Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Matej Maglić

Hermite-Hadamardova nejednakost

Završni rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Matej Maglić

Hermite-Hadamardova nejednakost

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Mihaela Ribičić Penava

Osijek, 2017.

Sadržaj

Sažetak

U ovom završnom radu upoznat ćemo se s Hermite-Hadamardovom nejednakošću za konveksne funkcije. Povezat ćemo konveksne funkcije s raznim klasama funkcija. Kroz cijeli rad bavit ćemo se generalizacijom Hermite-Hadamardove nejednakosti na nekoliko klasa funkcija. U zadnjem dijelu rada naglasak će biti na primjenama te nejednakosti u raznim područjima matematike.

Ključne riječi: konveksne funkcije, Hermite-Hadamardova nejednakost, log-konveksne funkcije, Godnova-Levin klase funkcija, kvazi-konveksne funkcije, s-konveksne funkcije

Abstract

In this final paper we will be introduced to Hermite-Hadamard inequality for convex functions. Relations between various classes of functions and convex functions will be formulated and proven. Also, some generalization of the Hermite–Hadamard inequalities for several classes of functions will be given. In the last part of the paper we will see some aplications of this inequality in different areas of Mathematics.

Keywords: convex functions, Hermite-Hadamard inequality, Log-Convex Mappings, Godnova-Levin class of function, Quasi-Convex functions, s-Convex functions

1 Uvod

U ovom završnom radu bavimo se jednom od najvažnijih nejednakosti vezanih uz konveksne funkcije. Zato ćemo u drugom poglavlju definirati konveksnu funkciju i navesti fundamentalne rezultate. Povezat ćemo konveksne funkcije s raznovrsnim klasama funkcija. Nakon što navedemo i pokažemo najvažnije rezultate, prisjetit ćemo se određenih nejednakosti i sredina. U četvrtom poglavlju usredotočit ćemo se na samu Hermite-Hadamardovu integralnu nejednakost, te provesti njezin dokaz. Pokazat ćemo brojne ocjene nejednakosti vezane za određene klase funkcija. Konačno ćemo se baviti primjenama Hermite-Hadamardove nejednakosti u raznim područjima matematike. Neki od dobivenih rezultata bit će temelji poznatih nejednakosti.

1.1 Povijesni pregled

U 19. stoljeću Hermite* u pismu tada prestižnom matematičkom časopisu *Mathesis*, navodi sljedeće nejednakosti

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \int_a^b f(x)dx < (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Zapravo je već pokazao nejednakost kojom se mi danas bavimo, iako će više od dvadeset godina proći prije nego što Jensen definira konveksne (odnosno J-konveksne) funkcije. Zanimljivo je kako ovaj zapis nije priznat te nije objavljen niti u jednoj tadašnjoj matematičkoj literaturi. Matematičar Fejér† je također u svojim radovima obuhvatio nejednakosti koje generaliziraju one Hermitove, ali čak ni tada njegov rad nije prihvaćen. Krajem stoljeća Hadamard‡ dokazuje nejednakost

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \int_a^b f(x)dx,$$

neovisno o Hermitovim radovima, pa se navedene nejednakosti citiraju kao Hadamardove nejednakosti. No, danas u čast obojici velikih matematičara, nejednakost o kojoj ćemo govoriti u radu nazivamo Hermite-Hadamardova integralna nejednakost.

*Charles Hermite (1822-1901), francuski matematičar.
†Lipót Fejér (1880-1959), mađarski matematičar.
‡Jacques Salomon Hadamard (1865-1963), francuski matematičar.

2 Konveksne funkcije

2.1 Definicija i osnovna svojstva

Teorija konveksnih funkcija ima veliku ulogu u različitim granama matematike. Nama je taj pojam potreban za razumijevanje Hermite-Hadamardove integralne nejednakosti, stoga ćemo definirati konveksnu funkciju i navesti nekoliko osnovnih rezultata vezanih uz nju.

Definicija 2.1. *Neka je zadana funkcija $f : I \to \mathbb{R}$, gdje je I interval u $\mathbb{R}$.*

i) Tada za funkciju f kažemo da je konveksna ako za sve $x, y \in I$ i za svako $t \in [0,1]$ vrijedi

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y). \tag{2.1}$$

Ako u (2.1) vrijedi stroga nejednakost za sve $x \neq y$ i $t \in (0,1)$, tada kažemo da je f strogo konveksna.

ii) Slično, funkcija f je konkavna ako u (2.1) vrijedi obrnuta nejednakost. Ukoliko vrijedi stroga nejednakost za sve $x \neq y$ i $t \in (0,1)$, tada kažemo da je f strogo konkavna.

Prethodna definicija je teško provjerljiva u primjerima. Postoji međutim zanimljivo svojstvo dano u sljedećem teoremu.

Teorem 2.1. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval, $f : I \to \mathbb{R}$ dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija. Funkcija f je konveksna na I onda i samo onda ako je $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in I$.*

Sada konačno možemo iskazati teorem koji ćemo upotrebljavati u ostatku rada.

Teorem 2.2. *Diferencijabilna funkcija $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, je konveksna na I onda i samo onda ako f' raste na I.*

2.2 Funkcije povezane s konveksnim funkcijama

Ovdje ćemo se upoznati sa osnovnim klasama funkcija za koje će kasnije biti prezentirane ocjene Hermite-Hadamardove integralne nejednakosti. Svaku od tih klasa ćemo definirati i povezati sa konveksnim funkcijama. Više detalja o ovim klasama funkcija može se pronaći u [11, str. 1-9].

Definicija 2.2. *Kažemo da je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, $f(x) > 0$, $\forall x \in I$, log-konveksna ili multiplikativno konveksna ako za sve $x, y \in I$ i za svako $t \in [0,1]$ vrijedi*

$$f(tx + (1-t)y) \leq [f(x)]^t [f(y)]^{1-t}. \tag{2.2}$$

Sada kada smo definirali log-konveksnu funkciju iskazat ćemo i dokazat teorem koji govori o njenoj povezanosti s konveksnom funkcijom.

Teorem 2.3. *Neka je dana funkcija $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, $f(x) > 0$, $\forall x \in I$. Funkcija f je log-konveksna onda i samo onda ako je funkcija $\log f$ konveksna funkcija.*

Dokaz. $\boxed{\Leftarrow}$ Pretpostavimo da je $\log f$ konveksna funkcija. Tada prema (2.1) vrijedi

$$\begin{aligned} \log f(tx + (1-t)y) &\leq t \log f(x) + (1-t) \log f(y) \\ &= \log f(x)^t + \log f(y)^{1-t} \\ &= \log f(x)^t \cdot f(y)^{1-t}. \end{aligned}$$

Odakle, zbog eksponencijalne funkcije koja je monotono rastuća, dobivamo

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(x)^t \cdot f(y)^{1-t}.$$

Dakle, funkcija f je log-konveksna.

$\boxed{\Rightarrow}$ Neka je funkcija f log-konveksna, tj.

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(x)^t \cdot f(y)^{1-t},$$

pa zbog $f(x) > 0$, $\forall x \in I$, i monotonosti logaritamske funkcije je

$$\log f(tx + (1-t)y) \leq \log \left(f(x)^t \cdot f(y)^{1-t} \right).$$

Zbog svojstava logaritamske funkcije slijedi

$$\log f(tx + (1-t)y) \leq t \log f(x) + (1-t) \log f(y).$$

Prema tome, $\log f$ je konveksna funkcija.

$\square$

Godine 1985., matematičari Godnova i Levin definirali su sljedeću klasu funkcija.

Definicija 2.3. *Za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, kažemo da pripada klasi $Q(I)$ ukoliko je ona nenegativna, te za sve $x, y \in I$ i svako $t \in (0,1)$ zadovoljava nejednakost*

$$f(tx + (1-t)y) \leq \frac{f(x)}{t} + \frac{f(y)}{1-t}. \tag{2.3}$$

Također su ustanovili da sve nenegativne monotone i nenegativne konveksne funkcije pripadaju ovoj klasi funkcija, te dokazali sljedeći rezultat.

Lema 2.1. *Ako je $f \in Q(I)$ i $x, y, z \in I$, tada vrijedi*

$$f(x)(x-y)(x-z) + f(y)(y-x)(y-z) + f(z)(z-x)(z-y) \geq 0.$$

Uočimo kako je izraz u prethodnoj lemi zapravo ekvivalentan izrazu (2.3). Stoga taj izraz može poslužiti kao alternativna definicija klase $Q(I)$. Upoznajmo se sa još jednom klasom funkcija kroz sljedeću definiciju.

Definicija 2.4. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$. Kažemo da je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$, gdje je I konveksan skup u $\mathbb{R}$, kvazi-konveksna ako vrijedi*

$$f(tx + (1-t)y) \leq \max\{f(x), f(y)\},$$

za sve $x, y \in I$ i svako $t \in [0,1]$.

Napomena 2.1. *Svaka konveksna funkcija je kvazi-konveksna, ali obrat ne vrijedi.*

Primjer 2.1. *Funkcija $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ definirana na sljedeći način*

$$f(x) := \begin{cases} x^2, & x \in [0,1] \\ \sqrt{x}, & x \in [1,2] \end{cases}$$

primjer je funkcije koja je kvazi-konveksna, no nije konveksna.

Za nastavak, prisjetimo se sljedeće dvije definicije.

Definicija 2.5. *Za funkciju* $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, *kažemo da je Jensen-konveksna (J-konveksna) ako za sve* $x,y \in I$ *vrijedi*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Definicija 2.6. *Kažemo da je funkcija* $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, *Jensen-kvazi-konveksna ili J-kvazi-konveksna ako vrijedi*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \max\{f(x), f(y)\},$$

za sve x, $y \in I$.

Sada možemo uočiti kako klasa $JQC(I)$ J-kvazi-konveksnih funkcija na I sadrži klasu $J(I)$ J-konveksnih funkcija na I. Sljedeću ideju predstavio nam je poljski matematičar Orlicz[§], koji je taj pojam uspješno koristio u teoriji Orliczovih prostora.

Definicija 2.7. *Neka je* $0 < s \leq 1$. *Za funkciju* $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, *gdje je* $\mathbb{R}_0^+ := [0, \infty)$, *kažemo da je s-konveksna u prvom smislu ili s-konveksna u Orliczovom smislu ako vrijedi*

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y), \tag{2.4}$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ *i* $\alpha, \beta \geq 0$ *takve da je* $\alpha^s + \beta^s = 1$. *Ovu klasu realnih funkcija označavamo sa* K_s^1.

Važno svojstvo s-konveksnih funkcija u prvom smislu dano je u sljedećem teoremu.

Teorem 2.4. *Neka je* $f \in K_s^1$ *i* $0 < s \leq 1$. *Tada nejednakost* (2.4) *vrijedi za sve* $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ *i sve* $\alpha, \beta \geq 0$ *takve da je* $\alpha^s + \beta^s \leq 1$ *ako i samo ako je* $f(0) \leq 0$.

Napomena 2.2. *Valja uočiti da prema prethodnom teoremu uvjet* $\alpha^s + \beta^s = 1$ *u Definiciji 2.7, može se zamijeniti sa* $\alpha^s + \beta^s \leq 1$.

Po uzoru na s-konveksne funkcije u prvom smislu, definirana je još jedna klasa funkcija.

Definicija 2.8. *Za funkciju* $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ *kažemo da je s-konveksna u drugom smislu ili s-konveksna u Brecknerovom smislu ako vrijedi*

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y), \tag{2.5}$$

za sve $x, y \geq 0$ *i* $\alpha, \beta \geq 0$ *takve da je* $\alpha + \beta = 1$ *i* s *fiksan u* $(0, 1]$. *Skup svih s-konveksnih funkcija u drugom smislu označava se sa* K_s^2.

Sljedeći teorem daje vezu između dviju s-konveksnosti. U dokazu tog teorema pomoći će nam sljedeća lema.

Lema 2.2. *Neka je* $f \in K_s^2$. *Tada nejednakost* (2.5) *vrijedi za sve* $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ *i* $\alpha, \beta \geq 0$ *takve da je* $\alpha + \beta \leq 1$ *onda i samo onda ako je* $f(0) = 0$.

[§]Władysław Roman Orlicz (1903-1990), poljski matematičar.

Teorem 2.5. *Neka je $0 < s \leq 1$. Ako je $f \in K_s^2$ i $f(0) = 0$ onda je $f \in K_s^1$.*

Dokaz. Neka je $f \in K_s^2$ i $f(0) = 0$. Za $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ i $\alpha, \beta \geq 0$, gdje je $\alpha^s + \beta^s = 1$ imamo

$$\alpha + \beta \leq \alpha^s + \beta^s = 1.$$

Sada, iskoristimo li Lemu 2.2, nejednakost

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y)$$

vrijedi za sve $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ i $\alpha, \beta \geq 0$. Dakle, $f \in K_s^1$.

□

Obje s-konveksnosti svode se na konveksnost u slučaju da je $s = 1$. Dakle, svaka 1-konveksna funkcija je konveksna funkcija. Engleski matematičar Wright¶ definirao je novu klasu funkcija, generalizirajući princip konveksnosti.

Definicija 2.9. *Kažemo da je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, Wright-konveksna ili W-konveksna na I ako za svaki $y > x$ i $t > 0$ takvi da $y + t$, $x \in I$ vrijedi*

$$f(x + t) - f(x) \leq f(y + t) - f(y).$$

Karakterizaciju Wright-konveksnih funkcija daje sljedeći teorem, a njegov se dokaz može pronaći u [13].

Teorem 2.6. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$. Za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ sljedeće tvrdnje su ekvivalentne*

i) f je W-konveksna na I;

ii) za sve $a, b \in I$ i $t \in [0, 1]$, vrijedi sljedeća nejednakost

$$f((1 - t)a + tb) + f(ta + (1 - t)b) \leq f(a) + f(b).$$

Prethodni teorem motivira sljedeću klasu funkcija.

Definicija 2.10. *Funkcija $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, je Wright-kvazi-koveksna ako za sve $x, y \in I$ i svako $t \in [0, 1]$, vrijedi nejednakost*

$$\frac{1}{2}[f(tx + (1 - t)y) + f((1 - t)x + ty)] \leq \max\{f(x), f(y)\}. \tag{2.6}$$

Klasa Wright-kvazi-konveksnih funkcija na I, u oznaci $WQC(I)$, sadržana je u klasi $W(I)$ Wright-konveksnih funkcija na I. Sljedeći teorem povezuje klase W-kvazi-konveksnih funkcija i J-kvazi-konveksnih funkcija, a njegov dokaz se može pronaći u [4, str. 80-81].

Teorem 2.7. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$. Tada vrijedi sljedeće*

$$WQC(I) \subset JQC(I).$$

¶Edward Maitland Wright (1906-2005), engleski matematičar.

3 Nejednakosti

U ovom poglavlju razmotrit ćemo određene nejednakosti potrebne za daljnje razumijevanje rada. Osnovne sredine brojeva neizostavni su dio ovoga rada, stoga ih je potrebno definirati.

Definicija 3.1. *Neka su* $a = (a_1, \dots, a_n)$ *i* $w = (w_1, \dots, w_n)$ *n-torke pozitivnih realnih brojeva, te* $W_n = \sum_{i=1}^{n} w_i$. *Tada je*

i) Aritmetička sredina brojeva $a_1, \dots, a_n$ *s težinama* $w_1, \dots, w_n$ *definirana izrazom*

$$A_n(a; w) := \frac{w_1 a_1 + w_2 a_2 + \cdots + w_n a_n}{W_n};$$

ii) Geometrijska sredina brojeva $a_1, \dots, a_n$ *s težinama* $w_1, \dots, w_n$ *definirana izrazom*

$$G_n(a; w) := (a_1^{w_1} \cdot a_2^{w_2} \cdot \ldots a_n^{w_n})^{\frac{1}{W_n}}.$$

Ove sredine se često koriste u numeričkoj analizi i ostalim područjima matematike. Jednostavna poveznica između njih dana je u sljedećem teoremu.

Teorem 3.1 (AG nejednakost). *Neka su* $a = (a_1, \dots, a_n)$ *i* $w = (w_1, \dots, w_n)$ *n-torke pozitivnih realnih brojeva, te* $W_n = \sum_{i=1}^{n} w_i$. *Tada vrijedi sljedeća nejednakost*

$$G_n(a; w) \le A_n(a; w).$$

Napomena 3.1. *Postoji nekoliko vrsta dokaza prethodnog teorema. Jedan od mogućih pristupa je korištenjem matematičke indukcije. Ovaj se dokaz u literaturi može pronaći kao Cauchyev dokaz AG nejednakosti. Najelegantnijim dokazom se ipak smatra dokaz pomoću Jensenove nejednakosti (više o njoj može se pronaći u [4, str. 43-45]).*

Sljedeća tvrdnja koju ćemo ovdje iskazati je jedna od najvažnijih matematičkih nejednakosti u matematici i statistici. Više o njoj zainteresirani mogu pronaći u [11, str. 43-63].

Teorem 3.2 (Jensenova[‖] integralna nejednakost). *Neka je* f *integrabilna funkcija definirana na* $[a, b]$ *te neka je* ψ *(ne nužno) neprekidna konveksna funkcija definirana na* $[m, M]$ *gdje je* $m = \inf f$ *i* $M = \sup f$. *Tada vrijedi*

$$\psi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b \psi(f(x))dx. \tag{3.1}$$

Konačno, oznaka $L^p[a, b]$ za $1 \le p < \infty$ predstavljat će nam prostor svih funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ takvih da je $|f|^p$ R-integrabilna funkcija, tj. takvih da p-norma tih funkcija zadovoljava

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

[‖] Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859-1925), danski matematičar.

4 Hermite-Hadamardova integralna nejednakost

Nakon što smo predstavili važne karakteristike konveksnosti, možemo iskazati jednu od najpoznatijih nejednakosti u matematici za konveksne funkcije. Prije nego što ju iskažemo, valja se prisjetiti računanja određenih integrala, pa navedimo dobro poznatu formulu.

Teorem 4.1 (Newton-Leibnizova†† formula).** *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na $[a, b]$ i neka je F primitivna funkcija od f. Tada vrijedi Newton-Leibnizova formula*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Teorem 4.2 (Hermite-Hadamardova nejednakost). *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija na $[a, b]$. Tada vrijedi*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{4.1}$$

Dokaz. Zbog konveksnosti funkcije f na $[a, b]$, vrijedi

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b),$$

za svako $t \in [0, 1]$. Integriramo li tu nejednakost po varijabli t na $[0, 1]$, slijedi

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt \leq f(a)\int_0^1 tdt + f(b)\int_0^1 (1-t)dt.$$

Zbog

$$\int_0^1 tdt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 (1-t)dt = \left(t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

vrijedi

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Uvedimo supstituciju $x = ta + (1-t)b$ i uočimo da vrijedi sljedeće

$$t = \frac{x-b}{a-b} \Rightarrow dt = \frac{dx}{a-b};$$

$$t = 0 \Rightarrow x = b;$$

$$t = 1 \Rightarrow x = a.$$

Odatle dobivamo

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

**Isaac Newton (1642-1717), engleski fizičar, matematičar i astronom.

††Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), njemački filozof, matematičar, fizičar i diplomat.

Time smo pokazali kako je

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}, \tag{4.2}$$

što je zapravo drugi dio nejednakosti (4.1). Zbog konveksnosti funkcije f slijedi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}[f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)] &\geq f\left[\frac{ta+(1-t)b+(1-t)a+tb}{2}\right] \\
&= f\left[\frac{ta+b-tb+a-ta+tb}{2}\right] \\
&= f\left(\frac{a+b}{2}\right).
\end{aligned}$$

Integriramo li tu nejednakost po varijabli t na $[0,1]$, dobivamo

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt + \int_0^1 f((1-t)a+tb)dt\right] \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

To dokazuje prvi dio nejednakosti (4.1). Sada iz (4.2) i (4.3) slijedi tražena nejednakost (4.1), čime je i dokazan teorem.

□

Ono što prethodni teorem zapravo predstavlja jest procjena srednje vrijednosti konveksne funkcije u odnosu na gornju i donju među. Klasične nejednakosti tog teorema poboljšane su i generalizirane na mnogo načina. Sljedeći rezultat predstavlja generalizaciju prvog dijela Hermite-Hadamardove integralne nejednakosti (više o tome može se pronaći u [7]).

Teorem 4.3. *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, konveksna funkcija na I i $a, b \in \operatorname{Int} I$ takvi da je $a < b$. Tada za svako $t \in [a,b]$ i $\lambda \in [f'_-, f'_+]$ vrijedi nejednakost*

$$f(t)+\lambda\left(\frac{a+b}{2}-t\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \tag{4.4}$$

Dokaz. Neka je $t \in [a,b]$. Za svako $\lambda \in [f'_-, f'_+]$ vrijedi sljedeća nejednakost (dokaz ove tvrdnje nalazi se u [11, str. 5])

$$f(x)-f(t) \geq \lambda(x-t),$$

za svaki $x \in [a,b]$. Integriramo li ovu nejednakost na $[a,b]$ po varijabli x dobivamo

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(t)dx &\geq \int_a^b \lambda(x-t)dx \\
\int_a^b f(x)dx - f(t)\cdot x\Big|_a^b &\geq \lambda\left(\frac{x^2}{2}-t\cdot x\right)\Big|_a^b \\
\int_a^b f(x)dx - (b-a)f(t) &\geq \lambda(b-a)\left(\frac{a+b}{2}-t\right) \\
\int_a^b f(x)dx &\geq (b-a)f(t)+\lambda(b-a)\left(\frac{a+b}{2}-t\right).
\end{aligned}$$

Pomnožimo li prethodnu nejednakosti s $\frac{1}{b-a} > 0$, slijedi

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \geq f(t) + \lambda\left(\frac{a+b}{2} - t\right)$$

što dokazuje tvrdnju (4.4).

$\square$

Napomena 4.1. *Iz prethodnog teorema za* $t{=}\frac{a+b}{2}$ *dobivamo prvi dio Hermite-Hadamardove nejednakosti* (4.1).

Uz pretpostavku da je funkcija f diferencijabilna na (a, b), istaknimo još jednu ocjenu aritmetičke integralne sredine te funkcije.

Teorem 4.4. *Neka je* $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, *konveksna funkcija na* I *i* $a, b \in \operatorname{Int} I$ *takvi da je* $a < b$. *Tada za svako* $t \in [a, b]$ *vrijedi sljedeća nejednakost*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(t)}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{bf(b) - af(a) - t(f(b) - f(a))}{b-a}. \tag{4.5}$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je funkcija f diferencijabilna na (a, b). Stoga možemo napisati nejednakost

$$f(t) - f(x) \geq (t - x)f'(x),$$

za sve $t, x \in (a, b)$. Integriramo li tu nejednakost po x na $[a, b]$ dobivamo

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f(t)dx - f(x))dx &\geq \int_a^b (t - xf'(x))dx \\
\int_a^b f(t)dx - \int_a^b f(x)dx &\geq \int_a^b tdx - \int_a^b xf'(x)dx \\
f(t)\cdot x\big|_a^b - \int_a^b f(x)dx &\geq t\cdot x\big|_a^b - \int_a^b xf'(x)dx \\
(b-a)f(t) - \int_a^b f(x)dx &\geq t(f(b) - f(a)) - \int_a^b xf'(x)dx.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Parcijalnom integracijom dobije se

$$\begin{aligned}
\int_a^b xf'(x)dx &= xf(x)\big|_a^b - \int_a^b f(x)dx \\
&= bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx.
\end{aligned}$$

Sada iz nejednakosti (4.6) slijedi

$$(b-a)f(t) - t(f(b) - f(a)) + bf(b) - af(a) \geq 2\int_a^b f(x)dx,$$

što je ekvivalentno sa traženom nejednakošću (4.5).

$\square$

Kao primjedbu iskazat ćemo činjenicu koja je posljedica prethodnog teorema, no zbog složenosti dokaz ne navodimo.

Napomena 4.2. *Uz prethodne pretpostavke i uvjet* $0 \leq a < b$, *vrijedi sljedeća nejednakost*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \min\{M(a,b), N(a,b), O(a,b)\}, \tag{4.7}$$

gdje su

$$M(a,b) := \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) + \frac{bf(b)+af(a)}{b+a}\right];$$

$$N(a,b) := \frac{1}{2}\left[f\left(\sqrt{ab}\right) + \frac{\sqrt{b}f(b)+\sqrt{a}f(a)}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}\right];$$

$$O(a,b) := \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f(b)+f(a)}{2}\right].$$

Dokaz nejednakost (4.7) za $O(a,b)$ napravio je Bullen 1978. godine i može se pronaći u [11, str. 140], a dokaz iste nejednakosti za $N(a,b)$ objavio je Sándor 1988. godine u [12]. Jedan od najvažnijih rezultata daje nam profinjenje drugog dijela Hermite-Hadamardove integralne nejednakosti, a izrečen je sljedećim teoremom.

Teorem 4.5. *Neka je* $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, *konveksna funkcija,* $a, b \in \operatorname{Int} I$ *takvi da je* $a < b$ *i* $x_i \in [a,b], w_i \geq 0$, *te* $W_n := \sum_{i=1}^n w_i > 0$. *Tada vrijedi*

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx &\leq \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{W_n}\sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + \frac{1}{b-a}[(b-\Phi)f(b) + (\Phi-a)f(a)]\right\} \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2},\end{aligned} \tag{4.8}$$

gdje je

$$\Phi = \frac{1}{W_n}\sum_{i=1}^n w_i x_i.$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je funkcija f diferencijabilna na (a,b). Za svaki $x, y \in (a,b)$ vrijedi

$$f(y) - f(x) \geq f'(x)(y-x).$$

Dodatno je

$$f(x_i) - f(x) \geq f'(x)(x_i - x),$$

za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$. Integriramo li prethodnu nejednakost po x na $[a,b]$ dobivamo

$$\int_a^b f(x_i)dx - \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b x_i f'(x)dx - \int_a^b xf'(x)dx$$

$$(b-a)f(x_i) - \int_a^b f(x)dx \geq x_i(f(b)-f(a)) - \int_a^b xf'(x)dx.$$

Iskoristimo li već dokazani indetitet

$$\int_a^b xf'(x)dx = bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx,$$

onda je

$$(b-a)f(x_i) - \int_a^b f(x)dx \geq x_i(f(b)-f(a)) - (bf(b)-af(a)) + \int_a^b f(x)dx.$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx &\leq f(x_i) - \frac{x_i}{b-a}(f(b)-f(a)) + \frac{1}{b-a}(bf(b)-af(a)) \\
&= f(x_i) - \frac{x_i(f(b)-f(a))}{b-a} + \frac{bf(b)-af(a)}{b-a} \\
&= f(x_i) + \frac{(b-x_i)f(b)+(x_i-a)f(a)}{b-a}.
\end{aligned}$$

Preostaje nam pomnožiti prethodnu nejednakost sa $w_i \geq 0$ i sumirati po i od 1 do n. Time smo pokazali da je

$$\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{1}{W_n}\sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + \frac{1}{b-a}[(b-\Phi)f(b)+(\Phi-a)f(a)],$$

što je upravo prvi dio nejednakosti (4.8). Kako bismo pokazali ostatak teorema uvedimo sljedeće supstitucije

$$\lambda = \frac{b-x_i}{b-a} \quad \text{i} \quad \mu = \frac{x_i-a}{b-a},$$

gdje je $x_i \in [a,b]$, za $i \in \{1,\ldots,n\}$. Pretpostavili smo da je funkcija f konveksna i očito je $\lambda+\mu=1$. Zbog toga prema (2.1) vrijedi

$$\frac{b-x_i}{b-a}f(a) + \frac{x_i-a}{b-a}f(b) \geq f(x_i),$$

za sve $i \in \{1,\ldots,n\}$. Analognim množenjem i sumacijom kao u prvom dijelu dokaza, slijedi

$$\frac{1}{b-a}[(b-\Phi)f(a)+(\Phi-a)f(b)] \geq \frac{1}{W_n}\sum_{i=1}^n w_i f(x_i). \tag{4.9}$$

Nadalje, dodamo li toj nejednakosti sa obje strane

$$\frac{1}{b-a}[(b-\Phi)f(b)+(\Phi-a)f(a)],$$

dobivamo

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{W_n}\sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + \frac{1}{b-a}[(b-\Phi)f(b)+(\Phi-a)f(a)] \\
&\leq \frac{1}{b-a}[(b-\Phi)f(a)+(\Phi-a)f(b)+(b-\Phi)f(b)+(\Phi-a)f(a)] \\
&= \frac{1}{b-a}[bf(a)-\Phi f(a)+\Phi f(b)-af(b)+bf(b)-\Phi f(b)+\Phi f(a)-af(a)] \\
&= f(a)+f(b).
\end{aligned}$$

Time je nejednakost (4.8) u potpunosti dokazana.

□

Nejednakost (4.9) u literaturi pronalazimo pod nazivom Lah-Ribarićeva nejednakost (više o ovoj nejednakosti zainteresirani mogu pronaći u [9, str. 9]). Izravna posljedica Teorema 4.5 izrečena je sljedećim korolarom.

Korolar 4.1. *Neka vrijede pretpostavke Teorema 4.5 i neka je $t \in [a, b]$. Za $x_i = t$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, vrijedi sljedeća nejednakost*

$$\frac{f(t)}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{bf(b) - af(a) - t(f(b) - f(a))}{b - a} \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Više ocjena Hermite-Hadamardove integralne nejednakosti za konveksne funkcije može se pronaći u [5].

4.1 H.-H. nejednakost za log-konveksne funkcije

Povezali smo log-konveksne funkcije s konveksnim funkcijama. Stoga je prirodno pokušati proširiti Hermite-Hadamardovu integralnu nejednakost na ovu klasu funkcija. O tome upravo govori glavni rezultat ovoga poglavlja, a vezan je uz ocjenu prvog dijela H.-H. nejednakosti.

Teorem 4.6. *Neka je $f : I \to \mathbb{R}^+$, $I \subseteq \mathbb{R}$, gdje je $\mathbb{R}^+ := (0, \infty)$, log-konveksna funkcija na I. Ako su $a, b \in I$ takvi da je $a < b$, tada vrijede sljedeće nejednakosti*

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\le e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx} \\
&\le \frac{1}{b-a}\int_a^b G(f(x), f(a+b-x))dx \\
&\le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \\
&\le L(f(a), f(b)),
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

gdje je $G(a, b)$ geometrijska sredina i $L(a, b)$ logaritamska sredina brojeva a i b definirana izrazom

$$
L(a,b) := \begin{cases} \frac{b-a}{\ln b - \ln a}, & a \neq b \\ a, & a = b \end{cases}.
$$

Dokaz. Iskoristimo li Hermite-Hadamardovu nejednakost (4.1) za konveksnu funkciju $\ln f$ dobivamo sljedeću nejednakost

$$
\ln f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx,
$$

iz koje očito slijedi prvi dio nejednakosti (4.10). Integracijom jednakosti

$$
G(f(x), f(a+b-x))) = e^{\ln(G(f(x), f(a+b-x)))}
$$

na intervalu $[a, b]$ i primjenom Jensenove integralne nejednakosti (3.1) za eksponencijalnu funkciju, slijedi

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{b-a}\int_a^b G(f(x), f(a+b-x))dx &= \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{\ln(G(f(x), f(a+b-x)))}dx \\
&\ge e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln[(G(f(x), f(a+b-x))]dx} \\
&= e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\frac{\ln f(x) + \ln f(a+b-x)}{2}\right)dx} \\
&= e^{\frac{1}{2(b-a)}\left(\int_a^b \ln f(x)dx + \int_a^b \ln f(a+b-x)dx\right)}.
\end{aligned}
$$

Lako se pokaže identitet

$$
\int_a^b \ln f(a+b-x)dx = \int_a^b \ln f(x)dx,
$$

pa je

$$
\frac{1}{b-a}\int_a^b G(f(x), f(a+b-x))dx \ge e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx}.
$$

Prema već dokazanom prvom dijelu nejednakosti (4.10), vidimo da vrijedi

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b G(f(x), f(a+b-x))dx \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Dakle, i druga nejednakost u (4.10) je dokazana. Prema AG nejednakosti je

$$G(f(x), f(a+b-x)) \leq \frac{f(x)+f(a+b-x)}{2},$$

za sve $x \in [a,b]$. Nadalje, neka je F primitivna funkcija od f. Vrijedi

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(a+b-x)dx = \left.\frac{-F(a+b-x)}{b-a}\right|_a^b = \frac{F(b)-F(a)}{b-a} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

pa je

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b G(f(x), f(a+b-x))dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

To dokazuje treću nejednakost u (4.10). Kako bismo pokazali posljednju nejednakost, iskoristit ćemo definiciju log-konveksnosti funkcije f. Integriramo li (2.2) uz supstituciju $x = a$ i $y = b$ po t, dobivamo

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt \leq \int_0^1 [f(a)]^t[f(b)]^{1-t}dt.$$

Sada kako je

$$\int_a^b f(ta+(1-t)b)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

i

$$\begin{aligned}\int_0^1 [f(a)]^t[f(b)]^{1-t}dt &= f(b)\int_0^1 \left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)^t dt\\ &= f(b)\left.\left[\frac{\left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)^t}{\ln\left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)}\right]\right|_0^1\\ &= f(b)\left[\frac{\frac{f(a)}{f(b)}-1}{\ln\left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)}\right]\\ &= L(f(a), f(b)),\end{aligned}$$

tvrdnja je dokazana. □

Prethodni teorem i njegov dokaz mogu se naći u [4, str. 71-73]. Autori Dragomir i Mond dokazali su više ocjena H.-H. integralne nejednakosti za log-konveksne funkcije u [6].

4.2 H.-H. nejednakost za Godnova-Levin klase funkcija

Kao što smo već spomenuli, sve nenegativne konveksne funkcije pripadaju Godnova-Levin klasi funkcija. Ta činjenica nam govori kako ima smisla tražiti ocjene Hermite-Hadmardove integralne nejednakosti za takve funkcije. Istaknut ćemo dva važnija rezultata, a prvi od njih dan je u sljedećem teoremu.

Teorem 4.7. *Neka je $f \in Q(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$, $a, b \in I$ takvi da je $a < b$ i $f \in L^1[a, b]$. Tada vrijedi sljedeća nejednakost*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{4}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \tag{4.11}$$

Konstanta 4 *u* (4.11) *je nabolji mogući izbor.*

Dokaz. Kako je $f \in Q(I)$, za sve x, $y \in I$ (uz $\lambda = \frac{1}{2}$ u nejednakosti (2.3)) vrijedi

$$2(f(x) + f(y)) \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Supstituiramo li

$$x = ta + (1-t)b$$

i

$$y = (1-t)a + tb,$$

dobivamo

$$\begin{aligned} 2(f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)) &\geq f\left(\frac{ta + (1-t)b + (1-t)a + tb}{2}\right) \\ &\geq f\left(\frac{ta + b - tb + a - ta + tb}{2}\right) \\ &\geq f\left(\frac{a+b}{2}\right). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Nadalje, integriramo li (4.12) po $t \in [0, 1]$, slijedi

$$2\left[\int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt + \int_0^1 f((1-t)a + tb)dt\right] \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Lako se pokaže da vrijedi

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt = \int_0^1 f((1-t)a + tb)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

pa dobivamo traženu nejednakost (4.11). Pokažimo sada ostatak teorema. U tu svrhu definirajmo funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 1, & a \leq x < \frac{a+b}{2} \\ 4, & x = \frac{a+b}{2} \\ 1, & \frac{a+b}{2} < x \leq b. \end{cases}$$

Jednostavno se provjeri kako se za tu funkciju u (4.11) postiže jednakost. Dakle, 4 je zaista najbolja moguća konstanta.

$\square$

Kako bi smo pokazali drugu, mnogo precizniju ocjenu H.-H. nejednakosti za ovu klasu funkcija, upoznajmo se najprije sa klasom $P(I) \subset Q(I)$.

Definicija 4.1. *Kažemo da funkcija $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, pripada klasi P(I) ako je nenegativna i zadovoljava sljedeće*

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(x) + f(y), \tag{4.13}$$

za sve $x, y \in I$, $t \in [0, 1]$.

Valja uočiti da se klasa $P(I)$ sastoji samo od nenegativnih funkcija koje zadovoljavaju

$$f(tx + (1-t)y) \leq \max\{f(x), f(y)\},$$

za sve $x, y \in I$ i svako $t \in [0, 1]$.

Teorem 4.8. *Neka je $f \in P(I)$, $a, b \in I$ takvi da je $a < b$ i $f \in L^1[a, b]$. Tada vrijede sljedeće nejednakosti*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq 2(f(a) + f(b)). \tag{4.14}$$

Obje nejednakosti su najbolje moguće.

Dokaz. Uvedemo li u nejednakost (4.13) sljedeće supstitucije varijabli

$$x = \lambda a + (1-\lambda)b;$$

$$y = (1-\lambda) + \lambda b;$$

$$t = \frac{1}{2},$$

vidimo kako za svako $\lambda \in [0, 1]$ vrijedi

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(\lambda a + (1-\lambda)b) + f((1-\lambda)a + \lambda b).$$

Integracijom prethodne nejednakosti na $[0, 1]$ dobivamo sljedeće

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_0^1 [f(\lambda a + (1-\lambda)b) + f((1-\lambda)a + \lambda b)]d\lambda.$$

Već smo rekli kako je

$$\int_0^1 f(\lambda a + (1-\lambda)b)d\lambda = \int_0^1 f((1-\lambda)a + \lambda b)d\lambda = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

iz čega slijedi prvi dio tražene nejednakosti (4.14). Uočimo kako se ovdje jednakost postiže za funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 0, & a \leq x < \frac{a+b}{2} \\ 1, & \frac{a+b}{2} \leq x \leq b. \end{cases}$$

Kako bismo dokazali drugi dio nejednakosti (4.14) također ćemo iskoristiti nejednakost (4.13), ali uz zamjenu $x = a$ i $y = b$. Sada je

$$f(ta + (1-t)b) \leq f(a) + f(b).$$

Integriramo li tu nejednakost po t na $[0,1]$, dobivamo

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt &\leq \int_0^1 f(a)dt + \int_0^1 f(b)dt \\ &\leq f(a)+f(b).\end{aligned}$$

Dakle,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq f(a)+f(b),$$

što je drugi dio nejednakosti (4.14). Slučaj jednakost vrijedi za funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x=a \\ 1, & a<x\leq b. \end{cases}$$

Prema tome, obje nejednakosti su najbolje moguće. Time je dokaz dovršen.

$\square$

4.3 H.-H. nejednakost za kvazi-konveksne funkcije

Svaka konveksna funkcija je kvazi-konveksna, pa je logično pitati se možemo li Hermite-Hadamardovu integralnu nejednakost primjeniti na klasu kvazi-konveksnih funkcija. O tome govori glavni rezultat ovoga poglavlja. On ocjenjuje prvi dio H.-H. nejednakosti, te je iskazan u sljedećem teoremu.

Teorem 4.9. *Neka su $a, b \in I$, $I \subseteq \mathbb{R}$, takvi da je $a < b$. Ako je $f \in JQC(I) \bigcap L^1[a,b]$, onda vrijedi*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx + D(a,b), \tag{4.15}$$

gdje je

$$D(a,b) := \frac{1}{2(b-a)}\int_a^b |f(x) - f(a+b-x)|dx.$$

Dokaz. Kako je f J-kvazi-konveksna na I, prema Definiciji 2.6 za sve x, $y \in I$ vrijedi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \max\{f(x), f(y)\}.$$

Iskoristit ćemo sljedeće

$$\max\{f(x), f(y)\} = \frac{f(x) + f(y) + |f(x) - f(y)|}{2}.$$

Prethodna tvrdnja se lako pokaže, jer u slučaju da je

$$\max\{f(x), f(y)\} = f(x)$$

dobivamo

$$\frac{f(x) + f(y) + |f(x) - f(y)|}{2} = \frac{f(x) + f(y) + f(x) - f(y)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x).$$

Analogno se pokazuje za slučaj

$$\max\{f(x), f(y)\} = f(y).$$

Iz toga slijedi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y) + |f(x) - f(y)|}{2}.$$

Uz supstituciju

$$x = ta + (1-t)b \in I$$

i

$$y = (1-t)a + tb \in I,$$

za $t \in [0,1]$ vrijedi

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[&f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb) \\ &+ |f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)|]. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Integriramo li nejednakost (4.16) po t na $[0,1]$ dobivamo

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt + \int_0^1 f((1-t)a+tb)dt\right] + \frac{1}{2}\int_0^1 |f(ta+(1-t)b) + f((1-t)a+tb)|dt.$$

Kako znamo da vrijedi

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt = \int_0^1 f((1-t)a+tb)dt$$

i uz supstituciju

$$x = ta + (1-t)b,$$

slijedi

$$\frac{1}{2}\int_0^1 |f(ta+(1-t)b) - f((1-t)a+tb)|dt = \frac{1}{2(b-a)}\int_a^b |f(x) - f(a+b-x)|dx.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx + \frac{1}{2(b-a)}\int_a^b |f(x) - f(a+b-x)|dx \\ &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx + \frac{1}{2(b-a)}\int_a^b |f(x) - f(a+b-x)|dx \end{aligned}$$

i uz oznaku

$$D(a,b) := \frac{1}{2(b-a)}\int_a^b |f(x) - f(a+b-x)|dx$$

nejednakost (4.15) je dokazana.

□

Konačno, iskazat ćemo ocjenu H.-H. nejednakosti za klasu Wright-kvazi-konveksnih funkcija.

Teorem 4.10. *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, Wright-kvazi-konveksna funkcija na I. Neka su $a, b \in I$ takvi da je $a < b$ i $f \in L^1[a,b]$. Tada vrijedi sljedeća nejednakost*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \max\{f(a), f(b)\}. \tag{4.17}$$

Dokaz. Prema Definiciji 2.10 za svako $t \in [0,1]$ vrijedi

$$\frac{1}{2}[f(ta+(1-t)b) + f((1-t)a+tb)] \leq \max\{f(a), f(b)\}.$$

Najprije, integriramo ovu nejednakost po t na $[0,1]$. Imamo

$$\int_0^1 \frac{1}{2}[f(ta+(1-t)b) + f((1-t)a+tb)]dt \leq \int_0^1 \max\{f(a), f(b)\}dt.$$

Iskoristimo li identitet

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt = \int_0^1 f((1-t)a+tb)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

dobivamo traženu nejednakost (4.17).

□

4.4 H.-H. nejednakost za s-konveksne funkcije

Devedesetih godina prošloga stoljeća matematičari H. Hudzik i L. Maligranda poopćili su pojam konveksnosti uvodeći s-konveksne funkcije. U ovom poglavlju dokazat ćemo da i za s-konveksne funkcije vrijedi Hermite-Hadamardova integralna nejednakost. Također, proučit ćemo razne ocjene koje iz nje proizlaze.

4.4.1 Orliczove funkcije

U sljedećem teoremu dan je opći oblik prvog dijela Hermite-Hadamardove integralne nejednakosti za s-konveksne funkcije u prvom smislu.

Teorem 4.11. *Neka je $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ s-konveksna funkcija u prvom smislu za $s \in (0, 1)$. Ako su $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ takvi da je $a < b$, tada vrijedi sljedeća nejednakost*

$$f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \tag{4.18}$$

Dokaz. Ako u (2.4) izaberemo $\alpha = \beta = \frac{1}{2^{\frac{1}{s}}}$, onda je $\alpha^s + \beta^s = 1$. Dakle, za sve $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ vrijedi

$$f\left(\frac{x+y}{2^{\frac{1}{s}}}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Stavimo li u gornju nejednakost

$$x = ta + (1-t)b$$

i

$$y = (1-t)a + tb,$$

dobivamo

$$\begin{aligned} f\left(\frac{ta+(1-t)b+(1-t)a+tb}{2^{\frac{1}{s}}}\right) &\leq \frac{1}{2}[f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)] \\ f\left(\frac{ta+b-tb+a-ta+tb}{2^{\frac{1}{s}}}\right) &\leq \frac{1}{2}[f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)] \\ f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\right) &\leq \frac{1}{2}[f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)], \end{aligned}$$

za svako $t \in [0, 1]$. Integriramo li gornju nejednakost po varijabli t slijedi

$$\begin{aligned} \int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\right) dt &\leq \int_0^1 \frac{1}{2}[f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)]dt \\ &\leq \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt + \int_0^1 f((1-t)a+tb)dt\right]. \end{aligned}$$

Znamo da vrijedi

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt = \int_0^1 f((1-t)a+tb)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

pa je

$$f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\right) \leq \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

što je upravo tražena nejednakost (4.18).

□

Sljedeći rezultat je vrlo sličan i predstavlja generalizirani oblik drugog dijela Hermite-Hadamardove integralne nejednakosti.

Teorem 4.12. *Neka je $f:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}$ s-konveksna funkcija u prvom smislu za $s\in(0,1)$. Ako su $a,b\in\mathbb{R}_0^+$ takvi da je $a<b$, tada vrijedi nejednakost*

$$\int_0^1 f(ta+(1-t^s)^{\frac{1}{s}}b)\vartheta(t)dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{4.19}$$

gdje je

$$\vartheta(t) := \frac{1}{2}\left[1+(1-t^s)^{\frac{1}{s}-1}t^{s-1}\right], \quad t\in(0,1]. \tag{4.20}$$

Dokaz. Iskoristimo Definiciju 2.7 za

$$\alpha = t \quad \text{i} \quad \beta = (1-t^s)^{\frac{1}{s}}, \quad t\in[0,1].$$

Tada vrijedi

$$\alpha^s+\beta^s=1$$

i

$$f(ta+(1-t^s)^{\frac{1}{s}}b) \leq t^s f(a)+(1-t^s)f(b),$$

za svako $t\in[0,1]$. Na analogan način se za svako $t\in[0,1]$ dobije i

$$f((1-t^s)^{\frac{1}{s}}a+tb) \leq (1-t^s)f(a)+t^s f(b).$$

Zbrojimo li prethodne dvije nejednakosti i pomnožimo sve sa $\frac{1}{2}$ dobivamo

$$\frac{1}{2}\left[f\left(ta+(1-t^s)^{\frac{1}{s}}b\right)+f\left((1-t^s)^{\frac{1}{s}}a+tb\right)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Integriramo li ovu nejednakost po t na $[0,1]$, slijedi

$$\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f\left(ta+(1-t^s)^{\frac{1}{s}}b\right)dt+\int_0^1 f\left((1-t^s)^{\frac{1}{s}}a+tb\right)dt\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{4.21}$$

Uvedimo sljedeću oznaku

$$u := (1-t^s)^{\frac{1}{s}}, \quad t\in[0,1].$$

Odatle je

$$t=(1-u^s)^{\frac{1}{s}}$$

i vrijedi

$$\begin{aligned} dt &= \frac{1}{s}\cdot(1-u^s)^{\frac{1}{s}-1}\cdot(-su^{s-1})du \\ &= -(1-u^s)^{\frac{1}{s}-1}u^{s-1}du, \end{aligned}$$

gdje je $u \in (0,1]$. Nakon zamjene varijable t slijedi

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f\left((1-t^s)^{\frac{1}{s}}a + tb\right) dt &= -\int_1^0 f\left(ua + (1-u^s)^{\frac{1}{s}}b\right)(1-u^s)^{\frac{1}{s}-1}u^{s-1}du \\
&= \int_0^1 f\left(ua + (1-u^s)^{\frac{1}{s}}b\right)(1-u^s)^{\frac{1}{s}-1}u^{s-1}du.
\end{aligned}$$

Neka je sada $t \in (0,1]$. Iskoristimo li nejednakost (4.21) dobivamo

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f\left(ta + (1-t^s)^{\frac{1}{s}}\, b\right) dt + \int_0^1 f\left(ta + (1-t^s)^{\frac{1}{s}}b\right)(1-t^s)^{\frac{1}{s}-1}t^{s-1}dt\right] \\
&\qquad = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[1 + (1-t^s)^{\frac{1}{s}-1}t^{s-1}\right] \cdot f\left(ta + (1-t^s)^{\frac{1}{s}}b\right) dt \\
&\qquad \le \frac{f(a)+f(b)}{2}.
\end{aligned}$$

Uz oznaku

$$\vartheta(t) := \frac{1}{2}\left[1 + (1-t^s)^{\frac{1}{s}-1}t^{s-1}\right],$$

smo pokazali da vrijedi (4.19), čime je i dokazan teorem.

□

Navest ćemo nekoliko posljedica prethodnih teorema čiji se dokazi u cijelosti mogu pronaći u [4, str. 90-93].

Korolar 4.2. *Uz pretpostavke Teorema 4.11, vrijede sljedeće nejednakosti*

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\right) &\le \int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\left[t + (1-t^s)^{\frac{1}{s}}\right]\right) dt \\
&\le \int_0^1 f\left(ta + (1-t^s)^{\frac{1}{s}}b\right)\vartheta(t)dt,
\end{aligned}$$

gdje je ϑ definiran sa (4.20).

Korolar 4.3. *Neka je $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ s-konveksna funkcija u prvom smislu za $s \in (0,1)$. Ako su $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ takvi da je $a < b$, onda vrijedi sljedeće*

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{2}{s}-1}}\right) &\le \int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\left[t^{\frac{1}{s}} + (1-t)^{\frac{1}{s}}\right]\right) dt \\
&\le \int_0^1 f\left(at^{\frac{1}{s}} + b(1-t)^{\frac{1}{s}}\right) dt \\
&\le \frac{f(a)+f(b)}{2}.
\end{aligned}$$

Konačno, sljedeći rezultat predstavlja gornju granicu za integralnu sredinu s-konveksne funkcije u prvom smislu.

Teorem 4.13. *Neka je $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ s-konveksna funkcija u prvom smislu za $s \in (0,1)$. Ako je integral*

$$\int_a^\infty x^{\frac{s+1}{s-1}} f(x)dx$$

konačan i $0 < a < b$, tada vrijedi sljedeća nejednakost

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \frac{s}{1-s}\left[a^{\frac{2s}{1-s}} + b^{\frac{2s}{1-s}}\right]\int_a^\infty x^{\frac{s+1}{s-1}} f(x)dx. \tag{4.22}$$

Dokaz. Zbog s-konveksnosti funkcije f na $\mathbb{R}_0^+$, vrijedi

$$f\left(t^{\frac{1}{s}}v + (1-t)^{\frac{1}{s}}w\right) \le tf(v) + (1-t)f(w),$$

za svako $t \in [0,1]$ i $v, w \ge 0$. Uvedimo sljedeće supstitucije

$$v = t^{1-\frac{1}{s}}a, \quad t \in (0,1]$$

i

$$w = (1-t)^{1-\frac{1}{s}}b, \quad t \in [0,1).$$

Tada iz prethodne nejednakosti slijedi

$$\begin{aligned} f\left(t^{\frac{1}{s}} \cdot t^{1-\frac{1}{s}}a + (1-t)^{\frac{1}{s}} \cdot (1-t)^{1-\frac{1}{s}}b\right) &\le tf(t^{1-\frac{1}{s}}a) + (1-t)f((1-t)^{1-\frac{1}{s}}b) \\ f(t^{1-\frac{1}{s}+\frac{1}{s}}a + (1-t)^{1-\frac{1}{s}+\frac{1}{s}}b) &\le tf\left(t^{1-\frac{1}{s}}a\right) + (1-t)f\left((1-t)^{1-\frac{1}{s}}b\right) \\ f(ta + (1-t)b) &\le tf\left(t^{1-\frac{1}{s}}a\right) + (1-t)f\left((1-t)^{1-\frac{1}{s}}b\right), \end{aligned} \tag{4.23}$$

za svako $t \in (0,1)$. Integracijom nejednakosti (4.23) po t dobivamo

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt \le \int_0^1 tf\left(t^{1-\frac{1}{s}}a\right)dt + \int_0^1 (1-t)f\left((1-t)^{1-\frac{1}{s}}b\right)dt.$$

Iskoristimo li identitet koji smo prethodno spomenuli

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

slijedi

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \int_0^1 tf\left(t^{1-\frac{1}{s}}a\right)dt + \int_0^1 (1-t)f\left((1-t)^{1-\frac{1}{s}}b\right)dt.$$

Pokažimo sada kako je integral

$$\int_0^1 tf\left(t^{1-\frac{1}{s}}a\right)dt \tag{I$_1$}$$

konačan. U tu svrhu neka je

$$x = t^{1-\frac{1}{s}}a, \quad t \in (0,1].$$

Tada je

$$t = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{1-\frac{1}{s}}} = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{s}{s-1}} = \frac{x^{\frac{s}{s-1}}}{a^{\frac{s}{s-1}}}$$

i

$$dt = \frac{s}{s-1} \cdot \frac{x^{\frac{s}{s-1}-1}}{a^{\frac{s}{s-1}}} dx = \frac{s}{s-1} \cdot \frac{x^{\frac{1}{s-1}}}{a^{\frac{s}{s-1}}} dx.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} \int_0^1 tf\left(t^{1-\frac{1}{s}}a\right) dt &= -\int_\infty^a \left[\frac{x^{\frac{s}{s-1}}}{a^{\frac{s}{s-1}}} \cdot \frac{s}{s-1} \cdot \frac{x^{\frac{1}{s-1}}}{a^{\frac{s}{s-1}}} f(x)\right] dx \\ &= \frac{s}{1-s} \cdot a^{\frac{2s}{1-s}} \int_a^\infty x^{\frac{s+1}{s-1}} f(x) dx < \infty. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Prema tome, integral (I_1) je konačan. Na analogan način se dobije i

$$\int_0^1 (1-t) f\left((1-t)^{1-\frac{1}{s}} b\right) dt = \frac{s}{1-s} \cdot b^{\frac{2s}{1-s}} \int_a^\infty x^{\frac{s+1}{s-1}} f(x) dx < \infty. \tag{4.25}$$

Sada iz (4.24) i (4.25), slijedi tražena nejednakost (4.22).

□

Dokaz prethodnog teorema može se pronaći u [4, str. 92-93].

4.4.2 Brecknerove funkcije

U prethodnom smo poglavlju razmatrali ocjene Hermite-Hadamardove integralne nejednakosti za s-konveksne funkcije u prvom smislu. Sada ćemo to isto učiniti za s-konveksne funkcije u drugom smislu. Ovaj rezultat, kao i brojne druge, objavili su autori Hudzik i Maligranda u [8].

Teorem 4.14. *Neka je $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ s-konveksna funkcija u drugom smislu, $s \in (0,1)$ i $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ takvi da je $a < b$. Ako je $f \in L^1[a,b]$, tada vrijedi*

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1}. \tag{4.26}$$

Dokaz. Prema Definiciji 2.8 za svako $t \in [0,1]$ vrijedi

$$f(ta+(1-t)b) \leq t^s f(a) + (1-t)^s f(b).$$

Integriramo li ovu nejednakost na $[0,1]$, dobivamo

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt &\leq f(a)\int_0^1 t^s dt + f(b)\int_0^1 (1-t)^s dt\\ &= f(a)\cdot\left(\frac{t^{s+1}}{s+1}\right)\Big|_0^1 + f(b)\cdot\left(-\frac{(1-t)^{s+1}}{s+1}\right)\Big|_0^1\\ &= \frac{f(a)+f(b)}{s+1}.\end{aligned}$$

Otprije znamo kako za

$$x = ta + (1-t)b$$

vrijedi

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Time je drugi dio nejednakosti (4.26) dokazan. Kako bi smo dokazali prvu nejednakost u (4.26), uočimo da za sve $x, y \in I$ vrijedi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2^s}.$$

Sada za

$$x = ta + (1-t)b$$

i

$$y = (1-t)a + tb,$$

gdje je $t \in [0,1]$, dobivamo

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(ta+(1-t)b) + f((1-t)a+tb)}{2^s}, \quad \forall t \in [0,1].$$

Integracijom prethodne nejednakosti po t na $[0,1]$ slijedi

$$\begin{aligned}\int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2}\right)dt &\leq \frac{1}{2^s}\left[\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt + \int_0^1 f((1-t)a+tb)dt\right]\\ f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{2^{s-1}}\cdot\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.\end{aligned}$$

Dakle, nejednakost (4.26) je u potpunosti dokazana. □

5 Primjene H.-H. nejednakosti

U ovome poglavlju ćemo pokazati kako se razne algebarske nejednakosti mogu uspješno pokazati primjenom Hermite-Hadamardove integralne nejednakosti, ukoliko se stvore uvjeti za tu primjenu. To ćemo demonstrirati na nekoliko primjera koji se mogu pronaći u [10].

Primjer 5.1. *Za funkciju $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ zadanu s*

$$f(x) := \frac{1}{1+x},$$

vrijedi

$$x - \frac{x^2}{2+x} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)}.$$

Kako bismo to pokazali uočimo da je funkcija f konveksna zbog

$$f'(x) = \frac{2}{(1+x)^2} > 0.$$

Neka je

$$a = 0 \quad i \quad b = x.$$

Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
(b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= x \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = x - \frac{x^2}{2+x}; \\
\int_a^b f(x)dx &= \int_0^x \frac{1}{1+x}dx = \ln(1+x); \\
(b-a) \cdot \frac{f(a)+f(b)}{2} &= x \cdot \frac{1+\frac{1}{1+x}}{2} \\
&= \frac{x}{2}\left[1 + \frac{1}{1+x}\right] \\
&= x - \frac{x^2}{2(1+x)},
\end{aligned}$$

pa zbog Hermite-Hadamardove nejednakosti (4.1) *slijedi tražena nejednakost.*

Napomena 5.1. *Prethodni primjer implicira općenitiju nejednakost. Za svaki pozitivan prirodan broj n vrijedi*

$$\frac{1}{n+\frac{1}{2}} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right).$$

Kako bismo to pokazali dovoljno je iskoristiti Hermite-Hadamardovu nejednakost (4.1) *za konveksnu funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$, na intervalu $[n, n+1]$, gdje je $n > 0$. Važnost te nejednakosti je u tome što se primjenjuje u dokazu Stirlingove*[‡‡] *formule*

$$n! \sim \sqrt{2\pi} \cdot n^{\frac{n+1}{2}} e^{-n}.$$

[‡‡]James Stirling (1692-1770), škotski matematičar.

Sljedeći primjer je dokaz odnosa između geometrijske, logaritamske i artimetičke sredine brojeva. Više o njihovim odnosima može se pronaći u [2].

Primjer 5.2. *Za eksponencijalnu funkciju* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$,

$$f(x) := e^x$$

vrijedi

$$e^{\frac{(a+b)}{2}} < \frac{e^b - e^a}{b - a} < \frac{e^a + e^b}{2}$$

za $a, b \in \mathbb{R}$ *takve da je* $a \neq b$. *Iz Hermite-Hadamardove nejednakosti* (4.1) *uz zamjenu*

$$a = \ln x \quad i \quad b = \ln y,$$

vrijedi

$$\sqrt{xy} = e^{\ln \sqrt{xy}} = e^{\frac{\ln x + \ln y}{2}} < \frac{x - y}{\ln x - \ln y} < \frac{x + y}{2},$$

za $x, y \in \mathbb{R}^+$ *takve da je* $x \neq y$.

Hermite-Hadamardova integralna nejednakosti primjenjuje se i u Choquetovoj$^{\oplus}$ teoriji, o kojoj se detaljnije može pročitati u [10].

5.1 Kvadraturne formule

Prirodno je razmišljati o povezanosti Hermite-Hadamardove integralne nejednakosti i različitih formula u matematici. Osobito su zanimljive kvadraturne formule za numeričku aproksimaciju konačnih integrala. Izdvojit ćemo dvije važnije kvadraturne formule, te njih povezati povezati sa H.-H. nejednakošću. U nastavku se koristi teorija Gaussovih$^{\diamondsuit}$ kvadraturnih formula o kojoj se detaljno može pogledati u [3].

Definicija 5.1. *Kažemo da je funkcija* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *klase* $C^p([a, b], \mathbb{R})$, $p > 1$, *ili* p*-puta neprekidno diferencijabilna onda i samo onda ako sve parcijalne derivacije do uključivo* p*-tog reda postoje i neprekidne su.*

Teorem 5.1 (Trapezna formula). *Za funkciju* $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ *vrijedi sljedeća kvadraturna formula*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f''(x) \frac{(b-x)(x-a)}{2} dx.$$

Dokaz. Dva puta parcijalnom integracijom funkcije $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ dobivamo

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b-a} \int_a^b \left[f(x) - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right] dx \\
&\quad = \frac{1}{b-a} \left[x \left(f(x) - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) x dx \right] \\
&\quad = \frac{1}{b-a} \left[b \cdot \frac{f(b) - f(a)}{2} + a \cdot \frac{f(b) - f(a)}{2} - \int_a^b f'(x) x dx \right]
\end{aligned}$$

$^{\oplus}$Gustave Choquet (1915-2006), francuski matematičar.

$^{\diamondsuit}$Carl Friedrich Gauss (1777-1855), njemački matematičar.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{b-a}\left[\int_a^b f'(x)\left(\frac{a+b}{2}-x\right)dx\right] \\
&= \frac{1}{b-a}\left[f'(x)\left(x\cdot\frac{a+b}{2}-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_a^b - \int_a^b f''(x)\left(x\cdot\frac{a+b}{2}-\frac{1}{2}x^2\right)dx\right] \\
&= \frac{1}{b-a}\left[f'(b)\frac{ab}{2}-f'(a)\frac{ab}{2}-\int_a^b f''(x)\left(x\cdot\frac{a+b}{2}-\frac{1}{2}x^2\right)dx\right] \\
&= \frac{1}{b-a}\left[\int_a^b f''(x)\left(\frac{ab}{2}-x\frac{a+b}{2}+\frac{1}{2}x^2\right)dx\right] \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b f''(x)\frac{(b-x)(x-a)}{2}dx.
\end{aligned}
$$

□

Napomena 5.2. *U slučaju da je $f'' \geq 0$, tada prethodna kvadraturna formula predstavlja drugi dio Hermite-Hadmardove integralne nejednakosti* (4.1).

Drugi primjer kvadraturne formule dan je sljedećim teoremom.

Teorem 5.2. *Za funkciju $f \in C^4([a,b],\mathbb{R})$ vrijedi*

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = &\frac{1}{8}\left[f(a)+3f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+3f\left(\frac{a+3b}{4}\right)+f(b)\right] \\
&-\frac{1}{b-a}\int_a^b f^{(iv)}(x)\theta(x)dx,
\end{aligned}
$$

gdje je θ po dijelovima nenegativna funkcija takva da je

$$
\frac{1}{b-a}\int_a^b \theta(x)dx = \frac{(b-a)^4}{6480}.
$$

Prethodna kvadraturna formula daje precizniju ocjenu drugog dijela Hermite-Hadamardove nejednakosti. Detaljnije o njezinim ocjenama i samoj kvadraturnoj formuli može se pronaći u [10].

Korolar 5.1. *Za funkciju $f \in C^4([a,b],\mathbb{R})$, uz uvjet da je $f^{(iv)} \geq 0$, vrijedi sljedeća nejednakost*

$$
\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{1}{8}\left[f(a)+3f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+3f\left(\frac{a+3b}{4}\right)+f(b)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.
$$

Matematičari M. Bessenyei i Z.Páles su u [1] uspješno proširili Hermite-Hadamardovu integralnu nejednakost za konveksne funkcije višeg reda.

Literatura

[1] M. Bessenyei, Z. Páles, *Higher order generalizations of Hadamard's inequality*, Publ. Math., Debrecen, 61 (2002), 623–643.

[2] F. Burk, *The Geometric, Logarithmic and Arithmetic Mean Inequality*, Amer. Math. Month., 94 (1987), 527–528.

[3] M. Cameron, *Gaussian quadrature*, University od Maryland. Javno dostupno na: `http://www2.math.umd.edu/ mariakc/teaching/gaussian.pdf`.

[4] P. Cerone, S. S. Dragomir, *Mathematical inequalities*, Taylor & Francis Group, New York, 2011.

[5] S. S. Dragomir, *On Hadamard's inequality for convex functions, Mat.Balkanica*, 6 (1992), 219-222.

[6] S. S. Dragomir, B. Mond, *Integral inequalities of Hadamard type for log-convex functions*, Demonstratio Math., 31(2) (1998), 354-364.

[7] S. S. Dragomir, C. E. M. Pearce, *Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications*, RGMIA Monographs, Victoria University, Melbourne, Victoria, Australia, 2000. Javno dostupno na: `http://rgmia.org/papers/monographs/Master2.pdf`.

[8] H. Hudzik, L. Maligranda, *Some remarks on s-convex functions*, Aequationes Mathematicae 48 (1994), 100–111.

[9] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, A. M. Fink, *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1993.

[10] C. P. Niculescu, L.-E. Persson, *Old and new on the Hermite-Hadamard inequality*, Real Analysis Exchange, 29(2) (2003), 663–685.

[11] J. E. Pečarić, F. Proschan, Y. L. Tong, *Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications*, Academic Press, London, 1992.

[12] J. Sándor, *Some integral inequalities*, El. Math., 43 (1988), 177-180.

[13] E. M. Wright, *An inequality for convex functions*, Amer. Math. Monthly, 61 (1954), 620-622.