Učenje i poučavanje jednadžbi

Ćosić, Ivona

SVEUČILIŠTE J. J. STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA MATEMATIKU

Ivona Ćosić

UČENJE I POUČAVANJE JEDNADŽBI

Diplomski rad

Osijek, 2017.

SVEUČILIŠTE J. J. STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA MATEMATIKU

SMJER: Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Ivona Ćosić

Diplomski rad

Učenje i poučavanje jednadžbi

Voditelj diplomskog rada: izv. prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2017.

Sadržaj

1 Uvod

U ovom diplomskom radu govorit ćemo o jednadžbama zato što se protežu kroz cijelo matematičko obrazovanje. Čak i učenici u nižim razredima osnovne škole rješavaju jednadžbe, a da toga nisu ni svjesni, kroz zadatke u kojima na prazno mjesto moraju upisati određeni broj kako bi vrijedila zadana jednakost. Ozbiljnije bavljenje jednadžbama kreće u 6. razredu osnovne škole kada se uvode linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom. U 7. razredu se učenici upoznaju sa sustavima dvaju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice i njihovim primjenama.

Prema gimnazijskom programu u srednjoj školi se obrađuju jednadžbe s apsolutnim vrijednostima i iracionalne jednadžbe u prvom razredu. U drugom razredu učenici upoznaju eksponencijalne i logaritamske jednadžbe. Važno je napomenuti da se u drugom razredu obrađuju i kvadratne jednadžbe koje su vrlo važne za rješavanje raznih problema. Kroz srednju školu učenici nauče i trigonometrijske jednadžbe.

U ovom radu bazirat ćemo se na linearne jednadžbe, sustave linearnih jednadžbi i kvadratne jednadžbe. U prvom poglavlju riječ će biti o linearnim jednadžbama i problemima s kojima se suočavaju učenici prilikom njihova rješavanja. Nakon toga u drugom poglavlju navest ćemo neke primjere pomoću kojih se mogu uvesti sustavi linearnih jednadžbi. Većina rada će se bazirati na kvadratnim jednadžbama i metodama njihova rješavanja jer su one, kao što je već spomenuto, izrazito bitne za rješavanje raznih problema iz matematike, ali i drugih područja znanosti. Naglasak će biti na važnosti prevođenja problema na matematički jezik, odnosno formuliranju jednadžbi, a ne samo na njihovom rješavanju pri čemu može pomoći Descartesova metoda o kojoj će biti više riječi u predzadnjem poglavlju. U zadnjem poglavlju osvrnut ćemo se na istraživanje kojim je ispitivano što nastavnici žele od učenika prilikom rješavanja jednadžbi i kako ih oni sami rješavaju.

2 Kreiranje i rješavanje linearnih jednadžbi

Primjer 1. *Zamislite jedan prirodan broj između* 1 *i* 20*. Udvostručite ga i dodajte mu broj 5. Koji broj ste dobili?*

Jedan od jednostavnih načina upoznavanja učenika s linearnim jednadžbama je zadavanje zadataka poput ovoga, a zatim možemo prozvati nekoga od učenika i pitati ga da kaže broj koji je dobio kao rješenje. Drugim učenicima možemo zadati zadatak da odrede koji broj je prvi učenik zamislio. Ako netko od učenika točno odgovori trebao bi objasniti kako je došao do rješenja, odnosno da je od dobivenog broja oduzeo 5 i zatim ga prepolovio odnosno podijelio s brojem 2. Jednostavne linearne jednadžbe se često uvode pomoću ovakvih ili sličnih zadataka. Većina učenika nema problema pri rješavanju ovakvih zadataka ako su brojevi u zadatku jednostavni i ako su učenici upoznati s računskim operacijama koje se spominju u zadatku, te s njihovim inverznim operacijama.

Problemi nastaju čim se jednadžbe počnu zapisivati pomoću simbola i kada se uvedu metode rješavanja jednadžbi. Neki od problema s kojima se učenici susreću prilikom rješavanja jednadžbi su sljedeći:

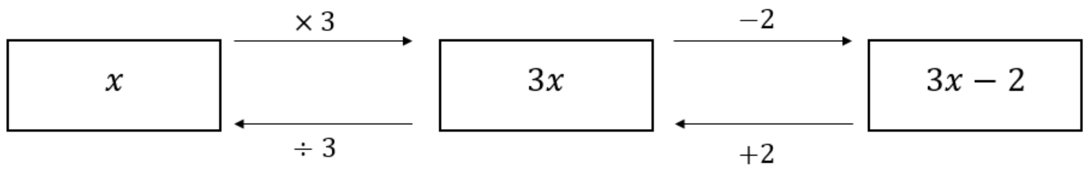
- Poteškoće prilikom zapisivanja problema zadanog riječima u njegovom algebarskom obliku, odnosno formiranje jednadžbe.
- Učenici se često oslanjaju na neke neformalne metode koje su korisne za rješavanje jednostavnijih primjera, ali pomoću njih ne mogu riješiti složenije jednadžbe.
- Učenici nisu stekli vještinu računanja s negativnim brojevima i razlomcima.
- Ponekad učenici odaberu pogrešnu računsku operaciju kojom djeluju na jednadžbu pa može biti frustrirajuće što ne mogu doći do rješenja.
- Učenicima ponekad problem predstavlja i određivanje redoslijeda kojim će izvršiti pojedine računske operacije.

Najteži dio rješavanja nekoga problema većinom je prevođenje toga problema u odgovarajući simbolički zapis. Ponekad se ovaj dio rješavanja problema zanemari i nastavnici se posvećuju samo tome kako učenike naučiti tehnikama odnosno metodama rješavanja jednadžbi. To za posljedicu ima dvije loše stvari. Prva je da učenici ne uspiju razviti sposobnosti zapisivanja problema u simboličkom obliku, a druga je da učenici gube motivaciju jer je razlog za učenje jednadžbi zapravo izgubljen odnosno zanemaren. Metode rješavanja bi trebalo poučavati i razvijati kroz rješavanje problema za koje su i razvijene da rješavaju kako bi učenici zapravo vidjeli svrhu u onome što uče i rade. Zadaci ne moraju biti komplicirani – želja za rješavanjem različitih zanimljivih problema može biti dobar izvor motivacije za učenje.

Nastavnici često koriste jednostavne jednadžbe oblika $x + 5 = 8$ kako bi učenike upoznali s formalnim metodama rješavanja jednadžbi, ali takve vrste jednadžbi učenici mogu riješiti metodom pokušaja i pogrešaka odnosno intuitivnim pogađanjem. Učenici ne razmišljaju o tome kako od 8 moraju oduzeti broj 5 da bi došli do rješenja jer im je broj koji je označen s x odmah očit ili misle „Znamo da je $3{+}5 = 8$“. Uvođenje formalnih metoda rješavanja jednadžbi na primjerima koje učenici mogu riješiti i bez njih nije pretjerano korisno jer većina učenika, potpuno opravdano, zanemaruje teže načine rješavanja ako su upoznati s jednostavnijima. Tek kada put do rješenja nije odmah očit i kada neformalni načini rješavanja očito nisu prikladni za rješavanje problema učenici će shvatiti da im formalne metode mogu biti od pomoći. U kontekstu zadataka s početka „zamislite broj“, rješavanje jednadžbe $24x - 65 = 137$ je manje trivijalno od rješavanja $2x + 5 = 11$ iako jednostavniji problemi mogu biti korisni za predlaganje načina rješavanja težih problema.

Mnogi problemi u poučavanju algebre nastaju zato što učenici ne razumiju osnovne numeričke ideje ili nisu uvježbali njihovo korištenje, a to se odnosi i na rješavanje jednadžbi. Stoga je prikladno da se što je više moguće pozornosti u ranim fazama poučavanja posveti osnovnim načelima i metodama koristeći samo one brojeve koje učenici dobro poznaju i s kojima savršeno znaju računati. Probleme koji uključuju negativne brojeve i razlomke treba ostaviti za kasnije faze poučavanja kada učenici nauče sa sigurnošću računati s takvim brojevima i kada steknu vještinu rješavanja problema sa jednostavnijim brojevima. S druge strane, ako se učenicima dopusti korištenje kalkulatora, probleme koji uključuju velike cijele brojeve i decimalne brojeve većina učenika bi mogla riješiti bez većih poteškoća.

Uobičajena pogreška koja se javlja prilikom rješavanja jednadžbi oblika $3x - 2 = 7$ nastaje kada učenici odluče oduzeti 2 s obje strane jednadžbe kako bi se „riješili“ broja 2 s lijeve strane i pogrešno dođu do rješenja $3x = 5$. Ovakva pogreška nastaje jer udžbenici i nastavnici upućuju učenike na „rješavanje“ određenog broja kako bi nepoznanica ostala sama na jednoj strani jednadžbe. Učenici tada dobivaju predodžbu da nešto mora biti „uklonjeno“ umjesto da razmišljaju kako računska operacija mora biti „poništena“. Kako bi učenici odredili koju računsku operaciju moraju provesti pomoći će im razmišljanje o tome koje računske operacije su morale biti provedene kako bismo dobili izraze koje imamo na lijevoj strani jednadžbe (odnosno na strani jednadžbe na kojoj se nalazi nepoznanica). Ako učenici riječima pokušaju izraziti korake koji su poduzeti kako bi se dobio izraz $3x - 2$ i ako ih pokušaju prikazati pomoću dijagrama pokazanog na Slici 1. bit će im lakše vidjeti i razumjeti što trebaju poduzeti kako bi izračunali vrijednost od x. Dijagram treba napraviti tako da na gornje strelice upišemo računske operacije koje u pojednom koraku dovode do izraza na strani jednadžbe na kojoj se nalazi nepoznanica, a na donje strelice računske operacije inverzne onima na gornjim strelicama, donosno one operacije koje poništavaju gornje operacije. Iz dijagrama je jasno da je u zadnjem koraku broj 2 bio oduzet pa prvi korak koji moramo napraviti kako bismo izračunali koliko iznosi x je poništiti računsku operaciju oduzimanja, tj. broj 2 dodati broju 7.



Slika 1: Poništavanje operacija pomoću dijagrama

Dijagrami mogu biti korisni i kod sljedećeg problema. Učenici često imaju teškoće prilikom odabira kojim redom provesti računske operacije. Razmišljanje o tome na koji način je jednadžba „izgrađena“ može im pomoći. Ideja je da se prvo mora „poništiti“ ona računska operacija koja je zadnja provedena u sastavljanju jednadžbe. Ta ideja neće učenicima odmah biti očita. Prvo što učeniku zapne za oko je „3 puta x“ i to ga može navesti da prvo podijeli sa 3. Problem ne bi bio da učenici cijelu jednadžbu podijele sa 3, ali u većini slučajeva učenici bi samo 7 podijelili sa 3. Iako većina učenika takvu pogrešku neće napraviti prilikom rješavanja jednostavnijih jednadžbi kao što je $3x - 2 = 7$, takva pogreška se često javlja prilikom rješavanja problema koji uključuju razne formule, odnosno kada je zadatak iz formule izraziti određenu veličinu. Na primjer, ako je zadatak izraziti a iz formule $v = u + at$, često možemo kao rješenje očekivati $a = \frac{v}{t} - u$.

Rješavanje zadatka možemo zakomplicirati ako inzistiramo na zapisivanju svakog koraka kao što je to prikazano lijevo na Slici 2. jer to može biti kontraproduktivno, jednostavan proces rješavanja tada izgleda komplicirano i može zbuniti učenike više nego što će im pomoći. Zapis prikazan desno na Slici 2. je dovoljan kao pisano rješenje, ali uz njega bi trebala ići i usmena rasprava o tome koje smo korake poduzeli i kojim redom, odnosno kako bismo naglasili da smo poništili dvije računske operacije dodavši broj 2 i podijelivši cijeli izraz sa 3.

$$\begin{gathered} 3x - 2 = 7 \\ 3x - 2 + 2 = 7 + 2 \\ 3x = 9 \\ \frac{3x}{3} = \frac{9}{3} \\ x = 3 \end{gathered} \qquad \begin{gathered} 3x - 2 = 7 \\ 3x = 9 \\ x = 3 \end{gathered}$$

Slika 2: Kompliciranje jednostavnog postupka

Korištenje dijagrama pomaže učenicima utvrditi važan princip izvršavanja iste računske operacije s obje strane jednadžbe kako bi jednakost i dalje vrijedila i točan redoslijed kojim će izvršiti te računske operacije. Međutim, dijagrami nisu odmah primjenjivi kada se nepoznanica nalazi na više mjesta u jednadžbi jer se nepoznanica mora nalaziti samo na jednom mjestu. Dodatni koraci koji se moraju poduzeti kako bi se to postiglo ne bi trebali biti teški ako su učenici stekli vještinu rješavanja linearnih jednadžbi u kojima se nepoznanica nalazi samo na jednom mjestu.

Jednadžbe se ne bi trebale uvijek pojavljivati u algebarskom obliku, odnosno zapisane simbolima u zadacima u kojima se uvježbavaju tehnike rješavanja: formuliranje jednadžbi je jednako važno kao i rješavanje istih.

Primjer 2. *Marija je* 27 *godina starija od svog sina Ivana. Za* 5 *godina Marija će imati* 4 *puta više godina nego Ivan. Koliko sada Marija i Ivan imaju godina?*

Ovakav primjer treba pratiti razgovor s učenicima u kojem se treba bazirati na formuliranje jednadžbe koja treba biti riješena. Učenike prvo treba pitati što želimo pronaći i što nam je poznato, a zatim ih treba navesti da zaključe koliko godina sada ima Marija ako Ivanove godine označimo s x. Nakon toga bi učenici trebali zaključiti kako će za 5 godina Ivan imati $x + 5$ godina, a Marija $x + 32$ godine. Treba naglasiti kako će za 5 godina Marija biti 4 puta starija od Ivana i pitati ih kako to možemo zapisati. Nakon što učenici zaključe da jednadžba glasi $4(x + 5) = x + 32$ zajedno s učenicima možemo prijeći na rješavanje jednadžbe. Učenici sada mogu pridonijeti koracima koje treba poduzeti kako bi se došlo do rješenja.

$$\begin{aligned}
4(x+5) &= x+32 \\
4x+20 &= x+32 \\
3x+20 &= 32 \\
3x &= 12 \\
x &= 4
\end{aligned}$$

Završna faza rješavanja problema je prezentiranje dobivenog rješenja u obliku u kojem se to traži u zadatku i provjeravanje točnosti dobivenog rješenja. U ovom slučaju, Ivan ima 4 godine, a Marija ima 31 godinu. Za 5 godina njihove dobi će biti 9 i 36 što zadovoljava uvjet zadatka jer je $36 = 4 \cdot 9$.

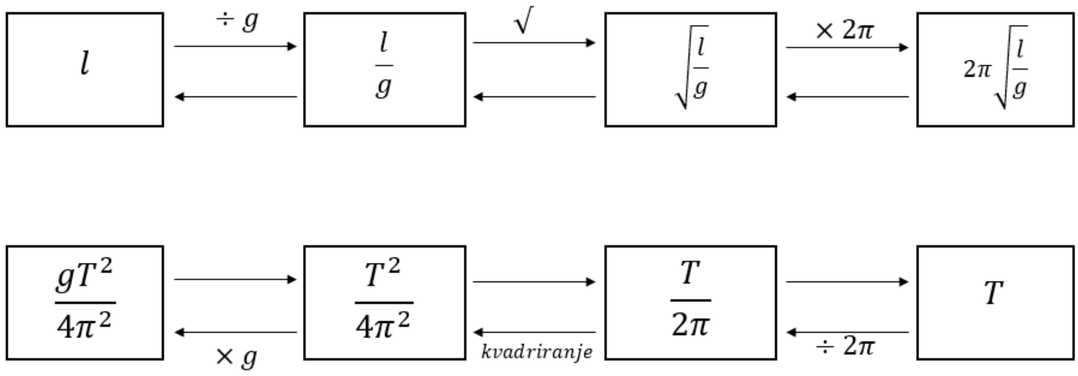
Jednadžbe se mogu rješavati i pomoću naprednih kalkulatora koji imaju tu opciju. To ponekad može biti korisno kada se naglasak u zadatku ne stavlja na rješavanje jednadžbe. Međutim, učenici trebaju razumjeti principe rješavanja različitih standardnih tipova jednadžbi „ručno“ odnosno na papiru i naučiti efikasno rješavati jednostavne primjere. Opciju rješavanja jednadžbi na kalkulatoru treba koristiti pametno kako ne bismo zanemarili navedene zahtjeve. Kalkulator može poslužiti kao pomoć učenicima prilikom odabira računske operacije koju trebaju izvršiti omogućujući im da vide što se dogodi u slučaju ako pogriješe. Tajna uspjeha rješavanja jednadžbe je odabrati prikladni niz operacija, a pomoću kalkulatora učenicima odmah postane jasno da su pogriješili kada kao rezultat ne dobiju ono što su očekivali. Ali korištenje kalkulatora kao načina razvijanja učenikova razumijevanja redoslijeda operacija treba uzeti s rezervom jer je taj aspekt poučavanja dosta neistražen i može se dogoditi da učenici pomisle kako kalkulator može obaviti sve umjesto njih i da nema potrebe razumjeti zašto se i kada izvodi pojedina operacija prilikom rješavanja jednadžbi.

Ali kalkulatori ne mogu rješavati sve probleme. Kada je potrebno iz formule izraziti određenu varijablu, riješiti jednadžbu tipa $ax + b = c$ gdje nisu uvršteni brojevi ili odrediti inverz funkcije, kalkulator nam neće biti od pomoći. To su također problemi rješavanja jednadžbi u kojima je teže odrediti koju računsku operaciju treba koristiti u svakom koraku rješavanja jer prisutnost dodatnih varijabli komplicira situaciju za neke učenike. Kada su nam dane vrijednosti svih varijabli osim jedne jednostavnije je prvo uvrstiti te vrijednosti pa onda rješavati jednadžbu. Na primjer, kako bismo odredili koliko iznosi vrijednost od a u formuli $v = u + at$ gdje je $v = 25$, $u = 10$ i $t = 3$ puno je jednostavnije uvrstiti poznate vrijednosti i riješiti jednadžbu $25 = 10 + 3t$, nego iz početne formule izraziti $a = \dfrac{v-u}{t}$ pa zatim uvrstiti vrijednosti za v, u i t.

Kada ne možemo uvrstiti brojeve u formulu, za izražavanje određene varijable dijagrami koje smo ranije spominjali opet mogu biti od pomoći. Oni su izvrstan način kako potaknuti učenike da razmišljaju o koracima koje moraju poduzeti kako bi došli do rješenja nekoga problema. Pogledajmo kako to izgleda na primjeru. Trebamo iz formule $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ izraziti varijablu l. Za neke učenike dijagrami su pouzdan postupak za uobičajenu upotrebu prilikom rješavanja zadataka, ali bi oni zapravo samo trebali poslužiti kao pomoć za usavršavanje razmišljanja o tome što trebaju učiniti u sljedećem koraku, odnosno prilikom odabira točnih operacija i njihova izvršavanja točnim redoslijedom za neke uobičajenije postupke kao što je rješenje našeg primjera:

$$\begin{aligned} 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} &= T \\ \sqrt{\frac{l}{g}} &= \frac{T}{2\pi} \\ \frac{l}{g} &= \frac{T^2}{4\pi^2} \\ l &= \frac{gT^2}{4\pi^2}. \end{aligned}$$

Izrazi sa svake strane jednadžbe u svakom koraku se pojavljuju u odgovarajućim okvirima na dijagramima na Slici 3. U prvom redu su prikazani koraci koji su poduzeti kako bi se na desnoj strani formule od varijable l dobio izraz $2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} = T$. U drugom redu su prikazani koraci koje treba poduzeti kako bismo izrazili l iz početne formule. Vidimo da je u prvom redu posljednji korak bio množenje izraza s 2π pa nam prvi korak u rješavanju treba biti „poništavanje“ te operacije, tj. dijeljenje cijele jednadžbe s 2π. Analognim razmišljanjem dolazimo do rješenja $l = \dfrac{gT^2}{4\pi^2}$.



Slika 3: Korištenje dijagrama za izražavanje varijable l iz formule $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

3 Sustavi linearnih jednadžbi

Prema nastavnom planu i programu matematike za osnovne škole, sustavi linearnih jednadžbi obrađuju se u drugom polugodištu sedmog razreda. Prethodno se učenici u šestom razredu upoznaju s načinom rješavanja linearnih jednadžbi s jednom nepoznanicom, a obrađuje se i pojam uređenog para, što je nužno za razumijevanje rješenja sustava jednadžbi. Tijekom redovne nastave se obrađuju sustavi koji se sastoje od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice, a pri njihovom rješavanju koristi se metoda supstitucije ili metoda suprotnih koeficijenata.

Metoda supstitucije ili zamjene način je rješavanja sustava u kojem jednu nepoznanicu zamjenjujemo nekim izrazom. Osnovna ideja metode supstitucije je eliminirati jednu nepoznanicu i svesti rješavanje sustava na rješavanje linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom. Iz jedne jednadžbe treba izraziti jednu od nepoznanica i to uvrstiti u drugu jednadžbu.

Primjer 3. *Maja je kupila* 3 *bilježnice i* 4 *omota i sve zajedno platila* 19 *kn. Kolika je cijena bilježnice ako je cijena omota* 1 *kn?*

Ako s b označimo cijenu jedne bilježnice, a s o cijenu jednog omota imamo sljedeći sustav:

$$\begin{aligned} 3b + 4o &= 19 \\ o &= 1. \end{aligned}$$

Sustav rješavamo metodom susptitucije tako što ćemo u prvu jednadžbu uvrstiti koliko iznosi cijena jednog omota, odnosno $o = 1$. Tako smo sustav sveli na rješavanje jedne linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom $3b + 4 = 19$ čije rješenje je $b = 5$ što znači da je cijena jedne bilježnice 5 kn.

Primjer 4. *Zbroj Aninih i Marijinih godina jest sedam, a razlika tri. Koliko godina ima Ana, a koliko Marija?*

Ako s a označimo koliko godina ima Ana, a s m koliko godina ima Marija, možemo postaviti sljedeće dvije jednadžbe:

$$\begin{aligned} a + m &= 7 \\ a - m &= 3. \end{aligned}$$

Iz druge jednadžbe možemo izraziti $a = 3 + m$ i uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo $m = 2$. Nakon toga možemo izračunati koliko iznosi a uvrštavanjem $m = 2$ u drugu jednadžbu. Kao rješenje sustava dobivamo $m = 2$ i $a = 5$ što znači da Marija ima dvije godine, a Ana pet godina.

Primjer 5. *Marija i njezin brat Petar skupili su zajedno* 176 *plastičnih boca, pri čemu je Marija skupila* 28 *boca više od brata. Koliko je boca skupila Marija, a koliko njezin brat Petar?*

Ako broj boca koje je skupila Marija označimo s m, a broj boca koje je skupio Petar s p, lako možemo zadatak predočiti u obliku sustava dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} m + p &= 176 \\ m - p &= 28. \end{aligned}$$

Ovaj sustav je lako riješiti metodom suprotnih koeficijenata. Metoda suprotnih koeficijenata zasniva se na činjenici da je zbroj suprotnih brojeva jednak 0. Da bi se pri rješavanju sustava mogla primijeniti ta metoda, potrebno je uočiti u sustavu par suprotnih koeficijenata uz istu nepoznanicu, a ako ih nema, onda treba pomnožiti jednadžbe da bi se dobili suprotni koeficijenti.

Sustav ćemo riješiti tako da te dvije jednadžbe zbrojimo. Kao rješenje dobivamo da je $m = 102$ i $p = 74$. Važno je na kraju zadatka interpretirati dobivena rješenja: $m = 102$ što znači da je Marija skupila 102 boce, a $p = 74$ znači da je Petar skupio 74 boce.

Primjer 6. *U Markovoj kasici-prasici bilo je* 56 *kovanica od dvije i od pet kuna, ukupne vrijednosti* 208 *kuna. Koliko je u kasici bilo kovanica od* 2 *kn, a koliko od* 5 *kn?*

Ako broj kovanica od 2 kn označimo s d, a broj kovanica od 5 kn s p, mogu se postaviti dvije jednadžbe s dvije nepoznanice. Prva je $d+p = 56$, druga $2d+5p = 208$.

Ovaj sustav također možemo riješiti metodom suprotnih koeficijenata. Ovaj primjer nije trivijalan kao prethodni jer ne postoji par suprotnih koeficijenata pa je potrebno prvu jednadžbu pomnožiti s -2 ili -5. Kada, bilo kojim od navedenih načina, riješimo sustav, dobit ćemo rješenje $d = 24$ i $p = 32$, što znači da su u kasici bile 24 kovanice od dvije kune i 32 kovanice od pet kuna.

Postoje razne vrste zadataka preko kojih učenici uvježbavaju rješavanje sustava, ali bitno je da svaki od zadataka ima svrhu, odnosno da učenici sami postavljaju jednadžbe na temelju raznih problema, a ne da rješavaju već postavljene sustave.

Iako se u osnovnoj školi sustavi jednadžbi prvi put spominju tek u sedmom razredu, vidljivo je da i u prethodnim godinama školovanja postoje mnogi dijelovi gradiva koji se dotiču sustava jednadžbi. Posebice to vrijedi za dodatnu nastavu matematike, iako i u redovnoj nastavi ima dosta zadataka koji se svode na sustave jednadžbi, a mogu se raditi i prije sedmog razreda.

Raditi zadatke u kojima se pojavljuju sustavi jednadžbi prije sedmog razreda ima pedagoško opravdanje jedino ako su sami zadaci i posebice način njihova rješavanja prilagođeni uzrastu učenika te samo ako pridonose boljem razumijevanju nastavnih tema koje se trenutačno obrađuju. Naravno, što je više takvih primjera, učenicima će biti lakše u sedmom razredu kada se sustavi obrađuju metodički posloženo, kada se uvodi stručno nazivlje, strogi zapis sustava i njegova rješenja te precizni algoritamski put rješavanja sustava za svaku pojedinu metodu.

Evo jednog primjera.

Primjer 7. *Jedan je učenik imao* 90 *kn manje od drugog učenika. Ako svaki od ta dva učenika potroši po* 20 *kn, tada će prvi učenik imati* 4 *puta manje kuna od drugog učenika. Koliko je kuna imao svaki od učenika?*

Iz samog postavljenog pitanja u zadatku očito je da postoje dvije nepoznanice: iznos novca jednog učenika označi se s x, a iznos novca drugog učenika s y. Postave se dvije jednadžbe: prva je $y - x = 90$, a druga $4(x - 20) = y - 20$. U ovom slučaju najučinkovitije je primijeniti metodu supstitucije: uvrštavanjem vrijednosti $y = x + 90$ u drugu jednadžbu dobije se $4x - 80 = x + 70$, iz čega se izračuna da je $x = 50$, a onda i $y = 140$. Prvi je učenik imao 50 kuna, a drugi 140 kuna.

Ovakav zadatak ipak se, najčešće, ne rješava na ovaj način. Umjesto uporabe sustava dviju jednadžbi s dvije nepoznanice, učenici mogu riješiti zadatak koristeći samo jednu linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom. Time se krug učenika koji mogu riješiti ovakav zadatak proširuje i na učenike šestog razreda. Naime, ako se iznos novca jednog učenika označi s x, onda nije potrebno uvoditi drugu nepoznanicu nego se iznos novca drugog učenika prikaže izrazom $x + 90$ (on ima 90 kn više). Nakon što su potrošili po 20 kn, prvi učenik ima $x - 20$ kn, a drugi $x + 70$ kn. Postavi se jednadžba $4(x - 20) = x + 70$ te se dobije rješenje $x = 50$. To znači da prvi učenik ima 50 kuna, a iz početnih postavki lako se zaključi da onda drugi učenik ima 140 kn.

4 Kvadratne jednadžbe

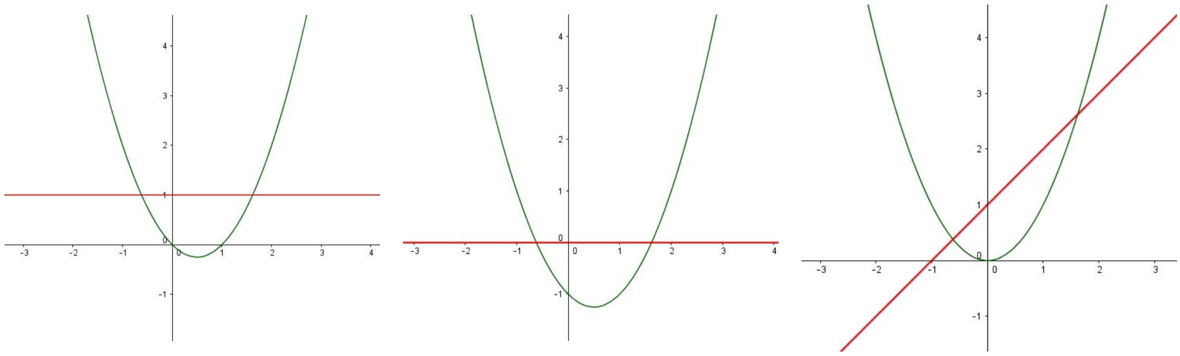
Učenici su u stanju rješavati kvadratne jednadžbe oblika $ax^2 = b$ koje nemaju linearnog člana odmah nakon što steknu vještine kvadriranja i korijenovanja. Ako proširimo metode koje se koriste za rješavanje linearnih jednadžbi učenici mogu lako rješavati jednadžbe oblika $x^2 + 3 = 12$, $(x-5)^2 = 81$ i $3x^2 - 8 = 40$. Prije nego što učenike upoznamo s kvadratnim jednadžbama možemo im zadati zadatak da pronađu broj koji je za 1 manji od svog kvadrata. Učenici bi trebali znati postaviti jednadžbu $x^2 - x = 1$ iako nisu upoznati s metodama njezina rješavanja. Oni mogu metodom pokušaja i pogrešaka tako da u svakom koraku korigiraju, odnosno ispravljaju rješenje doći do zaključka da se rješenje nalazi između brojeva 1.61 i 1.62. Daljnjim isprobavanjem mogu doći do zaključka da se rješenja nalazi između 1.615 i 1.62 što bi značilo da je 1.62 rješenje zaokruženo na dva decimalna mjesta.

x	$x^2 - x$
1.6	0.96
1.62	1.0044
1.61	0.9821
1.615	0.9932

Slika 4: Rješavanje jednadžbe $x^2 - x = 1$ metodom pokušaja i pogrešaka

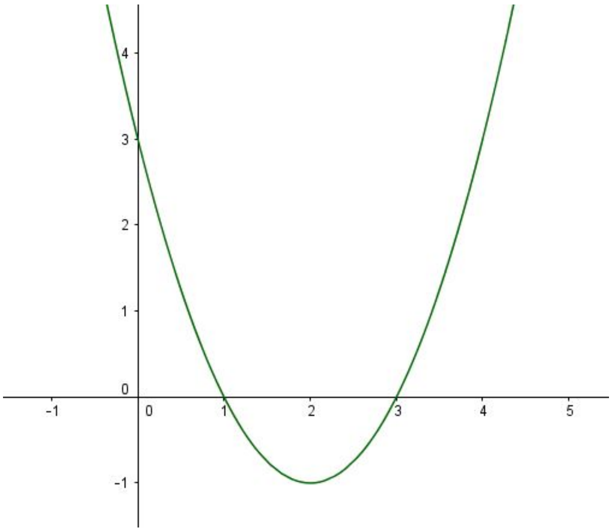
Iako ova metoda ne daje precizno rješenje jednadžbe korisna je jer učenici koristeći tu metodu stječu osjećaj za rješenje kao broj koji zadovoljava jednadžbu. Prednost ove metode je i ta što se može koristiti pri rješavanju svih vrsta jednadžbi.

Kvadratne jednadžbe možemo rješavati i grafičkim metodama. Pomoću njih možemo dobiti uvid u broj rješenja i odrediti interval u kojem se pojedino rješenje nalazi. Prostoručno nacrtana skica grafa može nam dati uvid u broj rješenja, ali nedostatak je što ne možemo precizno odrediti rješenje jednadžbe kao i kod metode pokušaja i pogreški. Grafički pristup rješavanju jednadžbi može pomoći u općem razumijevanju grafova, posebno kada promatramo alternativne načine rješavanja iste jednadžbe. Pronalazak sjecišta parabole $y = x^2 - x$ i pravca $y = 1$ jedan je od načina rješavanja jednadžbe $x^2 - x = 1$ grafički. Druge mogućnosti uključuju pronalazak sjecišta krivulje $y = x^2 - x - 1$ i osi x koordinatnog sustava ili sjecišta parabole $y = x^2$ i pravca $y = x + 1$. Navedeni grafički načini rješavanja prikazani su na Slici 5.



Slika 5: Rješavanje jednadžbe $x^2 - x = 1$ grafičkom metodom

Još jedan način rješavanja kvadratnih jednadžbi je rastavljanje izraza koji se pojavljuje u jednadžbi na faktore. Pogledajmo kako to izgleda na primjeru rješavanja jednadžbe $x^2 - 4x + 3 = 0$. Iz grafa funkcije $f(x) = x^2 - 4x + 3$ prikazanog na Slici 6. odmah je vidljivo da su nultočke funkcije $x = 1$ i $x = 3$. Našu funkciju sada možemo zapisati kao produkt dva faktora $(x - 1)(x - 3)$.



Slika 6: Graf funkcije $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Osnovna ideja na kojoj se bazira ova metoda je da jedan ili više faktora mora biti jednak nuli ako je njihov produkt jednak nuli:

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \;\; ili \;\; b = 0. \tag{4.1}$$

To nas dovodi do standardnog načina rješavanja kvadratnih jednadžbi:

$$
\begin{aligned}
x^2 - 4x + 3 &= 0 \\
(x-1)(x-3) &= 0 \\
x - 1 &= 0 \;\; \textit{ili} \;\; x - 3 = 0 \\
x &= 1 \;\; \textit{ili} \;\; x = 3
\end{aligned}
$$

Prilikom rješavanja jednadžbi često se pojavljuju sljedeće pogreške koje su povezane sa prethodno navedenom metodom:

- Jednadžbu oblika $x^2 - 4x = 0$ učenici često zapišu kao $x^2 = 4x$ i nepravilno cijeli izraz dijele s x, odnosno „pokrate“ te kao rješenje navode $x = 4$ i tako izgube drugo rješenje $x = 0$. Jako je bitno učenicima istaknuti greške koje nastaju nepravilnim kraćenjem i poticati ih da takve jednadžbe zapišu kao umnožak faktora, u našem slučaju $x(x-4) = 0$ kako ne bi izgubili jedno od rješenja.

- Jednadžbe poput $x^2 - 3x - 4 = 0$ često znaju biti zapisane kao $x^2 - 3x = 4$ pa ih učenici faktoriziraju da bi dobili $x(x-3) = 4$ te kao rješenja navode $x = 4$ i $x = 7$ koristeći princip 4.1. Kod ovakvih pogrešaka treba razgovarati o tome da oba rješenja moraju zadovoljavati jednadžbu i ukazati kako taj princip ne možemo koristiti ako nemamo nulu s desne strane. Također treba skrenuti pozornost da se broj 4 može rastaviti na faktore na četiri različita načina: $1 \cdot 4$, $-1 \cdot (-4)$, $2 \cdot 2$ i $-2 \cdot (-2)$ te da samo prva dva zapisa vode do točnih rješenja zadanog primjera.

- Nije uvijek moguće zadatak riješiti rastavljanjem jednadžbe na faktore. Učenici također ne mogu lako razlikovati situacije u kojima nema realnih rješenja i one u kojima ne možemo lako pronaći rješenja jer nisu racionalna. O ovakvim primjerima treba raspravljati unutar učionice: geometrijska interpretacija i uloga diskriminante $b^2 - 4ac$ jako su važne.

- Jednom kada nauče formulu za rješenja kvadratne jednadžbe, učenici su je skloni koristiti bez obzira može li se jednadžba riješiti nekim jednostavnijim postupkom, kao što je faktorizacija. Privlačnost te formule je u tome što ona „uvijek radi“ i učenicima daje sigurnost da mogu doći do točnog rješenja. Međutim, učenike treba poticati na razmišljanje o tome koji pristup rješavanja je prikladniji i da postanu vješti pri faktorizaciji jednostavnijih izraza te da se ne oslanjaju samo na formulu odnosno da im metoda faktorizacije bude prvi izbor prilikom rješavanja jednostavnijih primjera.

Metoda dopunjavanja do potpunog kvadrata je također jedan od načina rješavanja kvadratnih jednadžbi. Pogledajmo na primjeru $x^2 - 4x + 1 = 0$ kako nadopunjavanjem do potpunog kvadrata možemo riješiti jednadžbu:

$$\begin{aligned}
x^2 - 4x + 1 &= 0 \\
x^2 - 4x + 4 &= 3 \\
(x-2)^2 &= 3 \\
x - 2 &= \pm\sqrt{3} \\
x_1 = 2 + \sqrt{3} \quad & x_2 = 2 - \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Učenici često zapnu na prvom koraku jer se od njih zahtjeva vješto poznavanje izraza poput $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$. Poželjno je učenike s ovim načinom rješavanja upoznati na primjerima u kojima je koeficijent uz x^2 jednak 1 i koeficijent uz x paran kako bi razumjeli osnovnu ideju odnosno na kojem principu se bazira ova metoda prije nego što krenu rješavati zadatke koji uključuju razlomke kao koeficijente.

Nepotrebne komplikacije možemo izbjeći i prilikom izvođenja formule za rješenja kvadratne jednadžbe. Kao i ranije, situaciju možemo pojednostavniti ako za koeficijent uz x^2 stavimo 1 pa promatrana kvadratna jednadžba postaje oblika $x^2 + bx + c = 0$. Uobičajeni pristup nadopunjavanja do potpunog kvadrata prikazan na Slici 7. treba demonstrirati uz neki numerički primjer kao što je onaj naveden u prošlom odlomku naglašavajući ulogu identiteta $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + bx + \frac{b^2}{4}$. Sada se možemo vratiti na opći slučaj $ax^2 + bx + c = 0$ tako što ćemo zamijeniti b i c sa $\frac{b}{a}$ i $\frac{c}{a}$ kako bi se dobila poznata formula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$\begin{aligned}
x^2 + bx + c &= 0 \\
x^2 + bx + \frac{b^2}{4} &= \frac{b^2}{4} - c \\
\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 &= \frac{b^2}{4} - c \\
&= \frac{b^2 - 4c}{4} \\
x + \frac{b}{2} &= \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4c}}{2} \\
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}
\end{aligned}$$

Slika 7: Izvod formule za rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 + bx + c = 0$

Kao i kod svih vrsta jednadžbi, tako i kod kvadratnih, učenje postupaka rješavanja jednadžbi dobiva svrhu i značenje kada ih se primjenjuje na zanimljive probleme.

Zadatak 1. *Pokažite da je pravokutan trokut sa duljinama stranica* 3, 4 *i* 5 *jedini pravokutan trokut čije duljine stranica su uzastopni brojevi.*

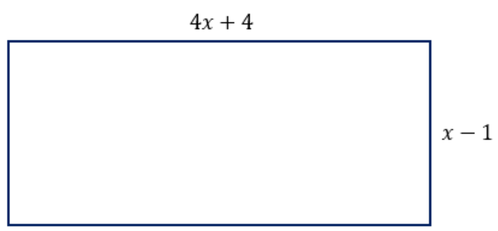
x, $x+1$ i $x+2$ su tri uzastopna broja, a neka su oni ujedno i duljine triju stranica pravokutnog trokuta. Primjenjujući Pitagorin poučak na taj trokut dobivamo sljedeću jednadžbu $(x+2)^2 = (x+1)^2 + x^2$. Postupak rješavanja jednadžbe je sljedeći:

$$\begin{aligned}(x+2)^2 &= (x+1)^2 + x^2\\ x^2+4x+4 &= x^2+2x+1+x^2\\ x^2-2x-3 &= 0\\ (x+1)(x-3) &= 0\\ x &= -1 \;\; ili \;\; x = 3.\end{aligned}$$

Očito je da $x = -1$ nije rješenje (duljina stranice trokuta ne može biti negativan broj) pa je $x = 3$ jedino rješenje jednadžbe što nas dovodi do rješenja da je jedini niz uzastopnih brojeva koji mogu biti duljine stranica pravokutnog trokuta 3, 4 i 5 što je i trebalo pokazati.

Zadatak 2. *Dvorište ima oblik pravokutnika. Duljina dvorišta je 4 puta veća od širine. Ako duljinu dvorišta povećamo za 4 cm, a širinu smanjimo za 1 cm površina takvog dvorišta će biti 60 cm^2. Koje su dimenzije početnog dvorišta?*

Neka je x širina početnog dvorišta. Tada je $4x$ njegova duljina. Skicirajmo novo dvorište čija je duljina povećana za 4 $(4x+4)$, a širina smanjena za 1 $(x-1)$.



Slika 8: Skica dvorišta

Formula za površinu pravokutnika je $P = duljina \cdot širina$ pa zadatak svodimo na rješavanje kvadratne jednadžbe

$$\begin{aligned}(4x+4)(x-1) &= 60\\ 4x^2-4x+4x-4 &= 60\\ 4x^2-64 &= 0\\ x^2-16 &= 0\\ x^2 &= 16\\ x &= \pm 4\\ x &= 4 \;\; ili \;\; x = -4.\end{aligned}$$

Imamo dvije vrijednosti $x = 4$ ili $x = -4$, no kako se radi o duljini, ona ne može biti negativna pa uzimamo vrijednost $x = 4$. U zadatku se traže dimenzije početnog dvorišta. Kako smo s x označili širinu, tada je širina 4 cm, a duljina je $4x$, tj. duljina je 16 cm. Dimenzije početnog dvorišta su 4 cm i 16 cm.

Ova dva problema lijepo ilustriraju dvije uloge algebre. U prvom slučaju svrha je nešto pokazati: da postoji samo jedan niz od tri uzastopna broja koji mogu biti duljine stranica pravokutnog trokuta, dok drugi problem zahtijeva numeričko rješenje. U oba problema možemo vidjeti tri uobičajena koraka rješavanja problema:

- prikaz problema u algebarskom obliku,
- rješavanje jednadžbe, što uključuje odlučivanje o tome što učiniti u sljedećem koraku,
- interpretacija rješenja.

Svladavanje prvog i zadnjeg koraka jednako je važno kao i usavršavanje metoda rješavanja koje nemaju svrhu ako ih se ne može upotrijebiti za rješavanje smislenih problema.

5 Descartesova metoda

Rješavanje jednadžbi se ubraja u najčešće postupke u nastavi matematike. Ponekad je u zadacima prvo potrebno problem svesti na rješavanje jednadžbe tako da se uvjeti zadataka iskazani riječima prevedu na matematički jezik. Pitanjem toga prevođenja prvi se bavio René Descartes koje je kao rezultat svoga bavljenja tim pitanjem objavio djelo "Praktična i jasna pravila za vođenje uma u istraživanju istine". Djelo se sastoji od 21 pravila i objašnjenja uz njih 18. Ta pravila čine metodu rješavanja problema koja se po Descartesu zove *Descartesova metoda.*

Metoda se u grubim crtama sastoji od sljedećih koraka:

1. svaka se zadaća svodi na matematičku zadaću;
2. svaka se matematička zadaća svodi na algebarsku zadaću;
3. svaka se algebarska zadaća svodi na rješavanje jedinstvene jednadžbe.

Descartes je želio pronaći univerzalnu metodu za rješavanje problema, ali je uvidio da ova metoda nije uvijek uporabljiva. Iako Descartesova metoda nije univerzalna metoda za rješavanje problema, postoji mnoštvo problema koji mogu biti riješeni koristeći ovu metodu. To se posebno odnosi na tekstualne zadatke u školskoj matematici.

Kod Descartesa nema općih uputa za svođenje problema na rješavanje jednadžbi pa se uspješnost u rješavanju problema postiže samo trudom i vježbanjem. Zadaci u školskim udžebnicima su takvi da broj poznatih veličina, nepoznatih veličina i uvjeta gotovo uvijek omogućuje dobivanje rješenja. Ali ipak učenicima takvi zadaci zadaju dosta teškoća, a razlog je u tome što se svaki takav zadatk može podijeliti na dva zadatka: postavljanje jednadžbi prevođenjem teksta zadatka na matematički jezik i rješavanje jednadžbi. Taj prvi dio učenicima zadaje probleme jer nije uvijek lagan i očit. Rezultat toga je učenička odbojnost prema takvim zadacima iako je svođenje problema na rješavanje jednadžbi korisno jer omogućuje razvijanje logičkog mišljenja. Takve probleme ne bi trebalo izbjegavati nego ih metodički primjereno objašnjavati kako bi ispunili svoju obrazovnu svrhu.

Prilikom svođenja problema na rješavanje jednadžbi važnu ulogu imaju i pitanja koja nastavnici postavljaju učenicima. Ta pitanja imaju dvije uloge: nastavnici pomoću njih provjeravaju jesu li učenici razumjeli problem i pobuđuju učenikovo razmišljanje i usmjeravaju ih na bitne dijelove problema.

Neka pitanja se kroz probleme stalno ponavljaju, ali su jako važna pa ih ne treba zanemariti. Pitanja koja se odnose na razumijevanje zadataka koje bi nastavnici trebali svakodnevno postavljati svojim učenicima trebaju biti pitanja o tome što je zadano u zadatku, a što je nepoznato, što se u zadatku zahtijeva, koliko ima nepoznanica i kako ih označiti, kako glasi uvjet i je li uvjet dovoljan za određivanje nepoznanice te druga slična pitanja. Također je važno i postavljati pitanja koja se odnose na postavljanje jednadžbi, kao što je pitanje o vezama između poznatog i nepoznatog, je li moguće zadovoljiti uvjet, koliko jednadžbi je potrebno postaviti, jesmo li iskoristili sve zadano i sve dijelove uvjeta, ima li dobiveni sustav rješenje te što možemo reći o broju rješenja jednadžbe.

U sljedećim primjerima opisat ćemo proces svođenja problema na rješavanje jednadžbi u skladu s onim što je gore rečeno.

Primjer 8. *Zbroj dvaju brojeva je* 481*, a njihova razlika iznosi* 233*. Odredite koji su to brojevi.*

Tekst zadatka je jednostavan i kratak pa ne bi trebalo biti problema u razumijevanju zadatka. Nepoznata su nam dva broja i imamo dva uvjeta pa se naš problem svodi na rješavanje sustava dvaju jednadžbi s dvije nepoznanice. Prevođenje s običnog jezika na matematički jezik izgleda ovako. Nepoznata su nam dva broja koja ćemo označiti s x i y. Znamo da je zbroj ta dva broja 481 pa to možemo zapisati kao $x + y = 481$. Drugi uvjet kaže da je razlika brojeva 233 iz čega dobivamo drugu jednadžbu $x - y = 233$. Traženi brojevi su rješenje sustava

$$\begin{aligned} x + y &= 481 \\ x - y &= 233. \end{aligned}$$

Nekom od metoda rješavanja sustava lako dolazimo do rješenja $x = 357$ i $y = 124$.

Primjer 9. *Majka i tri kćerke imaju zajedno točno* 100 *godina. Najmlađa kćerka ima četiri puta manje godina od svojih sestara zajedno. Kada se rodila druga kćerka, majka je imala osam puta više godina od prve kćerke. Kada se rodila treća kćerka, majka je imala dva puta više godina od prve dvije kćerke zajedno. Koliko godina imaju majka i kćerke?*

Iz pitanja zadatka jasno je da u problemu imamo četiri nepoznanice, odnosno nepoznate su nam godine majke i tri kćeri. Godine majke ćemo označiti s m, a godine kćerki s a, b i c promatrane po veličini. U zadatku imamo četiri uvjeta:

1. Zbroj godina majke i tri kćerke je 100:
$$m + a + b + c = 100.$$
2. Najmlađa kćerka ima četiri puta manje godina od svojih sestara zajedno:
$$c = \frac{1}{4}(a + b).$$
3. Kada se rodila druga kćerka, majka je imala $m-b$ godina i osam puta više godina od prve kćerke koja je tada imala $a - b$ godina:
$$m - b = 8(a - b).$$

4. Kada se rodila treća kćerka, majka je imala $m - c$ godina i dva puta više godina od prve dvije kćerke zajedno koje su tada imale $a - c$ i $b - c$ godina:

$$m - c = 2(a - c + b - c).$$

Tražene godine majke i kćerki su rješenja sustava koji se sastoji od četiri linearne jednadžbe sa četiri nepoznanice:

$$\begin{aligned} m + a + b + c &= 100 \\ a + b - 4c &= 0 \\ m - 8a + 7b &= 0 \\ m - 2a - 2b + 3c &= 0. \end{aligned}$$

Sustav se može najbrže riješiti metodom suprotnih koeficijenta tako da se krene eliminacijom nepoznanica a i b iz prve i četvrte jednadžbe, a onda se zadatak svodi na rješavanje dva sustava dvaju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice. Kao rješenje dobije se da majka ima 50 godina, a kćerke redom po starini imaju 22, 18 i 10 godina.

Obično je u problemima koji se svode na rješavanje jedne linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom, postavljanje jednadžbe teže od rješavanja same jednadžbe. Sljedeći primjer to dobro prikazuje.

Primjer 10. *Autobus je krenuo s kolodvora mjesta M prema moru s određenim brojem putnika. Na prvom stajalištu izašla je* $\frac{1}{7}$ *putnika, a ušla su* 4 *nova. Na drugom stajalištu izašla je* $\frac{1}{5}$ *putnika koji su stigli do toga stajališta, a ušlo* 7 *novih. Na trećem stajalištu izašla je* $\frac{1}{3}$ *putnika, a ušao samo* 1 *putnik. Na četvrtom stajalištu, izlaskom ponovo* $\frac{1}{3}$ *putnika i ulaskom 3 nova, broj se putnika prepolovio obzirom na broj putnika na početku i svi su oni stigli u mjesto N na moru. Odredite taj broj.*

U zadatku se zahtjeva da odredimo broj putnika, ali taj zahtjev nije precizan jer se može odnositi i na broj putnika na početku, odnosno koji su krenuli iz mjesta M, a i na broj putnika koji je stigao na more. U oba slučaja to je jedina nepoznanica pa je za rješavanje zadatka potrebno postaviti jednu jednadžbu do koje ćemo doći iz uvjeta razmatranjem promjena broja putnika od stajališta do stajališta.

Nije nam poznat broj putnika koji je krenuo iz mjesta M pa ćemo ga označiti s x. Koraci postavljanja jednadžbe su sljedeći:

1. Na prvom stajalištu izašla je $\frac{1}{7}$ putnika, a ušla su 4 nova pa je broj putnika koji nastavlja putovanje:

$$x - \frac{1}{7}x + 4 = \frac{6}{7}x + 4.$$

2. Na drugom stajalištu izašla je $\frac{1}{5}$ putnika, a ušlo je 7 novih pa je broj putnika koji nastavlja putovanje:

$$\frac{6}{7}x + 4 - \frac{1}{5}\left(\frac{6}{7}x + 4\right) + 7 = \frac{24}{35}x + \frac{51}{5}.$$

3. Na trećem stajalištu izašla je $\frac{1}{3}$ putnika, a ušao je 1 novi pa je broj putnika koji nastavlja putovanje:

$$\frac{24}{35}x + \frac{51}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{24}{35}x + \frac{51}{5}\right) + 1 = \frac{16}{35}x + \frac{39}{5}.$$

4. Na četvrtom stajalištu izašla je $\frac{1}{3}$ putnika, a ušla su 3 nova pa je broj putnika koji nastavlja putovanje:

$$\frac{16}{35}x + \frac{39}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{16}{35}x + \frac{39}{5}\right) + 3 = \frac{32}{105}x + \frac{41}{5}.$$

5. Broj putnika se prepolovio:

$$\frac{32}{105}x + \frac{41}{5} = \frac{x}{2}.$$

Posljednja jednadžba je ona na koju se svodi naš problem i rješavanjem te jednadžbe dobiva se traženi broj putnika koji je krenuo iz mjesta M, $x = 42$, što znači da je na more stigao 21 putnik.

Sljedeći primjer je napisan u obliku pričice iz svakodnevnog života pa može poslužiti kao osvježenje i kao suprotnost onim zadacima za koje se kažu da su šablonski i nezanimljivi.

Primjer 11. *Doktor Puškarić strastveni je lovac. Upravo se vratio iz lova i prijateljima pokazuje ulovljenu lisicu - "Moj se Vučko danas iskazao. Zamislite, lisica se nalazila ispred njega* 100 *svojih skokova. Dok je ona načinila* 5 *skokova, Vučko je načinio samo* 4*, ali zato su njegova* 4 *skoka iznosila koliko i* 7 *lisičjih" - ispričao je u jednom dahu. -"Nakon koliko je skokova Vučko stigao lisicu?"- upitao je netko.*

Iako je u ovom problemu pozornost posvećena tekstu i formulaciji, tekst je ipak "pun" matematike. Odmah se uočavaju četiri nepoznate veličine, brojevi i duljine skokova te slikoviti uvjet koji se sastoji od tri dijela. Prva dva dijela izražavaju proporcionalnost brojeva skokova i proporcionalnost duljina skokova, a treći, malo skriveniji, opisuje trenutak sustizanja lisice.

Imamo sljedeće nepoznanice:

broj psećih skokova označimo s x,
broj lisičjih skokova označimo s y,
duljinu psećeg skoka označimo s p,
duljinu lisičjeg skoka označimo s l.

Dijelovi uvjeta su sljedeći:

1. Dok lisica načini 5 skokova, pas načini 4
$$y : x = 5 : 4.$$
2. 4 pseća skoka iznose koliko i 7 lisičjih
$$4p = 7l.$$
3. Lisica je bila 100 svojih skokova ispred psa. Do trenutka kada ju je pas dostigao, ona je načinila još y skokova, a pas x skokova
$$(100 + y)l = xp.$$

Naš problem se sveo na rješavanje sustava jednadžbi

$$\begin{aligned}5x &= 4y\\ 4p &= 7l\\ xp &= (100 + y)l.\end{aligned}$$

Dobili smo tri jednadžbe što nam se čini premalo jer imamo četiri nepoznanice. Pokušat ćemo riješiti sustav eliminacijom nepoznanice l tako što ćemo treću jednadžbu pomnožiti sa 7. Dobivamo $7xp = 7l(100 + y) = 4p(100 + y)$. Vrijedi da je $7xp = 4p(100+y)$. Iz toga slijedi $7x = 4(100+y)$ čime smo eliminirali i nepoznanicu p. Sada smo gornji sustav sveli na rješavanje sustava dvaju jednadžbi s dvije nepoznanice

$$\begin{aligned}5x - 4y &= 0\\ 7x - 4y &= 400.\end{aligned}$$

Rješenje sustava je $x = 200$, $y = 250$ što znači da je pas stigao lisicu nakon 200 svojih skokova, odnosno nakon 250 lisičjih skokova.

U ovom zadatku su nepoznate četiri veličine, a uvjet se sastoji od tri djela pa smo prevođenjem na matematički jezik dobili sustav tri jednadžbe s četiri nepoznanice, a to znači da nam broj jednadžbi nije dovoljan za određivanje svih nepoznanica. U zadatku se nije ni tražilo određivanje svih nepoznanica, već samo nepoznance x ili y pa su nam tri uvjeta bila dovolja jer smo eliminacijom nepoznanica koje se nisu tražile u zadatku dobili sustav dvije jednadžbe s dvije nepozanice koji je bio dovoljan za rješavanje zadatka. Ovakvi slučajevi u zadacima nisu rijetki i često znaju zbuniti učenike.

Primjer 12. *Pred blagajnikom se nalazi* 100 *moneta od* 1, 2 *i* 5 *kuna. Ukupna vrijednost svih moneta je* 200 *kuna. Koliko je moneta od svake pojedine vrste ako se zna da su dva od ta tri broja jednaka?*

Nepoznati su nam brojevi moneta od 1, 2 i 5 kuna pa ćemo ih redom označiti s x, y, z.

Imamo sljedeće uvjete:

1. Moneta ukupno ima 100:
$$x + y + z = 100.$$
2. Ukupna vrijednost svih moneta je 200 kuna:
$$x + 2y + 5z = 200.$$
3. Dva od tri broja su jednaka:
$$x = y \;\; ili \;\; x = z \;\; ili \;\; y = z.$$

Ne znamo koja su dva broja moneta jednaka pa ćemo razmatrati tri sustava jednadžbi:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 100 \\ x + 2y + 5z &= 200 \\ x &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 100 \\ x + 2y + 5z &= 200 \\ x &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 100 \\ x + 2y + 5z &= 200 \\ y &= z. \end{aligned}$$

Prva dva sustava nemaju rješenja dok su rješenja trećeg sustava $x = 60$, $y = 20$, $z = 20$ što znači da imamo 60 moneta od 1 kune i po 20 moneta od 2 i 5 kuna.

6 Poučavanje metoda rješavanja linearnih jednadžbi

Nastavnici se svakodnevno susreću s izborom između poučavanja metoda koje su učinkovite odnosno koje svi učenici mogu savladati ili metoda koju su efikasnije, odnosno zahtijevaju manje koraka. Isto vrijedi i za poučavanje jednadžbi. U ovom poglavlju osvrnut ćemo se na istraživanje koje proučava kako nastavnici rješavaju jednadžbe kada je svrha rješavanja pedagoška, a kako kada je u pitanju matematička svrha.

Nastavnici, kao i svi, rade u zahtjevnom okruženju, odnosno puno se od njih očekuje. Od njih se očekuje da učenicima predaju sadržaje određene nastavnim planom i programom koji će kasnije biti testirani i da u isto vrijeme učenicima pomognu da postanu vješti u rješavanju raznih matematičkih problema. Tada se nastavnici susreću sa dilemom hoće li poučavati učenike točno onako kako im je zadano da bi učenici uspješno ispunili očekivanja ili će učenike poučavati da razmišljanjem dolaze do svojih načina rješavanja problema nekim kraćim postupcima, a ne da slijepo slijede procedure zapisane u udžbenicima.

U istraživanju koje ćemo razmatrati ispitivalo se cijene li nastavnici više neformalne načine rješavanja jednadžbi nego standardne procedure.

Istraživanje je provedeno na skupini od 20 nastavnika i profesora osnovnih i srednjih škola te fakulteta. Svaki od sudionika je anonimno ispunio upitnik koji se sastojao od 3 dijela. U prvom dijelu se od ispitanika tražilo da napišu neke osnovne informacije o radnom iskustvu. Tu se tražilo od ispitanika da napišu koje korake bi po njihovom mišljenju učenik morao znati kako bi mogao riješiti linearnu jednadžbu, postoji li neki određen redoslijed kojim učenici trebaju provoditi te korake i navode li udžbenici kojima se oni služe standardnu proceduru za rješavanje linearnih jednadžbi. Drugi dio upitnika je tražio od ispitanika da linearne jednadžbe riješe tako da navedu sve korake prilikom rješavanja za koje žele da ih i njihovi učenici navedu dok se u trećem dijelu tražilo da linearne jednadžbe riješe što učinkovitije.

1. $2x + 4 = 10$	2. $3(x + 2) = 21$
3. $3(x + 1) = 15$	4. $4(x + 1) + 32 = 5(x + 1)$
5. $4(x + 1) + 3(x + 2) = 20$	6. $3(x+1)+6(x+1)+6x+9 = 6x+9$
7. $4(x + 1) + 2(x + 1) = 3(x + 4)$	8. $4(x + 1) + 2(x + 2) = 3(x + 4)$

Slika 9: Zadaci iz drugog dijela upitnika

1. $3(x + 1) = 15$	2. $4(x + 1) + 2(x + 2) = 3(x + 4)$
3. $4(x + 2) + 2(x + 2) = 3(x + 6)$	4. $4(x + 3) + 2(x + 3) = 3(x + 3)$
5. $3(x+1)+6(x+1)+6x+9 = 6x+9$	6. $4(x + 3) + 32 = 5(x + 3)$

Slika 10: Zadaci iz trećeg dijela upitnika

Prema rezultatima istraživanja 5 ispitanika ne vjeruje da postoji standardna procedura za rješavanje linearnih jednadžbi dok je ostalih 15 ispitanika navelo od dva do sedam koraka ovim redom - pojednostavljivanje jednadžbe (distribucija, rješavanje razlomaka, spajanje jednakih izraza), zbrajanje i oduzimanje s obje strane, a zatim množenje i dijeljenje obje strane jednadžbe.

Prilikom rješavanja zadataka u drugom dijelu upitnika, većina ispitanika želi da učenici pokažu jednake korake standardnim redoslijedom- distribucija, spajanje jednakih izraza, oduzimanje jednakih izraza i dijeljenje. Glavna razlika je u tome žele li ispitanici vidjeti oduzimanje varijabli i konstanti u jednom koraku ili u različitim koracima. Većina odgovora prikazuje oduzimanje varijabli i konstanti odvojeno. Također, većina ispitanika nije računala sa izrazima poput $x+1$ koji se više puta pojavljuju u jednadžbi, već su se rješavali zagrada, što pokazuje da ispitanici očekuju standardni postupak rješavanja jednadžbi.

U suprotnosti s drugim dijelom upitnika, u trećem dijelu gdje su ispitanici trebali što učinkovitije riješiti jednadžbe, povećao se broj ispitanika koji se nisu rješavali zagrada, već su spajali iste izraze, odnosno izlučivali iste zagrade. Pola ispitanika je zadnja četiri zadatka rješavala upravo tako. U većini slučajeva ispitanici su pratili standardnu proceduru, ali nisu najprije koristili distribuciju na mjestima gdje su izlučivali zagrade.

U zadacima drugog dijela, svi zadaci koji su riješeni izlučivanjem zagrada potiču od ista tri ispitanika. Oni su također na isti način riješili i zadnja četiri zadatka drugog dijela. Dva ispitanika su kao korak rješavanja u drugom dijelu navela i provjeru rješenja. Jedna u svakom zadatku dok drugi samo na prva četiri zadatka. Nitko od ispitanika nije radio provjeru rješenja zadataka u trećem dijelu. Jedan od ispitanika je pokazao neuobičajenu tehniku rješavanja svih problema u drugom dijelu upitnika. Primjer jednog takvog rješenja može se vidjeti na Slici 11. Standardni zapis je korišten prilikom distribucije i za spajanje istih izraza, ali oduzimanje i dijeljenje obje strane je provedeno bez zapisivanje varijable x.

$$\begin{gathered}4(x+1)+3(x+2)=20\\4x+4+3x+6=20\\7x+10=20\\(20-10):7=\frac{10}{7}\end{gathered}$$

Slika 11: Neuobičajeno rješenje

Kao što je u istraživanju navedeno, ono u što nastavnici vjeruju i ono što čine nije uvijek isto. U ovom istraživanju ispitanici su pokazali da od učenika očekuju standardne korake prilikom rješavanja jednadžbi, dok ih oni sami u većini slučajeva ne provode. To možemo ilustrirati na sljedećem primjeru. Jedanaest je ispitanika problem $3(x+1)=15$ u trećem dijelu upitnika riješilo tako što su prvo cijelu jednadžbu podijelili sa 3 i tako rješavanje sveli na samo dva koraka. Prilikom rješavanja istog primjera u drugom dijelu samo su tri ispitanika navela kako bi htjeli da učenici prvo podijele izraz. Iz ovoga možemo zaključiti da sudionici vjeruju kako standardne procedure nisu potrebne za rješavanje problema, ali ipak žele da učenici prate procedure prilikom rješavanja zadataka. Ispitanici nisu skloni zagrade tretirati kao jednu varijablu kada su u pitanju načini na koje žele da učenici rješavaju zadatke.

Svrha rješavanja jednadžbi utječe na način na koji učitelji i nastavnici rješavaju jednadžbe. Kada je svrha bila pedagoška - pokazati što bi učenici trebali raditi, ispitanici su koristili standardne procedure. Kada je svrha rješavanja bila efikasnost, ispitanici su bili inovativniji i fleksibilniji prilikom rješavanja zadataka.

7 Zaključak

Formuliranje i rješavanje jednadžbi jedan je od osnovnih dijelova matematike kroz čitav njezin povijesni razvoj pa tako i danas. Unutarnji interes za rješavanje problema snažna je motivacija za učenje algebre jednako kao i njezina svakodnevna primjena u stvarnim problemima. U ranijim fazama učenja, vjerojatno će zanimljivi problemi iz stvarnog života biti privlačniji učenicima jer imaju neposrednost koja često nedostaje u pokušajima povezivanja algebre i praktičnih situacija. Vještine uključene u rješavanje jednadžbi ovise o razumijevanju i vještini pojednostavljivanja, proširivanja i faktoriziranja kao i uvažavanja uloge grafova. Kao što je ranije navedeno, postoje dobri razlozi za stavljanje velikog naglaska na rješavanje jednadžbi u ranim fazama učenja jer učenici steknu krivo mišljenje da slova samo predstavljaju nepoznanice, a ne i varijable kao što je to slučaj kod formula. S druge strane, privlačnost jednadžbi je u tome što rješenja uvijek možemo provjeriti: učenike uvijek treba poticati da ustraju na rješavanju pojedinog zadatka sve dok ne dobiju točno rješenje.

U ovom radu baziralo se na linearnim jednadžbama, sustavima linearnih jednadžbi i kvadratnim jednadžbama koje čine veći dio gradiva posvećenog jednadžbama koje se učenicima poučava kroz osnovnoškolsko i srednjoškolsko obrazovanje iz matematike. Drugi tipovi jednadžbi kao što su jednadžbe trećeg stupnja ili trigonometrijske jednadžbe uključuju iste principe pa ideje za njihovo rješavanje nisu drastično drugačije. Također se raspravljalo o nekoliko metoda, pretežno onima vezanima za rješavanje kvadratnih jednadžbi. Učenici moraju steći osjećaj za ono što je jednadžba i njihovo rješavanje. Jedna od metoda koja im to omogućuje je metoda pokušaja i pogrešaka, ali učenici moraju prepoznati ograničenja ove metode. Grafičke metode također daju aproksimirana rješenja, ali mogu pomoći učenicima u razumijevanju jednadžbi i kako se pojedine funkcije ponašaju. Formalne metode imaju važnu ulogu jer na jednostavan način daju precizna rješenja.Iznimno je važno uvježbati rješavanje jednadžbi kako bi učenici s lakoćom mogli rješavati sve vrste jednadžbi, ali to treba učiniti tako da se vještine rješavanja jednadžbi razvijaju kroz različite probleme u kojima se jednak naglasak stavlja na formuliranje jednadžbe, njezino rješavanje kao i na interpretaciju rješenja. Rješavanje zanimljivih problema zapravo daje svrhu i značenje poučavanju algebarskih vještina.

Nastavnici se u radu susreću s mnogim nedoumicama. Jedna od njih je poučavati učinkovito ili efikasno. Standardne procedure učenicima pružaju učinkovitu metodu za rješavanje jednadžbi. Te procedure ne moraju nužno biti i najefikasnije i nisu jedini način za rješavanje jednadžbi. Rješenje nedoumice bi trebalo biti u prepoznavanju da postoji više različitih i inovativnih načina na koji se može riješiti ista jednadžba, iako ne treba ni posve zanemariti standardne procedure rješavanja. Učenike bi trebalo naučiti da sami razmišljaju koje korake trebaju poduzeti i zašto te kako na što efikasniji način riješiti jednadžbu koristeći standardne procedure.

Sažetak

Jednadžbe čine veliki dio matematičkog obrazovanja. Učenici se prvo upoznaju sa linearnim jednadžbama pa sa sustavima, a kasnije i sa kvadratnim jednadžbama koje su jako važne za rješavanje raznih problema. Probleme je često potrebno prevesti na matematički jezik, a to učenicima može predstavljati problem. Descartesova metoda navodi neke opće smjernice kako rješavati probleme svođenjem zadataka na rješavanje jednadžbi. Nastavnici ponekad zanemaruju efikasne načine rješavanja čvrsto se držeći standardnih procedura kako bi učenicima omogućili lakše razumijevanje načina rješavanja linearnih jednadžbi.

Title and summary

Learning and teaching equations. Equations make up a large part of mathematical education. Students first get to know linear equations and later simultaneous equations. They also learn about quadratic equations that are important for problem solving. Problems often need to be translated into mathematical language, and this can be a problem for students. Descartes' method mentions some general guidelines for solving problems by solving the task of solving the equation. Teachers sometimes neglect effective ways of solving linear equations firmly in keeping with standard procedures to provide students with an easier understanding of how to solve linear equations.

Literatura

[1] Ž. Brčić, *Sustavi jednadžbi kroz osnovnu školu*, Poučak : časopis za metodiku i nastavu matematike, **14**(2013), 28–36.

[2] D. French *Teaching and learning algebra*, Bookcraft (Bath) Ltd, Great Britain, 2002.

[3] K. M. C. Ivey, *Effective vs. efficient: teaching methods of solving linear equations*, Proceedings of 27th International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference Held Jointly with the 25th PME-NA Conference, 2003., 117–124

[4] L. Kralj; Z. Ćurković; D. Glasnović Gracin; S. Banić; M. Stepić, *Petica +6,udžbenik i zbirka zadataka za 6. razred osnovne škole,drugi dio*, SysPrint d.o.o., Zagreb, 2010.

[5] L. Kralj; D. Glasnović Gracin; Z. Ćurković; M. Stepić; S. Banić, *Petica +7,udžbenik i zbirka zadataka za 7. razred osnovne škole,drugi dio*, SysPrint d.o.o., Zagreb, 2010.

[6] Z. Kurnik, *Decartesova metoda – problemi i jednadžbe*, Matematika i škola, **1**(1999), 10–17.

Životopis

Rođena sam 29. travnja 1993. godine u Slavonskom Brodu. Pohađala sam Osnovnu školu ”Antun Mihanović” u Slavonskom Brodu koju sam završila s odličnim uspjehom. Nakon završene osnovne škole 2008. godine upisala sam opći smjer gimnazije "Matija Mesić" u Slavonskom Brodu. Srednju školu sam završila 2012.godine i nakon uspješno položene mature te iste godine upisala integrirani nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku.