslužuje.

Neeuklidskim geometrijama smatramo sfernu, eliptičnu i hiperboličku geometriju, no zbog opširnosti, ovaj rad bavi se samo hiperboličkom geometrijom, koja je glavna tema drugog poglavlja. Budući je postulat o paralelama bio glavnim izvorom otkrića nove geometrije, drugo poglavlje započinje upravo definiranjem paralelnih pravaca te hiperparalelnih pravaca. Iz različite definicije paralelnosti pravaca dolazimo do rezultata da je zbroj kutova u trokutu manji od $180°$. Ne samo da je taj zbroj manji, već on čak nije ni isti za sve trokute.

Veći dio ovog poglavlja bavi se prikazom trigonometrijskih jednadžbi. Pokazana su i pravila za sinus i kosinus ekvivalentna onima iz euklidske geometrije. Jednadžba $\operatorname{th} a = \cos \alpha$ dovodi do jednadžbe $\operatorname{tg} \frac{\Pi(p)}{2} = e^{-\frac{p}{k}}$ koja pokazuje da kada k teži prema ∞, kut paralelnosti iznosi $\frac{\pi}{2}$, što pokazuje da je euklidska geometrija poseban slučaj hiperboličke. Ovime je hiperbolička geometrija dobila dugo traženu primjenu jer se javlja mogućnost da je upravo ona geometrija u kojoj vrijede pravila našeg prostora.

Ključne riječi: postulat o paralelama, neeuklidska geometrija, hiperbolička geometrija, kut paralelnosti, granična krivulja, trigonometrija hiperboličke geometrije, jednadžba kuta paralelnosti

Summary

This framework deals with noneuclidean geometry, respectively one of its parts - hyperbolic geometry as geometry contrary to the euclidean one. The focus of Section 1 lies on the parallel postulate, which began the main interest of many mathematicians through the history. The non intuitiveness of the postulate leads to many unexpected results and even to the foundation of new noneuclidean geometry. Although it can be shown that this new type of geometry is equally consistent as the euclidean one, because of the strong beliefs that the euclidean one describes rules of the real world, hyperbolic geometry didn't get the popularity which it deserves.

Sphere, elliptical and hyperbolic geometries are considered to be noneuclidean geometries, but this framework deals only with hyperbolic geometry, which is the main subject of Section 2. Considering that the parallel postulate was the main reason for the foundation of the new geometry, Section 2 begins with a definition of parallel and hyperparallel lines. This different definition of line parallelism leads us to the result that the sum of angles in a triangle is less than 180°. Not only is it less, but it isn't even the same for all triangles.

The best part of this section deals with trigonometric equations. There are presented a sine and cosine formulas equivalent to the one in the euclidean geometry. From the result $\tanh a = \cos \alpha$ it follows $\tan \frac{\Pi(p)}{2} = e^{-\frac{p}{k}}$ which shows that for $k \to \infty$ angle of parallelism becomes $\frac{\pi}{2}$, meaning that the euclidean geometry appears as a special case of hyperbolic geometry. This way hyperbolic geometry obtained a long desired use because it opens up the possibility that the rules of the real world are reflected exactly the same in hyperbolic geometry.

Keywords: parallel postulate, noneuclidean geometry, hyperbolic geometry, angle of parallelism, limit curve, trigonometry of hyperbolic geometry, equation for the angle of parallelism

Literatura

[1] D. M. Burton, *The history of mathematics: An introduction, 6th edition*, McGraw Hill - Companies, Inc, 2006.

[2] H. S. Carslaw, *The elements of non - euclidean plane geometry and trigonometry*, Longmans, Green and Co., 1916.

[3] B. Červar, G. Erceg, I. Lekić, *Osnove geometrije*, Prirodoslovno - matematički fakultet, Sveučilište u Splitu, 2014.

[4] M. J. Greenberg, *Euclidean and Non - Euclidean geometries: development and history, 3rd edition*, W. H. Freeman and Company, New York, 1994.

[5] V. J. Katz, *A history of mathematics: an introduction, 3rd edition*, Pearson Education, Inc., 2009.

[6] S. Mintaković, *Neeuklidska geometrija Lobačevskog*, Školska knjiga, Zagreb, 1972.

[7] S. W. Ross, *Non - euclidean geometry*, A thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of master of arts in mathematics, University of Maine, 1990.

Životopis

Zovem se Ivana Lukanović. Rođena sam 7. kolovoza 1993. u Vinkovcima. Živim u peteročlanoj obitelji koju čine otac Ivo, majka Manda, blizanka Marina koja pohađa Odjel za matematiku u Osijeku i godinu dana mlađa sestra Irena koja je također studentica osječkog Sveučilišta na Odjelu za fiziku. Nakon završenog osnovnoškolskog obrazovanja u osnovnoj školi Josipa Kozarca u Vinkovcima, 2008. godine s odličnim uspjehom upisujem opći smjer Gimnazije Matije Antuna Reljkovića u Vinkovcima. Pored škole, sedam godina sam učila i engleski jezik u privatnoj školi Linguapax. Iako volim svaki sport, najdraži mi je ipak rukomet kojeg i danas treniram već nepunih četrnaest godina u ŽRK Vinkovci. Tijekom osnovne i srednje škole sudjelovala sam na natjecanjima iz geografije, biologije, vjeronauka, rukometa, hrvatskog jezika i matematike. Zahvaljujući izvrsnim profesoricama iz osnovne škole i gimnazije koje su u meni potaknule ljubav prema matematici i matematičkom načinu razmišljanja, 2012. godine upisujem Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku.