Transformacije diskretnih i neprekidnih slučajnih varijabli

Krajnović, Maja

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Maja Krajnović

Transformacije diskretnih i neprekidnih slučajnih varijabli

Završni rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Maja Krajnović

Transformacije diskretnih i neprekidnih slučajnih varijabli

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Nenad Šuvak
Komentor: doc. dr. sc. Dragana Jankov Maširević

Osijek, 2017.

Sažetak

Transformacije slučajnih varijabli vrlo su bitne u teoriji vjerojatnosti jer nam omogućavaju lakše rješavanje različitih vjerojatnosnih problema. U ovom radu ćemo se prvo upoznati s nekim osnovnim pojmovima, definicijama i teoremima kako bismo mogli shvatiti što su i čemu služe transformacije slučajnih varijabli. Vidjet ćemo da sva vjerojatnosna svojstva slučajne varijable X možemo opisati pomoću njene funkcije distribucije F, odnosno pomoću njene tablice distribucije ako je X diskretna te pomoću funkcije gustoće ako je X neprekidna slučajna varijabla. Nadalje, zanimat će nas kako pronaći distribuciju nove slučajne varijable $Y = g(X)$ ako poznajemo distribuciju slučajne varijable X i funkciju g. To je problem kojim ćemo se baviti u ovom radu. Također ćemo pokazati da čak i jednostavne transformacije slučajnih varijabli s jednostavnim distribucijama mogu dovesti do slučajnih varijabli sa složenim distribucijama pa ćemo probleme rješavati u raznim specijalnim slučajevima. Prvo ćemo proučiti transformacije koje možemo primijeniti i na diskretne i neprekidne slučajne varijable, a zatim ćemo razmotriti i one transformacije koje su karakteristične samo za jedan tip slučajnih varijabli.

Ključne riječi

Slučajna varijabla, diskretna slučajna varijabla, neprekidna slučajna varijabla, funkcija gustoće, funkcija distribucije, tablica distribucije, matematičko očekivanje, varijanca

Abstract

Transformations of random variables are very important in probability theory because they allow us to solve various probability problems. First of all, we will recall some of the basic terms, definitions and theorems which will help us to understand what the transformations of random variables are. We will also see that all properties of a random variable X can be described by its distribution function F, i.e. using its distribution table if X is discrete and using its density function when X is a continuous random variable. Furthermore, we are interested in finding distribution of new random variable $Y = g(X)$ if we know distribution of random variable X and function g. This is the problem that we are going to deal with in this paper. As we will see, even simple transformations of random variables, with simple distributions, can lead to a random variables with complex distributions so we will solve the problem in various special cases. First, we will examine the transformations that can be applied to the discrete and continuous random variables, then we will consider those transformations which can be applied only on one type of random variables.

Key words

Random variable, discrete random variable, continuous random variable, density function, distribution function, distribution table, mathematical expectation, variance

Sadržaj

1 Uvod

Teorija vjerojatnosti je grana matematike koja se bavi analizom slučajnih događaja, a prvi puta se pojavljuje u 17. stoljeću kada se počinju analizirati igre na sreću i smrtnost stanovništva. Kasnije se vjerojatnost razvija kroz astronomiju i fiziku, a danas se primjenjuje u medicini, ekonomiji, genetici kao i u mnogim matematičkim disciplinama.
U prvom poglavlju navest ćemo neke od osnovnih pojmova koje ćemo koristiti u nastavku rada te neke važnije teoreme i propozicije. Nakon što se podsjetimo osnovnih pojmova, možemo krenuti na proučavanje transformacija slučajnih varijabli koje ćemo podijeliti na tri poglavlja. Prvo ćemo krenuti od transformacija koje su moguće i za neprekidnu i za diskretnu slučajnu varijablu te ćemo ovdje proučavati vrlo važan postupak standardizacije. U drugom poglavlju proučavat ćemo transformacije diskretne slučajne varijable koje ćemo podijeliti na dva slučaja i pobliže ih objasniti kroz primjere, dok ćemo u posljednjem poglavlju obraditi transformacije neprekidne slučajne varijable među kojima su nam vrlo bitne bijektivna i Laplaceova transformacija.

2 Osnovni pojmovi

Prije nego krenemo detaljnije govoriti o transformacijama slučajnih varijabli definirat ćemo osnovne pojmove teorije vjerojatnosti. Najvažniji među njima je vjerojatnosni prostor na kojem proučavamo slučajne pokuse i ishode tih pokusa. Skup svih ishoda nekog slučajnog pokusa nazivamo prostor elementarnih događaja i označavat ćemo ga s Ω. Funkcije koje nam pomažu da ishodu slučajnog pokusa pridružimo neku vrijednost (realan broj) nazivaju se slučajne varijable. Također, bitni pojmovi vezani uz slučajnu varijablu koje ćemo spomenuti su funkcija distribucije, funkcija gustoće, matematičko očekivanje, varijanca i drugi. Sve te pojmove ćemo pobliže objasniti u nastavku kako bismo bolje razumjeli transformacije slučajnih varijabli.

Definicija 2.1. *Neka je dan neprazan skup Ω. Familija $\mathcal{F}$ podskupova skupa Ω je σ-algebra skupova na Ω ako vrijedi:*

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$,
2. *ako je $A \in \mathcal{F}$ onda je i $A^c \in \mathcal{F}$ (zatvorenost na komplementiranje),*
3. *ako je dana prebrojiva familija skupova $(A_i, i \in I) \subseteq \mathcal{F}, I \subseteq \mathbb{N}$, onda $\mathcal{F}$ sadrži i njihovu uniju, tj. $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{F}$ (zatvorenost na prebrojive unije).*

Sada ćemo definirati vjerojatnost sljedećom aksiomatskom definicijom.

Definicija 2.2. *Neka je Ω prostor elementarnih dogadaja i $\mathcal{F}$ σ-algebra skupova na njemu. Funkciju $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ zovemo vjerojatnost na Ω ako zadovoljava sljedeća svojstva, koja nazivamo i aksiomi vjerojatnosti:*

1. $P(A) \geq 0$ *za sve* $A \in \mathcal{F}$ *(nenegativnost vjerojatnosti),*
2. $P(\Omega) = 1$ *(normiranost vjerojatnosti),*
3. *ako je dana prebrojiva familija međusobno disjunktnih skupova $(A_i, i \in I) \subseteq \mathcal{F}, I \subseteq \mathbb{N}$, tj. $A_i \bigcap A_j = \emptyset$ čim je $i \neq j$, tada vrijedi*

$$P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} P(A_i)$$

(σ-aditivnost vjerojatnosti).

Definicija 2.3. *Uređenu trojku $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdje je $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω i P vjerojatnost na $\mathcal{F}$ zovemo vjerojatnosni prostor.*

Proučavanje prostora elementarnih događaja nekog slučajnog pokusa i vjerojatnosti zadane na njemu može biti vrlo komplicirano stoga uvodimo pojam slučajne varijable koje ćemo dijeliti na diskretne i neprekidne.

Definicija 2.4. *Neka je dan vjerojatnosni prostor* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *i neka je* $\mathcal{B}$ *Borelova* σ*-algebra na* $\mathbb{R}$. *Funkciju* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *zovemo slučajna varijabla na* Ω *ako je* $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ *za svaki* $B \in \mathcal{B}$.

Definicija 2.5. *Neka je* $\mathcal{A}$ *topologija na skupu* $\mathbb{R}$. *Najmanja* σ*-algebra koja sadrži sve članove topologije* $\mathcal{A}$ *zove se Borelova* σ*-algebra na skupu* $\mathbb{R}$.

Definicija 2.6. *Skup svih vrijednosti koje slučajna varijabla može primiti naziva se slika slučajne varijable i označava s* $\mathcal{R}(X)$.

Definicija 2.7. *Slučajna varijabla* X *je diskretna ako postoji konačan ili prebrojiv skup* $D \subset \mathbb{R}$ *takav da je* $P(\{X \in D\}) = 1$, *tj.* $P(\{X \in D^c\}) = 0$.

Definicija 2.8. *Diskretnu slučajnu varijablu* X *zadajemo tako da zadamo skup* $\mathcal{R}(X) = \{x_i : i \in \mathcal{I}\}$, $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{N}$, *odnosno sliku slučajne varijable* X *i pripadne vjerojatnosti* $p_i = P(\{X = x_i\})$, *za* $i \in \mathcal{I}$, *što pregledno možemo zapisati u obliku tablice*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

koju nazivamo tablica distribucije, distribucija ili zakon razdiobe slučajne varijable X.

Ako slika slučajne varijable nije diskretan skup nego nekakav interval realnih brojeva, cijeli skup realnih brojeva i slično onda govorimo o neprekidnoj slučajnoj varijabli koju zadajemo funkcijom gustoće.

Definicija 2.9. *Neka je dan vjerojatnosni prostor* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Funkciju* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *za koju vrijedi:*

1. $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \{X \leq x\} \in \mathcal{F}$, *za svaki* $x \in \mathbb{R}$,
2. *postoji nenegativna realna funkcija realne varijable* f, *takva da vrijedi*

$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = P(\{X \leq x\}) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t, \text{ za svaki } x \in \mathbb{R},$$

zovemo neprekidna slučajna varijabla, a funkciju f *funkcija gustoće slučajne varijable* X.

Svojstva funkcije gustoće neprekidne slučajne varijable:

1. NENEGATIVNOST: $f(x) \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$.
2. NORMIRANOST: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

Dokaz. Vidi [1, str. 61]. □

Dakle, diskretnu slučajnu varijablu zadajemo pomoću njene tablice distribucije, a neprekidnu slučajnu varijablu pomoću funkcije gustoće. Vjerojatnosna svojstva obje slučajne varijable opisujemo funkcijom distribucije te navodimo njezinu definiciju.

Definicija 2.10. *Neka je dan vjerojatnosni prostor* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *i neka je* X *slučajna varijabla na njemu. Funkciju* $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ *koja realnom broju* x *pridružuje vjerojatnost da dana slučajna varijabla bude manja ili jednaka tom broju, tj. funkciju*

$$F(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = P(\{X \leq x\})$$

zovemo funkcija distribucije slučajne varijable X.

Kako bismo pobliže opisali slučajne varijable koristimo se njihovim numeričkim karakteristikama. Osnovne numeričke karakteristike slučajne varijable su matematičko očekivanje i varijanca koje ćemo u nastavku definirati za diskretnu i za neprekidnu slučajnu varijablu.

Definicija 2.11. *Neka je dan diskretan vjerojatnosni prostor* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *i neka je* X *slučajna varijabla na njemu. Ako red* $\sum\limits_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$ *apsolutno konvergira, tj. ako konvergira red* $\sum\limits_{\omega \in \Omega} |X(\omega)|P(\{\omega\})$ *onda kažemo da slučajna varijabla* X *ima matematičko očekivanje i broj*

$$E[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$$

zovemo matematičko očekivanje (očekivanje) slučajne varijable X.

U zadacima ćemo matematičko očekivanje diskretne slučajne varijable računati na drugačiji način koji nam opisuje sljedeći teorem.

Teorem 2.12. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *diskretan vjerojatnosni prostor i*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

slučajna varijabla na njemu. Redovi $\sum\limits_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$ *i* $\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} x_i p_i$ *istovremeno ili apsolutno konvergiraju ili apsolutno divergiraju. U slučaju apsolutne konvergencije sume su im jednake, tj. vrijedi*

$$E[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i p_i.$$

Dokaz. Vidi [1, str. 86, Teorem 2.1]. $\square$

Definicija 2.13. *Neka je* X *neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće* f. *Ako je integral* $\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)\mathrm{d}x$ *konačan, onda kažemo da slučajna varijabla* X *ima očekivanje i broj*

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x$$

zovemo matematičko očekivanje neprekidne slučajne varijable X.

Navest ćemo i nekoliko svojstava matematičkog očekivanja, koja će nam biti potrebna u nastavku, a vrijede kako za diskretnu tako i za neprekidnu slučajnu varijablu.

Svojstva matematičkog očekivanja:

1. Neka su a i b realni brojevi, a X slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ koja ima očekivanje $E[X]$. Tada i slučajna varijabla $aX + b$ ima očekivanje i vrijedi:
$$E[aX + b] = aE[X] + b.$$

2. NENEGATIVNOST: Ako je X slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ koja ima svojstvo $X(\omega) \geq 0$ za svaki $\omega \in \Omega$ i ako je red $\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$ konvergentan, onda je $E[X] \geq 0$.

3. MONOTONOST: Neka su X i Y slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ koje imaju očekivanja $E[X]$ i $E[Y]$. Ako vrijedi $X(\omega) \leq Y(\omega)$ za svaki $\omega \in \Omega$, tada je i $E[X] \leq E[Y]$.

Također, matematičko očekivanje ima i svojstvo linearnosti o kojem nam govori sljedeći teorem.

Teorem 2.14. *Neka su X i Y dvije slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ takve da postoje očekivanja $E[X]$ i $E[Y]$. Tada za proizvoljne $a, b \in \mathbb{R}$ postoji očekivanje slučajne varijable $aX + bY$ i vrijedi*
$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y].$$

Dokaz. Vidi [1, str. 87, Teorem 2.3]. □

Često, zbog jednostavnosti, umjesto $E[X]$ možemo pisati samo EX.

Definicija 2.15. *Neka je X slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i neka EX postoji. Varijanca od X definira se s*
$$VarX = E[(X - EX)^2],$$
ukoliko to očekivanje postoji.

Varijancu označavamo još i sa σ^2, a $\sigma = \sqrt{VarX}$ nazivamo standardna devijacija.

Svojstva varijance:

1. Varijancu možemo računati i na sljedeći način:
$$VarX = EX^2 - (EX)^2.$$
Dokaz. Vidi [1, str. 93, 3].

2. Neka je X slučajna varijabla koja ima varijancu te neka su a i b proizvoljni realni brojevi. Tada vrijedi:
$$Var(aX + b) = a^2 VarX.$$
Dokaz. Vidi [1, str. 93, 1].

3 Transformacije diskretne i neprekidne slučajne varijable

Kada smo se upoznali s osnovnim pojmovima teorije vjerojatnosti možemo pobliže objasniti transformacije slučajnih varijabli. Prvo ćemo započeti s onim transformacijama koje se mogu primijeniti i na neprekidne i na diskretne slučajne varijable. Posebno nam je zanimljiv postupak standardizacije kroz koji ćemo upoznati i parametarski zadane slučajne varijable te njihova svojstva.

3.1 Postupak standardizacije

Svaku slučajnu varijablu X, na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, koja ima varijancu ($VarX < \infty$) možemo afino transformirati tako da joj oduzmemo očekivanje EX i zatim tu razliku podijelimo sa standardnom devijacijom, odnosno s $\sqrt{VarX}$. Slučajna varijabla $\dfrac{X - EX}{\sqrt{VarX}}$, koju smo dobili ovakvim postupkom, ima očekivanje nula i varijancu jedan. Postupak koji smo proveli naziva se postupak standardizacije slučajne varijable o čemu nam govori i sljedeća propozicija.

Propozicija 3.1. *Neka je X slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ s očekivanjem $EX = \mu \in \mathbb{R}$ i varijancom $VarX = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Tada slučajna varijabla $Y = \dfrac{X - EX}{\sqrt{VarX}}$ ima očekivanje 0 i varijancu 1.*

Dokaz. Primjenom ranije opisanih svojstava matematičkog očekivanja i varijance dobivamo sljedeće:

$$EY = E\Big[\frac{X-\mu}{\sigma}\Big] = E\Big[\frac{X}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma}\Big] = \frac{1}{\sigma}EX - \frac{\mu}{\sigma} = \frac{\mu}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} = 0,$$

$$VarY = Var\Big(\frac{X-\mu}{\sigma}\Big) = Var\Big(\frac{X}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma}\Big) = \frac{1}{\sigma^2}VarX = \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2 = 1.$$

□

Postupkom standardizacije smo na jednostavan način promijenili varijancu i očekivanje slučajne varijable, ali nas zanima što se pri toj transformaciji dogodilo s njezinom funkcijom distribucije. Odgovor nam donosi sljedeća propozicija.

Propozicija 3.2. *Neka je X slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ s funkcijom distribucije F_X, očekivanjem $\mu \in \mathbb{R}$ i varijancom $\sigma^2 > 0$. Tada slučajna varijabla $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ ima funkciju distribucije $F_Y(x) = F_X(\sigma x + \mu)$.*

Dokaz. Kako je $\sigma > 0$, prema definiciji funkcije distribucije vrijedi:

$$F_Y(x) = P(\{Y \leq x\}) = P\Big(\Big\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq x\Big\}\Big) = P(\{X \leq \sigma x + \mu\}) = F_X(\sigma x + \mu). \tag{1}$$

□

Također nas zanima hoće li postupak standardizacije slučajne varijable ostaviti slučajnu varijablu u klasi distribucije u kojoj se ona nalazi ili će ju postupak standardizacije izbaciti iz te klase. Kroz primjer uniformne i binomne slučajne varijable pokazat ćemo da odgovor nije jedinstven.

3.1.1 Uniformna slučajna varijabla

Uniformna slučajna varijabla je parametarski zadana neprekidna slučajna varijabla. Zadana je na intervalu (a, b), $a < b$, svojom funkcijom gustoće

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases}. \tag{2}$$

i pišemo $X \sim \mathcal{U}(a, b)$.

Njena funkcija distribucije dana je s

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, a] \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 1, & x \in [b, +\infty) \end{cases}. \tag{3}$$

Pogledajmo sada što se dogodi kada na uniformnu slučajnu varijablu primjenimo postupak standardizacije.

Primjer 3.3. *Neka je X uniformna slučajna varijabla zadana parametrima a i b, tj. $X \sim \mathcal{U}(a, b)$. Očekivanje uniformne slučajne varijable X dano je s*

$$EX = \frac{a+b}{2},$$

a varijanca s

$$VarX = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Definiramo slučajnu varijablu Y kao

$$Y = \frac{X - EX}{\sqrt{VarX}}.$$

Dakle, proveli smo postupak standardizacije slučajne varijable X. Sada nas zanima je li slučajna varijabla Y ostala u klasi uniformne slučajne varijable.

Rješenje. Kako bismo izračunali funkciju distribucije slučajne varijable Y koristit ćemo funkciju distribucije slučajne varijable X koja je dana formulom (3). Prema (1) vrijedi:

$$F_Y(y) = F_X(\sigma y + \mu) = \begin{cases} 0, & \sigma y + \mu \in (-\infty, a] \\ \frac{\sigma y + \mu - a}{b-a}, & \sigma y + \mu \in (a, b) \\ 1, & \sigma y + \mu \in [b, +\infty) \end{cases} = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, \frac{a-\mu}{\sigma}] \\ \frac{\sigma y + \mu - a}{b-a}, & y \in (\frac{a-\mu}{\sigma}, \frac{b-\mu}{\sigma}) \\ 1, & y \in [\frac{b-\mu}{\sigma}, +\infty) \end{cases}.$$

Ako je Y uniformna slučajna varijabla, prema (3), njena funkcija distribucije F_Y bi na intervalu $(\frac{a-\mu}{\sigma}, \frac{b-\mu}{\sigma})$ trebala biti jednaka sljedećem:

$$\frac{y - \dfrac{a-\mu}{\sigma}}{\dfrac{b-\mu}{\sigma} - \dfrac{a-\mu}{\sigma}} = \frac{\dfrac{\sigma y - (a-\mu)}{\sigma}}{\dfrac{b-\mu-(a-\mu)}{\sigma}} = \frac{\sigma y - a + \mu}{b-a}.$$

Kako jednakost vrijedi, Y je uniformna slučajna varijabla na intervalu $(\frac{a-\mu}{\sigma}, \frac{b-\mu}{\sigma})$ i pišemo $Y \sim \mathcal{U}(\frac{a-\mu}{\sigma}, \frac{b-\mu}{\sigma})$. $\square$

Dakle, postupak standardizacije nije izbacio slučajnu varijablu X iz klase uniformnih slučajnih varijabli.

3.1.2 Binomna slučajna varijabla

Ako nas u svakom pojedinom izvođenju pokusa zanima samo je li se neki događaj realizirao ili ne tada je $P(\{X = 1\}) = p$, a $P(\{X = 0\}) = q = 1 - p$, za $p \in (0, 1)$, pri čemu 1 označava uspjeh, a 0 neuspjeh. Ako takav pokus ponovimo nezavisno n puta i zanima nas realizacija uspjeha, modelirat ćemo ga parametarski zadanom diskretnom slučajnom varijablom koja ima binomnu distribuciju. Dakle, binomna distribucija nastaje iz nezavisnog ponavljanja istog slučajnog pokusa n puta, $n \in \mathbb{N}$.

Definicija 3.4. *Neka je $p \in (0, 1)$, te $n \in \mathbb{N}$. Za slučajnu varijablu X koja poprima vrijednosti iz skupa $\{0, 1, 2, .., n\}$ s vjerojatnostima*

$$p_i = P(\{X = i\}) = \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i}, i = 0, 1, ..., n,$$

kažemo da ima binomnu distribuciju s parametrom n koji označava broj nezavisnih ponavljanja pokusa i parametrom p koji predstavlja vjerojatnost uspjeha u svakom pojedinom izvođenju pokusa. Pišemo $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Pogledajmo sada što se dogodi s binomnom slučajnom varijablom kada na nju primjenimo postupak standardizacije.

Primjer 3.5. *Neka je X binomna slučajna varijabla zadana parametrima n i p, tj. $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Matematičko očekivanje slučajne varijable X dano je s $EX = np$, a varijanca s $VarX = npq = np(1 - p)$, za $p \in (0, 1)$. Slika slučajne varijable X jednaka je $\mathcal{R}(X) = \{0, 1, 2, ..., n\} \subset \mathbb{N}_0$. Definiramo slučajnu varijablu Y kao*

$$Y = \frac{X - EX}{\sqrt{VarX}} = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}.$$

Dakle, proveli smo postupak standardizacije slučajne varjable X. Sada nas zanima pripada li slučajna varijabla Y klasi binomnih slučajnih varijabli, odnosno je li postupak standardizacije izbacio slučajnu varijablu X iz klase binomnih slučajnih varijabli.

Rješenje. Pogledajmo elemente slike slučajne varijable Y:

$$\mathcal{R}(Y) = \left\{ \frac{-np}{\sqrt{npq}}, \frac{1 - np}{\sqrt{npq}}, ..., \frac{n - np}{\sqrt{npq}} \right\} \not\subset \mathbb{N}_0.$$

Vidimo da $\mathcal{R}(Y)$ nije podskup skupa $\mathbb{N}_0$ što znači da je postupak standardizacije izbacio slučajnu varijablu X iz klase binomnih slučajnih varijabli. □

4 Transformacije diskretne slučajne varijable

Na diskretnom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ je svaka funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna varijabla i to diskretna. Kao što smo već spomenuli, diskretnu slučajnu varijablu zadajemo njenom tablicom distribucije ili funkcijom distribucije. Dakle, neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna varijabla zadana tablicom distribucije

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix},$$

gdje je $\mathcal{R}(X) = \{x_i : i \in \mathcal{I}\}$, $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{N}$, a $(p_i, i \in \mathcal{I})$ pripadne vjerojatnosti. Neka je $g : D_g \to \mathbb{R}$ funkcija takva da je $\mathcal{R}(X) \subseteq D_g$. Tada možemo definirati kompoziciju $g \circ X : \Omega \to \mathbb{R}$. Sada ćemo razlikovati dva slučaja, kada je funkcija g injekcija i kada nije injekcija.

4.1 Transformacija injektivnom funkcijom

Kažemo da je funkcija $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ injekcija ako vrijedi $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, za svaki $x_1, x_2 \in D$. Također, funkcija je injekcija onda i samo onda ako $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, za svaki $x_1, x_2 \in D$.
Uz pretpostavku da je funkcija g injekcija, vrijedi sljedeće:

$$P(\{g(X) = g(x_i)\}) = P(\{X = x_i\}) = p_i, i \in \mathcal{I}.$$

Sada zaključujemo da tablica distribucije slučajne varijable $g(X)$ ima sljedeći oblik:

$$g(X) = \begin{pmatrix} g(x_1) & g(x_2) & \dots & g(x_n) & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}.$$

Primjer 4.1. *Neka slučajna varijabla X ima binomnu distribuciju $\mathcal{B}(n,p)$. Odredimo distribuciju slučajne varijable $Y = 3X + 1$ i izračunajmo njeno očekivanje i varijancu.*

Rješenje. Slučajna varijabla Y će poprimati vrijednosti u skupu $\{1, 4, 7, \dots, 3n+1\}, n \in \mathbb{N}$, a kako je funkcija $g(x) = 3x + 1$ injekcija, slučajna varijabla Y će imati sljedeće vjerojatnosti:

$$p_k = P(\{Y = 3k+1\}) = P(\{X = k\}) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, k = 0, 1, ..., n.$$

Kako slučajna varijabla X ima binomnu distribuciju $\mathcal{B}(n,p)$ njeno matematičko očekivanje dano je s $E[X] = np$, a varijanca s $VarX = np(1-p)$. Primjenjujući ranije definirana svojstva matematičkog očekivanja i varijance dobivamo sljedeće:

$$E[Y] = E[3X + 1] = 3E[X] + 1 = 3np + 1$$

$$VarY = Var(3X + 1) = 3^2 VarX = 9npq.$$

$\square$

4.2 Transformacija funkcijom koja nije injekcija

U slučaju kada funkcija g nije injekcija $\mathcal{R}(g(X))$ je skup svih različitih vrijednosti funkcije g za elemente iz $\mathcal{R}(X)$, dok su pripadne vjerojatnosti dane s

$$P(\{g(X)=y_i\}) = \sum_{\{x_i \in \mathcal{R}(X): g(x_i)=y_i\}} P(\{X=x_i\}).$$

Primjer 4.2. *Neka je X slučajna varijabla zadana tablicom distribucije:*

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \cdots \end{pmatrix}.$$

Odredimo tablicu distribucije i funkciju gustoće slučajne varijable $Y = cos(\pi X)$.

Rješenje. Slučajna varijabla Y poprima samo dvije vrijednosti:
$Y=-1$ za $X=1,3,5,...$
$Y=1$ za $X=2,4,6,...$
Zaključujemo da funkcija $g(x)=cos(\pi x)$ nije injekcija te vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned} p_1 &= P(\{Y=-1\}) = P(\{X=1\}) + P(\{X=3\}) + P(\{X=5\}) + ... \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + ... = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2^2}} = \frac{2}{3}, \\ p_2 &= P(\{Y=1\}) = P(\{X=2\}) + P(\{X=4\}) + P(\{X=6\}) + ... \\ &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + ... = \frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2^2}} = \frac{1}{3} = 1 - p_1. \end{aligned}$$

Dakle, tablica distribucije slučajne varijable Y je

$$Y = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

a onda je njena funkcija gustoće jednaka

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & y=-1 \\ \frac{1}{3}, & y=1 \\ 0, & y \notin \{-1,1\} \end{cases}.$$

□

5 Transformacije neprekidne slučajne varijable

Kao što smo uočili u prethodnom poglavlju, kompozicija slučajne varijable X i realne funkcije $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je također slučajna varijabla

$$Y = g(X) : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Pokazali smo kako računamo vjerojatnosti ovako transformirane diskretne slučajne varijable, a u ovom poglavlju ćemo pokazati što se događa u slučaju kada je X neprekidna slučajna varijabla. Također ćemo pokazati kako izgledaju bijektivna i Laplaceova transformacija neprekidne slučajne varijable.

5.1 Funkcije neprekidnih slučajnih varijabli

Neka je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f_X i funkcijom distribucije F_X. Želimo odrediti funkciju gustoće f_Y i funkciju distribucije F_Y slučajne varijable $Y = g(X)$, za neku funkciju $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Imamo sljedeće:

$$F_Y(y) = P(\{Y < y\}) = P(\{g(X) < y\}) = P(\{X \in g^{-1}((-\infty, y))\}) = P(\{X \in A_y\}),$$

gdje je $g^{-1}(A) := \{x \in \mathbb{R} : g(x) \in A\}$ original skupa A.
Možemo zaključiti da će se događaj $\{Y < y\}$ ostvariti onda i samo onda kada se ostvaruje i događaj $\{X \in A_y\}$.

Primjer 5.1. *Neka je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f_X i neka je $Y = X^2$. Odredimo funkciju gustoće slučajne varijable Y, a zatim funkciju gustoće slučajne varijable Y u slučaju kada je X uniformna slučajna varijabla na intervalu $(-1, 2)$.*

Rješenje. Primjetimo, događaj $\{Y \leq y\}$ je ekvivalentan događaju $\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\}$.
U slučaju kada je $y < 0$ imamo

$$F_Y(y) = P(\{Y \leq y\}) = P(\{X^2 \leq y\}) = 0,$$

iz čega slijedi da je i $f_Y(y) = 0$.
Kada je $y \geq 0$ imamo

$$F_Y(y) = P(\{Y \leq y\}) = P(\{X^2 \leq y\}) = P(\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}).$$

Sada je funkcija gustoće slučajne varijable Y, za $y \geq 0$, jednaka sljedećem

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_X(\sqrt{y}) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_X(-\sqrt{y}) = \frac{1}{2\sqrt{y}}(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})).$$

Dakle, funkcija gustoće slučajne varijable Y jednaka je

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})), & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}. \tag{4}$$

Sada želimo pronaći funkciju gustoće slučajne varijable Y kada je X uniformna na intervalu $(-1,2)$. Ovu parametarski zadanu slučajnu varijablu smo već ranije spominjali pa je njena funkcija gustoće prema (2) jednaka

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x \in (-1,2) \\ 0, & x \notin (-1,2) \end{cases}.$$

Primjetimo da slučajna varijabla $Y = X^2$ poprima vrijednosti iz intervala $(0,4)$ stoga ćemo rješenje podijeliti na slučajeve kako bismo mogli primjeniti (4).
Kada se y nalazi u intervalu $(0,1)$, $\sqrt{y}$ i $-\sqrt{y}$ se nalaze u slici slučajne varijable X tj. u $\mathcal{R}(X) = (-1,2)$. Sada je prema (4)

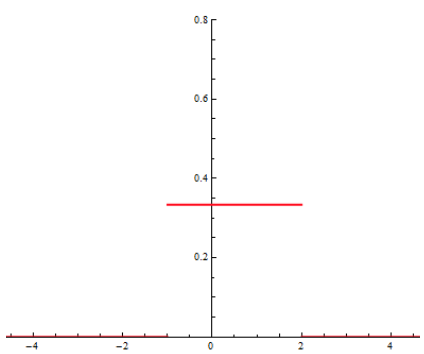
$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3\sqrt{y}}.$$

Kada se y nalazi u intervalu $(1,4)$ $\sqrt{y}$ je u $\mathcal{R}(X) = (-1,2)$, ali je $-\sqrt{y} < -1$ pa prema (4) vrijedi sljedeće

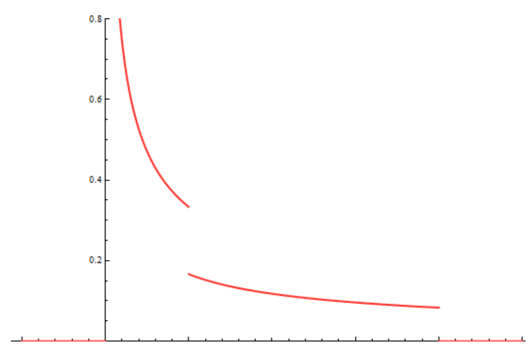
$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(\frac{1}{3} + 0\right) = \frac{1}{6\sqrt{y}}.$$

Dakle, funkcija gustoće slučajne varijable Y jednaka je

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{y}}, & y \in (0,1) \\ \frac{1}{6\sqrt{y}}, & y \in (1,4) \\ 0, & y \notin (0,4) \end{cases}.$$



Slika 1: Funkcija gustoće f_X



Slika 2: Funkcija gustoće f_Y

□

5.1.1 Bijektivna transformacija neprekidne slučajne varijable

Ranije smo pokazali kako određujemo distribuciju slučajne varijable $Y = g(X)$ za neku funkciju $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ukoliko je X neprekidna slučajna varijabla. Takav postupak ponekad može biti tehnični zahtjevan te nam sljedeći teorem daje općeniti izraz za funkciju gustoće slučajne varijable $Y = g(X)$ ukoliko je funkcija g bijekcija.

Teorem 5.2. *Neka je X neprekidna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, f_X njena funkcija gustoće, a F_X njena funkcija distribucije. Nadalje, neka je $g : \mathbb{R} \to \mathcal{R}(g) \subseteq \mathbb{R}$ bijekcija. Ako je funkcija g derivabilna na $\mathbb{R}$ onda je $Y = g(X)$ neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće*

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y))|(g^{-1}(y))'|, & y \in \mathcal{R}(g) \\ 0, & y \notin \mathcal{R}(g) \end{cases}.$$

Dokaz. Označimo s $Y = g(X)$ slučajnu varijablu $g(X)$, gdje je X neprekidna, a $g : \mathbb{R} \to \mathcal{R}(g)$ je bijekcija. Pogledajmo sada funkciju distribucije slučajne varijable Y,

$$F_Y(y) = P(\{Y \leq y\}) = P(\{g(X) \leq y\}).$$

Želimo $P(\{g(X) \leq y\})$ zapisati u terminima funkcije distribucije slučajne varijable X, a za to nam je potrebno riješiti nejednadžbu $g(X) \leq y$. Kako je funkcija g bijekcija ona je monotona pa rješenje ovisi o tome je li funkcija g rastuća ili padajuća.

1. **g monotono rastuća funkcija**
   Kako je g monotono rastuća imamo $x_1 \leq x_2 \Rightarrow g(x_1) \leq g(x_2)$. Označimo li $g(x_1)$ s y_1, a $g(x_2)$ s y_2 slijedi $y_1 \leq y_2$. Prema tome imamo

   $$x_1 = g^{-1}(y_1) \leq g^{-1}(y_2) = x_2,$$

   iz čega slijedi da je g^{-1} također monotono rastuća funkcija. Sada je funkcija distribucije slučajne varijable Y dana s

   $$F_Y(y) = P(\{g(X) \leq y\}) = P(\{X \leq g^{-1}(y)\}) = F_X(g^{-1}(y)).$$

   Dakle, $F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y))$. F_X je funkcija distribucije slučajne varijable X pa je derivabilna. Prema pretpostavci teorema je g derivabilna na $\mathbb{R}$, a g je bijekcija pa slijedi da je i g^{-1} derivabilna na $\mathcal{R}(g)$.

   Derivirajmo sada funkciju distribucije F_Y slučajne varijable Y po $y \in \mathcal{R}(g)$. Dobivamo sljedeće

   $$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_X(g^{-1}(y)) = f_X(g^{-1}(y))(g^{-1}(y))' \geq 0. \tag{5}$$

2. g **monotono padajuća funkcija**
   Kako je g monotono padajuća funkcija imamo $x_1 \leq x_2 \Rightarrow g(x_1) \geq g(x_2)$. Označimo li $g(x_1)$ s y_1, a $g(x_2)$ s y_2 slijedi $y_1 \geq y_2$. Prema tome imamo

$$x_1 = g^{-1}(y_1) \leq g^{-1}(y_2) = x_2,$$

   iz čega slijedi da je g^{-1} također monotono padajuća funkcija. Sada funkciju distribucije slučajne varijable Y možemo zapisati kao

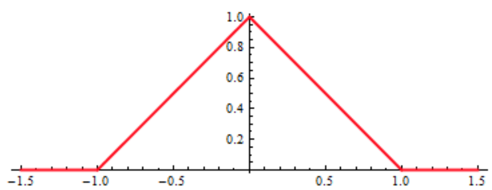
$$F_Y(y) = P(\{g(X) \leq y\}) = P(\{X \geq g^{-1}(y)\}) = 1 - P(\{X \leq g^{-1}(y)\}) = 1 - F_X(g^{-1}(y)).$$

   Analognim postupkom kao u prethodnom slučaju dobivamo

$$f_Y(y) = -f_X(g^{-1}(y))(g^{-1}(y))' \geq 0. \tag{6}$$

Iz (5) i (6) slijedi tvrdnja teorema. □

Primjer 5.3. *Funkcija gustoće slučajne varijable X zadana je slikom. Odredimo funkciju gustoće slučajne varijable $Y = X^3$.*



Slika 3: Funkcija gustoće slučajne varijable X

Rješenje. Iz slike vidimo da je funkcija gustoće slučajne varijable X jednaka:

$$f_X(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [-1,0] \\ 1-x, & x \in (0,1] \\ 0, & x \notin [-1,1] \end{cases}.$$

Kako je funkcija $g(x) = x^3$ bijekcija ona ima inverz $g^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ i derivabilna je na $\mathbb{R}$ pa prema prethodnom teoremu vrijedi:

$$f_Y(y) = f_X(\sqrt[3]{y})\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}(\sqrt[3]{y}+1), & \sqrt[3]{y} \in [-1,0] \\ \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}(1-\sqrt[3]{y}), & \sqrt[3]{y} \in (0,1] \\ 0, & \sqrt[3]{y} \notin [-1,1] \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}(\sqrt[3]{y}+1), & y \in [-1,0] \\ \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}(1-\sqrt[3]{y}), & y \in (0,1] \\ 0, & y \notin [-1,1] \end{cases}.$$

□

Primjer 5.4. *Neprekidna slučajna varijabla X dana je svojom funkcijom gustoće*

$$f_X(x) = \begin{cases} a(x-1), & x \in [1,4] \\ 0, & x \notin [1,4] \end{cases}.$$

Odredimo konstantu a te funkciju gustoće slučajne varijable $Y = 3X - 1$.

Rješenje. Konstantu a odredit ćemo primjenjujući svojstvo normiranosti funkcije gustoće neprekidne slučajne varijable:

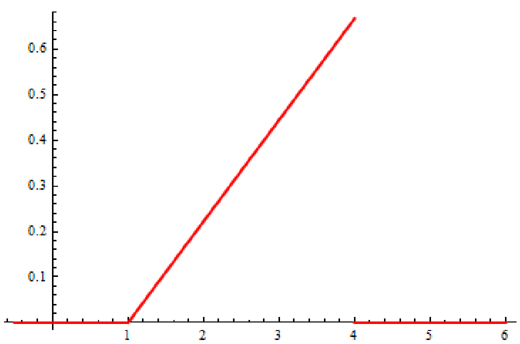
$$\int_1^4 a(x-1)\mathrm{d}x = a\Big(\frac{x^2}{2} - x\Big)\Big|_1^4 = \frac{9}{2}a = 1.$$

Dakle, $a = \frac{2}{9}$ pa je funkcija gustoće slučajne varijable X jednaka

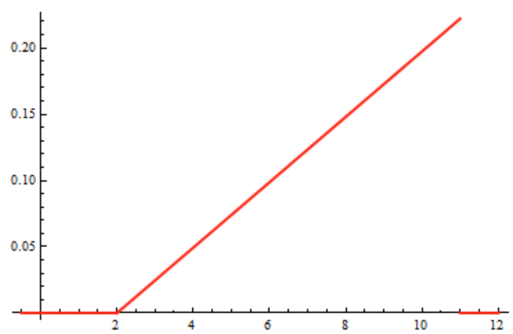
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}(x-1), & x \in [1,4] \\ 0, & x \notin [1,4] \end{cases}.$$

Pronađimo sada funkciju gustoće slučajne varijable $Y = 3X - 1$.
Kako je funkcija $g(x) = 3x - 1$ bijektivna ona ima inverz $g^{-1}(y) = \frac{1}{3}(y+1)$ i derivabilna je na $\mathbb{R}$ pa možemo primijeniti prethodni teorem.
Dakle,

$$f_Y(y) = \frac{1}{3} f_X\Big(\frac{1}{3}(y+1)\Big) = \begin{cases} \frac{2}{27}\Big(\frac{1}{3}(y+1) - 1\Big), & \frac{1}{3}(y+1) \in [1,4] \\ 0, & \frac{1}{3}(y+1) \notin [1,4] \end{cases} = \begin{cases} \frac{2(y-2)}{81}, & y \in [2,11] \\ 0, & y \notin [2,11] \end{cases}.$$



Slika 4: Funkcija gustoće f_X



Slika 5: Funkcija gustoće f_Y

□

5.2 Laplaceova transformacija

Kako bismo shvatili pojam Laplaceove transformacije moramo krenuti od integralnih transformacija. Integralne transformacije su izrazi oblika

$$f^*(s) = \int_\alpha^\beta K(s,t)f(t)\mathrm{d}t,$$

gdje funkciju f nazivamo originalnom funkcijom, a funkciju f^* zovemo slikom od f ili transformatom funkcije f. Funkcija K je jezgra integralne transformacije. Kod Laplaceove transformacije granice integracije su $\alpha = 0$, $\beta = \infty$, a jezgra transformacije je $K(s,t) = e^{-st}$.

Definicija 5.5. *Neka je dana funkcija $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Ako za funkciju f konvergira integral*

$$\mathcal{L}(f)(s) = f^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t, s \in \mathbb{R}$$

onda se funkcija $\mathcal{L}(f) = f^*$ zove Laplaceov transformat funkcije f, a preslikavanje $\mathcal{L}$ Laplaceova transformacija.

Neka je X neprekidna slučajna varijabla i f njena funkcija gustoće. Mi ćemo Laplaceovu transformaciju promatrati kao funkciju očekivanja, odnosno vrijedit će sljedeće:

$$f^*(s) = E[e^{-sX}] = \int_0^\infty e^{-sx}\mathrm{d}F(x) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\mathrm{d}x.$$

Pogledajmo kako pomoću Laplaceove transformacije možemo računati matematičko očekivanje slučajne varijable X. Derivirat ćemo Laplaceov transformat slučajne varijable X:

$$f^{*'}(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} E[e^{-sX}] = E[-Xe^{-sX}].$$

Uvrstimo li $s = 0$ u gornju jednakost dobivamo sljedeće:

$$f^{*'}(0) = E[-Xe^{-0X}] = E[-X] = -E[X],$$

odnosno, matematičko očekivanje slučajne varijable X dano je s

$$E[X] = -f^{*'}(0). \tag{7}$$

Daljnjim deriviranjem dobili bismo

$$f^{*(n)}(s) = \frac{\mathrm{d^n}}{\mathrm{d}s^n} E[e^{-sX}] = E[(-X)^n e^{-sX}]. \tag{8}$$

Laplaceova transformacija često se koristi u tzv. teoriji redova čekanja (eng. queueing theory) kako bi se na osnovi podataka o vremenu dolaska kupca i vremenu potrebnom za posluživanje kupca donijele poslovne odluke o sredstvima potrebnim za pružanje usluga. Slično, mi ćemo proučavati Laplaceovu transformaciju slučajne varijable koja ima eksponencijalnu distribuciju jer se upravo ta distribucija najčešće javlja kod slučajnih varijabli koje označavaju vrijeme čekanja do pojave nekog događaja.

Definicija 5.6. *Neprekidna slučajna varijabla X ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom $\lambda > 0$ ako je funkcija gustoće dana izrazom*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Može se pokazati da je funkcija distribucije ove slučajne varijable dana izrazom

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Primjer 5.7. *Neka je X slučajna varijabla koja ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom λ, odnosno $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Odredimo Laplaceovu transformaciju slučajne varijable X te njeno matematičko očekivanje i varijancu koristeći dobivenu transformaciju.*

Rješenje. Prema definiciji Laplaceove transformacije slučajne varijable X imamo

$$f^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-st} \lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \lambda \int_0^\infty e^{(-s-\lambda)t}\mathrm{d}t = \frac{\lambda}{\lambda + s}.$$

Izračunajmo sada matematičko očekivanje i varijancu slučajne varijable X. Prema (7) imamo:

$$E[X] = -{f^*}'(0) = \left.\frac{\lambda}{(\lambda + s)^2}\right|_{s=0} = \frac{1}{\lambda}.$$

Iz (8) za $n = 2$ i uvrštavanjem $s = 0$ dobivamo da je

$$E[X^2] = {f^*}''(0) = \left.\frac{2\lambda}{(\lambda + s)^3}\right|_{s=0} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Sada možemo izračunati varijancu slučajne varijable X:

$$VarX = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

□

Literatura

[1] M. Benšić, N. Šuvak, Uvod u vjerojatnost i statistiku, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2014.

[2] K. Doroslovački, S. Gilezan, T. Grbić, J. Ivetić, Z. Lužanin, B. Mihailović, Lj. Nedović, Z. Ovcin, Zbirka rešenih zadataka iz Verovatnoće i statistike, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 2009.

[3] N. Elezović, Vjerojatnost i statistika, Element, Zagreb, 2007.

[4] N. Elezović, Zbirka zadataka iz teorije vjerojatnosti, Sveučilište u Zagrebu, Elektrotehnički fakultet, 1987.

[5] H. P. Hsu, Probability, Random Variables and Random Processes, McGraw-Hill, New York, 1997.

[6] D. Jukić, R. Scitovski, Matematika I, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2004.

[7] Ž. Salinger, Laplaceova transformacija, Završni rad, Odjel za matematiku, Osijek, 2011.

[8] N. Sarapa, Teorija vjerojatnosti, Školska knjiga, Zagreb, 1986.

[9] J. Virtamo, Queueing Theory (Continuous Distributions), Helsinki University of Technology, Finland, 2005.

[10] `http://www.math.uah.edu/stat/dist/Transformations.html`