Razni načini zadavanja vjerojatnosti

Pešorda, Sanja

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Sanja Pešorda

Razni načini zadavanja vjerojatnosti

Završni rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Sanja Pešorda

Razni načini zadavanja vjerojatnosti

Završni rad

Voditelj: doc. dr. sc. Slobodan Jelić

Osijek, 2017.

Sadržaj

Razni načini zadavanja vjerojatnosti

Sažetak: Vjerojatnost se, kao jedna od grana matematike, uvelike primjenjuje u svakodnevici. Upravo zato u ovom radu želimo pobliže pojasniti što je to vjerojatnost i koja su njezina svojstva. Najprije ćemo krenuti od osnovnih pojmova i povijesnih definicija vjerojatnosti koji su nam potrebni za daljnje razumijevanje. Nadalje, aksiomatski ćemo definirati vjerojatnost, iskazati i dokazati njezina svojstva te ćemo se pozabaviti definicijom vjerojatnosti na diskretnom vjerojatnosnom prostoru kao i na skupu realnih brojeva, odnosno proučit ćemo problem geometrijske vjerojatnosti. Jedan od načina zadavanja vjerojatnosti je i uvjetna vjerojatnost, koja nam je od velikog značenja kada prilikom računanja vjerojatnosti nekog događaja imamo dodatnu informaciju da se neki od događaja već realizirao. Često ćemo se susresti i sa složenim pokusima kod kojih ćemo ishod prezentirati elementom Kartezijevog produkta. Stoga ćemo navesti još jedan od načina zadavanja vjerojatnosti i to na produktnim prostorima. U svrhu opravdanja povijesnog statističkog pristupa u zadnjem poglavlju iskoristit ćemo slabi zakon velikih brojeva.

Ključne riječi: slučajan pokus, elementarni događaj, prostor elementarnih događaja, slučajan događaj, vjerojatnost, vjerojatnosni prostor, diskretan vjerojatnosni prostor, geometrijska vjerojatnost, uvjetna vjerojatnost, nezavisnost događaja, Kartezijev produkt, slabi zakon velikih brojeva

Different ways of setting up probability problems

Abstract: Probability is a branch of mathematics and it is largely used in everyday life. That is why this paper strives to explain the notion of probability and all of its features. The paper will first deal with basic notions and historical definitions of probability which are needed to fully understand this notion. Furthermore, the paper will give an axiomatic definition of probability, point out and prove its features as well as deal with the definition of probability on a discrete probability space and on a set of real numbers. In other words, the paper will observe the problem of geometric probability. One of the ways of setting up probability problems is also the conditional probability, which is of great importance for calculating the probability of an event because it gives us the information if one event had already happened. One can often encounter complex experiments, whose outcome has to be presented using the Cartesian product. That is why the paper will also deal with the notion of probability on a product space. In order to justify the historical statistical approach, the last chapter will introduce the law of large numbers.

Key words: random experiment, sample event, sample space, random event, probability, probability space, discrete probability space, geometric probability, conditional probability, independent events, Cartesian product, law of large numbers

Uvod

Vjerojatnost je jedna od grana matematike koja ima široku primjenu u svakodnevnim životnim situacijama. Primjerice, često čujemo: "Vjerojatnost da će sutra biti sunčano je 50 %.", "Vjerojatnost da ću položiti ispit je 40%." itd. Već intinuitivno znamo da vjerojatnost izražava stupanj vjerovanja da će se dogoditi neki događaj te suprostavlja dio cjeline samoj cjelini, stoga ćemo se u ovome radu pozabaviti problemom nastanka tih brojeva kojima izražavamo taj stupanj vjerovanja, odnosno proučit ćemo različite definicije vjerojatnosti.
U prvom poglavlju nastojat ćemo kroz jedan jednostavan primjer obuhvatiti osnovne pojmove kao što su slučajan pokus, elementarni događaj, prostor elementarnih događaja itd. U sljedećem poglavlju proći ćemo kroz povijesna shvaćanja vjerojatnosti, odnosno klasičan i statistički pristup definiranja vjerojatnosti.
U trećem poglavlju aksiomatski ćmo definirati vjerojatnost i navesti njezina osnovna svojstva, dok ćemo se u četvrtom i petom poglavlju pozabaviti definiranjem vjerojatnosti na različitim vjerojatnosnim prostorima.
Kako se često, prilikom računanja vjerojatnosti nekih događaja, susrećemo s informacijom da se već dogodio neki događaj koji ima utjecaja na naš polazni događaj potrebno je definirati uvjetnu vjerojatnost, koja je također jedan od načina zadavanja vjerojatnosti. Uz uvjetnu vjerojatnost također je vezan i pojam nezavisnost događaja, stoga ćemo te pojmove obraditi u šestom poglavlju.
U sedmom poglavlju definirat ćemo vjerojatnost na produktnim prostorima.
U osmom poglavlju ćemo, pomoću slabog zakona velikih brojeva, opravdati povijesnu statističku definiciju vjerojatnosti.

1. Osnovni pojmovi

Osnovni pojmovi kojima ćemo se baviti su **pokus** i njegov **ishod**, odnosno relizacija pokusa. Ishod pokusa može biti:

1. **determiniran** (jednoznačno određen uvjetima u kojima se izvodi),
2. **slučajan** (nije jednoznačno određen uvjetima u kojima se izvodi).

Primjer 1.1. *Sada promotrimo vrlo jednostavne i opće poznate pokuse na temelju kojih ćemo ilustrirati pojmove koji će nam biti važni za daljnje razumijevanje.*

- ***Bacanje pravilnog simetričnog novčića*** *Kao rezultat bacanja simetričnog novčića može se pojaviti pismo (P) ili glava(G). To su ujedno i jedini mogući ishodi ovog pokusa. Stoga je skup svih mogućih ishoda dvočlani skup* $\{P, G\}$. *Budući da je novčić simetričan postoji jednaka mogućnost pojavljivanja pisma ili glave.*
- ***Bacanje simetrične igraće kockice*** *Bacanjem igraće kockice mogu se pojaviti brojevi* 1, 2, 3, 4, 5, 6. *Stoga je skup svih mogućih ishoda skup* $\{1,2,3,4,5,6\}$. *Kako je kockica pravilno izrađena, možemo pretpostaviti da postoji jednaka mogućnost pojavljivanja bilo kojeg od navedenih šest brojeva.*

Navedeni pokusi nisu jednoznačno određeni uvjetima u kojima se izvode, odnosno ne možemo reći što će se realizirati, ali znamo što se sve može realizirati. Ovakve pokuse nazivamo slučajni pokusi. Primjerice, ako skup svih mogućih ishoda sadrži samo jedan element, onda pokus ima samo jednu moguću realizaciju pa točno znamo što će se dogoditi kada ga izvedemo, upravo zbog toga takav pokus zovemo deterministički pokus.

Na temelju prethodnoga primjera uočili smo da je prvi korak prema definiranju vjerojatnosti nekog događaja spoznavanje cjeline. Prvo je potrebno definirati tu cjelinu, drugim riječima, da bismo odredili vjerojatnost da se dogodi ono što nas konkretno zanima, moramo prvo znati što je to sve što se može dogoditi u našem pokusu. Upravo zato ćemo uz jedan pokus vezati skup koji kao elemente sadrži sve što se može realizirati kada izvodimo pokus i zvat ćemo ga skup svih mogućih ishoda ili prostor elementarnih događaja.
U nastavku ćemo defninirati neke važne pojmove u teoriji vjerojatnosti koji će nam biti potrebni za daljnje razumijevanje.

Važni pojmovi

Elementarni događaj je svaki mogući ishod jednog izvođenja slučajnog pokusa (označavat ćemo ga s ω).
Skup ili prostor elementarnih događaja je skup svih mogućih ishoda slučajnog pokusa (označavat ćemo ga s Ω).
Slučajan događaj ili događaj je svaki podskup skupa elemetarnih događaja.
Cijeli prostor Ω zovemo **siguran događaj** , on se mora dogoditi u svakom izvođenju pokusa.
Prazan skup $\emptyset$ zovemo **nemoguć događaj**, on se nikada neće dogoditi.
Definirajmo sada operacije s događajima pomoću kojih se od danih događaja dobivaju novi događaji. Neka su $A, B \subseteq \Omega$. Vrijedi:

1. Skup A je **podskup** skupa B ako je svaki element skupa A ujedno i element skupa B,
2. **Unija događaja** A i B je $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \vee \omega \in B\}$, ovaj događaj se dogodi ako i samo ako se dogodi jedan od događaja A i B,

3. **Presjek događaja** A i B je $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \in B\}$, ovaj događaj se dogodi ako i samo ako se dogode oba događaja A i B. Ako je $A \cap B = \emptyset$ kažemo da se događaji A i B međusobno isključuju, tj. ne mogu se istodobno dogoditi,

4. **Razlika događaja** A i B je $A \setminus B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \notin B\}$, ovaj događaj se dogodi ako i samo ako se dogodi događaj A i ne dogodi događaj B,

5. **Komplement događaja** A je $A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$, ovaj događaj se dogodi ako i samo ako se ne dogodi događaj A. A^c zovemo **suprotan događaj** događaju A.

2. Povijesni pristupi određivanja vjerojatnosti

Povijesno gledano, vjerojatnost događaja temelji se na principu odnosa dijela i cjeline. Pri tome se odnos dijela i cjeline koristi na dva načina:

1. **klasičan pristup**

2. **statistički pristup**.

U nastavku ćemo opisati oba povijesna koncepta.

2.1. Klasična definicija vjerojatnosti

Pretpostavimo da je Ω neprazan konačan skup.

Definicija 2.1 (**Klasična definicija vjerojatnosti**). *Neka imamo slučajan pokus s konačno mnogo elementarnih događaja i neka su svi ti elementarni događaji jednako mogući. Tada je* ***vjerojatnost*** *proizvoljnog događaja $A \subseteq \Omega$ jedanaka kvocijentu broja povoljnih elementarnih događaja i ukupnog broja elementarnih događaja, tj.*

$$P(A) = \tfrac{k(A)}{k(\Omega)}.$$

Primjer 2.1. *Iz šešira u kojem se nalazi* 100 *kuglica numeriranih brojevima* $1, \ldots, 100$ *na slučajan način izvlačimo jednu kuglicu. Odredite vjerojatnost događaja $A =$suma znamenaka izvučenog broja je* 3.

Rješenje:

$A = \{3, 12, 21, 30\} \implies k(A) = 4$
$\Omega = \{1, \ldots, 100\} \implies k(\Omega) = 100$ *Prema klasičnoj definiciji vjerojatnosti slijedi da je vjerojatnost događaja A jednaka*

$$P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)} = \frac{4}{100} = 0.04$$

2.2. Statistička definicija vjerojatnosti

Neka je A događaj vezan uz neki slučajan pokus, odnosno mogući ishod toga slučajnog pokusa. Pretpostavimo da slučajan pokus ponavljamo n puta ($n \in \mathbb{N}$), pri čemu su ponavljanja međusobno nezavisna te da se u tih n ponavaljanja događaj A pojavio točno n_A puta. Tada broj n_A nazivamo **frekvencija** događaja A, a broj $\frac{n_A}{n}$ **relativna frekvencija** događaja A. Iz definicije frekvencije slijedi:

$$0 \leq n_A \leq n \Longrightarrow 0 \leq \frac{n_A}{n} \leq 1.$$

Uvedimo oznaku $f_A(n) = \frac{n_A}{n}$.

Ako slučajan pokus ponavaljamo veliki broj puta broj $f_A(n)$ se stabilizira oko nekog broja koji je približno jednak vjerojatnosti događaja A, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} f_A(n) = P(A)$.

Ovo svojstvo nazivamo **statistička stabilnost relativnih frekvencija**.

Primjer 2.2. *Simetričnu igraću kockicu bacamo* 120 *puta, realizacije su prikazane u sljedećoj tablici.*

broj	frekvencija
1	24
2	18
3	22
4	20
5	16
6	20

Tablica 1: Tablica frekvencija

$$\frac{n_1}{n} = \frac{24}{120} = 0.2, \ \frac{n_2}{n} = \frac{18}{120} = 0.15, \ \frac{n_3}{n} = \frac{22}{120} = 0.18, \ \frac{n_4}{n} = \frac{20}{120} = 0.16, \ \frac{n_5}{n} = \frac{16}{120} = 0.13,$$
$$\frac{n_6}{n} = \frac{20}{120} = 0.16$$

Možemo uočiti da se velikim brojem ponavljanja pokusa sve relativne frekvencije grupiraju oko broja $\frac{1}{6}$.

3. Vjerojatnosni prostor

3.1. Definicija vjerojatnosti

Klasični i statistički pristup ne daju nam općenitu definiciju vjerojatnosti iako imaju važnu ulogu u primjeni rezultata teorije vjerojatnosti u praksi.
Neka je Ω proizvoljan neprazan skup. Da bismo dali aksiomatsku definiciju vjerojatnosti na Ω, najprije primijetimo da nije uvijek moguće sve podskupove od Ω uzeti za događaje. Može se dogoditi da za neki podskup $A \subseteq \Omega$ ne možemo dati jasan odgovor na pitanje "Je li $\omega \in A$?" Primjerice, pretpostavimo da se pokus sastoji od bacanja novčića 10 puta, ali da

možemo provjeriti rezultate samo prvih 6 bacanja. Ako je $A = \{\text{palo je barem 8 pisama}\}$, tada iz onoga što znamo o $\omega \in \Omega$ ne možemo odgovoriti na pitanje je li $\omega \in A$ ili $\omega \notin A$. Zbog toga ćemo definirati familiju podskupova od Ω koju ćemo zvati familija događaja, a zahtjeve koje mora ispunjavati navodimo u sljedećoj definiciji.

Definicija 3.1 (**σ-algebra**). *Neka je Ω neprazan prostor elementarnih događaja. Familija $\mathcal{F}$ podskupova od Ω je σ-algebra na Ω ako vrijedi:*

σ1) $\emptyset \in \mathcal{F}$,

σ2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$ ***(zatvorenost na komplementiranje)***,

σ3) *ako je dana prebrojiva familija skupova $(A_i, i \in \mathbb{N})$, onda $\mathcal{F}$ sadrži i njihovu uniju, tj.* $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ ***(zatvorenost na prebrojive unije)***.

Pokažimo sada neke od posljedica prethodne definicije, odnosno da je σ-algebra zatvorena na prebrojive presjeke i skupovne razlike.

- $\emptyset \in \mathcal{F} \Rightarrow \emptyset^c = \Omega \in \mathcal{F}$ slijedi iz svojstva σ2) iz Definicije 3.1.
- $(A_i, i \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow (A_i^c, i \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathcal{F} \Rightarrow (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c)^c \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ slijedi primjenom svojstava iz Definicije 3.1. i to redom σ2), σ3), σ2) te De Morganovog[1] zakona. Ovime smo dokazali **zatvorenost na prebrojive presjeke**.
- $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c, B^c \in \mathcal{F} \Rightarrow A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{F}$ slijedi iz zatvorenosti na prebrojive presjeke.

Na temelju dokazanih svojstava možemo zaključiti da je σ-algebra zatvorena na sve osnovne skupovne operacije.
Postoje dvije trivijalne σ-algebre na Ω. Najmanja je $\{\emptyset, \Omega\}$, a najveća je partitivni skup skup od Ω, tj. $\mathcal{P}(\Omega)$.

Definicija 3.2. *Neka je $\mathcal{F}$ σ-algebra na skupu Ω. Uređen par $(\Omega, \mathcal{F})$ nazivamo* ***izmjeriv prostor***.

Definicija 3.3. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor. Funkcija $P\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ jest* ***vjerojatnost*** *na Ω ako vrijedi:*

A1) $P(A) \geqslant 0, \forall A \in \mathcal{F}$ ***(nenegativnost vjerojatnosti)***,

A2) $P(\Omega) = 1$ ***(normiranost vjerojatnosti)***,

A3) *Ako je dana prebrojiva familija međusobno disjunktnih skupova $(A_i, i \in I) \subseteq \mathcal{F}$, $I \subseteq \mathbb{N}$ skup indeksa, tj. $A_i \cap B_j = \emptyset$ za $i \neq j$, onda vrijedi*

$$P(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$$

(σ-aditivnost vjerojatnosti).

Navedena tri svojstva u Definiciji 3.3. nazivamo **aksiomima vjerojatnosti**.

[1] De Morgan (1806.–1871.), britanski matematičar i logičar

Definicija 3.4. *Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdje je $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω i P vjerojatsnost na $\mathcal{F}$ zove se* ***vjerojatnosni prostor****.*

Na jeziku teorije mjere vjerojatnost je normirana mjera, a vjerojatnosni prostor je prostor s normiranom mjerom. Stoga se često umjesto termina vjerojatnost koristi termin **vjerojatnosna mjera**.

Primjer 3.1. Zadovoljava li klasično definirana vjerojatnost aksiomatsku definiciju vjerojatnosti?
Ω je konačan neprazan skup, $A \subseteq \Omega$ je proizvoljan događaj. Ispitajmo zadovoljava li klasična definicija aksiome vjerojatnosti.

A1) $P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)} \geqslant 0$ *jer je* $k(A) \geqslant 0$ *i* $k(\Omega) > 0$

A2) $P(A) = \frac{k(\Omega)}{k(\Omega)} = 1$

A3) *Neka je $(A_i, i \in I)$ familija međusobno disjunktnih podskupova od Ω. Zbog disjunktnosti skupova vrijedi* $k(\bigcup\limits_{i \in I} A_i) = \sum\limits_{i \in I} k(A_i)$.

$$P(\bigcup_{i \in I} A_i) = \frac{k(\bigcup_{i \in I} A_i)}{k(\Omega)} = \frac{\sum_{i \in I} k(A_i)}{k(\Omega)} = \sum_{i \in I} \frac{k(A_i)}{k(\Omega)} = \sum_{i \in I} P(A_i)$$

Pokazali smo da su sva tri aksioma vjerojatnosti zadovoljena, prema tome s klasičnom definicijom dobro je definirana vjerojatnost.

3.2. Osnovna svojstva vjerojatnosti

Na temelju zahtjeva koji su navedeni u Definiciji 2.3. mogu se dokazati i mnoga druga svojstva koja će biti zadovoljena čim znamo da je zadanom funkcijom definirana vjerojatnost. U ovom poglavlju navest ćemo i dokazati neka od najčešće korištenih svojstava.

Teorem 3.1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Tada vrijedi:*

S1) ***vjerojatnost suprotnog događaja***
Neka je $A \in \mathcal{F}$ događaj i $A^c \in \mathcal{F}$ njemu suprotan događaj. Tada vrijedi

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

S2) ***vjerojatnost nemogućeg događaja***

$$P(\emptyset) = 0$$

S3) ***monotonost vjerojatnosti***
Neka su $A, B \in \mathcal{F}$ događaji takvi da je $A \subseteq B$. Tada je $P(A) \leqslant P(B)$.

S4) ***vjerojatnost unije dvaju događaja.***
Neka su $A, B \in \mathcal{F}$ ne nužno disjunktni događaji. Tada vrijedi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

S5) ***konačna aditivnost vjerojatnosti***
Neka su $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ međusobno disjunktni, tada je

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

S6) ***prebrojiva ili σ-subaditivnost vjerojatnosti***
Neka je dana $(A_i, i \in I) \subseteq \mathcal{F}, I \subseteq \mathbb{N}$ skup indeksa, prebrojiva familija događaja iz $\mathcal{F}$. Tada vrijedi

$$P(\bigcup_{i\in I} A_i) \leq \sum_{i\in I} P(A_i)$$

S7) ***neprekidnost vjerojatnosti u odnosu na rastuću familiju događaja***
Neka je $(A_n, n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}$ rastuća familija događaja, tj. $A_n \in \mathcal{F}$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \dots$ Tada vrijedi

$$P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

S8) ***neprekidnost vjerojatnosti u odnosu na padajuću familiju događaja***
Neka je $(A_n, n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}$ padajuća familija događaja, tj. $A_n \in \mathcal{F}$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \dots$ Tada vrijedi

$$P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Dokaz. **S1)** $1 \overset{A2)}{=} \overbrace{P(\Omega) = P(A \cup A^c)}^{\Omega = A \cup A^c} \overset{A3)}{=} P(A) + P(A^c) \Longrightarrow P(A^c) = 1 - P(A).$

S2) $\overbrace{P(\emptyset) = P(\Omega^c)}^{\emptyset = \Omega^c} \overset{S1)}{=} 1 - P(\Omega) \overset{A2)}{=} 1 - 1 = 0.$

S3) $B = A \cup (B \setminus A) \Longrightarrow P(B) = P(A \cup (B \setminus A)) \overset{A3)}{=} P(A) + \overbrace{P(B \setminus A)}^{\geq 0 \text{ zbog A1)}} \geq P(A),$

također odavde slijedi da je $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ kada je $A \subseteq B$. Označimo ovu jednakost sa $(\star)$.

S4) Uniju možemo prikazati na sljedeći način
$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) = (A \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus (A \cap B))$.
Odavde dobijemo $P(A \cup B) = P((A \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus (A \cap B)))$, zatim iz σ-aditivnosti te $(\star)$ iz svojstva S3) slijedi

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \underbrace{P(A \setminus (A \cap B))}_{A \cap B \subseteq A} + P(A \cap B) + \underbrace{P(B \setminus (A \cap B))}_{A \cap B \subseteq B} \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

S5) U aksiom A3) stavimo da je $A_i = \emptyset, i > n, n \in \mathbb{N}$ te se koristimo sa svojstvom S2). Drugim riječima, konačna unija uvijek se može nadopuniti do prebrojive korištenjem prebrojivo mnogo praznih skupova.

S6) Od familije događaja $(A_i, i \in I)$ napravimo disjunktnu familiju događaja $(B_i, i \in I)$. Neka je

$$\begin{aligned} &B_1 = A_1 \\ &B_2 = A_2 \setminus A_1 \\ &\dots \\ &B_i = A_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k \end{aligned}$$

Ovako definirani skupovi su međusobno disjunktni te vrijedi da je $B_i \subseteq A_i$ i $\bigcup_{i\in I} B_i = \bigcup_{i\in I} A_i$. Stoga imamo sljedeće:

$$P(\bigcup_{i\in I} A_i) = P(\bigcup_{i\in I} B_i) \overset{A3)}{=} \underbrace{\sum_{i\in I} P(B_i) \leq \sum_{i\in I} P(A_i)}_{\text{slijedi iz S3)}}.$$

S7) Najprije trebamo dokazati egzistenciju limesa. Budući da je niz $(A_n, n \in \mathbb{N})$ monotono rastući, a vjerojatnost je također monotono rastuća funkcija, onda je i niz brojeva $(P(A_n), n \in \mathbb{N})$ monotono rastući niz. S obzirom da radi o nizu vjerojatnosti, taj je niz brojeva omeđen jer funkcija P prima vrijednosti iz segmenta $[0, 1]$. Budući da je monoton i omeđen, niz $(P(A_n), n \in \mathbb{N})$ je konvergentan. Sada od familije događaja $(A_n, n \in \mathbb{N})$ napravimo disjunktnu familiju događaja $(B_n, n \in \mathbb{N})$. Neka je

$$\begin{aligned} &B_1 = A_1 \\ &B_2 = A_2 \setminus A_1 \\ &\dots \\ &B_n = A_n \setminus A_{n-1} \end{aligned}$$

Uočimo da vrijedi $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ i $\bigcup_{k=1}^{n} B_k = A_n$.

Dakle, vrijedi sljedeće: $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \overset{A3)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(B_k)$

$\overset{A3)}{=} \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=1}^{n} B_k) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

S8) Budući da je familija $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \dots$ padajuća, onda je ${A_1}^c \subseteq {A_2}^c \subseteq {A_3}^c \dots$ rastuća. Prema svojstvu S7) vrijedi $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} {A_n}^c) = \lim_{n\to\infty} P({A_n}^c)$. Primjenjujući svojstvo suprotnog događaja i De Morganov zakon dobivamo sljedeće:

$$P((\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)^c) = \lim_{n\to\infty} P({A_n}^c)$$

$$1 - P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty}(1 - P(A_n))$$
$$1 - P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n) \Longrightarrow P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

□

Generalizacija svojstva S4) naziva se Sylvesterova formula i dana je u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 3.1 (Sylvesterova formula). *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor i* $A_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \ldots, n$. *Tada vrijedi*

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i\leq n} P(A_i) - \sum_{i<j\leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k\leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (1)^{n+1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i).$$

Dokaz. Vidi: [1, str. 18, Propozicija 2. 4.] □

U ovom poglavlju uveli smo pojam vjerojatnosnog prostora koji je osnovni objek u teoriji vjerojatnosti. Važan problem, čijim ćemo se rješenjem u nastavku baviti, jest konstrukcija vjerojatnosnog prostora, tj.vjerojatnosne mjere na skupu Ω. U odnosu prema tom problemu postoji bitna razlika između slučaja kada je Ω konačan ili prebrojiv skup i slučaja kad je Ω neprebrojiv skup.

4. Diskretan vjerojatnosni prostor

Neka je Ω konačan ili prebrojiv skup elementarnih događaja. Takve skupove nazivamo **diskretni skupovi** i označavamo na sljedeći način:

$$\Omega = \{\omega_i : i \in I_\Omega\}, I_\Omega \subseteq \mathbb{N},$$

gdje je I_Ω skup indeksa. Primjerice, ako je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, onda je $I_\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, a ako je $\Omega = \{\omega_i : i \in \mathbb{N}\}$, onda je $I_\Omega = \mathbb{N}$. Iz definicije vjerojatnosti znamo da je vjerojatnost funkcija kojoj je domena σ-algebra događaja na Ω. Stoga, da bismo zadali vjerojatnost na Ω, potrebno je zadati vrijednosti te funkcije na svakom skupu koji je sadržan u pridruženoj σ-algebri.
Kod diskretnih skupova, odnosno kod konačnih ili prebrojivih skupova elementarnih događaja za σ-algebru uzimamo partitivni skup od Ω, tj. $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.
Vjerojatnost na diskretnom prostoru Ω je funkcija $P\colon \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ koja svakom elementarnom događaju $\{\omega_i\}, i \in I_\Omega$ pridružuje realan broj iz segmenta $[0, 1]$.
Definiramo:

$$p_i = P(\{\omega_i\}), \quad \omega_i \in \Omega, \quad i \in I_\Omega \subseteq \mathbb{N}.$$

Vjerojatnost na diskretnom skupu Ω zadajemo pomoću niza brojeva $(p_i, i \in I_\Omega)$ koji zadovoljavaju sljedeća svojstva:

1. $p_i = P(\{\omega_i\}) \geq 0, \quad \forall i \in I_\Omega,$
2. $\sum_{i\in I_\Omega} p_i = \sum_{i\in I_\Omega} P(\{\omega_i\}) \overset{A3)}{=} P(\bigcup_{i\in I_\Omega} \{\omega_i\}) = P(\Omega) = 1.$

Definicija 4.1. *Vjerojatnosni prostor kod kojega je Ω konačan ili prebrojiv skup, a pridružena σ-algebra partitivni skup $\mathcal{P}(\Omega)$ nazivamo* ***diskretan vjerojatnosni prostor****.*

Pomoću tako definiranog niza brojeva $(p_i, i \in I_\Omega)$ možemo izračunati vjerojatnost bilo kojeg događaja $A \subseteq \Omega$, $A = \{\omega_j : j \in I_A\}$, gdje je $I_A \subseteq I_\Omega$ skup indeksa elemenata od A.

$$P(A) = P(\bigcup_{j \in I_A} \{\omega_j\} \overset{A3)}{=} \sum_{j \in I_A} P(\{\omega_j\}) = \sum_{j \in I_A} p_j$$

Dakle, poznavanjem vjerojatnosti svakog elementarnog događaja možemo izračunati vjerojatnost bilo kojeg događaja $A \subseteq \Omega$.

Primjer 4.1. *Dan je niz četiriju brojeva $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$. Možemo li taj niz nadopuniti petim brojem tako da tih pet brojeva dobro definiraju vjerojatnost na nekom diskretnom vjerojatnosnom prostoru?*

Rješenje:

Navedena četiri broja su pozitivna i manja od 1, a suma im iznosi $\frac{15}{16}$ što je manje od 1. Dakle, ako za peti broj izaberemo razliku $1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16}$ možemo zaključiti da postoji vjerojatnosni prostor na kojemu pomoću tih brojeva možemo zadati vjerojatnost. Primjerice, možemo uzeti da je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ i da su vjerojatnosti pripadnih elementarnih događaja jednake $P(\{1\}) = \frac{1}{2}, P(\{2\}) = \frac{1}{4}, P(\{3\}) = \frac{1}{8}, P(\{4\}) = \frac{1}{16}, P(\{5\}) = \frac{1}{16}$.

U nastavku ćemo navesti neke definicije i teoreme koji će nam pomoći pri dokazivanju jedne od propozicija vezanih za definiranje vjerojatnosti na diskretnom vjerojatnosnom prostoru. U diskretnoj teoriji vjerojatnosti postoji česta potreba za računanjem sume tzv. ponovljenog reda. Da bismo pojasnili razliku između ponovljenog i običnog reda najprije ćemo se prisjetiti definicije reda realnih brojeva.

Definicija 4.2. *Neka je $(a_n, n \in \mathbb{N})$ niz realnih brojeva, $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ suma prvih n članova toga reda i $(s_n, n \in \mathbb{N})$ pripadnih niz parcijalnih suma. Uređeni par $((a_n), (s_n))$ nazivamo* ***red realnih brojeva*** *i označavamo s $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$. Red konvergira ako mu konvergira pripadni niz parcijalnih suma.*

Definicija 4.3. *Familija skupova $\{M_i, i \in \mathbb{N}\}$ čini* ***particiju skupa*** *A ako zadovoljava sljedeća svojstva:*

1. $M_i \subseteq A, \quad \forall i \in \mathbb{N}$
2. $M_i \cap M_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j$
3. $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i = A$

Definicija 4.4. *Nekaje $(a_n, n \in \mathbb{N})$ niz realnih brojeva i $\{M_i, i \in \mathbb{N}\}$ jedna particija skupa $\mathbb{N}$. Ako $\forall i \in \mathbb{N}$ konvergiraju redovi $\sum_{j \in M_i} a_j$ i ako označimo $A_i = \sum_{j \in M_i} a_j$ tada definiramo* ***ponovljeni red*** *kao*

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} A_i = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in M_i} a_j.$$

Teorem 4.1. *Neka je* $(a_n, n \in \mathbb{N})$ *niz realnih brojeva i neka je* $\{M_i, i \in \mathbb{N}\}$ *jedna particija skupa prirodnih brojeva. Red*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$

konvergira onda i samo onda ako konvergira red

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in M_i} |a_j| \,.$$

U slučaju konvergencije sume su im jednake.

Dokaz. Vidi [2, str. 255, Teorem 5. 2.] □

Teorem 4.2. *Neka je* $(a_n, n \in \mathbb{N})$ *niz realnih brojeva i neka je* $\{M_i, i \in \mathbb{N}\}$ *jedna particija skupa prirodnih brojeva. Ako jedan od redova*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \,, \qquad \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in M_i} |a_j|$$

konvergira, onda konvergiraju i redovi

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n, \qquad \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in M_i} a_j$$

i sume su im jednake.

Dokaz. Vidi [2, str. 256, Teorem 5. 3.] □

Propozicija 4.1. *Neka je s* $(p_i, i \in I), I \subseteq \mathbb{N}$*, zadan niz realnih brojeva sa svojstvima:*

1. $p_i \geqslant 0, \quad \forall i \in I$
2. $\displaystyle\sum_{i\in I} p_i = 1$

te neka je Ω *bilo koji skup koji ima* $k(I)$ *elemenata. Tada je izrazom*

$$P(A) = \sum_{i\in I_A} p_i, \quad A \subseteq \Omega, \tag{1}$$

gdje je I_A *skup indeksa elemenata iz* Ω *koji pripadaju skupu* A*, dobro definirana vjerojatnost na* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$*.*

Dokaz. Neka je $\Omega = \{\omega_i, i \in I\}$ dan neprazan skup. Dokažimo da je funkcijom (1) dobro definirana vjerojatnost, tj. pokažimo da su zadovoljena sva tri akisoma vjerojatnosti.

A1) Očigledno je $P(A) = \displaystyle\sum_{i\in I_A} p_i \geqslant 0, \quad \forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$ zbog pretpostavke 1.

A2) $P(\Omega) = \displaystyle\sum_{i\in I} p_i = 1$ zbog pretpostavke 2.

A3) Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ disjunktni podskupovi od Ω takvi da je $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Tada familija skupova $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ čini jednu particiju skupa A. Koristeći rezultate teorije ponovljenih redova koje smo prethodno naveli možemo zaključiti da vrijedi sljedeće:

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A) = \sum_{i \in I_A} p_i = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in A_i} p_j = \sum_{i \in \mathbb{N}} P(A_i)$$

pa vrijedi σ-aditivnost.

$\square$

5. Vjerojatnost na skupu realnih brojeva

Postoje slučajni pokusi kod kojih prostor elementarnih događaja nije konačan ili prebrojiv skup, nego sadrži neki interval realnih brojeva. Vjerojatnost na takvim vjerojatnosnim prostorima ne možemo odrediti koristeći niz vrijednosti koje ona postiže na pojedinačim ishodima jer prostor elementarnih događaja nije prebrojiv.
Mnogi elementarni problemi iz teorije vjerojatnosti mogu se riješiti primjenom tzv. geometrijskih vjerojatnosti.

5.1. Geometrijski pristup definiranja vjerojatnosti

Neka je Ω ograničen podskup od $\mathbb{R}^n$ $\quad (n = 1, 2, 3)$ $\quad$ koji je izmjeriv u smislu da postoji njegova mjera $\lambda(\Omega) < \infty$.

Napomena 5.1. *Mjere proizvoljnih podskupova $A \subseteq \mathbb{R}^n$ za različite $n -$ ove su sljedeće:*

- *kada je $A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \lambda$ je duljina*
- *kada je $A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \lambda$ je površina*
- *kada je $A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \lambda$ je volumen*

Prvi pristup definiranja

Neka je prostor elementarnih događaja $\Omega = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$. σ-algebra $\mathcal{F}$ je familija svih otvorenih podskupova od Ω. Primjerice $\emptyset \in \mathcal{F}$, $\quad \Omega \in \mathcal{F}$, $\quad (a, b) \in \mathcal{F}$.
Pretpostavimo da **svi intervali jednake duljine imaju jednaku vjerojatnost**.
Duljinu označavamo s λ i računamo ju na sljedeći način:

$$\lambda([c, d]) = d - c.$$

Vjerojatnost događaja $A = (a_1, b_1) \subseteq \Omega$, $a_1 \leq b_1$ definiramo na sljedeći način:

$$P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)} = \frac{b_1 - a_1}{b - a}. \tag{2}$$

Na preciznome matematičkom jeziku skupovi A i Ω u (2) jesu ograničeni Lebesgue-izmjerivi poskupovi od $\mathbb{R}$, a λ je Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}$ (vidi [5, poglavlje 2.]).

Primjer 5.1. Zadovoljava li geometrijski definirana vjerojatnost aksiomatsku definiciju?

A1) $P(A) = \dfrac{b_1 - a_1}{b - a} \geq 0 \quad \textit{jer je} \quad a < b, \quad a_1 \leq b_1.$

A2) $P(\Omega) = \dfrac{\lambda(\Omega)}{\lambda(\Omega)} = 1$

A3) *Neka su* $(A_i, i \in I), I \subseteq \mathbb{N}$, *disjunktni skupovi(intervali) iz* $\mathcal{F}$.
Općenito zbog disjunktnosti intervala vrijedi $\lambda(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sum_{i \in I} \lambda(A_i)$.

$$P(\bigcup_{i\in I} A_i) = \frac{\lambda(\bigcup_{i\in I} A_i)}{\lambda(\Omega)} = \frac{\sum_{i\in I}\lambda(A_i)}{\lambda(\Omega)} = \sum_{i\in I}\frac{\lambda(A_i)}{\lambda(\Omega)} = \sum_{i\in I} P(A_i).$$

Budući da su zadovoljena sva tri aksioma vjerojatnosti možemo zaključiti da je s prethodnom definicijom dobro definirana vjerojatnost.

Drugi pristup definiranja

Neka je prostor elementarnih događaja $\Omega = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$. σ-algebra $\mathcal{F}$ je familija svih otvorenih podskupova od Ω.
Zanemarimo pretpostavku o jednakoj vjerojatnosti intervala jednake duljine.
U ovom slučaju jedan od načina na koji ćemo računati vjerojatnost je korištenje nenegativne realne funkcije definirane na skupu $\mathbb{R}$ koja s osi apscisa zatvara jediničnu površinu. Vjerojatnost nekog skupa A računat ćemo kao površinu koju zatvara graf te funkcije s osi apscisa nad skupom A.
Vjerojatnost definiramo pomoću funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , x \in [a, b] \\ 0 & , \text{inače} \end{cases}$$

Ta funkcija mora zadovoljavati sljedeća svojstva:

1. **nenegativnost** $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. **normiranost**

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{+\infty} f(x)dx = \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}x\Big|_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

Vjerojatnost događaja $A = (a_1, b_1) \subseteq \Omega$ računamo na sljedeći način:

$$P(A) = \int_{a_1}^{b_1} f(x)dx = \int_{a_1}^{b_1} \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}x\Big|_{a_1}^{b_1} = \frac{b_1 - a_1}{b - a}$$

Odnosno, vjerojatnost događaja A jednaka je površini ispod grafa nenegativne normirane funkcije f nad intervalom (a_1, b_1).

Napomena 5.2. *Ako je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, onda λ predstavlja površinu. Uz pretpostavku da su svi skupovi jednake površine jednako vjerojatni vjerojatnost događaja $A \subseteq \Omega$ računamo kao*

$$P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)}.$$

Ako zanemarimo tu pretpostavku vjerojatnost računamo pomoću nenegativne i normirane funkcije $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kao

$$P(A) = \iint_A f(x,y)dxdy, \quad A \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Napomena 5.3. *Ako je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, onda λ predstavlja volumen. Uz pretpostavku da su svi skupovi jednakog volumena jednako vjerojatni vjerojatnost događaja $A \subseteq \Omega$ računamo kao*

$$P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)}.$$

Ako zanemarimo tu pretpostavku vjerojatnost računamo pomoću nenegativne i normirane funkcije $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ kao

$$P(A) = \iiint_A f(x,y,z)dxdydz, \quad A \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Primjer 5.2. *Možemo li sa sljedećom realnom funkcijom realne varijable definirati vjerojatnost na $\mathbb{R}$? Pretpostavimo da je $\lambda > 0$ te neka je*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \in (0, +\infty) \\ 0 & , \textit{inače} \end{cases}$$

Rješenje:

Trebamo provjeriti je li funkcija nenegativna i normirana.

1. ***nenegativnost***
   $f(x) = 0 \quad$ *za* $\quad x \in (-\infty, 0]$
   $f(x) \geqslant 0 \quad$ *za* $\quad x \in (0, +\infty) \quad$ *jer je* $\quad \lambda > 0 \quad$ *i* $\quad \lambda e^{-\lambda x} > 0$
2. ***normiranost***
   $$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx = 0 + \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx = \lim_{a\to\infty} \int_{0}^{a} \lambda e^{-\lambda x}dx =$$
   $$= \lim_{a\to\infty} \lambda \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\bigg|_0^a = \lim_{a\to\infty} (-e^{-ax} + 1) = 1$$

Pokazali smo da se s navedenom funkcijom može definirati vjerojatnost na $\mathbb{R}$.

5.2. Primjena geometrijske vjerojatnosti u svakodnevnom životu

U ovom poglavlju ćemo kroz zanimljive primjere nastojati približiti računanje vjerojatnosti pomoću geometrijskog pristupa.

Primjer 5.3. *Alen i Marko su dva prijatelja. Dogovorili su se da će se susresti u kinu kako bi gledali novi film koji je izašao. U kino dolaze, nezavisno jedan o drugome, između* 12 *i* 13 *sati, čekaju* 20 *minuta i ako se onaj drugi ne pojavi, odlaze. Kolika je vjerojatnost da se susret dogodi?*

Rješenje:

Ako sa x označimo trenutak Alenovog dolaska, a sa y trenutak Markovog dolaska u kino, onda iz danih uvjeta slijedi da je $12 \leq x \leq 13 \quad i \quad 12 \leq y \leq 13$.
Tada je kao prostor elementarnih događaja prirodno uzeti skup

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 12 \leq x \leq 13 \quad i \quad 12 \leq y \leq 13\}.$$

Alen i Marko će se sastati ako i samo ako je $|x - y| \leq \frac{1}{3}$ jer je 20 minuta jednako $\frac{1}{3}$ sata.
S A označimo događaj da su se Alen i Marko sastali, odnosno, neka je

$$A = \{(x, y) \in \Omega : |x - y| \leq \frac{1}{3}\}.$$

Tada je $\lambda(\Omega) = (1 - 0) \cdot (1 - 0) = 1$, a $\lambda(A) = 1 - \lambda(A^c) = 1 - 2 \cdot \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}}{2} = \frac{5}{9}$ pa je vjerojatnost događaja A jednaka

$$P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)} = \frac{\frac{5}{9}}{1} = \frac{5}{9} = 0.556,$$

što je približno 56%.

Primjer 5.4. *Marina radi u banci kojoj radno vrijeme počinje u* 8 : 00 *sati. Danas je zaspala te se kasno ustala pa je na tramvajsku stanicu stigla u* 7 : 45. *Ivana Marina se brine hoće li na vrijeme stići na posao. Pogledala je vozni red tramvaja i pročitala da tramvaj dolazi svakih* 13 *minuta te mu treba* 8 *minuta da stigne na odredište na kojemu se nalazi banka u kojoj radi. Kolika je vjerojatnost da će tramvaj stići na vrijeme?*

Rješenje:

Kako vožnja od od stanice na koju je Marina došla do stanice koja se nalazi ispred banke traje 8 *minuta, tramvaj treba na odredište stići najkasnije u* 7 : 52, *odnosno za najviše* 7 *minuta od kada je Marina stigla na stanicu. Ako sa A označimo događaj tramvaj je stigao na vrijeme, znajući da tramvaj stiže na stanicu svakih 13 minuta (što nam predstavlja prostor elementarnih događaja Ω), vjerojatnost da Marina neće zakasniti na posao jednaka je*

$$P(A) = \frac{7}{13} = 0.538,$$

što je približno 54%.

Primjer 5.5. *Dva vlaka duljine* $200\,m$ *svaki kreću se brzinom* $20\,m/s$ *po prugama koje se međusobno ukrštavaju. Trenutak u kojem će oni proći kroz raskrižje slučajan je, između* 22 *sata i* 22 *sata i* 30 *minuta. Kolika je vjerojatnost da će se sudariti?*

Rješenje:

Ako je x *trenutak ulaska prvog vlaka u raskrižje, a* y *trenutak ulaska drugog vlaka u raskrižje, onda je prirodno za prostor elementarnih događaja uzeti skup*

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1800 \quad i \quad 0 \leq y \leq 1800\}.$$

jer 30 *minuta jednako je* 1800 *sekundi. Svaki od vlakova prolazi kroz raskrižje* 10 *sekundi pa ukoliko s* A *označimo događaj da su se vlakovi sudarili, slijedi da je*

$$A = \{(x, y) \in \Omega : |x - y| < 10\}.$$

Tada je vjerojatnost događaja A *jednaka*

$$P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)} = \frac{1800^2 - 1790^2}{1800^2} = 0.011,$$

što je približno 11%.

6. Uvjetna vjerojatnost i nezavisnost događaja

6.1. Uvjetna vjerojatnost

Često ćemo se susresti s računanjem vjerojatnosti događaja u kojima kao dodatnu informaciju imamo da se realizirao događaj koji utječe na naš polazni događaj. Sljedeća definicija otkrit će nam način računanja u takvim situacijama.

Definicija 6.1. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor i neka su* $A, B \in \mathcal{F}$ *proizvoljni događaji takvi da je* $P(B) > 0$. *Tada funkciju* $P_B \colon \mathcal{F} \to [0, 1]$ *definiranu izrazom*

$$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{3}$$

zovemo ***uvjetna vjerojatnost događaja A uz uvjet da se dogodio događaj B****.*

Broj $P(A|B)$ kraće zovemo **vjerojatnost od** A **uz uvjet** B.

Primjer 6.1. Zadovoljava li uvjetno definirana vjerojatnost aksiomatsku definiciju vjerojatnosti?

A1) $P_B(A) = P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0$ *jer je* $P(A \cap B) \geq 0$ *jer je* P *vjerojatnost i* $P(B) > 0$ *prema pretpostavci definicije.*

A2) $P(\Omega|B) = \dfrac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} \overset{B \subseteq \Omega}{=} \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1.$

A3) *Neka je* $(A_i, i \in I), I \subseteq \mathbb{N}$, *konačna ili prebrojiva familija međusobno disjunktnih događaja.*

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{i\in I} A_i|B) &= \frac{P((\bigcup_{i\in I} A_i)\cap B)}{P(B)} = \frac{P(\bigcup_{i\in I}(A_i\cap B))}{P(B)} \\ &= \frac{\sum_{i\in I} P(A_i\cap B)}{P(B)} = \sum_{i\in I}\frac{P(A_i\cap B)}{P(B)} \\ &= \sum_{i\in I} P(A_i|B). \end{aligned}$$

Pokazali smo da su sva tri aksioma vjerojatnosti zadovoljena, prema tome s uvjetnom definicijom vjerojatnosti dobro je definirana vjerojatnost.

Napomena 6.1. *Uočimo da vrijedi sljedeće:*

$$P(A\cap B) = P(A|B)\cdot P(B), \tag{4}$$
$$P(A\cap B) = P(B\cap A) = P(B|A)\cdot P(A). \tag{5}$$

Induktivno se lako pokaže da za $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ *vrijedi*

$$P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) = P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k). \tag{6}$$

Primjer 6.2. *Miro i Dario prijatelji su iz školskih klupa. Nakon* 10 *godina susreli su se u trgovini. Dario je kroz razgovor saznao da Miro ima dvoje djece i da je jedno od njih sin. Kolika je vjerojatnost (po Dariu) da je drugo Mirino dijete kći ako:*

a) *ništa drugo ne zna,*

b) *Dario još zna da je gore spomenuti sin starije Mirino dijete?*

Rješenje:

Uvedimo oznake: K=kći, S=sin. Tada je $\Omega = \{(S,S),(K,K),(S,K),(K,S)\}$, *gdje primjerice* (S,K) *znači da je starije dijete sin, a mlađe kći.*
Vrijedi da je:

$$P(\{(x,y)\}) = \frac{1}{4} \quad \forall (x,y)\in\Omega.$$

a) *Označimo s* $A = \{$*jedno Mirino dijete je kći* $\} = \{(K,K),(S,K),(K,S)\}$ *i*
$B = \{$*jedno Mirino dijete je sin*$\} = \{(S,S),(S,K),(K,S)\}$.
Tada slijedi da je tražena vjerojatnost jednaka

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{(S,K),(K,S)\})}{P(\{(S,S),(S,K),(K,S)\})} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}.$$

b) *Označimo s* $C = \{$*Mirino starije dijete je sin*$\} = \{(S,S),(S,K)\}$.
Tada je tražena vjerojatnost jednaka

$$P(A|C) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)} = \frac{P(\{(S,K)\})}{P(\{(S,S),(S,K)\})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}.$$

6.2. Nezavisnost događaja

Intuitivno već znamo da nezavisnost podrazumijeva da događaji ne ovise jedan o drugome, odnosno da realizacija jednog od njih ne utječe na realizaciju drugog događaja. U nastavku ćemo matematički precizirati što to podrazumijeva pojam nezavisnosti događaja.

Definicija 6.2. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i $A, B \in \mathcal{F}$ proizvoljni događaji. Kažemo da su događaji A* ***i*** *B* ***nezavisni*** *ako vrijedi:*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{7}$$

Ako su događaji A i B nezavisni i $P(A) > 0, P(B) > 0$, tada iz (4) i (7) slijedi:

$$P(A|B) = P(A), \quad P(B|A) = P(B). \tag{8}$$

i svaka od relacija u (7) ekvivalentna je sa (8).

Prethodnu definiciju možemo generalizirati i na proizvoljnu familiju događaja.

Definicija 6.3. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Kažemo da je proizvoljna familija događja $(A_i, i \in I), I \subseteq \mathbb{N}$,* ***nezavisna*** *ako za svaki konačan skup različitih indeksa $\{i_1, ..., i_n\} \subseteq I$ vrijedi*

$$P(\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}) = \prod_{j=1}^{n} P(A_{i_j}).$$

Propozicija 6.1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i $A, B \in \mathcal{F}$ nezavisni događaji. Tada su nezavisni i događaji:*

a) A^c *i* B,

b) A *i* B^c,

c) A^c *i* B^c.

Dokaz. Pomoću nezavisnosti događaja A i B zbog koje vrijedi $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ te svojstva vjerojatnosti suprotnog događaja dokazat ćemo tvrdnju.

a)
$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(B \setminus (A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(B) - P(A)P(B) = (1 - P(A))P(B) \\ &= P(A^c)P(B). \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A \setminus (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) \\ &= P(A)P(B^c). \end{aligned}$$

c) U ovom dokazu ćemo uz prethodna dva svojstva koristiti još De Morganov zakon i vjerojatnost unije dvaju događaja, tj. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ pa imamo sljedeće:

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \\ &= 1 - P(A) - P(B)(1 - P(A)) \\ &= (1 - P(A))(1 - P(B)) \\ &= P(A^c)P(B^c). \end{aligned}$$

□

Primjer 6.3. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor i* $A, B \in \mathcal{F}$ *takvi da je* $0 < P(B) < 1$. *Pokažite da tada vrijedi:*

$$P(A|B) = P(A|B^c) \Longleftrightarrow A \quad i \quad B \quad nezavisni.$$

Rješenje:

U dokazivanju ove tvrdnje koristit ćemo se svojstvom vjerojatnosti suprotnog događaja te svojstvom $\sigma -$ *aditivnosti.*

$$\begin{aligned} P(A|B) = P(A|B^c) &\Longleftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} \\ &\Longleftrightarrow P(A \cap B)(1 - P(B)) = P(A \cap B^c)P(B) \\ &\Longleftrightarrow P(A \cap B) = (P(A \cap B) + P(A \cap B^c)P(B) \\ &\Longleftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) \\ &\Longleftrightarrow A \quad i \quad B \quad su\ nezavisni \end{aligned}$$

Primjedba 6.1. *Nezavisnost svih parova različitih događaja iz neke familije ne povlači da je to familija nezavisnih događaja. Obratno, ako je familija nezavisna, odatle ne slijedi da analogna relacija vrijedi za svaku podfamiliju te familije.*

Radi jasnijeg shvaćanja prethodne primjedbe pogledajmo sljedeći primjer.

Primjer 6.4. *Neka se pokus sastoji od bacanja dvije simetrične igraće kockice. Tada je prostor elementarnih događja* $\Omega = \{(i,j) : i,j = 1, \ldots, 6\}$. *Tada vrijedi da je vjerojatnost elementarnog događaja jednaka*

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{36}, \omega \in \Omega.$$

Neka su događaji $A, B, C \subset \Omega$ *definirani sa:*

$$A = \{na\ prvoj\ kockici\ pao\ je\ 1{,}2\ ili\ 3\}$$
$$B = \{na\ drugoj\ kockici\ pao\ je\ 3,\ 4\ ili\ 5\}$$
$$C = \{suma\ brojeva\ na\ obje\ kockice\ je\ 9\}.$$

Tada je

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \neq P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$
$$P(A \cap C) = \frac{1}{36} \neq P(A)P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{18},$$
$$P(B \cap C) = \frac{1}{12} \neq P(B)P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{18}.$$

Ali vrijedi da je

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} = P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{36}.$$

Uzmimo sada u istom tom vjerojatnosnom prostoru događaje:

$$A' = \{na\ prvoj\ kockici\ pao\ je\ 1{,}2\ ili\ 3\}$$

$$B' = \{\textit{na drugoj kockici pao je 4,5 ili 6}\}$$

$$C' = \{\textit{suma brojeva na obje kockice je 7}\}.$$

Tada je

$$P(A' \cap B') = \frac{1}{4} = P(A')P(B'),$$

$$P(A' \cap C') = \frac{1}{12} = P(A')P(C'),$$

$$P(B' \cap C') = \frac{1}{12} = P(B')P(C').$$

Ali vrijedi da je

$$P(A' \cap B' \cap C') = \frac{1}{12} \neq P(A')P(B')P(C') = \frac{1}{24}.$$

6.3. Formula potpune vjerojatnosti

U nekim situacijama prilikom računanja vjerojatnosti nekih događaja zgodno je skup elementarnih događja Ω podijeliti na disjunktne podskupove koji u uniji čine cijeli Ω. Ilustracije radi, pogledajmo sljedeći primjer.

Primjer 6.5. *Električar Ante primio je pošiljku žarulja koje su bile raspoređene u dvije kutije. U prvoj kutiji nalaze se* 3 *ispravne i* 4 *neispravne žarulje, a u drugoj kutiji* 4 *ispravne i* 2 *neispravne žarulje. Kolika je vjerojatnost da na sreću odabrana žarulja bude ispravna?*

<u>*Rješenje:*</u>

Ukoliko na sreću odaberemo žarulju imamo ove dvije mogućnosti:

$$H_1 = \{\textit{odabrana žarulja je iz prve kutije}\}$$

$$H_2 = \{\textit{odabrana žarulja je iz druge kutije}\}$$

Vjerojatnosi ovih događaja su:

$$P(H_1) = \frac{7}{13}, P(H_2) = \frac{6}{13}.$$

Označimo događaj koji nas zanima s $A = \{\textit{odabrana žarulja je ispravna}\}$. *Događaj A možemo zapisati pomoću disjunktnih skupova na sljedeći način:*

$$A = A \cap \Omega = A \cap (H_1 \cup H_2) = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2).$$

Pri čemu te događaje definiramo na sljedeći način:

$$A \cap H_1 = \{\textit{odabrana žarulja je ispravna i izvučena iz prve kutije}\},$$

$$A \cap H_2 = \{\textit{odabrana žarulja je ispravna i izvučena iz druge kutije}\}.$$

Zbog toga vrijedi

$$\begin{aligned} P(A) &= P((A \cap H_1) \cup (A \cap H_2)) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) \\ &= P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2), \end{aligned}$$

pri čemu je vjerojatnost da smo izvukli ispravnu žarulju iz prve kutije jednaka

$$P(A|H_1) = \frac{3}{7},$$

a vjerojatnost da smo izvukli ispravnu žarulju iz druge kutije jednaka

$$P(A|H_2) = \frac{4}{6}.$$

Prema tome, slijedi da je vjerojatnost događaja A jednaka

$$P(A) = \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{13} + \frac{4}{6} \cdot \frac{6}{13} = \frac{7}{13} = 0.54.$$

Vjerojatnost da je izvučena žarulja ispravna je 54%.

Definicija 6.4. *Konačna ili prebrojiva familija događaja $(H_i, i \in I), I \subseteq \mathbb{N}$, u vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ čni* ***potpun sustav događaja*** *ako vrijedi:*

1. $H_i \neq \emptyset, \quad \forall i \in I,$
2. $H_i \cap H_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j,$
3. $\bigcup_{i \in I} H_i = \Omega.$

Skupove $H_1, \ldots, H_n$ nazivamo **hipotezama**.

Teorem 6.1 (Formula potpune vjerojatnosti). *Neka je $(H_i, i \in I), I \subseteq \mathbb{N}$, potpun sustav događja u vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tada za proizvoljan događaj $A \in \mathcal{F}$ vrijedi:*

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A|H_i) P(H_i).$$

Dokaz.

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap (\bigcup_{i \in I} H_i)) = P(\bigcup_{i \in I} (A \cap H_i)) \overset{A3)}{=} \sum_{i \in I} P(A \cap H_i) \overset{(4)}{=} \sum_{i \in I} P(A|H_i) P(H_i).$$

$\square$

6.4. Bayesova formula

Bayesova formula daje vjerojatnost hipoteze ako znamo da se dogodio neki događaj. Pretpostavimo da se izvodi nekakav eksperiment i da na počtku imamo n hipoteza $H_1, \ldots, H_n$ o pojavi koju proučavamo, pri tome hipotezama pridružujemo vjerojatnosti $P(H_i), i = 1, \ldots, n$. Poslije izvršenog eksperimenta, ako se kao rezultata dogodio događaj A, mi mijenjamo svoje uvjerenje o ispravnosti hipoteza i pridružujemo im vjerojatnosti $P(H_i|A), i = 1, \ldots, n$.

Teorem 6.2 (Bayesova formula). *Neka je $(H_i, i \in I), I \subseteq \mathbb{N}$, potpun sustav događaja u vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i neka je $A \in \mathcal{F}$ događaj takav da $P(A) > 0$. Tada za svaki $i \in I$ vrijedi:*

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) P(A|H_i)}{P(A)}.$$

Dokaz. Prema definiciji uvjetne vjerojatnosti (4) vrijedi:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i \cap A)}{P(A)} \overset{(5)}{=} \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}.$$

□

Primjer 6.6. *U autosalonu rabljenih automobila na vanjskom parkiralištu bila su* 2 *bijela i* 1 *crni Audi,* 3 *bijela i* 4 *crvena Mercedesa te* 3 *bijele i* 1 *crvena Škoda. Kupac je nasumce odabrao jedan od automobila za probnu vožnju. Ako je odabrao automobil bijele boje, kolika je vjerojatnost da je odabrao Mercedes?*

Rješenje:

Konstruirajmo najprije potpun sustav događaja:

$H_1 = \{$*odabran automobil je marke Audi*$\}$

$H_2 = \{$*odabran automobil je marke Mercedes*$\}$

$H_3 = \{$*odabran automobil je marke Škoda*$\}$

Pripadne vjerojatnosti hipoteza su:

$P(H_1) = \frac{3}{14}$ *jer su* 3 *automobila marke Audi od njih ukupno* 14,

$P(H_2) = \frac{7}{14}$ *jer je* 7 *automobila marke Mercedes od njih ukupno* 14,

$P(H_3) = \frac{4}{14}$ *jer su* 4 *automobila marke Škoda od njih ukupno* 14.

Ako s A *označimo događaj* $A = \{$*odabran je automobil bijele boje*$\}$*, onda su uvjetne vjerojatnosti jednake:*

$P(A|H_1) = \frac{2}{3}$ *jer su* 2 *automobila marke Audi bijele boje od njih ukupno* 3,

$P(A|H_2) = \frac{3}{7}$ *jer su* 3 *automobila marke Mercedes bijele boje od njih ukupno* 7,

$P(A|H_3) = \frac{3}{4}$ *jer su* 3 *automobila marke Škoda bijele bolje od njih ukupno* 4.

Prema Bayesovoj formuli slijedi:

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(A|H_i)P(H_i)} = \frac{3}{8} = 0.375.$$

Ako je odabran automobil bijele boje, vjerojatnost da je to upravo Mercedes je 37.5%.

7. Kartezijev produkt diskretnih vjerojatnosnih prostora

Slučajnom pokusu s konačno ili prebrojivo mnogo mogućih ishoda pridružujemo diskretan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Ako je zadano n takvih pokusa opisanih s $(\Omega_i, \mathcal{P}(\Omega_i), P_i)$, $i = 1, \dots, n$, onda je prirodno definirati novi složeni pokus kao uređenu n-torku tih n pokusa, gdje je ishod toga pokusa prezentiran elementom Kartezijevog produkta $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$.

Teorem 7.1. *Neka su* $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1), P_1)$ *i* $(\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2), P_2)$ *diskretni vjerojatnosni prostori i* $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(\omega_1, \omega_2) : \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2\}$. *Tada postoji jedinstvena vjerojatnost* $P \colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ *takva da vrijedi:*

$$P(A_1 \times A_2) = P_1(A_1)P_2(A_2), \quad A_1 \subseteq \Omega_1, \quad A_2 \subseteq \Omega_2.$$

Dokaz. Skup Ω je konačan ili prebrojiv pa je za zadavanje vjerojatnosti P na $\mathcal{P}(\Omega)$ dovoljno zadati vrijednosti funkcije P na točkama skupa Ω, a zatim po aditivnosti prirodno proširiti P na $\mathcal{P}(\Omega)$. Za elementarni događaj $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ definiramo

$$P(\{\omega\}) = P_1(\{\omega_1\})P_2(\{\omega_2\}),$$

a za svaki $A \subseteq \Omega, A = A_1 \times A_2, A_1 \subseteq \Omega_1, A_2 \subseteq \Omega_2$ (prema teoriji ponovljenih redova) vrijedi:

$$\begin{aligned} P(A) = P(A_1 \times A_2) &= \sum_{\omega \in A_1 \times A_2} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega_1 \in A_1} \sum_{\omega_2 \in A_2} P(\{(\omega_1, \omega_2)\}) \\ &= \sum_{\omega_1 \in A_1} \sum_{\omega_2 \in A_2} P_1(\{\omega_1\})P_2(\{\omega_2\}) \\ &= \sum_{\omega_1 \in A_1} P_1(\{\omega_1\}) \sum_{\omega_2 \in A_2} P_2(\{\omega_2\}) \\ &= P_1(A_1)P_2(A_2) \geq 0 \end{aligned}$$

Pokažimo da je funkcija P vjerojatnost.

$$P(\Omega) = P(\Omega_1 \times \Omega_2) = P_1(\Omega_1) \cdot P_2(\Omega_2) = 1 \cdot 1 = 1$$

Neka je $(A_n, n \in \mathbb{N})$ niz međusobno disjunktnih skupova. Tada je

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{\omega \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots} P(\{\omega\}) \overset{vidi[1, str.\ 26, Teorem 3.2.]}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\omega \in A_n} P(\{\omega\}) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

dakle P je σ-aditivna funkcija pa slijedi da je P vjerojatnost na $\mathcal{P}(\Omega)$. Jedinstvenost vjerojatnosti P je očigledna.

□

Teorem 7.2. *Neka su* $(\Omega_i, \mathcal{P}(\Omega_i), P_i), i = 1, \ldots, n$ *diskretni vjerojatnosni prostori i* $\Omega = \prod_{i=1}^{n} \Omega_i$ *Kartezijev produkt skupova* $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$. *Tada postoji jedinstvena vjerojatnost* $P \colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ *takva da je*

$$P(\prod_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P_i(A_i), \quad A_i \subseteq \Omega_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Diskretni vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ iz Teorema 7.2. zovemo **Kartezijev produkt** ili, kraće, **produkt** diskretnih vjerojatnosnih prostora $(\Omega_i, \mathcal{P}(\Omega_i), P_i), i = 1, \ldots, n$. Vjerojatnost P često označavamo s $\prod_{i=1}^{n} P_i$.

Neka izvodimo n pokusa opisanih diskretnim vjerojatnosnim prostorima $(\Omega_i, \mathcal{P}(\Omega_i), P_i), i = = 1, \ldots, n$. Naglasimo da razlikujemo pokuse koji su međusobno nezavisni i one koji su međusobno zavisni. Niz od n nezavisnih pokusa čine pokusi kod kojih ishodi svakog pojedinog pokusa ne ovise o ishodima ostalih pokusa.

Pretpostavimo da izvodimo n pokusa. Neka je $\Omega_r = \{{\omega_i}^{(r)} : i = 1, \ldots, k_r\}$ prostor elementarnih događaja r-tog pokusa, a $(\Omega_r, \mathcal{P}(\Omega_r), P_r)$ neka je pripadni vjerojatnosni prostor, $r = 1, \ldots, n$.

Definicija 7.1. ***Niz od n nezavisnih pokusa*** *diskretni je vjerojatnosni prostor* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, *gdje je* $\Omega = \prod_{r=1}^{n} \Omega_r$ *i* $P = \prod_{r=1}^{n} P_r$.

Prema Teoremu 7.2. vjerojatnost P u potpunosti je određena relacijama

$$P(({\omega_{i_1}}^{(1)}, \ldots, {\omega_{i_n}}^{(n)})) = \prod_{r=1}^{n} P_r({\omega_{i_r}}^{(r)}),$$

$$i_r = 1, \ldots, k_r, \quad r = 1, \ldots, n.$$

Niz od n nezavisnih pokusa služi kao matematički model za seriju pokusa koji su općenito različiti i kod kojih ishodi svakog pojedinog pokusa ne ovisi o ishodima ostalih pokusa.

Osobito čest slučaj je ponavljanje istog pokusa. Ako je pokus opisan s $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1), P_1)$, onda se za prostor elementarnih događaja uzima Kartezijeva potencija skupa ${\Omega_1}^n$.
Prepostavimo da sada imamo slučajni pokus s konačno mnogo ishoda i neka je on opisan s prostorom elementarnih događaja $\Omega_1 = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$. Pripadni vjerojatnosni prostor neka je $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1), P_1)$.

Definicija 7.2. ***Niz od n ponovljenih nezavisnih pokusa*** *diskretni je vjerojatnosni prostor* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *koji je jednak Kartezijevom produktu vjerojatnosnog prostora* $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1), P_1)$ *sa samim sobom n puta.*

Stoga, $\Omega = {\Omega_1}^n, P = {P_1}^n$ pa prema Teoremu 7.1. imamo da je vjerojatnost jednaka

$$P((\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_n})) = P_1(\omega_{i_1}) \cdots P_1(\omega_{i_n}), \quad i_1, \ldots, i_n = 1, \ldots, k.$$

Niz od n ponovljenih nezavisnih pokusa služi kao matematički model za seriju pokusa koji se ponavljaju uz iste uvjete, pri čemu ishodi svakog pojedinog pokusa ne ovise o ishodima ostalih pokusa.

Primjer 7.1 (De Mereov problem). *Je li preporučljivo kladiti se (tj. je li vjerojatnost barem* 50%*) da će u* 24 *uzastopna bacanja dviju simetričnih igraćih kockica barem jednom pasti dvije šestice?*

Rješenje:

Prostor elementarnih događaja za slučajan pokus jednog bacanja dviju kockica je:

$$\Omega_1 = \{(i, j) : i, j = 1, \ldots, 6\}, \quad k(\Omega) = 36.$$

Pripadni vjerojatnosni prostor je $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1), P_1)$, *a pripadna vjerojatnost* P_1 *jednoznačno je određena svojim vrijednostima*

$$P_1(\{\omega_1\}) = \frac{1}{36}, \forall \omega_1 \in \Omega_1.$$

Ako par kocaka bacimo n puta, dobivamo niz od n ponovljenih nezavisnih pokusa opisanih diskretnim vjerojatnosnim prostorom $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ gdje je $\Omega = {\Omega_1}^n, k(\Omega) = 36^n$, a vjerojatnost $P = {P_1}^n$ je dana s

$$P((\omega_1, \ldots, \omega_n)) = \prod_{i=1}^{n} P_1(\{\omega_i\}) = \frac{1}{36^n}, \forall(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega.$$

Definirajmo događaje:
$A = \{$*u n bacanja pojavila se barem jedna dvostruka šestica*$\}$,
$A^c = \{$*u n bacanja nije se pojavila nijedna dvostruka šestica*$\}$
$= \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) : \omega_i \in \Omega_1, \omega_i \neq (6,6), \quad i = 1, \ldots, n\}$.
Kako bismo izračunali vjerojatnost događaja A najprije ćemo izračunati vjerojatnost njegovog komplementa pa imamo:

$$P(A^c) = \frac{k(A^c)}{k(\Omega)} = \Big(\frac{35}{36}\Big)^n \Longrightarrow P(A) = 1 - \Big(\frac{35}{36}\Big)^n.$$

Uočimo da je $P(A)$ rastuća funkcija od n. Ako želimo izračunati koliko puta moramo baciti dvije različite igraće kockice da vjerojatnost da se dogodi događaj A bude barem 50%, potrebno je riješiti sljedeću nejednadžbu $P(A) \geq \frac{1}{2}$, tj.

$$1 - \Big(\frac{35}{36}\Big)^n \geq \frac{1}{2} \Longrightarrow n \log \frac{35}{36} \leq \log \frac{1}{2} \Longrightarrow n \geq \frac{\log 2}{\log 36 - \log 35} \Longrightarrow n \geq 25.$$

Dakle, odgovor na De Mereovo pitanje je negativan, tj. nije se preporučljivo kladiti na to da će u 24 bacanja para igraćih kockica barem jednom pasti dvije šestice.

Vrlo važan slučaj niza od n ponovljenih nezavisnih pokusa je tzv. Bernoullijeva shema. Ona nam služi za opis situacije kada pod istim uvjetima nezavisno n puta ponavljamo slučajan pokus koji ima samo dva ishoda. Dobro opisuje slučajne pokuse tipa prolaz-pad, pismo-glava, uspjeh-neuspjeh itd.

Definicija 7.3. *Neka je $\Omega_1 = \{0, 1\}$ dvočlani skup i $P\colon \mathcal{P}(\Omega_1) \to [0, 1]$ vjerojatnost na Ω_1 takva da je $P_1(\{1\}) = p$ i $P_1(\{0\}) = q = 1 - p, 0 \leq p \leq 1$.* ***Bernoullijeva shema*** *je diskretni vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ gdje je $\Omega = {\Omega_1}^n, P = {P_1}^n$.*

Dakle, Bernoullijeva shema je matematički model za niz n ponovljenih nezavisnih pokusa od kojih svaki ima samo dva moguća ishoda: uspjeh=1 i neuspjeh=0 te je vjerojatnost uspjeha u svakom pokusu ista i iznosi p. Za više detalja vidi [1, str. 89].

Do sada smo se bavili nizom nezavisnih pokusa, prijeđimo sada na niz zavisnih pokusa, tj. pokusa u kojima ishod nekog pokusa ovisi o ishodima ostalih pokusa. Pogledajmo sljedeći primjer.

Primjer 7.2. *Imamo tri kutije. U prvoj kutiji neka su 2 bijele i 3 crne kuglice, u drugoj 2 bijele i 2 crne kuglice, a u trećcoj 3 bijele i 1 crna kuglica. Iz prve kutije na slučajan način izvlačimo jednu kuglicu i stavimo je u drugu kutiju. Poslije toga iz druge kutije na slučajan način izvučemo jednu kuglicu i stavimo je u treću kutiju. Na kraju iz treće kutije na slučajan način premjestimo jednu kuglicu u prvu kutiju. Što je vjerojatnije: da se sastav kuglica prve kutije promijenio s obzirom na boju ili da je ostao isti?*

Rješenje:

Ovdje imamo tri slučajna pokusa - tri premještanja kuglica, a rezultat svakog idućeg pokusa ovisi o rezultatima prethodnih pokusa pa su zbog toga ti pokusi zavisni. Označimo s A_k događaj:

$$A_k = \{u\ k\text{-tom premještanju premještena je bijela kuglica}\}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Tada za prostor elementarnih događaja uzimamo skup

$$\Omega = \{(A_1, A_2, A_3), (A_1, A_2, {A_3}^c), (A_1, {A_2}^c, A_3), (A_1, {A_2}^c, {A_3}^c),$$
$$({A_1}^c, A_2, A_3), ({A_1}^c, A_2, {A_3}^c), ({A_1}^c, {A_2}^c, A_3), ({A_1}^c, {A_2}^c, {A_3}^c)\}.$$

Primjerice trojka $(A_1, {A_2}^c, A_3)$ odgovara ishodu pokusa: u prvome i trećem premještanju premještena je bijela kuglica, a u drugome premještanju premještena je crna kuglica, a trojku interpretiramo kao presjek tih događaja.
Budući da nam je sastav kutija poznat, poznate su nam i sljedeće vjerojatnosti $P(A_1), P(A_2|A_1)$, $P(A_3|(A_1, A_2))$ itd.
Budući da trojku interpretiramo kao presjek koristeći formulu (6) slijedi

$$P(A_1, A_2, A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1 \cap A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{125}.$$

Analogno izračunamo vjerojatnosti preostalih elementarnih događaja prostora Ω. Označimo s B_k događaj:

$$B_k = \{\text{poslije obavljena tri premještanja u prvoj kutiji je } k \text{ bijelih kuglica}\}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Tada je

$$B_1 = \{(A_1, A_2, {A_3}^c), (A_1, {A_2}^c, {A_3}^c)\},$$
$$B_2 = \{(A_1, A_2, A_3), (A_1, {A_2}^c, A_3), ({A_1}^c, A_2, {A_3}^c), ({A_1}^c, {A_2}^c, {A_3}^c)\},$$
$$B_3 = \{({A_1}^c, A_2, A_3), ({A_1}^c, {A_2}^c, A_3)\}.$$

Sada je lako izračunati

$$P(B_1) = \frac{14}{125}, \quad P(B_2) = \frac{60}{125}, \quad P(B_3) = \frac{51}{125}.$$

Kako je $P(B_2)$ vjerojatnost da je nakon obavljena 3 premještanja u prvoj kutiji ostao isti broj bijelih kuglica, vidimo da je vjerojatnije da će se broj bijelih kuglica u prvoj kutiji promijeniti jer je $P(B_1) + P(B_3) > P(B_2)$.

Ovaj nam primjer sugerira sljedeću definiciju.

Definicija 7.4. *Neka vršimo n pokusa i neka svaki od njih ima konačno mnogo ishoda. Neka je $\Omega_r = \{{\omega_i}^{(r)} : i = 1, \ldots, k_r\}$ prostor elementarnih događaja r-tog pokusa, $r = 1, \ldots, n$. (U daljnjem tekstu umjesto $P_r(\{{\omega_i}^{(r)}\})$ pisat ćemo $P_r({\omega_i}^{(r)})$ itd.)* ***Niz od n zavisnih pokusa*** *je diskretni vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, gdje je $\Omega = \prod_{r=1}^{n} \Omega_r$, a $P\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ vjerojatnost definirana je s*

$$P((\omega_{i_1}{}^{(1)},\dots,\omega_{i_n}{}^{(n)})) = P_1(\omega_{i_1}{}^{(1)}) \cdot P_2(\omega_{i_2}{}^{(2)}|\omega_{i_1}{}^{(1)}) \cdot P_3(\omega_{i_3}{}^{(3)}|(\omega_{i_1}{}^{(1)}, \omega_{i_2}{}^{(2)}))\cdots P_n(\omega_{i_n}{}^{(n)}|(\omega_{i_1}{}^{(1)},\dots,\omega_{i_{n-1}}{}^{(n-1)})),$$

$$i_r = 1,\dots k_r, \quad r = 1,\dots n,$$

pri tome brojevi

$P_r(\omega_{i_r}{}^{(r)}|(\omega_{i_1}{}^{(1)},\dots,\omega_{i_{r-1}}{}^{(r-1)})) \geq 0$ *i* $\sum_{i_r=1}^{k_r} P_r(\omega_{i_r}{}^{(r)}|(\omega_{i_1}{}^{(1)},\dots,\omega_{i_{r-1}}{}^{(r-1)})) = 1,$
$\forall i_r = 1,\dots,k_r,\ r = 1,\dots,n.$

Dokaz da je ovako definirana funkcija P vjerojatnost vidi u [1, str. 77- str. 78].

8. Slabi zakon velikih brojeva

Kako bismo opravdali istinitost povijesnog pristupa definiranja vjerojatnosti navedenog u poglavlju 2.2. koristit ćemo slabi zakon velikih brojeva. Najprije navedimo definicije i teoreme koji će nam biti potrebni za razumijevanje iskaza i dokaza spomenutog teorema.

Definicija 8.1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ σ-algebra na $\mathbb{R}$ koja sadrži otvorene podskupove od $\mathbb{R}$ i nazivamo je Borelova σ-algebra. Svaka funkcija $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ takva da je skup $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}, \quad \forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, tj. $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}, \quad \forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ nazivamo* ***slučajna varijabla****.*

Slučajne varijable dijelimo na diskretne i neprekidne. Diskretna je potpuno određena svojom tablicom distribucije i funkcijom distribucije, dok je neprekidna potpuno određena svojom funkcijom gustoće i funkcijom distribucije. Funkcije distribucije često mogu biti komplicirane pa su iz toga razloga uvedeni karakteristični brojevi koji nam daju dodatne informacije o slučajnoj varijabli. Najvažniji od tih brojeva su matematičko očekivanje i varijanca, koje ćemo definirati u nastavku. No, najprije ćemo definirati diskretnu slučajnu varijablu i bazirati se na njoj jer će nam to biti dovoljno za opravdanje statističke definicije vjerojatnosti. Za više detalja o slučajnim varijablama možete pogledati u [2, Poglavlje 2.].

Definicija 8.2. *Slučajna varijabla $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je* ***diskretna*** *ako postoji diskretan skup $D \subset \mathbb{R}$ takav da je $P(X \in D) = 1$, tj. ako joj je slika (tj. skup vrijednosti koje slučajna varijabla može poprimiti) diskretan skup.*

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $I = \mathbb{N}$. Diskretnu slučajnu varijablu prikazujemo u obliku tablice

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

i taj prikaz nazivamo **tablica distribucije** slučajne varijable X.
Dakle, diskretnu slučajnu varijablu zadajemo pomoću dva skupa brojeva, a to su skup vrijednosti koje slučajna varijabla može poprimiti $\mathcal{R}(X) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$, a drugi je niz pripadnih vjerojatnosti $(p_i, i \in \mathbb{N})$ takav da vrijedi $p_i = P(X = x_i), i \in \mathbb{N}$. Također mora biti zadovoljeno:

1. $x_i \neq x_j, \quad \forall i \neq j,$
2. $0 \leqslant p_i \leqslant 1, \quad \forall i \in \mathbb{N},$

3. $\sum_{i\in\mathbb{N}} p_i = 1.$

Definicija 8.3. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor i* X *slučajna varijabla na njemu. Funkcija* $F_X\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ *koja* $x \in \mathbb{R}$ *pridružuje vjerojatnost da realizacija slučajne varijable poprimi vrijednost manju ili jednaku od* x *naziva se* ***funkcija distribucije*** *slučajne varijable* X*, tj.*

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant x\}).$$

Definicija 8.4. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *diskretan vjerojatnosni prostor i* X *slučajna varijabla na njemu. Ako red* $\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\omega)$ *apsolutno konvergira, tj. ako konvergira red* $\sum_{\omega\in\Omega} |X(\omega)|\, P(\omega)$ *onda kažemo da slučajna varijabla* X *ima matematičko očekivanje i broj*

$$E(X) = EX = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\omega)$$

nazivamo ***matematičko očekivanje*** *slučajne varijable* X*.*

Teorem 8.1. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *diskretan vjerojatnosni prostor i*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

slučajna varijabla na njemu. Redovi $\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\omega)$ *i* $\sum_{i\in I} x_i p_i$ *istovremeno ili apsolutno konvergiraju ili apsolutno divergiraju. U slučaju apsolutne konvergencije sume su im jednake, tj. vrijedi*

$$EX = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\omega) = \sum_{i\in I} x_i p_i.$$

Dokaz. Vidi [2, str. 86, Teorem 2.1.]. □

Teorem 8.2. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *diskretan vjerojatnosni prostor i*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

slučajna varijabla na njemu i $g\colon \mathcal{R}(X) \to \mathbb{R}$ *funkcija takva da postoji* $Eg(X)$*. Tada vrijedi:*

$$E(g(X)) = \sum_{i\in\mathbb{N}} g(x_i)p_i.$$

Dokaz. Vidi [2, str. 86, Teorem 2.2.]. □

Koristeći prethodne teoreme mogu se dokazati važna svojstva matematičkog očekivanja:

1. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ i X slučajna varijabla takva da postoji $E(X)$. Tada slučajna varijabla $aX + b$ ima očekivanje i vrijedi

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

2. **(monotonost očekivanja)**
Ako su X, Y slučajne varijable takve da postoje $E(X), E(Y)$ i ako je $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$, $\forall\omega \in \Omega$, onda je $E(X) \leqslant E(Y)$.

3. **(nenegativnost očekivanja)**
   Ako je X slučajna varijabla koja ima očekivanje takva da je $X(\omega) \geqslant 0, \forall \omega \in \Omega$, onda je $E(X) \geqslant 0$.

Svojstvo linearnosti iskazat ćemo u sljedećem teoremu:

Teorem 8.3. *Neka su X i Y dvije slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ koje imaju očekivanja $E(X)$, odnosno $E(Y)$. Tada za proizvoljne $a, b \in \mathbb{R}$ slučajna varijabla $aX + bY$ takoder ima očekivanje i vrijedi*

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$

Dokaz. Vidi [2, str. 87, Teorem 2.3.]. □

Definicija 8.5. *Ako postoji $E(X - E(X))^2$, onda taj pozitivan realan broj nazivamo **varijanca** slučajne varijable X i označavamo s $\mathrm{Var}X$ (ili σ^2).*

Svojstva varijance

1. $\mathrm{Var}X = E(X^2) - (E(X))^2$

   Dokaz. Vidi [2, str. 93]. □

2. Neka je X slučajna varijabla koja ima varijancu te a i b realni brojevi, tada slučajna varijabla $aX + b$ ima varijancu

   $$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}X.$$

   Dokaz. Vidi [2, str. 93]. □

Propozicija 8.1 (**Čebiševljeva nejednakost**). *Neka je X slučajna vrijabla koja ima varijancu σ^2 te neka je dan broj $k > 0$. Tada vrijedi:*

$$P\Big(|X - \mu| \geqslant k \cdot \sigma \Big) \leqslant \frac{1}{k^2},$$

gdje je $\mu = E(X)$.

Dokaz. Vidi [2, str. 90, Propozicija 2.2.]. □

Definicija 8.6. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Funkcija*

$$\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_n) \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$$

*koja svakom ishodu slučajnog pokusa pridružuje n-torku realnih brojeva $(x_1, \ldots, x_n)$ nazivamo **n-dimenzionalan slučajan vekor** ako vrijedi*

$$\{X_1 \leqslant x_1\} \cap \cdots \cap \{X_n \leqslant x_n\} = \{X_1 \leqslant x_1, \ldots, X_n \leqslant x_n\} \in \mathcal{F}, \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Definicija 8.7. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_n) \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ slučajan vektor na njemu. Funkciju $F_{\mathbb{X}} \colon \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ definiranu s*

$$F_{\mathbb{X}}(\boldsymbol{x}) = F_{\mathbb{X}}(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 \leqslant x_1, \ldots, X_n \leqslant x_n)$$

*nazivamo **funkcija distribucije slučajnog vektora** $(X_1, \ldots, X_n)$.*

Definicija 8.8. *Neka su $X_1, \ldots, X_n$ slučajne varijable na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ s pripadnim funkcijama distribucije $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$ i neka je $F_{\mathbb{X}}$ funkcija distribucije slučajnog vektora $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_n)$. Kažemo da su slučajne varijable $X_1, \ldots, X_n$* ***nezavisne*** *ako vrijedi*

$$F_{\mathbb{X}}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} F_{X_k}(x_k).$$

Teorem 8.4. *Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ takve da postoji $VarX_k, k = 1, \ldots, n$ i neka su $a_1, \ldots, a_n$ realni brojevi. Tada vrijedi:*

$$Var\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 \, VarX_k.$$

Dokaz. Vidi [2, str. 162, Teorem 3.8.]. □

Teorem 8.5 (Slabi zakon velikih brojeva). *Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli i neka su varijance tih slučajnih varijabli uniformno ograničene, tj. postoji $M > 0$ takav da je*

$$\max_{k \in \mathbb{N}} VarX_k \leq M.$$

Neka je $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. *Tada za svaki $\epsilon > 0$ vrijedi*

$$\lim_{n \to \infty} P\Big(\frac{1}{n} |S_n - ES_n| \geq \epsilon\Big) = 0.$$

Dokaz. U dokazu ćemo iskoristiti Čebiševljevu nejednakost, tj. za svaku slučajnu varijablu Y koja ima varijancu i za svaki $\epsilon > 0$ vrijedi

$$P(|Y - EY| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}Y}{\epsilon^2}.$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definiramo slučajnu varijablu $Y_n = \frac{S_n}{n}$. Zbog nezavisnosti vrijedi da je

$$\mathrm{Var}Y_n = \mathrm{Var}\Big(\frac{S_n}{n}\Big) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}X_k \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} M = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot M = \frac{M}{n}.$$

Stoga slijedi

$$0 \leq P\Big(\frac{1}{n} |S_n - ES_n| \geq \epsilon\Big) = P\Big(|Y_n - EY_n| \geq \epsilon\Big) \leq \frac{\mathrm{Var}Y_n}{\epsilon^2} \leq \frac{M}{n \cdot \epsilon^2} \longrightarrow 0 \quad \text{kada} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Slijedi da je

$$\lim_{n \to \infty} P\Big(\frac{1}{n} |S_n - ES_n| \geq \epsilon\Big) = 0,$$

čime smo dokazali traženu tvrdnju. □

Definicija 8.9. *Kažemo da je niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$* ***niz nezavisnih jednako distribuiranih*** *slučajnih varijabli ako su sve slučajne varijable međusobno nezavisne i ako imaju jednake distribucije. Oznaka n.j.d.*

Statistička definicija vjerojatnosti

Korištenjem slabog zakona velikih brojeva primijenjenog na n. j .d. Bernoullijevih slučajnih varijabli možemo se uvjeriti da je opravdan statistički pristup modeliranja vjerojatnosti, pod pretpostavkom da modeliramo vjerojatnost pojavljivanja događaja na temelju nezavisnih ponavljanja istog pokusa (vidi poglavlje 2.2.).
Taj problem opisat ćemo koristeći tzv. Bernoullijevu shemu koju smo već spomenuli u prethodnom poglavlju kao matematički model za slučajan pokus koji se sastoji od n međusobno nezavisnih ponavljanja uvijek istog pokusa kojeg opisujemo sljedećom distribucijom

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, 0 \leq p \leq 1.$$

$(X_1, \ldots, X_n)$ je n. j .d. s distribucijom svake komponente jednake distribuciji od X.
U statističkoj definiciji vjerojatnosti koristili smo upravo takav model. Isti pokus ponavljali smo n puta nezavisno i definirali vjerojatnost događaja $A \in \mathcal{F}$ kao broj oko kojega se gomilaju relativne frekvencije događaja A s povećavanjem broja ponavljanja pokusa, tj.

$$P(A) \approx \frac{n_A}{n},$$

gdje je n_A frekvencija događaja A, koju ćemo u daljnjem tekstu označavati s f_A, dok je $\frac{n_A}{n}$ relativna frekvencija događaja A.
Neka je X slučajna varijabla u tom pokusu definirana na sljedeći način:

$$X(\omega) = \begin{cases} 1\,, & \omega \in A \\ 0\,, & \omega \notin A. \end{cases}$$

Tada je slučajna varijabla X zadana sljedećom tablicom distribucije:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, 0 \leq p \leq 1,$$

gdje je $p = P(X = 1)$ vjerojatnost da se dogodio događaj A.
Nezavisnim ponavljanjem pokusa n puta nastaje n. j. d. niz $(X_1, \ldots, X_n)$ Bernoullijevih slučajnih varijabli na koji možemo primijeniti slabi zakon velikih brojeva. Imamo sljedeće:

$$EX = EX_i = p, \quad \forall i = 1, \ldots, n,$$

$$f_A = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{k=1}^{n} X_k,$$

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \frac{f_A}{n},$$

$$E\overline{X_n} = E(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} EX_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p = \frac{1}{n} \cdot n \cdot p = p$$

pa vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\Big|\frac{f_A}{n} - p\Big| \geq \epsilon\Big) = 0, \quad \forall \epsilon > 0,$$

time smo opravdali statistički pristup definiranja vjerojatnosti.
Drugim riječima, vjerojatnost da relativna frekvencija događaja A odstupa od vjerojatnosti da se dogodio događaj A za proizvoljno mali broj ϵ ili više teži nuli što više puta ponovimo slučajan pokus.
U sljedećem primjeru vidjet ćemo jednu od primjena statističke definicije u stvarnom životu.

Primjer 8.1. *Na uzorku od* 10 *ispitanika provedeno je istraživanje o ovisnosti o konzumiranju duhanskih proizvoda. Rezultati su prikazani u sljedećoj tablici:*

ISPITANIK	SPOL	OVISNOST
1	Ž	0
2	Ž	1
3	M	0
4	M	1
5	M	1
6	Ž	1
7	M	1
8	Ž	0
9	M	0
10	M	1

Tablica 2: Tablica rezultata ispitivanja

*Svaka osoba prema spolu pripada jednoj od dvije kategorije (Ž ili M) te prema ovisnosti jednoj od dvije kategorije (*0*-ne konzumira,* 1*-konzumira). Zanima nas sljedeće:*

a) *Kolika je vjerojatnost da je ispitanik osoba ovisna o konzumiranju duhanskih proizvoda?*

b) *Kolika je vjerojatnost da osoba muškog spola nije ovisna o konzumiranju duhanskih proizvoda?*

Rješenje:

kategorija	frekvencija	relativna frekvencija
0	4	40,0000
1	6	60,0000
	10	100,0000

Tablica 3: Tablica frekvencija varijable ovisnost

kategorija	frekvencija	relativna frekvencija
0	2	33,3333
1	4	66,6667
	6	100,0000

Tablica 4: Tablica frekvencija varijable ovisnost uz uvjet spol=M

Napomena: relativne frekvencije u tablici su izražene u postotcima.

a) *Ako s X označimo slučajnu varijablu kojom modeliramo ovisnost osobe o konzumiranju duhanskih proizvoda, onda je je njezina slika jednaka $\mathcal{R}(X) = \{0, 1\}$. Onda imamo*

$$P(X = 1) = \frac{6}{10} = 0.6 = 60\%$$

pa je vjerojatnost da je ispitana osoba ovisna o konzumiranju duhanskih proizvoda jednaka 60%.

b)

$$P(X = 0) = \frac{2}{6} = 0.3333 = 33.33\%$$

pa vjerojatnost da osoba muškoga spola nije ovisna o konzumiranju duhanskih proizvoda jednaka 33.33%, *jer od ukupno* 6 *osoba muškoga spola njih* 2 *nisu ovisne.*

Literatura

[1] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[2] M. Benšić, N. Šuvak, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za Matematiku, Osijek, 2014., https://www.mathos.unios.hr/uvis/UVIS_knjiga_final/UVIS_knjiga_web.pdf

[3] G. Grimmett, D. Stirzaker, *One Thousand Exercises in Probability*, https://eclass.uop.gr/modules/document/file.php/TST244/%5BGeoffrey_Grimmett%2C_Dav

[4] R. Durrett, *Probability: Theory and Examples*, https://services.math.duke.edu/~rtd/PTE/PTE4_1.pdf

[5] D. Jukić, *Mjera i integral*, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za Matematiku, Osijek, 2012., https://www.mathos.unios.hr/~jukicd/utm/Mjera_i_Integral_Dragan_Jukic.pdf

[6] D. Jankov Maširević, A. Kozić, *Geometrijska vjerojatnost u svakodnevnom životu*, Osječki matematički list **15** (2015.), 19-31.