Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Ivan Širić

Singapurska metoda modela

Diplomski rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Ivan Širić

Singapurska metoda modela

Diplomski rad

Mentor: dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2017.

Sadržaj

1 Uvod

Još od neovisnosti Singapura 1965. godine, u obrazovnom sustavu napravljeno je nekoliko reformi. Prva glavna reforma pod nazivom „Novi obrazovni sustav" kasnih 1970-ih godina, imala je za cilj pružiti učenicima barem deset godina općeg obrazovanja (osnovna škola u trajanju od šest godina i srednja škola u trajanju od četiri godine). Matematika je postala obavezan predmet do kraja tog obrazovanja. Nastavni plan i program za različite smjerove bio je prilagođen potrebama i sposobnostima učenika.

Singapursko ministarstvo obrazovanja 1975. godine provelo je istraživanje o postignuću učenika u osnovnoj školi. Istraživanje je pokazalo da najmanje 25% učenika sa završenom osnovnom školom (šest razreda) nisu postigli osnovne matematičke vještine. Također, istraživanje iz 1981. godine provedeno na 17000 učenika osnovne škole do četvrtog razreda pokazalo je da 87% učenika mogu riješiti zadatak ako je u njemu naglašena ključna riječ, ali samo 46% njih je riješilo zadatak bez ključne riječi. Ova naznaka ukazuje da učenici nisu usvojili osnovne matematičke vještine. Zabrinutost zbog slabog postignuća bila je poziv na izmjenu nastavnog plana i programa, pristupa nastavnika i materijala za poučavanje.

Osnivanje instituta za razvoj kurikuluma u Singapuru 1980. godine bila je važna prekretnica u obrazovanju. Među raznim timovima, tim „Primary Mathematics Project" (PMP) predvođen dr. Kho Tek Hongom bio je zadužen napraviti nastavne materijale za poučavanje i učenje matematike u osnovnoj školi s učinkovitim nastavnim pristupom i profesionalnim razvojem nastavnika. Nastavni materijali bili su temeljeni na pristupu konkretno-slikovno-apstraktno. U ovom pristupu učenici koriste konkretne objekte i slikovne prikaze koji im pomažu pri rješavanju apstraktnih problema u matematici.

Metoda modela za rješavanje problema, kako je obično zvana u Singapuru, bila je novost u poučavanju i učenju matematike. Metoda je osmišljena 1980-ih godina kako bi učenici lakše rješavali zadatke s riječima u nižim razredima osnovne škole. Od tada metoda modela postaje posebna značajka kurikuluma za osnovnu školu u Singapuru. Ovaj pristup podrazumijeva da učenici crtaju slikovni model kako bi predstavili matematičke veličine (poznate i nepoznate) i njihove međusobne odnose dane u zadatku kako bi sami riješili zadatak. Osnovni pojmovi u ovom pristupu su „model dio-cjelina" i „model usporedbe". Model dio-cjelina i model usporedbe se koriste za prikaz razlomaka, decimalnih brojeva i postotaka. U srednjoj školi metoda modela je integrirana s algebarskom metodom kako bi učenici lakše postavili algebarske jednadžbe i riješili zadatak. Metoda modela povezuje matematiku osnovne škole s matematikom srednje škole, tj. povezuje zadatke iz aritmetike i zadatke iz algebre.

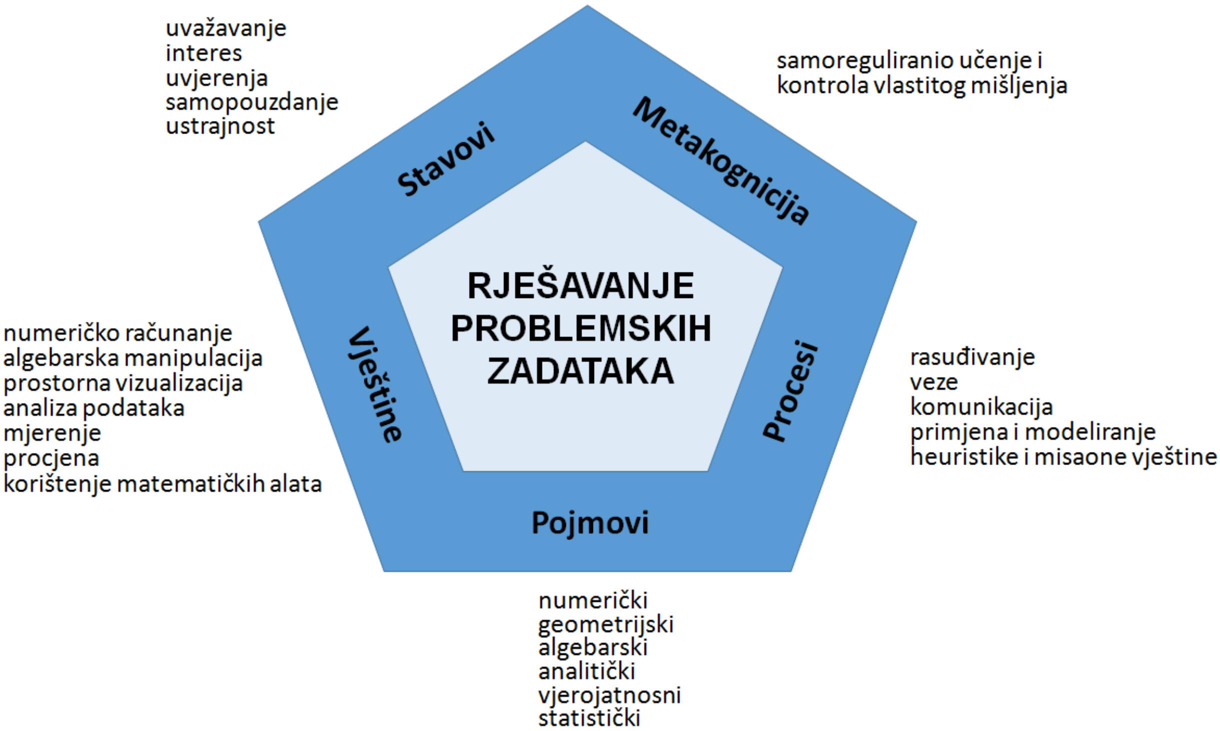
Obrazovni sustav u Singapuru promijenjen je 1990-ih godina kako bi odgovorio izazovima novog stoljeća. Naglasak je bio na poboljšanju i pružanju kvalitetnog obrazovanja za sve učenike. Matematički kurikulum izmijenjen je 1990. godine kako bi naglasio važnost matematičkih procesa i proizvoda pri učenju matematike. Ovo je rezultiralo izradom matematičkog okvira koji je postao još jedno važno obilježje u obrazovanju. Matematički okvir izražava i objašnjava namjeru matematičkog obrazovanja i daje smjernice u poučavanju i učenju matematike te vrednovanju. Cilj je bio napraviti matematički kurikulum koji će omogućiti svim učenicima učenje matematike te njenu primjenu.

Matematički okvir i metoda modela su ključne značajke singapurskog matematičkog kurikuluma. Oboje su dobili na važnosti nakon što je Singapur bio prvi na TIMSS istraživanju 1995. godine, a zatim i 1999. i 2003. godine.

2 Matematički okvir singapurskog matematičkog kurikuluma

Singapurski matematički kurikulum vođen matematičkim okvirom za cilj ima razvijati matematičke sposobnosti učenika, posebice njihovu sposobnost rješavanja problema. Matematički okvir je uveden 1990. godine u osnovnoj školi i nižim razredima srednje škole u nastavnom planu i programu, a 2003. godine formalno je proširen na sve razine obrazovanja. On prikazuje temeljne principe učinkovitog matematičkog programa koji se primjenjuje na svim razinama, od osnovne do napredne razine. To određuje smjer poučavanja, učenja i ocjenjivanja matematike.

Rješavanje matematičkih problema je ključno za učenje matematike. To uključuje stjecanje i primjenu matematičkih pojmova i vještina u raznim situacijama, uključujući i nerutinske zadatke, zadatke otvorenog tipa i probleme iz svakodnevnog života. Razvoj sposobnosti matematičkog rješavanja problema ovisi o pet međusobno povezanih komponenata, a to su pojmovi, vještine, procesi, stavovi i metakognicija.



2.1 Pojmovi i vještine

U matematičke pojmove spadaju numerički, algebarski, geometrijski, statistički, vjerojatnosni i analitički pojmovi. Učenici bi trebali razviti i istražiti matematičke ideje te uvidjeti da je matematika integrirana cjelina, a ne samo izolirani dio znanja. Trebali bi dobiti razna obrazovna iskustva koja im pomažu razumjeti matematičke pojmove i smisao raznih matematičkih ideja, kao i njihove veze i primjene, kako bi aktivno sudjelovali u učenju matematike te postigli više samopouzdanja u istraživanju i primjeni matematike. Ovo uključuje korištenje manipulativa (konkretni objekti), praktični rad i tehnologijska pomagala.

Matematičke vještine uključuju proceduralne vještine za: numeričko računavanje, algebarske operacije, prostornu vizualizaciju, analizu podataka, mjerenje, procjene i korištenje matematičkih alata. Razvoj vještina kod studenata je bitno za učenje i primjenu matematike. Učenici bi trebali postati kompetentni u raznim matematičkim vještinama, no treba izbjegavati pretjerano isticanje proceduralnih vještina bez razumijevanja temeljnih matematičkih principa. Gdje god je to moguće vještine uključuju mogućnost korištenja tehnologije za istraživanje i rješavanje problema. Također važno je uključiti misaone vještine i heuristike u proces razvoja vještina. Matematičko obrazovanje u Singapuru stavlja naglasak na stjecanje i primjenu matematičkih pojmova i vještina. Pojmovi i vještine su pažljivo planirani i izričito navedeni kao matematički sadržaji koji učenici trebaju naučiti za svaki razred, kako bi bili spremni za sljedeću razinu učenja. Postoje poželjni ishodi učenja i specifične kompetencije koje bi učenici trebali postići tijekom školovanja. Od uvođenja matematičkog okvira 1990. godine napravljene su neke promjene na području pojmova i vještina. Tijekom kurikularne reforme 2003. godine matematički okvir je proširen na srednjoškolsku i višu razinu. Vjerojatnosni i analitički pojmovi su uključeni kako bi ukazali na važnost matematike u situacijama koje uključuju nesigurnost i promjene. Pod komponentom vještine naglasak je bio na vještinama prostorne vizualizacije i mjerenja. To ukazuje na važnost pružanja praktičnog iskustva i prilika za istraživanje geometrije u stvarnom životu.

2.2 Procesi

Matematički procesi odnose se na vještine znanja uključene u proces stjecanja i primjene matematičkog znanja, uključujući rasuđivanje, komunikaciju i povezivanje, misaone vještine i heuristike te primjene i modeliranje.

2.2.1 Rasuđivanje, komunikacija i veze

Matematičko rasuđivanje se odnosi na sposobnost analize matematičke situacije i izgradnju logičkih argumenata. To je stanje svijesti koje se razvija kroz primjenu matematike u različitim kontekstima. Komunikacija se odnosi na sposobnost da se matematička ideja i argumenti izraze matematičkim jezikom točno, sažeto i logično. Pomaže učenicima razviti vlastito razumijevanje matematike i izoštravanje svog matematičkog razmišljanja. Veze se odnose na sposobnost da učenik uoči i napravi korelaciju između matematičkih pojmova, između matematike i drugih predmeta, te između matematike i svakodnevnog života. Pomažu učenicima dati smisao onomu što su naučili iz matematike. Matematičko rasuđivanje, komunikacija i veze trebaju prožimati sve razine učenja matematike, od osnovne do napredne razine.

2.2.2 Misaone vještine i heuristika

Učenici bi trebali koristiti različite misaone vještine i heuristike kako bi rješavali matematičke probleme. Misaone vještine su vještine koje se mogu koristiti u misaonim procesima kao što su razvrstavanje, uspoređivanje, slaganje podataka u nekom redoslijedu, analiza dijelova i cjeline, identificiranje uzoraka i odnosa, indukcija, dedukcija, generaliziranje, provjera i prostorna vizualizacija. Heuristika je način na koji učenik pristupa problemu kada rješenje problema nije očito. Neki od primjera heuristike su podijeljeni u četiri kategorije prema tome kako se koriste:

- dati prikaz (nacrtati dijagram, napraviti popis, koristiti jednadžbe)
- pretpostaviti rješenje (pogodi i provjeri, tražiti uzorak, napraviti pretpostavke)
- proći kroz postupak (napraviti obratni postupak, situacija prije i poslije neke promjene)
- promijeniti problem (drugačije izreći problem, pojednostavniti problem i riješiti dio problema)

2.2.3 Primjene i modeliranje

Primjene i modeliranje igraju važnu ulogu u razvoju matematičkog razumijevanja i kompetencija. Matematičko modeliranje je proces formuliranja i poboljšanja matematičkog modela za predstavljanje i rješavanje stvarnih problema. Kroz matematičko modeliranje učenici uče kako koristiti razne prikaze podataka, te odabrati i primijeniti odgovarajuće matematičke metode i alate za rješavanje stvarnih problema. Mogućnost bavljenja empirijskim podacima i korištenje matematičkih alata za analizu podataka trebala bi biti dio učenja na svim razinama.

Dok su stjecanje i primjena matematičkih pojmova i vještina još uvijek glavni ciljevi matematike, matematički procesi potiču učenike na razmišljanje i razvijanje vještina za rješavanje problema. U matematičkom okviru, 2000. godine deduktivno rasuđivanje i induktivno rasuđivanje su ujedinjeni u misaone vještine. Dvije nove dimenzije „rasuđivanje, komunikacija i veze“ te „primjene i modeliranje“ uključene su 2003. godine u matematički okvir kako bi istaknuli važnost tih procesa kao odgovor na izazove 21. stoljeća. „Komunikacija“, izvorno kao komponenta vještina, predstavljena je i kao komponenta rasuđivanja i veza kako bi u centar pozornosti stavila učenika, te aktivno i suradničko učenje. Također, učenicima bi trebalo dati priliku da istraže i riješe stvarne probleme upotrebom tehnologije.

2.3 Metakognicija

Metakognicija ili „mišljenje o mišljenju“ upućuje na svijest i mogućnost kontroliranja misaonih procesa, osobito izbora i upotrebe strategija za rješavanje problema. Uključuje nadgledanje vlastitih misli i samoregulaciju učenja. Mjera metakognitivnog iskustva je potrebna učenicima pri razvijanju vlastitih mogućnosti rješavanja problema. Sljedeće strategije mogu se koristiti pri razvijanju metakognitivne svijesti učenika i obogatiti njihovo metakognitivno iskustvo:

- izlaganje učenika općenitim vještinama za rješavanje problema, misaonim vještinama i heuristici

- ohrabriti i potaknuti učenike na razmišljanje naglas o strategijama i metodama koje koriste pri rješavanju specifičnih problema
- dati učenicima zadatke koji zahtijevaju planiranje (prije rješavanja) i vrednovanje (poslije rješavanja)
- ohrabriti i potaknuti učenike na istraživanje drugih načina rješavanja istog problema i odabir najprikladnijeg rješenja
- dopustiti učenicima komentirati načine rješavanja problema i objašnjavanje metoda koje su mogli koristiti pri rješavanju problema.

U matematičkom okviru 2003. godine, metakognicija je obuhvaćena kroz dva aspekta. Praćenje („praćenje vlastitog mišljenja") zahtjeva od učenika poznavanje metakognitivnih strategija, te kada i kako ih koristiti. Kontroliranje („samoregulacija učenja") zahtjeva od učenika da prate kako se stvari odvijaju i rade promjene ako je to potrebno. „Samoregulacija učenja" se uvodi zbog poboljšanja vještina za rješavanje problema.

2.4 Stavovi

Stavovi se odnose na afektivna područja kao što su:

- uvjerenja o matematici i njenoj korisnosti
- interes za matematiku i uživanje pri učenju matematike
- uvažavanje matematike
- samopouzdanje pri korištenju matematike
- ustrajnost pri rješavanju problema

Stavovi učenika prema matematici oblikovani su prema njihovom iskustvu učenja. Ako se učenje matematike učini zabavnim, smislenim i važnim onda učenici stječu pozitivne stavove prema predmetu. Treba obratiti pažnju na oblikovanje aktivnosti učenja kako bi se izgradilo povjerenje i uvažavanje predmeta.

U matematički okvir 2000. godine dodana je „ustrajnost" u svjetlu novih nerutinskih problema koji od učenika zahtijevaju istraživanje i rješavanje pomoću širokog spektra heuristike. Ovo je vrlo važna kvaliteta. Učenici sa ustrajnošću neće lako odustati od problema kada naiđu na poteškoću. U matematički okvir 2003. godine dodana su „uvjerenja". Uvjerenja učenika o matematici i njezinoj korisnosti mogu utjecati na njihove stavove u učenju matematike i rješavanju problema. Ta je dimenzija poželjna za učenje usmjereno na učenika, gdje se učenici potiču na preuzimanje veće odgovornosti za svoje učenje.

3 Nastavni plan i program iz matematike u Singapuru

Nastavni plan i program za osnovnu i srednje škole po kojemu nastavnici danas poučavaju odobren je 2013. godine. Jedino se u šestom, završnom razredu osnovne škole poučava prema planu i programu iz 2007. godine. Djeca kreću u školu s otprilike sedam godina. Prilikom poučavanja nastavnici se koriste raznim pomagalima, manipulativima, metodama i igricama koji olakšavaju učenje. Tijekom cijelog osnovnoškolskog obrazovanja učenici se susreću s brojnim primjerima iz života i često imaju zadatak da u skupini osmisle zadatke iz stvarnog života vezane za pripadnu cjelinu. Mnogo pažnje se posvećuje zadacima s riječima u kojima je često nepoznato što se zapravo traži i kako problem napisati matematički. Zadaci s riječima se susreću u svakoj cjelini, jer upravo takvi zadaci potiču učenika na razmišljanje. U prva dva razreda osnovne škole takvi zadaci se rješavaju pomoću konkretnih predmeta ili slikovnih prikaza, iako već u drugom razredu učenici samostalno crtaju model dio-cjelina i model usporedbe. U prvom razredu osnovne škole na satima matematike, učenici se upoznaju s metodom modela kada uče cijele brojeve do 100, te operacije zbrajanje i oduzimanje. Koriste se raznim vidljivim, opipljivim predmetima, koje mogu prebrojavati i donositi neke zaključke na osnovu toga. Također upoznaju koncept množenja i dijeljenja, tako što od predmeta načine neke skupine predmeta koje mogu prebrojavati. Na primjer, 20 olovaka mogu rasporediti u 4 skupine. Time lako uoče da svaka skupina ima 5 olovaka. Na tom primjeru, lako uočavaju inverznost operacija množenja i dijeljenja. Naravno, to uče na elementarnoj razini. Pri poučavanju operacije množenja, umnožak nije veći od 40, a kod operacije dijeljenja, djeljenik nije veći od 20. Nadalje, tijekom drugog, trećeg, četvrtog i petog razreda osnovne škole savladaju brojeve do 10 milijuna i četiri osnovne operacije. Upoznaju se s raznim algoritmima za zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje. Ono što je zanimljivo jest da se s pojmom razlomka susreću u drugom razredu osnovne škole, iako na vrlo elementarnoj razini. Razlomak je broj koji zapravo predstavlja dio neke cjeline. No, zbog manipulativa koje nastavnici i učenici koriste u nastavi, učenici i u tom uzrastu mogu razumjeti koncept razlomka. Za početak nauče kako zapisati razlomak, zatim kako pravilno pročitati razlomak, a onda i kako zbrajati i oduzimati razlomke istih nazivnika, gdje nazivnik nije veći od 12. Također, zbroj razlomaka nije veći od 1, a razlika nije manja od 0. Do četvrtog razreda osnovne škole upoznaju se sa zbrajanjem i oduzimanjem razlomaka različitih nazivnika. U petom razredu osnovne škole uči se množenje i dijeljenje razlomaka. I decimalni brojevi se uče relativno rano, u četvrtom razredu osnovne škole. Od četiri operacije poučavaju se samo zbrajanje i oduzimanje decimalnih brojeva do 3 decimalna mjesta. Množenje i dijeljenje decimalnih brojeva se uči u petom razredu osnovne škole. Tada se učenici upoznaju i s postotcima i omjerima. U šestom razredu osnovne škole proširuje se znanje o postotcima i omjerima, te se uvode algebarski izrazi. Upravo tu metoda modela dolazi do izražaja. Iako je i više nego korisna i za ostale navedene cjeline, u zadacima s riječima koji se rješavaju algebarski, vidi se prava "moć" ove metode. S tim znanjem učenici završe osnovno obrazovanje i dolaze u srednju školu, gdje se uveliko susreću s algebrom i od njih se zahtjeva da zadatke rješavaju algebarski. Upravo zbog svoje jednostavnosti i efikasnosti učenici najčešće koriste upravo metodu modela za rješavanje algebarskih zadataka s riječima. Kako zapravo izgleda učenje i poučavanje pomoću modela dio-cjelina i modela usporedbe opisano je u idućem poglavlju.

4 Metoda modela i četiri operacije

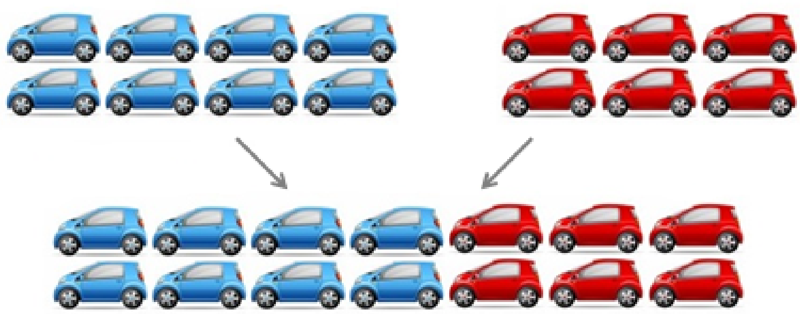
Singapurski kurikulum za matematiku osnovne škole stavlja veliki naglasak na kvantitativne odnose kada učenici uče koncept brojeva i četiri računske operacije. Ključno obilježje je razvoj i primjena metode modela iz 1980-ih. U ovom poglavlju objasnit ćemo kako se metoda modela koristi za ilustraciju koncepta četiri računske operacije te za rješavanje zadataka s riječima.

4.1 Model dio-cjelina i model usporedbe

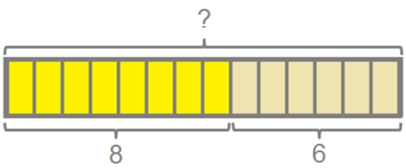
Uvođenje modela dio-cjelina i modela usporedbe bitan je element konkretno-slikovno-apstraktnog pristupa u singapurskom nastavnom planu i programu za matematiku osnovne škole. Učenici koriste konkretne objekte kako bi pokazali smisao koncepta navedena dva modela. Zatim pristupaju crtanju pravokutnika kao slikovnog prikaza modela koji im pomažu za rješavanje apstraktnih matematičkih zadataka.

4.1.1 Model dio-cjelina

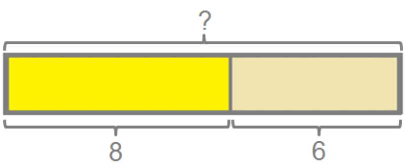
Razmotrimo sljedeći problem: *Ivana ima 8 autića. David ima 6 autića. Koliko autića imaju zajedno?*
U prvom razredu osnovne škole učenici koriste konkretne predmete ili izrezane slike kako bi stvorili dvije grupe autića i onda te dvije grupe spojili.



Učenici zbrajaju 8 i 6 čime su dobije ukupan zbroj. Zatim pišu jednakost $8 + 6 = 14$, čime su riješili problem. U višim razredima osnovne škole, učenici izrađuju slikovni model koji predstavlja problemski zadatak. Na primjer:

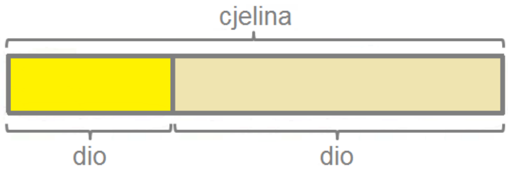


Model se može vizualizirati kao cjelina koja obuhvaća dva dijela. Učenici dodaju dva dijela kako bi pronašli cjelinu:



Učenici pišu jednakost $8 + 6 = 14$ i daju odgovor na postavljeno pitanje. Ivana i David zajedno imaju 14 autića.

U modelu dio-cjelina (poznat i kao dio-dio-cjelina) opisan je odnos između tri količine: cjeline i dva dijela.



Promatrajući cjelinu kao dva dijela, učenici zbrajaju:

$$\text{dio} + \text{dio} = \text{cjelina}.$$

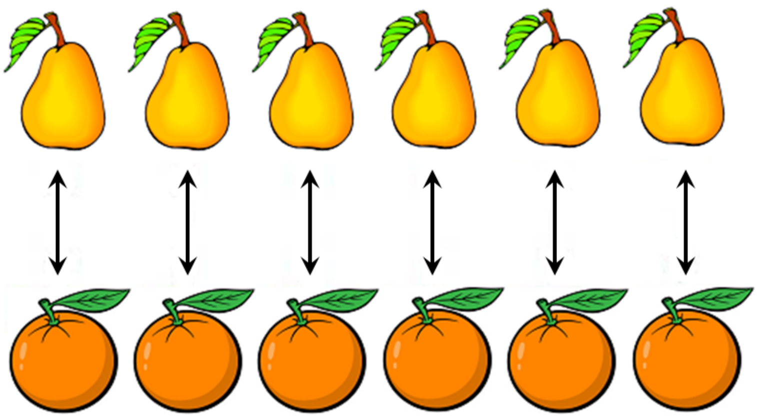
Kad su zadani cjelina i jedan dio, kako bi pronašli drugi dio učenici oduzimaju:

$$\text{cjelina} - \text{dio} = \text{dio}.$$

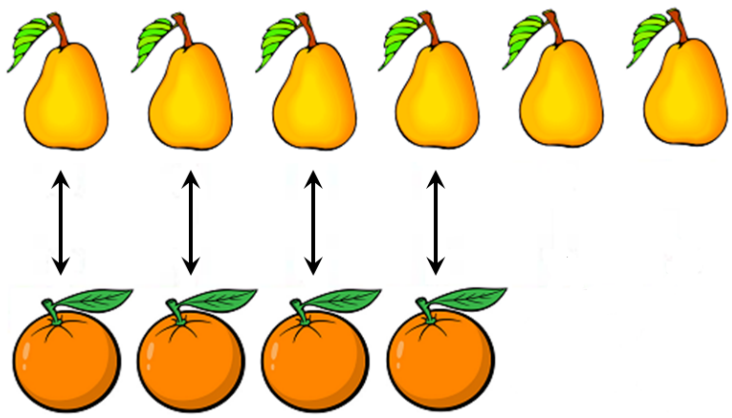
4.1.2 Model usporedbe

Razmotrimo još jedan problem: *Imamo 2 kruške više od naranči. Ako imamo 6 krušaka, koliko onda imamo naranči?*

Malo dijete može računati s konkretnim predmetima (ili slikama) kako bi pronašlo odgovor. U prvom razredu osnovne škole učenik mora napisati jednakost $6 - 2 = 4$ kako bi riješio problem. To je trivijalno, no ipak učenici imaju problema s pisanjem ove jednakosti. Kako bi shvatili usporedbu da imaju 2 kruške više od naranči, učenici su trebali posložiti kruške i naranče jednu po jednu i usporediti njihove brojeve. Na primjer:

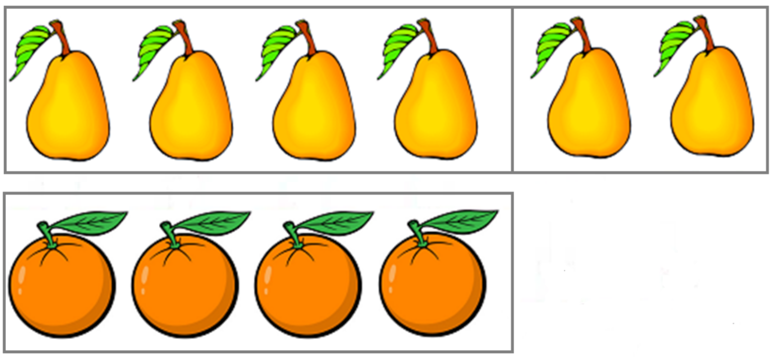


Nacrtano je 6 krušaka. Ima onoliko krušaka koliko i naranči. (Dva broja su jednaka.)

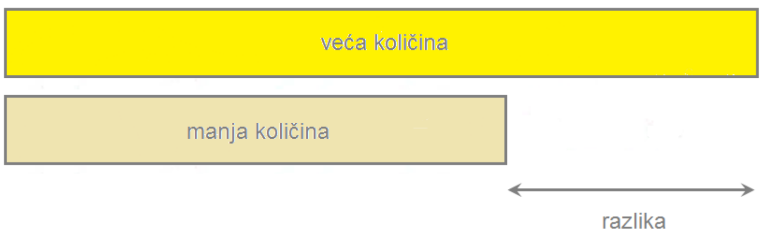


Nacrtano je 6 krušaka. Nacrtane su 2 kruške više od naranči. (Razlika između dva broja je 2.)

U drugom razredu osnovne škole, učenici izrađuju slikovni model koji reprezentira problemski zadatak. Na primjer:



Ovo je model usporedbe.



Model usporedbe se koristi za usporedbu dviju količina kako bi se utvrdilo koliko je jedna količina veća (ili manja) od druge. Bez tog modela, učenici se oslanjaju na riječi „više od" i koriste zbrajanje za rješavanje problema ne shvaćajući da je to netočno. Ovdje postoji kvantitativna veza između tri količine: veća količina, manja količina i razlika. Razlika se dobiva oduzimanjem manje količine od veće količine. To znači:

$$\text{veća količina} - \text{manja količina} = \text{razlika}.$$

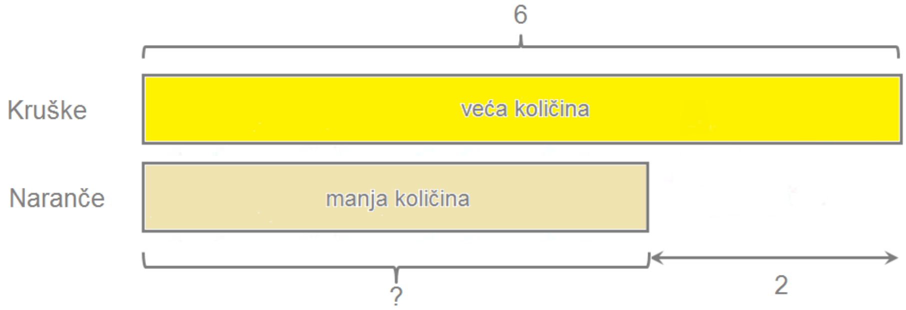
Kako bi pronašli veću količinu s obzirom na manju količinu i razliku, učenici zbrajaju:

$$\text{manja količina} + \text{razlika} = \text{veća količina}.$$

Ako su zadane veća količina i razlika, kako bi pronašli manju količinu učenici oduzimaju:

$$\text{veća količina} - \text{razlika} = \text{manja količina}.$$

Učenici crtaju sljedeći model kako bi riješili dani problem.



Zatim, učenici pišu jednakost $6 - 2 = 4$. Tu su 4 naranče.

4.2 Koncept četiri računske operacije

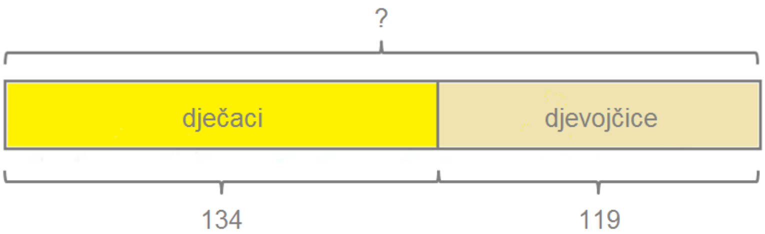
U nastavku će biti opisani primjeri za četiri osnovne računske operacije.

4.2.1 Model dio-cjelina (zbrajanje i oduzimanje)

Idući primjeri prikazuju koncept dio-cjelina za zbrajanje i oduzimanje.

Primjer 1

Na likovnom natjecanju sudjelovalo je 134 *dječaka i* 119 *djevojčica. Koliko je djece sudjelovalo u natjecanju?*

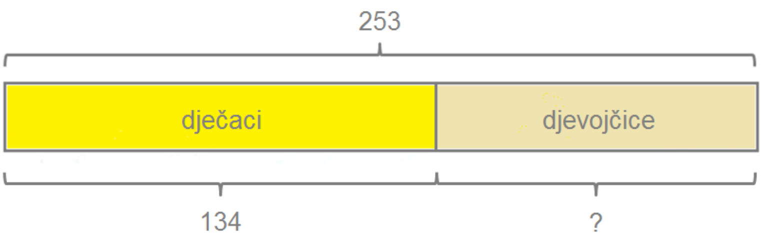


Ovdje veliki pravokutnik predstavlja cjelinu (ukupan broj djece). On je podijeljen u dvije skupine koje predstavljaju broj dječaka (134) i broj djevojčica (119). Iz modela učenici mogu pronaći cjelinu (prikazanu upitnikom) zbrajanjem dvaju dijelova.

Dakle, $134 + 119 = 253$. Na likovnom natjecanju sudjelovalo je 253 djece.

Primjer 2

Na likovnom natjecanju sudjelovalo je 253 *djece. Ako je na njemu bilo* 134 *dječaka, koliko je onda bilo djevojčica?*

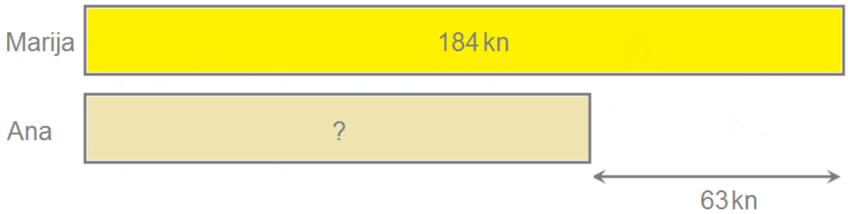


U ovom su primjeru dani cjelina i jedan dio (broj dječaka). Drugi dio (broj djevojčica) može se dobiti oduzimanjem danog dijela (134) od cjeline (253).
Dakle, $253 - 134 = 119$. Na likovnom natjecanju sudjelovalo je 119 djevojčica.

4.2.2 Model usporedbe za zbrajanje i oduzimanje

Ovaj dio se bavi konceptom usporedbe zbrajanja i oduzimanja.

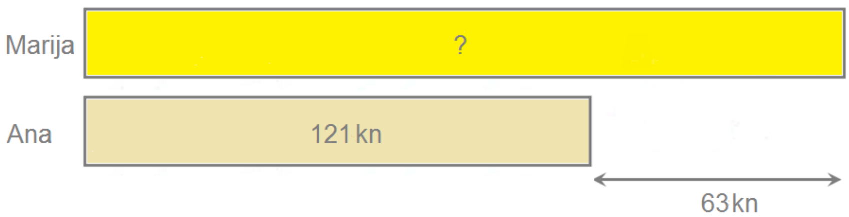
Primjer 3
Marija je uštedjela 184 kune. Ana je uštedjela 63 kune manje od Marije. Koliko kuna je uštedjela Ana?



Ovdje dva pravokutnika predstavljaju Marijinu i Aninu uštedu. U modelu usporedbe, jedan je pravokutnik veći od drugog što pokazuje da je Marija uštedjela više od Ane. U ovom modelu učenici mogu pronaći manju količinu tako što će oduzeti razliku (63kn) od veće količine (184kn).

Slijedi $184 - 63 = 121$. Ana je uštedjela 121 kunu.

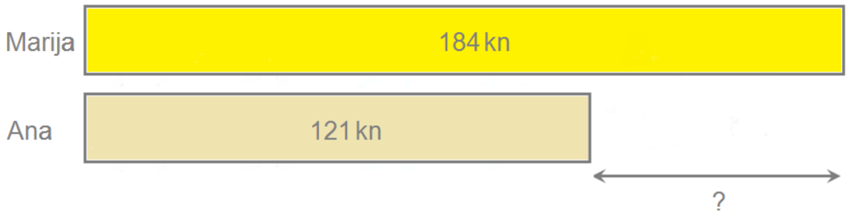
Primjer 4
Ana je uštedjela 121 kunu. Uštedjela je 63 kune manje od Marije. Koliko kuna je uštedjela Marija?



U ovom primjeru su dani manja količina (Anina ušteda) i razlika. Veća količina (Marijina ušteda) će se pronaći zbrajanjem manje količine (121kn) i razlike (63kn).

Slijedi $121 + 63 = 184$. Marija je uštedjela 184 kune.

Primjer 5
Marija je uštedjela 184 kune. Ana je uštedjela 121 kunu. Koliko kuna manje je Ana uštedjela od Marije?

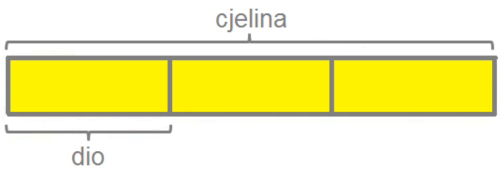


U ovom primjeru su dane obje količine. Oduzimanjem manje količine (121kn) od veće količine (184kn) dobivamo razliku.

Dakle, $184 - 121 = 63$. Ana je uštedjela 63 kune manje nego Marija.

4.2.3 Model dio-cjelina (množenje i dijeljenje)

Ovo poglavlje se bavi konceptom dio-cjelina za množenje i dijeljenje. To uključuje cjelinu koja je podijeljena na nekoliko jednakih dijelova. Na primjer, sljedeći model prikazuje cjelinu podijeljenu na tri jednaka dijela.



Postoji kvantitativna veza između tri veličine: cjelina, jedan dio i broj dijelova. Kako bi pronašli cjelinu pomoću jednog dijela i broja dijelova, učenici množe:

$$\text{jedan dio} \times \text{broj dijelova} = \text{cjelina}.$$

Kako bi pronašli jedan dio iz cjeline i broja dijelova, učenici dijele:

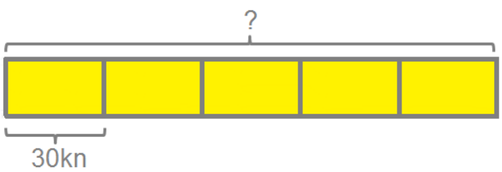
$$\text{cjelina} \div \text{broj dijelova} = \text{jedan dio}.$$

Kako bi pronašli broj dijelova između cjeline i jednog dijela, učenici dijele:

$$\text{cjelina} \div \text{jedan dio} = \text{broj dijelova}.$$

Primjer 6

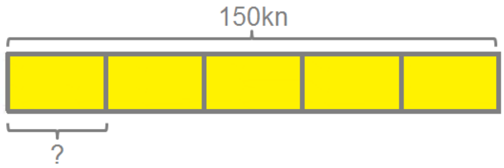
Troškovi poklona dijele se jednako među petero djece. Svaki od njih je platio 30 *kuna. Koliko je koštao poklon?*



Ovdje nacrtani veliki pravokutnik predstavlja cjelinu (cijenu poklona). Podijeljen je na 5 jednakih dijelova koji predstavljaju 30 kuna. U ovom modelu, učenici će pronaći cjelinu množenjem jednog dijela (30 kuna) s brojem dijelova (5).

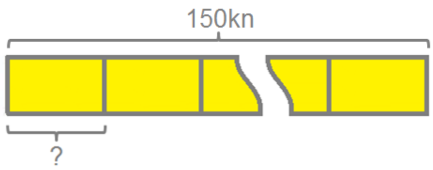
$5 \cdot 30 = 150$
Poklon je koštao 150 kuna.

Primjer 7
Petero djece kupilo je poklon za 30 kuna. Troškove su podijelili jednako. Koliko novca mora platiti svako dijete?



U ovom primjeru, poznavajući cjelinu i broj dijelova, učenici mogu pronaći jedan dio dijeleći cjelinu (30 kuna) brojem dijelova (5).
$150 \div 5 = 30$
Svako dijete mora platiti 30 kuna.

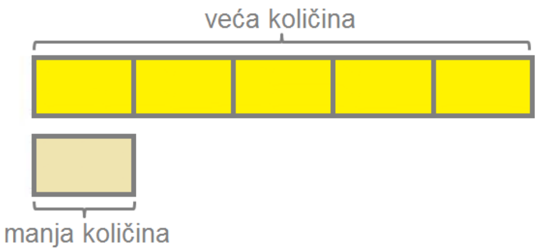
Primjer 8
Grupa djece kupila je poklon za 150 *kuna. Svako je dijete platilo* 30 *kuna. Koliko je djece kupilo poklon?*



Razlomljeni dio velikog pravokutnika pokazuje da je broj dijelova nepoznat. Znajući cjelinu i jedan dio, učenici će pronaći broj dijelova dijeleći cjelinu (150 kuna) jednim dijelom (30 kuna).
$150 \div 30 = 5$
Petero djece je kupilo poklon.

4.2.4 Model usporedbe za množenje i dijeljenje

Ovo poglavlje se bavi konceptom usporedbe za množenje i dijeljenje. Ovdje se dvije količine odnose tako da je jedna količina višekratnik druge. Idući model prikazuje dvije količine, pri čemu je veća količina 5 puta veća od manje.



Postoji kvantitativna veza između tri veličine: veća količina, manja količina i omjer veće i manje količine koji je uvijek prirodan broj (dalje će biti pisano samo omjer). Omjer se dobije tako da se veća količina podijeli manjom količinom. To znači:

$$\text{veća količina} \div \text{manja količina} = \text{omjer}.$$

Kako bi pronašli veću količinu, a zadane su manja količina i omjer, učenici množe:

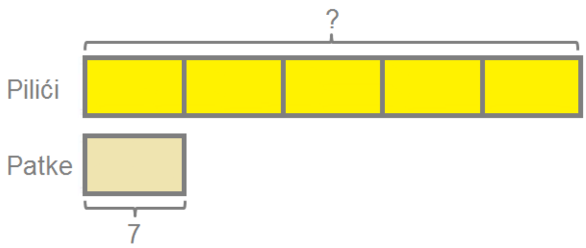
$$\text{manja količina} \times \text{omjer} = \text{veća količina}.$$

Kako bi pronašli manju količinu iz dane veće količine i omjera, učenici dijele:

$$\text{veća količina} \div \text{omjer} = \text{manja količina}.$$

Primjer 9

Farmer uzgaja patke i piliće. Na farmi ima 7 patki i 5 puta više pilića negoli patki. Koliko pilića ima farmer?



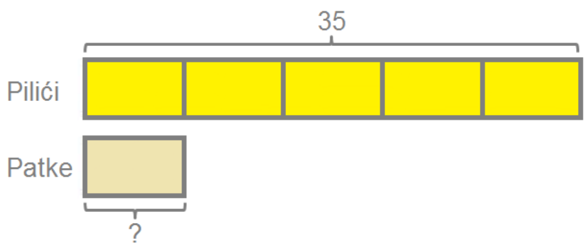
Dva pravokutnika, jedan duljine 5 jedinica a drugi 1 jedinicu, predstavljaju broj pilića odnosno broj patki. Model prikazuje da je broj pilića 5 puta veći od broja patki. Koristeći broj patki (1 jedinica = 7) učenici množenjem mogu pronaći broj pilića (5 jedinica).

$5 \cdot 7 = 35$

Farmer ima 35 pilića.

Primjer 10

Farmer ima 35 pilića. On ima 5 puta više pilića nego patki. Koliko patki ima farmer?



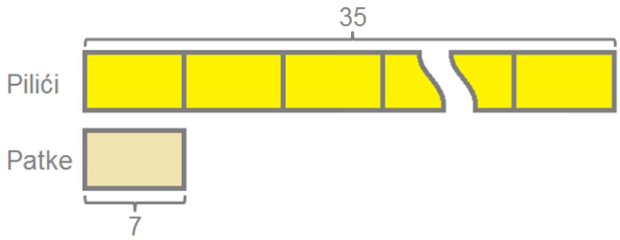
U ovom primjeru, koristeći broj pilića (5 jedinica = 35), učenici dijeljenjem mogu pronaći broj patki (1 jedinicu).

$35 \div 5 = 7$

Farmer ima 7 patki.

Primjer 11

Farmer ima 35 pilića i 7 patki. Koliko puta farmer ima više pilića nego patki?



Razlomljeni dio u većem pravokutniku ukazuje da je broj jedinica nepoznat. Poznavajući dvije veličine, učenik može pronaći omjer veće i manje količine pomoću dijeljenja.

$35 \div 7 = 5$

Farmer ima 5 puta više pilića nego patki.

4.3 Problem konstrukcije

Pomoću metode modela, moguće je rješavati mnoge problemske zadatke s riječima. Model prikazuje poznate i nepoznate količine (cijeli brojevi, razlomci ili decimalni brojevi) i njihove međusobne odnose koji su uključeni u problem. Metoda modela je vizualni alat koji omogućava učenicima utvrditi koju operaciju (zbrajanje, oduzimanje, množenje ili dijeljenje) koristiti pri rješavanju problema.

5 Metoda modela i koncept razlomka, omjera i postotka

U ovom poglavlju opisano je korištenje metode modela za prikaz pojmova: razlomka, omjera i postotka.

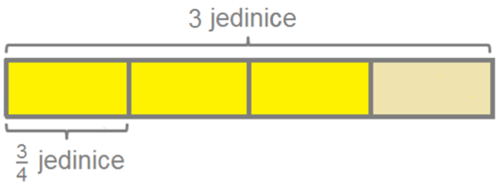
5.1 Razlomci

5.1.1 Model dio-cjelina (razlomci)

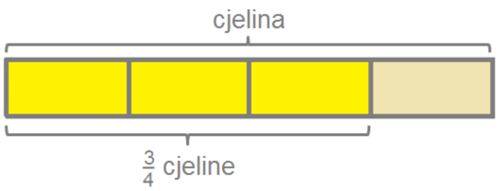
Model dio-cjelina prikazuje koncept razlomaka. Razlomak, zapravo predstavlja dio od cjeline. Broj zapisan kao razlomak govori koliko je dijelova sadržano u nekoj cjelini. Na primjer, kad je cjelina (1 jedinica) podjeljena na 4 jednaka dijela, razlomak $\frac{1}{4}$ predstavlja 1 od 4 jednaka dijela. Razlomak $\frac{3}{4}$ predstavlja 3 od 4 jednaka dijela.

Ova dva razlomka ($\frac{1}{4}$ i $\frac{3}{4}$) potječu od iste cjeline.
($\frac{3}{4}$ zapravo znači $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ ili $3 \cdot \frac{1}{4}$)

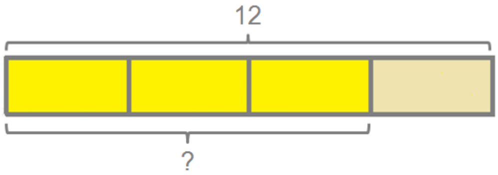
Razlomak se može povezati i s dijeljenjem. Na primjer, $\frac{3}{4}$ se mogu interpretirati kao $3:4$. Cjelinu predstavljaju 3 jedinice podijeljene na 4 jednaka dijela. Svaki dio je $\frac{3}{4}$ jedinice.



Model dio-cjelina može biti korišten za rješavanje problema koji uključuju razlomke. Na primjer, sljedeći model predstavlja $\frac{3}{4}$ cjeline:



Razlomak $\frac{3}{4}$ predstavlja 3 jedinice od 4 jedinice. Cjelina predstavlja ukupnu vrijednost. Ona može biti cijeli broj, razlomak ili decimalni broj. Na primjer, ako cjelina predstavlja 12 predmeta, broj predmeta u $\frac{3}{4}$ cjeline može se dobiti na sljedeći način:

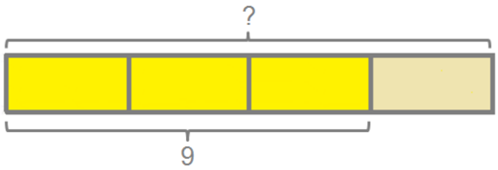


4 jedinice $= 12$

1 jedinica $= 12 \div 4 = 3$

3 jedinice $= 3 \cdot 3 = 9$

Tu je 9 predmeta u $\frac{3}{4}$ cjeline.
Obratno, ako su $\frac{3}{4}$ cjeline jednake 9, cjelina se može dobiti na sljedeći način:



3 jedinice $= 9$

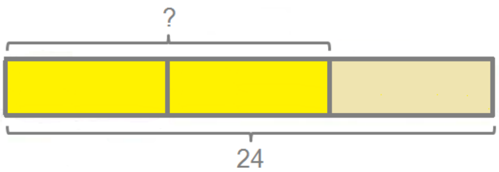
1 jedinica $= 9 \div 3 = 3$

4 jedinice $= 4 \cdot 3 = 12$

U cjelini se nalazi 12 predmeta.

Primjer 1
Emanuel je kupio 24 cvijeta. $\frac{2}{3}$ cvjetova su bijele boje. Koliko je bijelih cvjetova kupio Emanuel?

Ovdje se model dio-cjelina koristi kako bi prikazao $\frac{2}{3}$ cjeline. Razlomak $\frac{2}{3}$ predstavlja 2 jedinice od 3 jedinice.



Kako bi pronašli broj bijelih cvjetova, učenici prvo nalaze vrijednost 1 jedinice:

3 jedinice $= 24$

1 jedinca $= 24 \div 3 = 8$

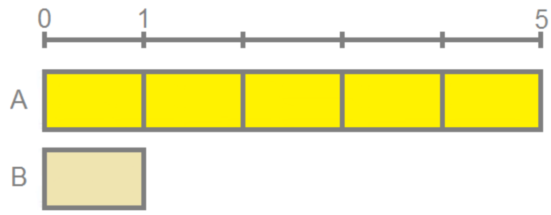
3 jedinice $= 2 \cdot 8 = 16$

Emanuel je kupio 16 bijelih cvjetova.

5.1.2 Model usporedbe za razlomke

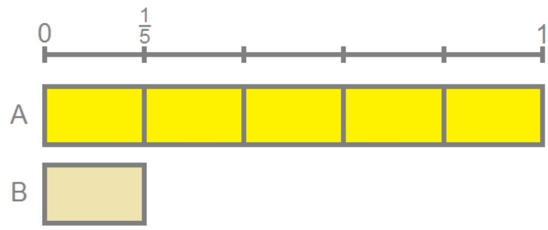
Model usporedbe za razlomke predstavlja način kako uspoređivati dvije veličine pomoću razlomaka. Sljedeći model prikazuje dvije veličine A i B koje redom predstavljaju 5 jedinica i 1 jedinicu.

Ako je veličina B uzeta za bazu i veličina A se uspoređuje s veličinom B onda vrijedi:



Veličina A iznosi 5 veličina B.

Obratno, ako je veličina A uzeta za bazu i veličina B se uspoređuje s veličinom A onda vrijedi:

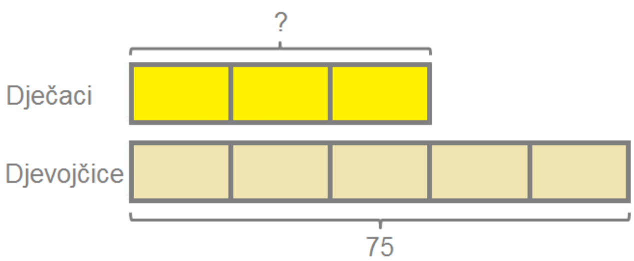


Veličina B iznosi $\frac{1}{5}$ veličine A (razlomak $\frac{1}{5}$ predstavlja 1 jedinicu prema 5 jedinica).

Primjer 2

U jedan vrtić upisano je 75 djevojčica i dječaka kojih ima kao $\frac{3}{5}$ djevojčica. Koliko ima dječaka upisanih u vrtić?

Model usporedbe prikazuje kako dječaka ima kao $\frac{3}{5}$ djevojčica. Razlomak $\frac{3}{5}$ predstavlja 3 jedinice prema 5 jedinica.



Zadanim brojem djevojčica (5 jedinica) učenici mogu pronaći broj dječaka (3 jedinice) tako što prvo nađu vrijednost 1 jedinice.

5 jedinica = 75

1 jedinica = $75 \div 5 = 15$

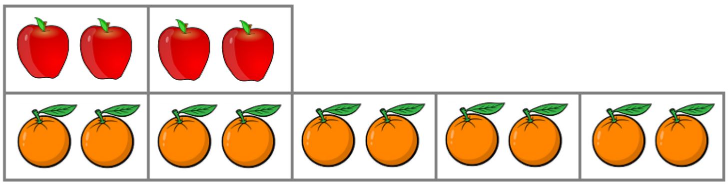
3 jedinice = $3 \cdot 15 = 45$

U vrtić je upisano 45 dječaka.

5.2 Omjer

5.2.1 Model usporedbe za omjere

Dvije veličine možemo usporediti njihovom razlikom, umnoškom, razlomkom, ali i omjerom. Kako bi se usporedile dvije ili više veličina omjerom, veličine moraju biti izražene jednakim jedinicama. Na primjer:



Ovdje je 1 jedinica jednaka 2 komada voća. Broj jabuka i naranči su redom 2 jedinice i 5 jedinica. Omjer broja jabuka prema broju naranči je $2:5$ (omjer $2:5$ znači 2 jedinice prema 5 jedinica.) Omjer broja naranči prema broju jabuka je $5:2$ (omjer $5:2$ znači 5 jedinica prema 2 jedinice.) U ovom primjeru može se napisati omjer: broj jabuka prema broju naranči kao $4:10$ i onda pojednostavniti u $2:5$. Zapravo,

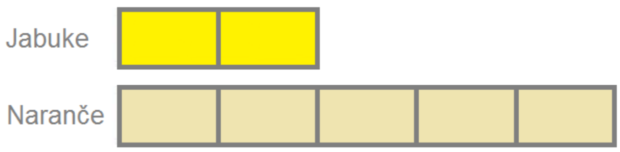
$\frac{\text{broj jabuka}}{\text{broj naranči}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

Zadane dvije veličine A i B, te omjer A prema B nije isti kao omjer B prema A.

Omjer A prema B se dobije dijeljenjem A s B.

Omjer B prema A se dobije dijeljenjem B s A.

Problem možemo prikazati pomoću modela usporedbe:



Model prikazuje da je omjer broja jabuka prema broju naranči jednak $2:5$. Broj jabuka i broj naranči su predstavljeni redom s 2, odnosno 5 jedinica.

Zadanim brojem jabuka (2 jedinice) može se pronaći broj naranči (5 jedinica).

2 jedinice $= 4$

1 jedinica $= 4 \div 2 = 2$

5 jedinica $= 5 \cdot 2 = 10$

Tu je 10 naranči.

Obrnuto ako je zadan broj naranči (5 jedinica), može se pronaći broj jabuka (2 jedinice).

5 jedinica $= 10$

1 jedinica $= 10 \div 5 = 2$

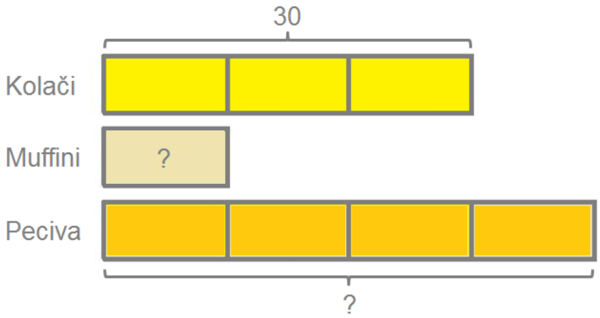
2 jedinice $= 2 \cdot 2 = 4$

Tu su 4 jabuke.

Primjer 3

Marija je odlučila pozvati prijatelje povodom svog rođendana i za njih napraviti kolače, muf-

fine i peciva. Pri tome želi da omjer broja kolača prema broju muffina prema broju peciva bude $3:1:4$*. Ako Marija napravi* 30 *kolača, koliko mora napraviti muffina, a koliko peciva?*



Zadan je broj kolača (3 jedinice). Sada se može pronaći broj muffina i broj peciva tako što se prvo pronađe vrijednost 1 jedinice.

3 jedinice $= 30$

1 jedinica $= 30 \div 3 = 10$

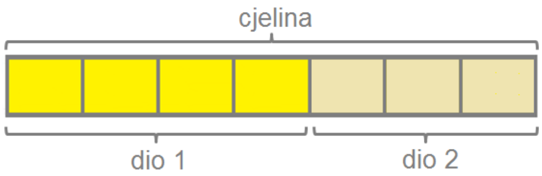
Marija mora napraviti 10 muffina.

4 jedinice $= 4 \cdot 10 = 40$

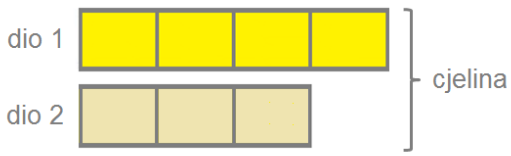
Marija mora napraviti 40 peciva.

5.2.2 Model dio-cjelina (omjeri)

Kada je cjelina podijeljena na dijelove, omjer predstavlja pojedine veličine dijelova. To se može predstaviti modelom dio-cjelina kao i modelom usporedbe. Na primjer, sljedeći model dio-cjelina prikazuje nam cjelinu podijeljenu na 2 dijela u omjeru $4:3$.



Dva dijela cjeline mogu se prikazati i pomoću modela usporedbe:

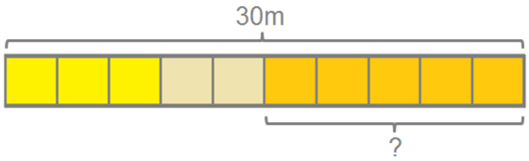


Ako je dan omjer i bilo koja od tri veličine: cjelina (7 jedinica), dio 1 (4 jedinice), dio 2 (3 jedinice), mogu se izračunati i druge dvije veličine tako što se pronađe vrijednost 1 jedinice.

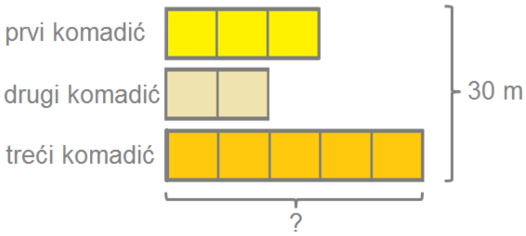
Primjer 4

Rebeka je isjekla vrpcu dužine $30m$ *na tri dijela u omjeru* $3:2:5$*. Kolika je duljina najdužeg komadića?*

Ovdje model dio-cjelina predstavlja cjelinu podijeljenu na 3 dijela u omjeru $3:2:5$.



Tri dijela predstavljaju tri komadića vrpce dužina 3 jedinice, 2 jedinice i 5 jedinica.
Također može se nacrtati i model usporedbe:



Ako je zadana vrijednost cjeline (10 jedinica), može se pronaći duljina najdužeg komadića tako što se prvo izračuna vrijednost 1 jedinice.

10 jedinica $= 30\text{m}$

1 jedinica $= 30 \div 10 = 3\text{m}$

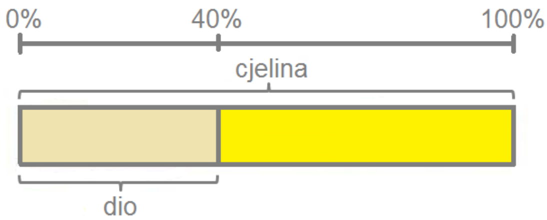
5 jedinica $= 5 \cdot 3 = 15\text{m}$

Duljina najdužeg komadića vrpce je 15m.

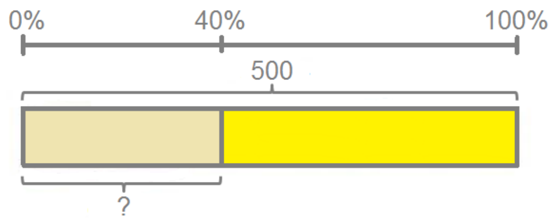
5.3 Postotak

5.3.1 Model dio-cjelina (postotak)

Dio unutar cjeline može se izraziti kao razlomak, ali i kao postotak. Kada je cjelina podijeljena na 100 jednakih dijelova, svaki dio je $\frac{1}{100}$ cjeline ili 1% cjeline. Pomoću modela dio-cjelina može se prikazati koncept postotka. Na primjer:



Model predstavlja obojeni dio kao 40% cjeline. U modelu dio-cjelina, cjelina je uzeta za bazu (100%). U cjelini je 100 jedinica, a zatim u obojenom dijelu je 40 jedinica. Postotak 40% predstavlja 40 jedinica od 100 jedinica.
Ako je dana cjelina, postotak se može izračunati tako što se prvo izračuna vrijednost jedne jedinice. Na primjer, ako je vrijednost cjeline (100%) jednaka 500, 40% od cjeline se dobije na sljedeći način:



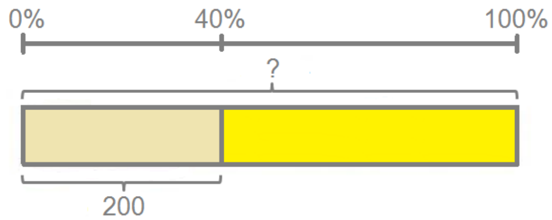
100 jedinica $= 500$

1 jedinica $= 500 \div 100 = 5$

40 jedinica $= 40 \cdot 5 = 200$

40% od 500 je 200.

Obratno, ako je postotak dijela zadan; na primjer: 40% cjeline iznosi 200. Vrijednost cjeline (100%) se može izračunati na sljedeći način:



40 jedinica $= 200$

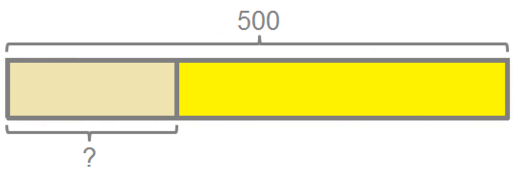
1 jedinica $= 200 \div 40 = 5$

100 jedinica $= 100 \cdot 5 = 500$

Vrijednost cjeline je 500.

Primjer 5

Na koncertu je bilo 500 ljudi, a 30% njih su djeca. Koliko je bilo djece na koncertu?



Model prikazuje cjelinu (500 ljudi). Obojeni dio, koji je (30% od ukupne cjeline) predstavlja broj djece. Postotak 30% znači 30 jedinica od 100 jedinica. Broj djece se može izračunati na sljedeći način:

100 jedinica $= 500$

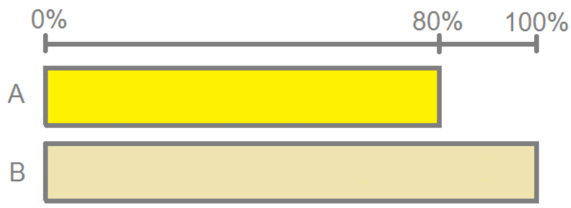
1 jedinica $= 500 \div 100 = 5$

30 jedinica $= 30 \cdot 5 = 150$

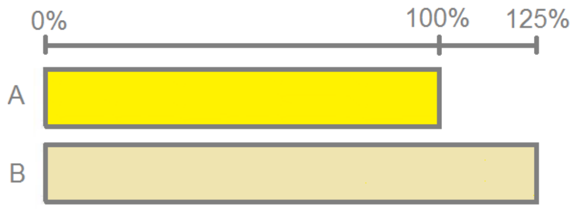
Na koncertu je bilo 150 djece.

5.3.2 Model usporedbe za postotke

Model usporedbe za postotke se može koristiti za usporedbu dvije veličine pomoću postotka. Na primjer, sljedeći model predstavlja dvije veličine A i B gdje je vrijednost veličine A 80% vrijednost veličine B.



Ovdje je veličina B uzeta za bazu (100%) i veličina A se uspoređuje s veličinom B. Postotak 80% predstavlja 80 jedinica od 100 jedinica. Može se reći: „Vrijednost veličine A iznosi 80% vrijednosti veličine B“. Ali i: „Vrijednost veličine A je 20% manja od vrijednosti veličine B“. Obratno, ako je A uzeta za bazu (100%) i veličina B se uspoređuje s veličinom A, onda je vrijednost veličine B 125% vrijednosti veličine A. Postotak 125% predstavlja 125 jedinica od 100 jedinica.

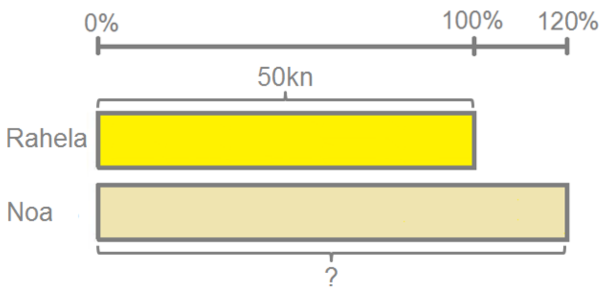


Može se reći: „Vrijednost veličine B iznosi 125% vrijednosti veličine A“. Ali i: „Vrijednost veličine B je 25% veća od vrijednosti veličine A“. Važno je primijetiti kako "vrijednost veličine A je 20% manja od vrijednosti veličine B“ nije isto što i „vrijednost veličine B je 20% veća od vrijednosti veličine A“.

Primjer 6

Rahela ima 50 *kuna. Noa ima* 20% *više kuna nego Rahela. Koliko kuna ima Noa?*

Ovdje se koristi model usporedbe kako bi usporedili novce koje ima Rahela i koje ima Noa.



U ovom modelu, novac koji ima Rahela je uzet za bazu (100%). Noa ima 20% više novca nego Rahela. To znači da Noa ima 120% novaca kao Rahela. Postotak 120% predstavlja 120 jedinica prema 100 jedinica. Budući da je zadano koliko novaca ima Rahela (50 kuna, odnosno 100 jedinica), može se izračunati koliko novaca ima Noa (120 jedinica):

100 jedinica $= 50$ kuna

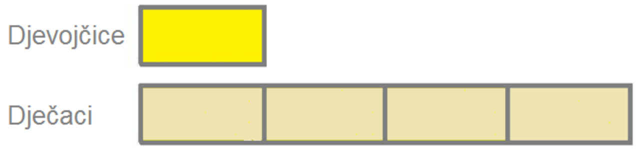
1 jedinica $= 50 \div 100 = 0.5$ kuna

120 jedinica $= 120 \cdot 0.5 = 60$ kuna

Noa ima 60 kuna.

5.4 Korelacija između operacija

Dvije veličine se mogu usporediti na više načina. Na primjer, sljedeći model predstavlja kako postoji 4 puta više dječaka nego djevojčica u jednom vrtiću.



Razlika	Razlika između broja djevojčica i broja dječaka je 3 jedinice
Umnožak	Broj dječaka je kao 4 puta broj djevojčica
Razlomak	Broj djevojčica je $\frac{1}{4}$ broja dječaka
Omjer	Omjer broja dječaka i broja djevojčica je $4:1$ Omjer broja djevojčica i broja dječaka je $1:4$

Također postotak, razlomak i decimalni broj su povezani. Sljedeći model predstavlja dvije veličine A i B.

Odnos između veličina A i B opisan je sljedećom tablcom.

Postotak	Veličina A je kao 80% veličine B Veličina A je za 20% manja od veličine B
Razlomak	Veličina A je $\frac{4}{5}$ veličine B
Decimalni broj	Veličina A je 0.8 veličine B

Odnos između veličina A i B se mogu prikazati i sljedećom tablicom.

Postotak	Veličina B je kao 125% veličine A Veličina B je za 25% veća od veličine A
Razlomak	Veličina B je $\frac{5}{4}$ veličine A
Decimalni broj	Veličina B je 1.25 veličine A

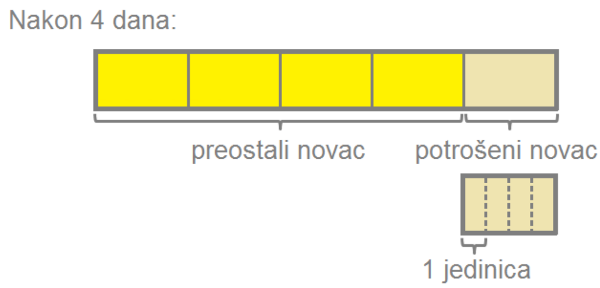
6 Metoda modela i problemski zadaci

Rješavanje tekstualnih zadataka je vrlo važna vještina u matematici. Tekstualni zadaci pospješuju učenje i produbljuju razumijevanje matematičkih koncepata. U ovom poglavlju prikazano je kako predstaviti i riješiti strukturirano složene tekstualne zadatke. Metoda podrazumijeva crtanje modela i nalaženje vrijednosti tzv. „1 jedinice“. Metoda modela omogućuje učenicima lakše razumijevanje poznatih i nepoznatih veličina u zadatku te njihove međusobne odnose.

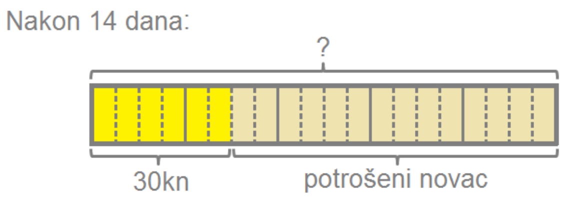
Primjer 1

Sara je od bake dobila mjesečni džeparac. Svaki dan je kupovala svoju omiljenu čokoladicu. Nakon 4 dana imala je $\frac{4}{5}$ novca. A nakon još 10 dana ostalo joj je 30 kuna od bakinog džeparca. Koliko je novca Sara dobila od svoje bake?

Dani model predstavlja cjelinu (iznos novca koji je Sara imala na početku), a $\frac{4}{5}$ cjeline predstavlja iznos novaca koji joj je ostao nakon 4 dana. Preostala $\frac{1}{5}$ predstavlja iznos novca koji je Sara potrošila u prva 4 dana.



Iznos novca koji je potrošen svaki dan predstavljen je jednom jedinicom. Kako bi se riješio problem, model je podijeljen na jednake jedinice. Iznos novca koji je potrošen nakon 14 dana predstavljen je s 14 jedinica. Iznos novca koji je preostao (30 kuna) iznosi 6 jedinica.



Iz modela, može se pronaći vrijednost jedne jedinice, pa onda i vrijednost cjeline (20 jedinica).

6 jedinica $= 30$ kn

1 jedinica $= 30 \div 6 = 5$ kn

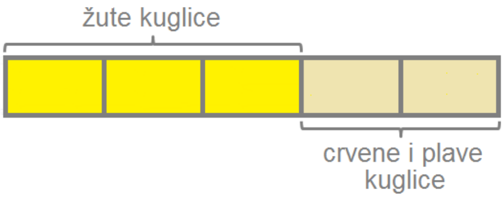
20 jedinica $= 20 \cdot 5 = 100$ kn

Sara je dobila 100 kuna od svoje bake.

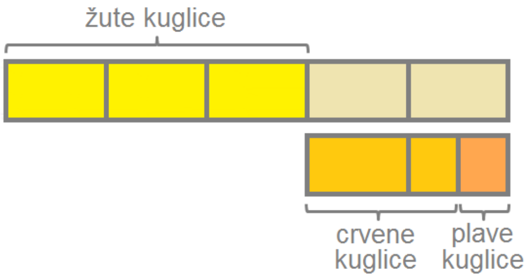
Primjer 2

U kutiji se nalaze crvene, plave i žute kuglice. Od toga su $\frac{3}{5}$ žute boje. Preostale kuglice su crvene i plave boje. U kutiji se nalazi 2 puta više žutih nego crvenih kuglica, a plavih *kuglica je za 30 manje nego crvenih kuglica. Koliko ima zajedno žutih i crvenih kuglica?*

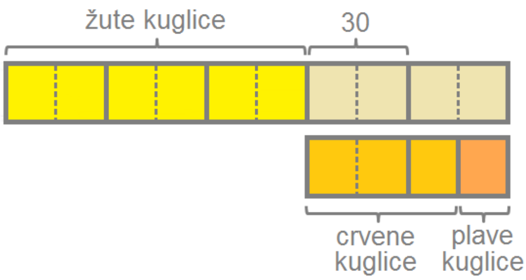
Dani model predstavlja cjelinu (ukupan broj kuglica u kutiji). Broj žutih kuglica je $\frac{3}{5}$ cjeline. Preostale $\frac{2}{5}$ predstavljaju ukupan broj crvenih i plavih kuglica.



Dalje, $\frac{2}{5}$ cjeline su podijeljene tako da žutih ima kao 2 puta crvenih.



Metoda 1
Broj plavih kuglica je 1 jedinica. Broj crvenih i žutih kuglica predstavljene su s 3 odnosno 6 jedinica.



Razlika između broja crvenih i plavih kuglica je 2 jedinice. Iz modela se može pronaći vrijednost 1 jedinice, a zatim broj žutih i crvenih kuglica zajedno (9 jedinica).

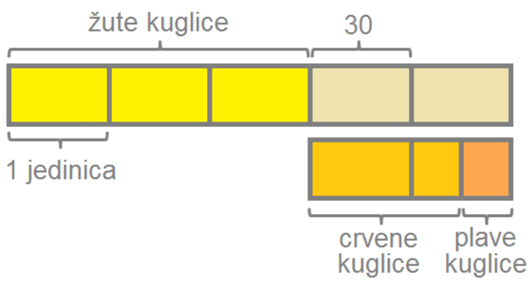
2 jedinice $= 30$

1 jedinica $= 30 \div 2 = 15$

9 jedinica $= 9 \cdot 15 = 135$

U kutiji ukupno ima 135 žutih i crvenih kuglica.

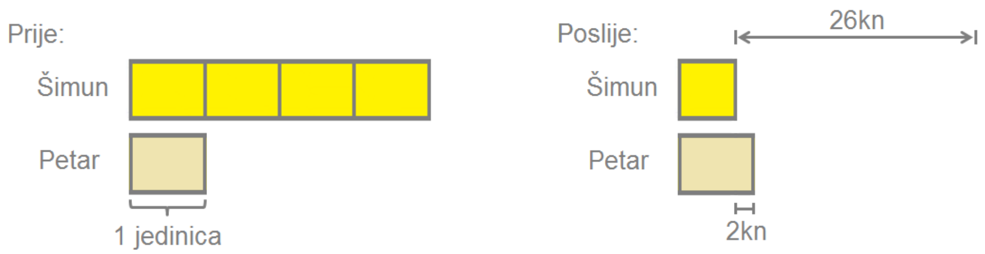
Metoda 2
Neka broj žutih kuglica predstavlja 3 jedinice. Razlika između broja crvenih i plavih kuglica je 1 jedinica. Prema tome 1 jedinica predstavlja 30 kuglica.



Broj žutih kuglica: $3 \cdot 30 = 90$
Broj crvenih kuglica: $90 \div 2 = 45$
$90 + 45 = 135$
U kutiji ima 135 žutih i crvenih kuglica.

Primjer 3
Omjer novca koji ima Šimun i novca koji ima Petar iznosi $4 : 1$. *Nakon što je Šimun kupio čokoladu za* 26 *kuna, imao je* 2 *kune manje od Petra. Koliko je kuna imao Šimun prije nego što je kupio čokoladu?*

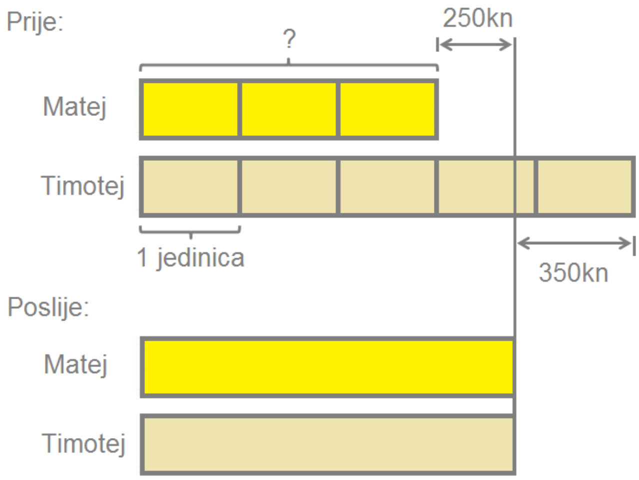
Sljedeći model predstavlja situaciju *prije* i *poslije* kupovine čokolade. U situaciji *prije* omjer Šimunovog i Petrovog novca je $4 : 1$. U situaciji *poslije* iznos Petrovog novca je ostao isti, a Šimun je imao 2 kune manje od Petra. Dvije situacije su povezane kako bi prikazali da je Šimun potrošio 26 kuna.



Iz modela se može pronaći vrijednost 1 jedinice, a zatim i iznos novca koji je imao Šimun prije nego što je kupio čokoladu (4 jedinice).
3 jedinice $= 26 - 2 = 24$kn
1 jedinica $= 24 \div 3 = 8$kn
4 jedinice $= 4 \cdot 8 = 32$kn
Šimun je imao 32 kune prije nego što je kupio čokoladu.

Primjer 4
Omjer novca koji ima Matej i koji ima Timotej iznosi $3 : 5$. *Nakon što je Matej dobio* 250 *kuna, a Timotej potrošio* 350 *kuna, imali su isti iznos novca. Koliko je novca imao Matej prije nego što je dobio* 250 *kuna?*

Sljedeći model predstavlja situaciju *prije* i *poslije*. U situaciji *prije*, omjer novca koji imaju Matej i Timotej iznosi $3 : 5$. U situaciji *poslije* Matej i Timotej imaju isti iznos novca. Dvije situacije predstavljaju da je Matej dobio još 250 kuna, a Timotej potrošio 350 kuna.



Iz modela se može pronaći vrijednost 1 jedinice, a zatim iznos novca koji je imao Matej prije nego je dobio 250 kuna (3 jedinice).

2 jedinice $= 250 + 350 = 600$ kn

1 jedinica $= 600 \div 2 = 300$ kn

3 jedinice $= 3 \cdot 300 = 900$ kn

Matej je imao 900 kuna na početku.

7 Metoda modela i algebra

U Singapuru se od učenika u srednjoj školi zahtijeva da koriste algebarsku metodu za rješavanje problema. Algebarska metoda za sobom povlači formuliranje i rješavanje algebarskih jednakosti u procesu rješavanja problema. Dobro je poznato kako učenici često imaju poteškoća pri formuliranju algebarske jednakosti iz podataka koji su dani u tekstualnim zadacima. Ako su učenici upoznati s metodom modela za rješavanje tekstualnih zadataka, nastavit će je i koristiti ako nisu sposobni primijeniti algebarsku metodu. Svakako, metoda modela se može integrirati s algebarskom metodom kako bi se riješili tekstualni zadaci algebarskog tipa.

7.1 Integriranje metode modela i algebre

U sljedećim primjerima opisano je na koji način je metoda modela integrirana s algebarskom metodom u rješavanju algebarskih zadataka s riječima.

Primjer 1

U plesnoj skupini je 50 *djece. Ako ima* 10 *dječaka više nego li djevojčica, koliko ima djevojčica u plesnoj skupini?*

Algebarska metoda uključuje korištenje simbola (npr. x) kako bi predstavila nepoznatu veličinu. Na primjer, neka je x broj djevojčica. Ako je u plesnoj skupini 10 dječaka više nego djevojčica, onda je broj dječaka $x + 10$. Ukupan broj dječaka i djevojčica je $x + (x + 10)$, što je jednako 50. Učenici dobivaju sljedeći problem koji trebaju riješiti:

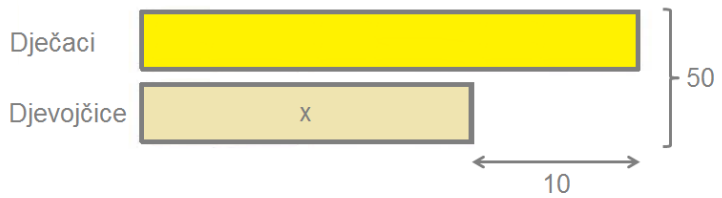
$x + (x + 10) = 50$

Rješenje jednadžbe je $x = 20$.

U plesnoj skupini je 20 djevojčica.

Učenici mogu crtati model usporedbe i riješiti problem tako što se nađe vrijednost jedne jedinice ili koristeći algebarsku metodu.

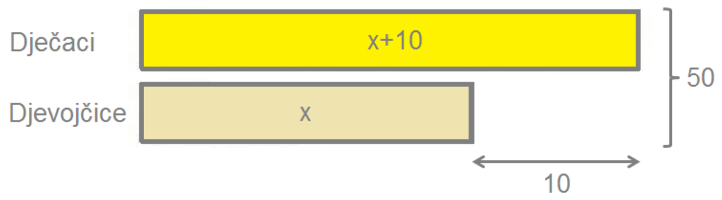
Algebarska metoda: Neka je x broj djevojčica.



Model omogućava učenicima da predstave broj dječaka u terminu veličine x na jedan od sljedeća 2 načina.

Način 1.

Broj dječaka je za 10 veći od broja djevojčica. Dan je kao $x + 10$.



Iz modela učenici prepoznaju kako je suma od $(x+10)$ i x jednaka 50, pa dobivaju jednakost:

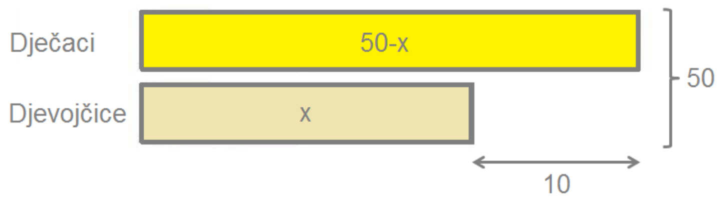
$(x+10)+x=50$

Rješenje jednadžbe je $x=20$.

U plesnoj skupini ima 20 djevojčica.

Način 2.

Ukupan broj djece je 50. Broj dječaka se može predstaviti izrazom $50-x$.



Iz modela, učenici mogu vidjeti kako je razlika između $(50-x)$ i x jednaka 10, pa dobivaju sljedeću jednakost:

$(50-x)-x=10$

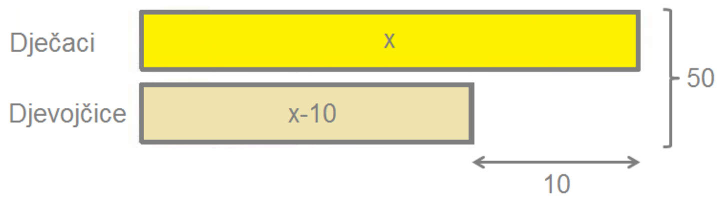
Rješenje jednadžbe je $x=20$.

U plesnoj skupini ima 20 djevojčica.

Kako su i broj dječaka i broj djevojčica nepoznate veličine, učenici mogu sa x označiti broj dječaka, a zatim broj djevojčica izraziti preko broja dječaka.

Način 3.

Broj djevojčica je $x-10$.



Iz modela učenici dobivaju jednakost:

$x+(x-10)=50$

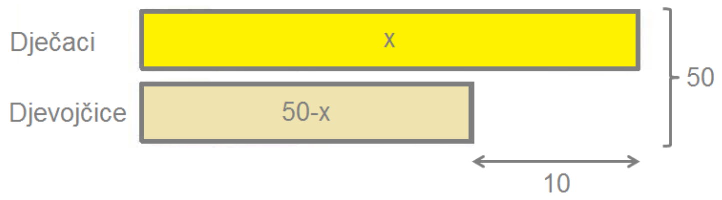
Rješenje jednadžbe je 30.

$x-10=20$.

U plesnoj skupini ima 20 djevojčica.

Način 4.

Broj djevojčica je $50-x$.



Iz modela, učenici dobivaju jednakost:

$x - (50 - x) = 10$

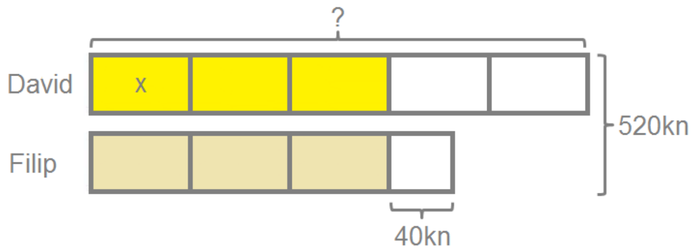
Rješenje jednadžbe je 30.

$x - 10 = 20$

U plesnoj skupini ima 20 djevojčica.

Primjer 2

David i Filip imaju 520 kuna zajedno. Ako David potroši $\frac{2}{5}$ svog novca na nove hlače i Filip potroši 40 kuna na nove rukavice, tada je oboma ostala jednaka količina novca. Koliko je novaca imao David prije nego je kupio nove hlače?



Ovdje je korišten model usporedbe. Obojeni dijelovi predstavljaju dva preostala iznosa novca koji su jednaki. Ako se sa x označi vrijednost jednog pravokutnika, onda slijedi:

$5x + 3x + 40 = 520$

$8x = 480$

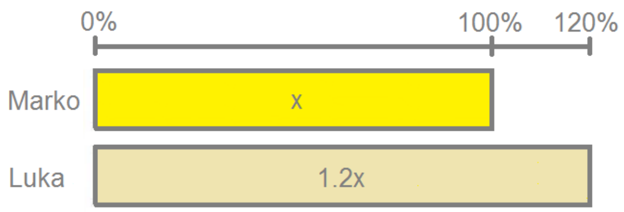
$x = 60$

$5x = 300$

David je prije kupovine imao 300 kuna.

Primjer 3

Luka i Marko imaju 836 sličica zajedno. Luka ima 20% više sličica nego Marko. Koliko više sličica ima Luka u odnosu na Marka?



Ako sa x označimo broj Markovih sličica, tada je broj Lukinih sličica 120% od x, odnosno $1.2x$. Iz modela slijedi:

$x + 1.2x = 836$

$x = 380$

$1.2x - x = 76$
Luka ima 76 sličica više nego Marko.

Primjer 4

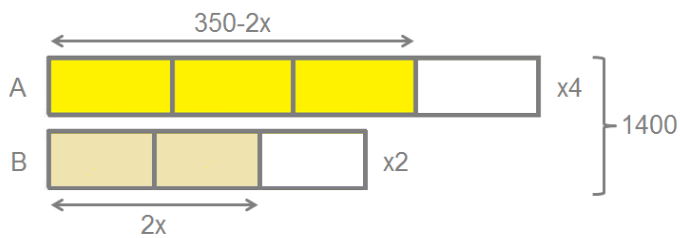
Na glazbenom koncertu, karte za sjedeća mjesta prodavane su po cijeni od 4 kune, a za stojeća mjesta po cijeni od 2 kune. Listić s programom koncerta prodavan je po cijeni od 1 kune svaki, te ga je kupilo $\frac{3}{4}$ publike koji su imali karte za sjedeća mjesta i $\frac{2}{3}$ publike koja je imala stojeća mjesta. Ukupan iznos novca koji je prikupljen od ulaznica je 1400 kuna, a od listića s programom je 350 kuna. Koliko je bilo ljudi na koncertu?

Ako se sa x označi broj ljudi koji su kupili ulaznice za sjedeća mjesta, a s y označi broj ljudi koji su kupili ulaznice za stojeća mjesta, onda se mogu postaviti dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$4x + 2y = 1400$
$\frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y = 350$

Rješavanjem sustava dobije se $x = 200$ i $y = 300$. Ukupan broj ljudi na koncertu je $x + y$, tj. 500.
No i prije nego se uči rješavanje sustava dviju jednadžbi s dvije nepoznanice, ovaj zadatak se može postaviti kao izazov za naprednije učenike. Zadatak se može riješiti postavljajući linearnu jednadžbu iz sljedećeg modela:

Neka A označava broj ljudi koji su kupili ulaznicu za sjedeća mjesta, a B broj ljudi koji su kupili ulaznicu za stojeća mjesta. Model pokazuje da je $\frac{3}{4}A$ i $\frac{2}{3}B$ kupilo listić s programom. Ovaj zadatak se može riješiti na više načina. Na primjer, neka jedan pravokutnik u B predstavlja vrijednost x. Onda je ukupan broj ljudi u B koji su kupili listić s programom $2x$, a ukupan broj ljudi u A koji su kupili listić s programom jednak $350 - 2x$.



Iz modela, učenici zapisuju sljedeću jednakost kako bi riješili problem:

$4(\frac{4}{3})(350 - 2x) + 2(3x) = 1400$

Rješenje jednakosti je $x = 100$.

$\frac{4}{3}(350 - 2x) + 3x = 500$

Na koncertu bilo 500 ljudi.
Zadatak se mogao riješiti i na neki drugi način. Na primjer mogao se sa x označiti vrijednost jednog pravokutnika u A i sl.

8 Zaključak

Tijekom godina Singapur je na vrhu liste TIMSS i PISA istraživanja iz matematike. Razlog se krije u tome što su učenici u Singapuru izloženi brojnim matematičkim problemima prije svojih vršnjaka, samim time i algebrom. Poznato je da svi učenici imaju probleme s algebrom, te se postavlja pitanje kako učenici u Singapuru mogu svladati gradivo algebre, ali i druga matematička područja u tako ranoj dobi. Zagovornici metode modela (dr. Kho i njegovi suradnici) tvrde da se učenici rano upoznaju sa složenijim matematičkim problemima upravo zbog same metode modela. Protivnici metode modela tvrde da učenici tako uče jednu stvar više puta i korištenje više metoda za rješavanje zadataka samo zbunjuje učenike. Doista, u razgovoru s manjim brojem nastavnika srednjih škola moglo se zaključiti da oni metodu modela smatraju previše običnom, jednostavnom, ne-algebarskom i da je prepreka u učenju simboličke algebre. Mnogo vremena i truda se uloži kako bi se naučila metoda modela u prvim godinama školovanja. Jedna od zabrinutosti je bila, pomaže li stvarno metoda modela u učenju simboličke algebre. Zbog toga je provedeno istraživanje u kojem je ispitano kakvi se kognitivni procesi događaju prilikom korištenja metode modela i simboličke algebre. Na prvi pogled ove dvije metode izgledaju različito. U prvoj metodi upotrebljavaju se slikovni prikazi koji se razlikuju po alfanumeričkim vrijednostima. U simboličkom pristupu upotrebljavaju se samo alfanumeričke vrijednosti. Uzrokuju li ove površinske karakteristike kognitivne razlike u obradi informacija nije sasvim jasno. Kako bi se napravilo temeljito istraživanje o ovom problemu, provedena su dva eksperimenta koristeći se funkcionalnim snimanjem mozga pomoću magnetske rezonance. Rad na kognitivnim zadacima uzrokuje hemodinamičke aktivnosti u raznim neurološkim sustavima. Funkcionalno neurološko snimanje služi se razlikama u elektromagnetskim svojstvima krvi u kojoj ima kisika i krvi bez kisika kako bi se izmjerile moždane aktivnosti. Kada se kombinira s odgovarajućim eksperimentalnim strukturama, funkcionalno neurološko snimanje može identificirati moždane regije koje se zajednički ili preferencijalno aktiviraju putem određenih kognitivnih zadataka. Većina teorija o obradi informacija u području rješavanja matematičkih problema navodi dvije komponente: prikaz problema i rješenje problema. Prvi eksperiment fokusiran je na početne faze rješavanja algebarskih problema, tj. na procese povezane s prikazom problema. Pred osamnaest odraslih ispitanika, prethodno testiranih i odabranih prema kompetenciji za metodu modela i simboličku metodu (preko 90 % točnosti u zadatku sličnom onima koji se upotrebljavaju u eksperimentu i s manje od 5 % razlike u točnosti u ovim dvjema metodama) postavljani su jednostavni problemski zadaci s riječima. Primjerice: „Josip ima 50 satova manje nego Marko. Koliko satova ima Marko?“ Na uređaju za skeniranje tražilo se od njih da mentalno preoblikuju ova pitanja, bilo u prikaz modela ili jednadžbe. Nakon svakog pitanja uslijedio je prikaz rješenja bilo u obliku modela ili u obliku jednadžbe. Od ispitanika se tražilo da usporede prikazano rješenje i ono koje su oni imali na umu te da odrede je li točno. Preoblikovanje problemskih zadataka s riječima u modele ili jednadžbe aktiviralo je područja povezana s procesima radnog pamćenja. Osobito je važno bilo to što je simbolički pristup jače aktivirao bazne ganglije, stražnji gornji parijetalni lobus i prekuneus. Ova područja povezuju se s usmjeravanjem pažnje i orijentacijom, a obje te stvari povezane su s operativnom komponentom radnog pamćenja. Drugi eksperiment fokusirao se na oblikovanje rješenja. Sudionicima su predstavljeni ili prikazi modela ili jednadžbe i od njih se tražilo da izračunaju rješenja. Otkrića su bila slična onima u prvom eksperimentu. Simbolički pristup aktivirao je područja odgovorna za radno pamćenje više nego što ih je aktivirala metoda modela. Značajno je to što u oba eksperimenta bazne ganglije bile jače aktivirane u simboličkom pristupu. Prema modelu ACT-R to bi moglo značiti prisjećanje proceduralnog znanja. U tom slučaju, ta činjenica sugerira da se upotreba simboličke algebre više oslanja na proceduralno pamćenje. Zapravo to govori da se rješavanje zadataka iz algebre simboličkom metodom svodi na automatske procese već naučene, dok se metodom modela pristupa svakom problemu posebno. Prema tome učenici metodom modela više koriste misaone vještine i heuristike za rješavanje problema te tako bolje razumiju i rješavaju matematičke, a time i algebarske probleme.

Sažetak

Metoda modela je metoda kojom se poučava matematika u osnovnim školama u Singapuru. Pomoću te metode učenici vizualiziraju apstraktne matematičke odnose i različite probleme pomoću slikovnih prikaza. Ti prikazi su zapravo pravokutnici, koji se po potrebi mogu dijeliti na manje pravokutnike. Metoda modela se poučava od nižih razreda osnovne škole i koristi se tijekom školovanja kao strategija za rješavanje zadataka koji uključuju cijele brojeve, razlomke, omjere i postotke. U višim razredima osnovne škole, te u srednjoj školi, metoda modela se može integrirati s algebrom, kako bi pomogla učenicima razumjeti i formulirati algebarske jednadžbe.

Učenici se u osnovnoj školi upoznaju s dvije vrste modela: model dio-cjelina i model usporedbe. Model dio-cjelina se koristi kad jednu veličinu (cjelina predstavljena s velikim pravokutnikom) treba podijeliti na manje veličine (dva ili više dijelova predstavljeni manjim pravokutnicima). Kada su zadane vrijednosti dijelova, onda se može izračunati vrijednost cjeline. Nekad je zadana vrijednost cjeline i dijelova, dok je vrijednost jednog dijela nepoznata i može se lako izračunati. Model usporedbe prikazuje odnose između dvije ili više veličina koje se uspoređuju.

Istraživanja su pokazala da učenici koristeći metodu modela puno lakše razumiju probleme iz algebre. Zadaci se ne rješavaju automatski nego s razumijevanjem i s boljom efikasnošću.

Ključne riječi: metoda modela, model dio-cjelina, model usporedbe.

Summary

The model method is a method by which mathematics in elementary schools in Singapore is taught. By using those methods students visualize abstract mathematical relationships and the varying problem structures through pictorial representations. These representations are actually rectangles, which, if needed, can be divided in smaller rectangles. The model method is taught in the early years of primary school and is used during schooling as a strategy for solving problems which include whole numbers, fractions, ratios and percentages. In the upper grades of primary school and in secondary school, the model method can be integrated with algebra to help students understand and formulate algebra equations.

Students in primary school are introduced to two types of models: part-whole model and comparison model. Part-whole model is used when one size (a whole featuring large rectangles) needs to be divided into smaller sizes (two or more parts featuring smaller rectangles). When the parts are given, then we can find the whole. Sometimes the whole and some parts are given, and therefore the unknown part can be found. The comparison model shows the relationship between two or more quantities when they are compared.

The research has shown that students understand algebra problems much better when they are using the model method. The problems aren't being solved automatically but with understanding and better efficiency.

Key words: Model Method, Part-Whole Model, Comparison Model.

Literatura

[1] K. T. Hong, Y. S. Mei, J. Lim, *The Singapore Model Method for Learning Mathematics*, Ministry of Education, Singapore, 2009.

[2] B. Kaur, *What is the method of models?*, Yearbook, National Institute of Education Singapore, 2008.

[3] V. L. Soo, Y. M. Liu, *Mathematical problem solving with the bar Model Method*, MAV Annual conference 2014, The mathematical Association of Victoria, Brusnwick.

[4] W. K. Yoong, L. P. Yee, B. Kaur, F. P. Yee, N. S. Fong, *Mathematics Education, The Singapore Journey*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2009.

[5] *Mathematics Syllabus, Primary*, Ministry of Education, Singapore, 2007.

[6] *Mathematics Syllabus, Primary One to Five*, Ministry of Education, Singapore, 2013.

Životopis

Zovem se Ivan Širić. Rođen sam 27.6.1993. godine u Žepču. Završio sam gimnaziju u KŠC „Don Bosco“ Žepče u Žepču. Od 2012. godine sam student na Odjelu za matematiku u Osijeku. Tijekom studiranja dva puta sam bio predavač na Županijskom stručnom usavršavanju s temom „Metoda modela“. Također radio sam kratko vrijeme kao zamjena za nastavnika matematike u Osnovnoj školi „Žepče“ i u KŠC „Don Bosco“ Žepče u Žepču, te volontirao na radiju kao voditelj emisije za mlade i u oratoriju „Don Bosco“ Žepče kao animator.