Konformno preslikavanje i Möbiusova transformacija

Rupčić, Lucija

Undergraduate thesis / Završni rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:707995

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-12**

Repository / Repozitorij:

Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science

zir.nsk.hr

DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij
matematike

Lucija Rupčić

Konformno preslikavanje i Möbiusova transformacija

Završni rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij
matematike

Lucija Rupčić

Konformno preslikavanje i Möbiusova transformacija

Završni rad

Voditelj: doc. dr. sc. Tomislav Marošević

Osijek, 2017.

Sažetak U ovome radu ukratko ćemo se upoznati s konformnim preslikavanjem i njegovim svojstvima. Navest ćemo nekoliko osnovnih preslikavanja koja će biti popraćena slikama i karakterizacijama. Također, definirat ćemo Möbiusovu transformaciju i ilustrirati na primjerima. Na kraju rada ukratko ćemo opisati primjenu ovih preslikavanja u raznim znanostima.

Ključne riječi konformno preslikavanje, analitička funkcija, translacija, dilatacija, rotacija, inverzija, Möbiusova transformacija, Joukowsky preslikavanje

Abstract In this paper we will be introduced to the conformal transformation and its properties. We will show you some basic transformations with corresponding pictures and characterisations. Also, Möbius transformation will be defined and ilustrated through some examples. Use of these transformations in various scientific areas, will be shown in the final chapter of the paper.

Key words conformal transformation, analytic function, translation, dilatation, rotation, inversion, Möbius transformation, Joukowsky transformation

Sadržaj

1 Uvod

U ovome radu razmatramo konformna preslikavanja i njihovu karakterizaciju. Pokazujemo njihovu vezu sa derivacijom te objašnjavamo geometrijsko značenje. Promatramo na koje sve načine možemo uočiti konformno preslikavanje te navodimo nekoliko osnovnih primjera i njihova svojstva. U sljedećoj točki definiramo Möbiusovu transformaciju kao jednu od najznačajnijih konformnih preslikavanja. U zadnjoj točki ukratko pokazujemo primjenu ovih preslikavanja, točnije primjenu u aerodinamici.

2 Konformno preslikavanje

Prije nego definiramo konformno preslikavanje, pogledajmo zašto ga je uopće zanimljivo promatrati. Konformno preslikavanje je ključno u rješavanju problema koji mogu biti prikazani odgovarajućom kompleksnom funkcijom. Često je zadano područje D_z u z-ravnini i analitička funkcija $z \mapsto f(z)$ koja preslikava područje D_z u područje D_w u w-ravnini. Ako su geometrijska svojstva zadanog problema u z-ravnini komplicirana, preslikavanjem dobivamo jednostavniji problem čija su svojstva poznata i koji znamo riješiti.

2.1 Geometrijska interpretacija i definicija

Geometrijska interpretacija kompleksne analitičke funkcije u obliku realne funkcije $y = f(x)$ ne postoji. Međutim, ako se funkcija

$$x + yi = z \mapsto w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

definira kao preslikavanje točke iz područja D_z, koje pripada z-ravnini, u područje D_w, koje pripada w-ravnini, tada se geometrijska interpretacija može dati pomoću preslikavanja.

Neka se točka a iz z-ravnine funkcijom $w = f(z)$ preslika u točku $f(a)$. Pored toga, neka se krivulja l, kojoj pripada točka a, preslika na krivulju L, kojoj pripada $f(a)$. Pretpostavimo da analitička funkcija f u točki a ima derivaciju i da je $f'(a) \neq 0$. Derivacija funkcije f u točki a definirana je kao

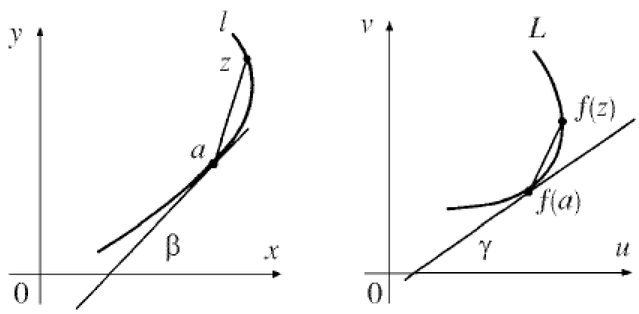
$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(a). \tag{1}$$

Da bismo dali geometrijsko značenje derivacije, promatrat ćemo njegov modul i argument. Iz (1) slijedi

$$\left| \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \right| = \lim_{z \to a} \frac{|f(z) - f(a)|}{|z - a|} = |f'(a)|.$$

Sada slijedi

$$|f'(a)| \approx \frac{|f(z) - f(a)|}{|z - a|.} \tag{2}$$



Slika 1. Preslikavanje iz z-ravnine u w-ravninu

Na osnovu ove interpretacije, zaključujemo da je modul derivacije jednak omjeru dužina $|f(z)-f(a)|$ i $|z-a|$ i to u graničnom slučaju kada je $z \mapsto a$. Zbog toga se $|f'(a)|$ naziva **omjer preslikavanja**. Varira ovisno o tome je li $|f'(a)|$ veće ili manje od jedinice.

Promotrimo argument u graničnom slučaju. Imamo

$$\begin{aligned} \alpha = arg\left(\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\right) &= \lim_{z\to a} arg\left(\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\right) = arg f'(a) \\ &= \lim_{z\to a} arg\big(f(z)-f(a)\big) - \lim_{z\to a} arg(z-a) = \gamma - \beta \end{aligned} \tag{3}$$

Kut α nazivamo **kut preslikavanja**.

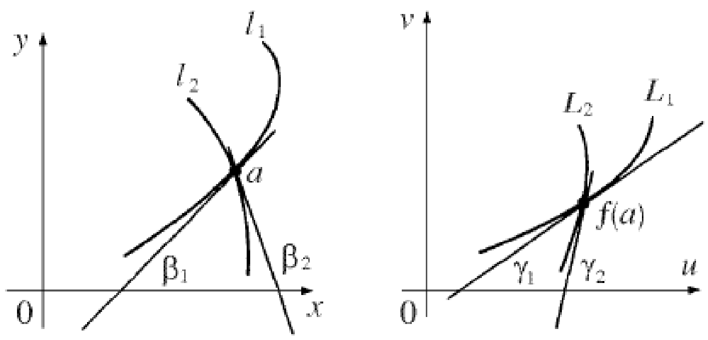
Promotrimo dvije glatke krivulje l_1 i l_2 u z-ravnini koje se sijeku u točki a i dvije preslikane glatke krivulje L_1 i L_2 u w-ravnini koje se sijeku u točki $f(a)$. Primjenom jednakosti (3) dobivamo

$$\gamma_1 - \beta_1 = arg f'(a), \quad \gamma_2 - \beta_2 = arg f'(a),$$

odakle je

$$\gamma_2 - \gamma_1 = \beta_2 - \beta_1.$$

Dakle, kut između γ_1 i γ_2 jednak je kutu između β_1 i β_2.



Slika 2. Očuvanje kutova pri preslikavanju

Zaključujemo da svako preslikavanje pomoću analitičke funkcije zadržava kutove jednakima.

Definicija 2.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ područje i funkcija f analitička. Preslikavanje $f : \Omega \to \mathbb{C}$ naziva se* ***konformno preslikavanje*** *ukoliko čuva kutove po veličini i orijentaciji.*

2.2 Karakterizacija i primjeri

Vidjeli smo iz čega proizlazi konformno preslikavanje i kako se ono definira. No, kada za neko preslikavanje, sa sigurnošću, možemo reći da je konformno? O tome govore sljedeći teoremi. Dokazi danih teorema mogu se vidjeti u [4] na stranici 86.

Teorem 2.1. *Ako je funkcija f analitička u točki z_0 i ako je $f'(z_0) \neq 0$, onda je preslikavanje $w = f(z)$ konformno u točki z_0.*

Primjer 2.1.

(a) Pokažite da je preslikavanje $f(z) = cos\ z$ konformno u točkama $z = i, 1, \pi + i$

(b) Odredite kut preslikavanja u tim točkama.

Rješenje:

(a) Kada deriviramo funkciju $f(z) = cos\ z$ dobijemo $f'(z) = -sin\ z$. Preslikavanje dano analitičkom funkcijom konformno je u točkama u kojima je $f'(z) \neq 0$. Prema tome, preslikavanje je konformno osim u točkama $z =$kπ , $k \in \mathbb{Z}$. Dakle, preslikavanje je konformno u točkama $z = i, 1, \pi + i$.

(b) Kut preslikavanja u točki z_0 jednak je $Arg f'(z_0)$.
Za $z =$ i imamo $f'(i) = -sin\ i = -i\ sinh\ 1$. Slijedi da je $Arg f'(i) = \dfrac{3\pi}{2}$.
Za $z = 1$ imamo $f'(1) = -sin\ 1$. Slijedi da je $Arg f'(1) = \pi$.
Za $z = \pi + i$ imamo $f'(\pi + i) = sinh\ 1$. Slijedi da je $Arg f'(\pi + i) = \dfrac{\pi}{2}$.

Teorem 2.2. *Ako je funkcija f analitička na području D i ako je $f'(z) \neq 0$ na području D, onda je preslikavanje $w = f(z)$ konformno u svim točkama područja D.*

Primjer 2.2.

(a) Odredite u kojem području je preslikavanje $f(z) = Ln\ z$ (glavna vrijednost logaritma, tj. $arg\ z \in [-\pi, \pi\rangle$) konformno preslikavanje.

(b) Pokažite da to preslikavanje pravce $C_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = 0\right\}$ i $C_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\right\}$ preslikava u ortogonalne krivulje.

Rješenje:

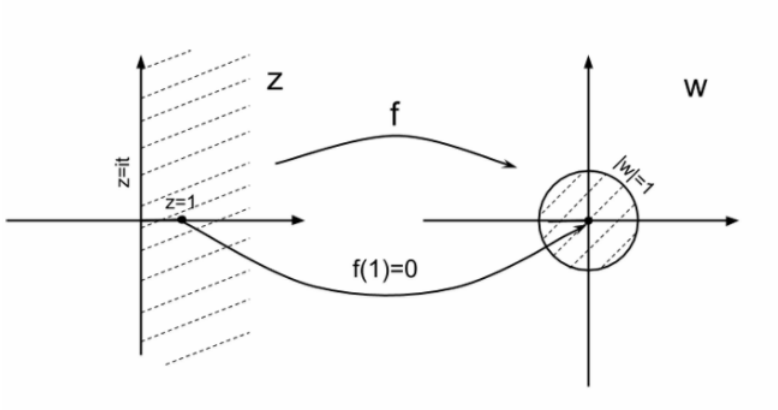
(a) Najprije pogledajmo derivaciju funkcije $f(z) = Ln\ z$. Dobivamo
$f'(z) = \frac{1}{z} \neq 0$ za $z \neq 0$. Zaključujemo da je preslikavanje konformno na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(b) Krivulja $C_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = 0\right\}$ je dio pravca, a $C_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\right\}$ je pravac. Krivulje su ortogonalne i sijeku se u točki $z_0 = 1$. Preslikavanje $f(z) = Ln\ z$ je konformno u $z_0 = 1$ i slijedi da se slike krivulja C_1 i C_2 sijeku pod pravim kutom u točki $w_0 = f(1)$=Ln 1=ln 1 + i0 = 0.

Teorem 2.3. *Ako su $\Omega, G \subseteq \mathbb{C}$ područja i $f : \Omega \to G$ analitička bijekcija, onda je f konformno preslikavanje na Ω.*

Teorem 2.4. (Princip preslikavanja rubova) *Neka je f analitička funkcija koja je neprekidna na području Ω , $\Omega, G \subseteq \mathbb{C}$. Ako funkcija f preslika bijektivno $\partial\Omega$ (rub od Ω) na ∂G (pazeći pritom na orijentaciju), onda preslika i cijelo područje Ω konformno na G.*

Teorem 2.5. (Riemann) *Svako 1-povezano područje u $\mathbb{C}$ čiji rub se ne sastoji od samo jedne točke, može se konformno preslikati na krug $K(0,1)$ (krug sa središtem u ishodištu polumjera 1).*



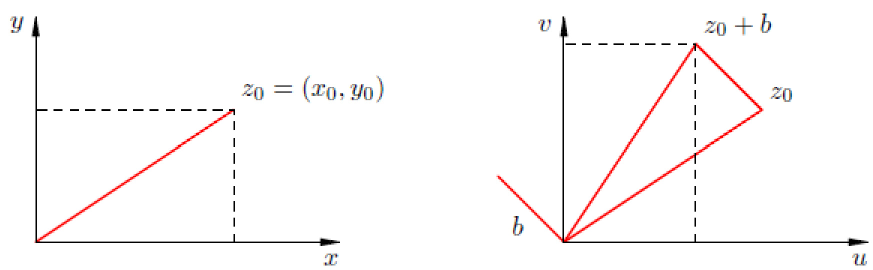
Slika 3. Preslikavanje desne poluravnine na jedinični krug

2.3 Primjeri konformnih preslikavanja

U ovoj točki navest ćemo nekoliko najosnovnijih predstavnika konformnog preslikavanja. Sva ostala preslikavanja mogu se dobiti kompozicijom osnovnih. Treba imati na umu da je svaka kompozicija konformnih preslikavanja također konformno preslikavanje.

2.3.1 Translacija

Najjednostavnije konformno preslikavanje je **translacija**. Translacija je transformacija oblika $w = z + b$, $b \in \mathbb{C}$.

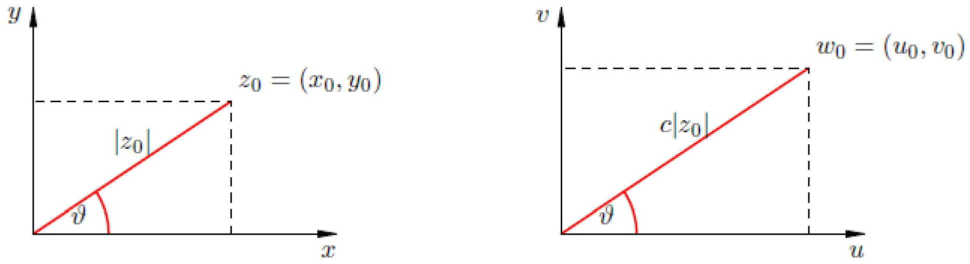


Slika 4. Translacija za vektor b

Translacijom se svaka točka u kompleksnoj ravnini preslikava u novu točku, pomaknutu za vektor b.
Napomena: Translacija svaku kružnicu preslika u kružnicu istog polumjera.

2.3.2 Kontrakcija i dilatacija

Složenije konformno preslikavanje je oblika $w = cz$, $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$.



Slika 5. Kontrakcija (Dilatacija)

Ovo preslikavanje svaku točku preslika u točku kojoj je kut ϑ ostao isti, a apsolutna vrijednost $|z_0|$ se povećala (smanjila) c puta. Ako dolazi do povećanja (smanjenja), radi se o **dilataciji (kontrakciji).**

Napomena: Ovo preslikavanje svaku kružnicu, kojoj je središte u ishodištu, preslika u njoj homotetičnu [1].

2.3.3 Rotacija

Pogledajmo preslikavanje oblika $w = e^{i\vartheta_0}z$. Zapišemo li ga u trigonometrijskom obliku dobivamo

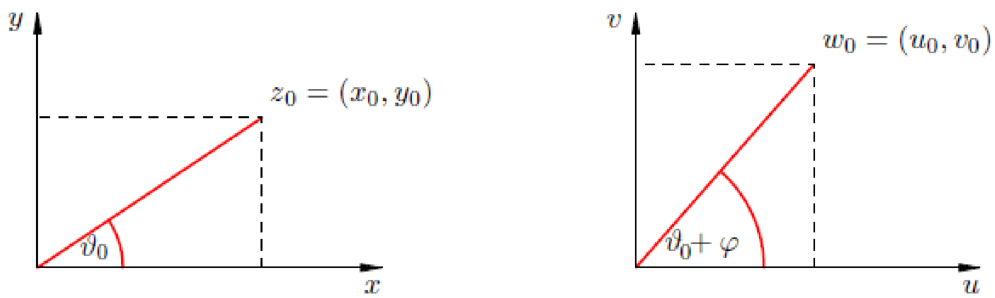
$$w = (cos\vartheta_0 + i\ sin\vartheta_0)z.$$

Ako još i z zapišemo kao

$$z = r(cos\varphi + i\ sin\varphi),$$

dobivamo

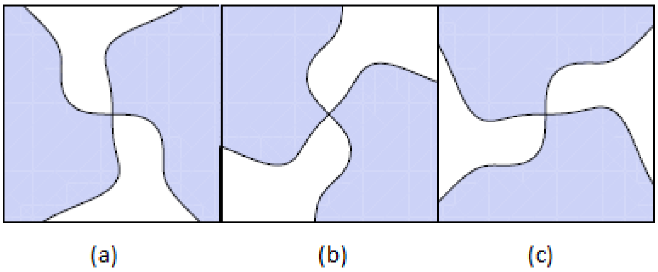
$$w = r(cos\vartheta_0 + i\ sin\vartheta_0)(cos\varphi + i\ sin\varphi) = r(cos(\vartheta_0 + \varphi) + i\ sin(\vartheta_0 + \varphi)).$$



Slika 6. Rotacija za kut φ

Rotacija svaku točku kompleksne ravnine zakrene za kut φ u pozitivnom smjeru.

[1] Kružnica u kojoj se mijenja samo polumjer



Slika 7. Slika (b) je rotacija slike (a) za -$\frac{\pi}{4}$, a slika (c) je rotacija slike (a) za $\frac{\pi}{2}$

Napomena: Rotacija svaku kružnicu, sa središtem u ishodištu, preslika u nju samu.

2.3.4 Inverzija

Inverzija je preslikavanje oblika $w = \frac{1}{z},\ z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$.
Definirajmo preslikavanje na proširenoj kompleksnoj ravnini, tj. dodajmo točku ∞.
Tada vrijedi

$$w(\infty) = 0, \qquad w(0) = \infty,$$

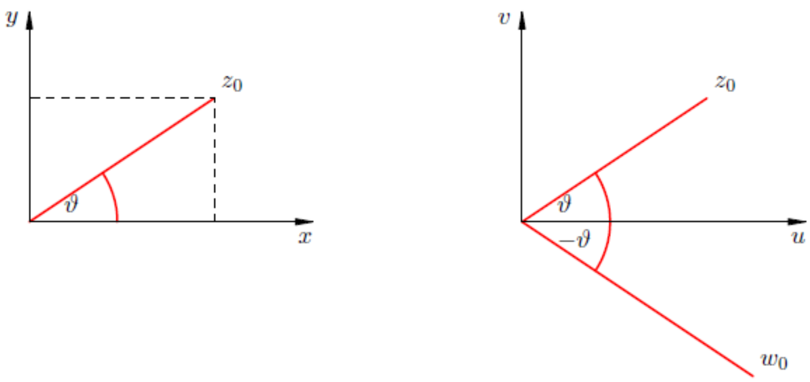
tj. točku ∞ preslika u 0 i obratno.
Sada ćemo iskoristiti Eulerov zapis kompleksnog broja, pa slijedi da je $z = re^{i\varphi}$.
Tada je inverzija

$$w = \frac{1}{re^{i\varphi}} = \frac{1}{r}e^{-i\varphi}. \tag{4}$$

Prema formuli (4), argument preslikavanja je

$$arg\ w = arg\ \text{-}z.$$

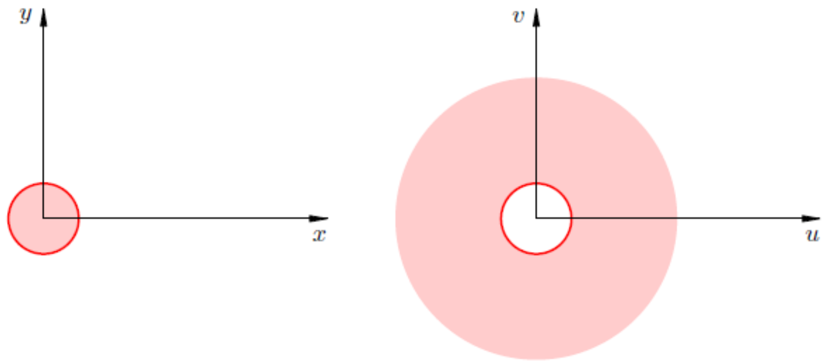
Iz toga slijedi da je $|w| = \frac{1}{|z|}$.



Slika 8. Inverzija

Zaključujemo da inverzija napravi osnu simetriju točke oko x-osi i potom je dilatira (kontrahira).

Napomena: Inverzija preslika sve točke koje su ležale unutar jediničnog kruga u točke izvan jediničnog kruga i obratno.



Slika 9. Primjer inverzije

Primjer 2.3.

Pokažite da inverzija kružnicu sa središtem u ishodištu preslika u koncentričnu kružnicu dane kružnice.

Rješenje:

Jednadžba kružnice sa središtem u ishodištu je $|z| = r$.
Za inverziju te kružnice vrijedi

$$|w| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{r},$$

što je ujedno i koncentrična kružnica polazne kružnice, samo polumjera $\frac{1}{r}$.

3 Möbiusova transformacija

Jedan od najznačajnijih primjera konformnog preslikavanje je bilinearno preslikavanje ili Möbiusova transformacija. Pogledajmo što ju čini tako posebnom.

Definicija 3.1. *Neka su zadane konstante $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ takve da je $ad - bc \neq 0$. Bilinearno preslikavanje ili* ***Möbiusova transformacija*** *je racionalna funkcija kompleksne varijable $f : \mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\} \to \mathbb{C}$ definirana formulom*

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{5}$$

odnosno jednadžbom

$$cwz - az + dw - b = 0.$$

Iz ovoga izraza vidi se da je ovo linearna funkcija posebno po z i posebno po w i to je razlog imena bilinearna transformacija.
Kao kvocijent dviju analitičkih bijekcija, funkcija je analitička na svojoj domeni.
Dakle,

$$f'(z) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0.$$

Budući da je ovo analitička funkcija sa svojstvom $f'(z) \neq 0$, zaključujemo da je i konformna funkcija.

Sada je lako naći inverznu Möbiusovu transformaciju. Ako riješimo (5) po z dobivamo

$$z = f^{-1}(w) = \frac{-dw+b}{cw-a}, \quad w \neq \frac{a}{c}. \tag{6}$$

Proširujemo skup $\mathbb{C}$ s još jednom točkom, koju označavamo s ∞, na sljedeći način:

$$f\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty, \quad f(\infty) = \frac{a}{c}.$$

Ove relacije dobivamo iz

$$f(\infty) := \lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} \Longrightarrow f^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) := \infty$$

$$f^{-1}(\infty) = \lim_{w\to\infty} f^{-1}(w) = \lim_{w\to\infty} \frac{-dw+b}{cw-a} = -\frac{d}{c} \Longrightarrow f\left(\frac{-d}{c}\right) := \infty.$$

Na osnovi prethodnog, zaključujemo da je Möbiusovom transformacijom između proširene z-ravnine i proširene w-ravnine uspostavljena bijekcija.

3.1 Karakterizacija i primjeri

Primjer 3.1.

(a) Neka je dana Möbiusova transformacija $w = f(z) = \frac{z-1}{z+1}$. Odredite inverznu Möbiusovu transformaciju $z = f^{-1}(w)$.

(b) Odredite sliku I. kvadranta ($x > 0$, $y > 0$) pri preslikavanju $w = f(z)$.

Rješenje:

(a) Prema formuli (6) dobivamo

$$z = f^{-1}(w) = \frac{-w-1}{w-1}.$$

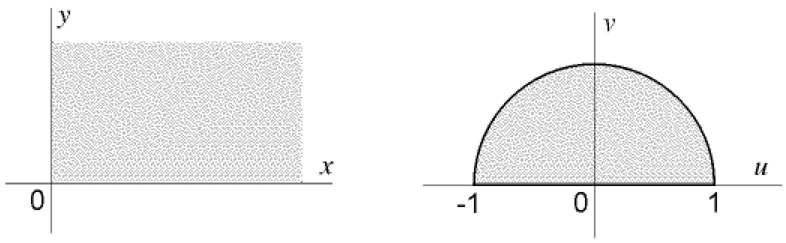
(b) Prema zadatku pod (a) imamo

$$x + iy = \frac{-(u+iv)-1}{(u+iv)-1}$$

$$\Rightarrow x + iy = \tfrac{1-u^2-v^2}{(u-1)^2+v^2} + i\tfrac{2v}{(u-1)^2+v^2}$$

$$\Rightarrow x = \tfrac{1-u^2-v^2}{(u-1)^2+v^2} \quad \wedge \quad y = \tfrac{2v}{(u-1)^2+v^2}$$

Budući da su uvjeti x > 0 i y > 0, slijedi da je $u^2 + v^2 < 1 \ \wedge \ v > 0$. Dakle, I. kvadrant u z-ravnini se preslikao u područje $D' := \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1 \ \wedge \ v > 0\}$.



Slika 10. Preslikavanje I. kvadranta u jedinični polukrug

Primjer 3.2.

(a) Neka je zadano bilinearno preslikavanje $w = f(z) = \frac{-iz+i}{z+1}$. Odredite inverzno preslikavanje $f^{-1}(w)$.

(b) Pokažite da preslikavanje $w = f(z)$ preslikava kružnicu $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ u pravac $D' = \{w \in \mathbb{C} : v = 0\}$.

Rješenje:

(a) Prema definiciji inverznog preslikavanja imamo
$z = f^{-1}(w) = \frac{-dw+b}{cw-a} = \frac{-w+i}{w+i}$.

(b) Koristeći $z = f^{-1}(w)$ slike točaka kružnice $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ zadovoljavaju jednadžbu $\left|\frac{-w+i}{w+i}\right| = 1$. Ako uzmemo zapis $w = u + iv$ jednadžbu možemo pisati u obliku

$$|u + iv + i| = |-u - iv + i|.$$

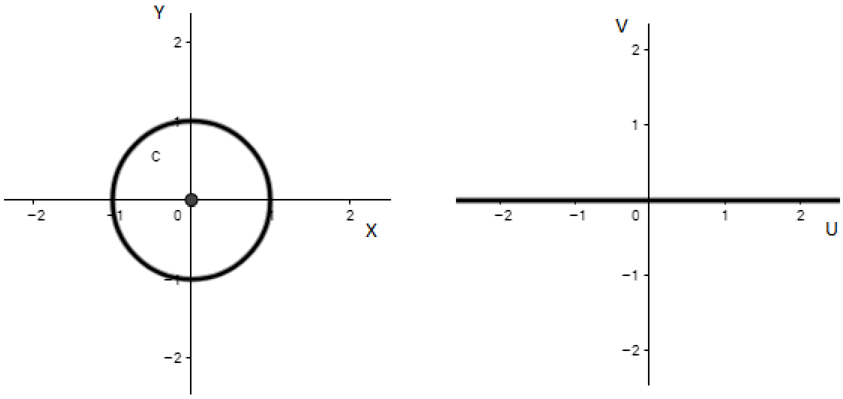
Kvadriranjem obje strane dobivamo

$$u^2 - (1+v)^2 = (-u)^2 - (1-v)^2,$$

iz čega slijedi

$$(1+v)^2 = (1-v)^2,$$

što daje $v = 0$.



Slika 11. Preslikavanje kružnice u z-ravnini na pravac u w-ravnini

Teorem 3.1. *Svaka Möbiusova transformacija preslikava kružnice u kružnice, pri čemu se pravci smatraju specijalnim kružnicama beskonačnog polumjera.*

Teorem 3.2. *Postoji jedinstveno bilinearno preslikavanje, koje tri različite točke z_1, z_2, z_3 preslika u tri različite točke w_1, w_2, w_3 i dano je formulom*

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}. \tag{7}$$

Ako je $z_3 = \infty$, onda je preslikavanje dano formulom

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{8}$$

Ako je $w_3 = \infty$, onda je preslikavanje dano formulom

$$\frac{w-w_1}{w_2-w_1} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}. \tag{9}$$

Dokaz: Slika za z_k je w_k pri čemu je $k = 1, 2, 3$ te vrijedi

$$w - w_k = \frac{az+b}{cz+d} - \frac{az_k+b}{cz_k+d} = \frac{(ad-bc)(z-z_k)}{(cz+d)(cz_k+d)}.$$

Zamjenjujući z_k i w_k računamo $\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)}$. Zbog pretpostavke $ad-bc \neq 0$ dobivamo traženu jednadžbu.
Ako je $z_3 = \infty$, onda je kvocijent $\lim\limits_{z_3\to\infty} \frac{z_1-z_3}{z-z_3} = 1$ i formula se pojednostavljuje.
Analogno zaključujemo i za $w_3 = \infty$. □

Primjer 3.3.

Odredite Möbiusovu transformaciju $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ *ako su zadani sljedeći parovi točaka, pri čemu je* (z_i, w_i), $w_i = f(z_i)$, *i = 1, 2, 3, prikazani u tablici :*

z	w
$-i$	-1
1	0
i	1

Rješenje:
1. način
Vrijedi da je $f(z_1) = w_1$ i iz toga slijedi $\frac{-ai+b}{-ci+d}$ = -1.
Nadalje, iz $f(z_2) = w_2$ slijedi $\frac{a+b}{c+d} = 0$ i iz $f(z_3) = w_3$ slijedi $\frac{ai+b}{ci+d} = 1$.
Formiramo sljedeće jednadžbe:

$$(1) \;\; ci - d = -ai + b$$

$$(2) \;\; a = -b$$

$$(3) \;\; ci + d = ai + b$$

Zbrajanjem relacija (1) i (3) dobivamo (4) $ci = b$. Iz (2) i (4) dobivamo (5) $a = -ci$. Zatim uvrstimo (4) i (5) u (3) i dobivamo $d = c$.
Traženo preslikavanje je

$$f(z) = \frac{-ciz+ci}{cz+c} = \frac{-iz+i}{z+1}.$$

2. način
Prema formuli (7) imamo

$$\frac{(w+1)(0-1)}{(w-1)(0+1)} = \frac{(z+i)(1-i)}{(z-i)(1+i)}.$$

Raspišemo i grupiramo članove s w i zw na lijevoj strani i dobivamo $zw + w = -iz + i$.
Traženo preslikavanje je

$$f(z) = \frac{-iz+i}{z+1}.$$

Primjer 3.4.

Odredite Möbiusovu transformaciju $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ *ako su zadani sljedeći parovi točaka, pri čemu je* (z_i, w_i), $w_i = f(z_i)$, $i = 1, 2, 3$, *prikazani u tablici :*

z	w
0	0
1	1
2	∞

Rješenje:
Sada koristimo formulu (9) jer je $w_3 = \infty$, pa iz nje slijedi

$$\frac{w-0}{1-0} = \frac{(z-0)(1-2)}{(z-2)(1-0)}.$$

Traženo preslikavanje je $w = \frac{-z}{z-2}$.

Napomena:

Neka je D područje u z-ravnini čiji je rub krivulja C kružnica ili pravac. Neka su zadane tri različite točke na krivulji C tako da kretanjem po C od z_1 *preko* z_2 *do* z_3 *područje D je s lijeve strane. (Ako je C kružnica onda je ona pozitivno orijentirana, tj. suprotno kretanju kazaljke na satu.) Möbiusovom transformacijom slike točaka* z_1, z_2, z_3 *leže na slici krivulje C' koja je ili kružnica ili pravac. Slika područja D je područje D' čiji je rub krivulja C' (s lijeve strane obilaska po C' od* w_1 *preko* w_2 *do* w_3*).*

Primjer 3.5.

Neka je zadana Möbiusova transformacija $w = f(z) = \frac{(1-i)z+2}{(1+i)z+2}$. *Odredite sliku kruga* $D = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| < 1\}$.

Rješenje:
U ovome primjeru koristit ćemo prethodnu napomenu. Rub područja D je krivulja $C = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| = 1\}$. Izaberimo 3 točke na krivulji C, to su $z_1 = -2, z_2 = -1-i, z_3 = 0$.
Slike tih točaka su $w_1 = f(z_1) = -1, w_2 = f(z_2) = 0, w_3 = f(z_3) = 1$. Te točke leže baš na u-osi $C' = \{w \in \mathbb{C} : v = 0\}$. To je rub područja $D' = \{w \in \mathbb{C} : v > 0\}$ prema prethodnoj napomeni. Ako želimo sa sigurnošću vidjeti koje je to područje, ubacimo još jednu unutrašnju točku. Izaberimo npr. točku $z_4 = -1 \in D$. Njena slika je $w_4 = i$, pa zaključujemo da je D' gornja poluravnina.

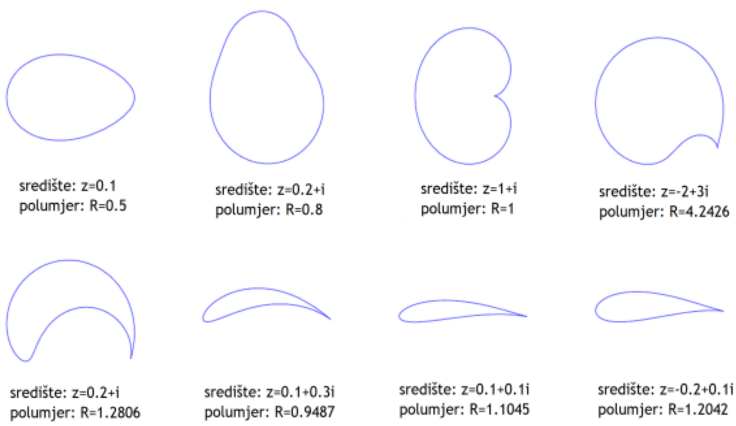
4 Primjena konformnog preslikavanja

Konformna preslikavanja imaju velik utjecaj u matematici, fizici, medicini, kartografiji...
Mi ćemo promatrati primjenu u aerodinamici pod nazivom **Joukowsky preslikavanje**.
Naime, Nikolai Joukowsky (1847. - 1921.) bio je ruski matematičar koji je prvi, u aerodinamici i hidromehanici, primjenjivao teoriju funkcija kompleksne varijable. Specijalno, proučavao je strujanje zraka oko zrakoplovnog krila.

Definirao je kompleksnu funkciju

$$w = f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

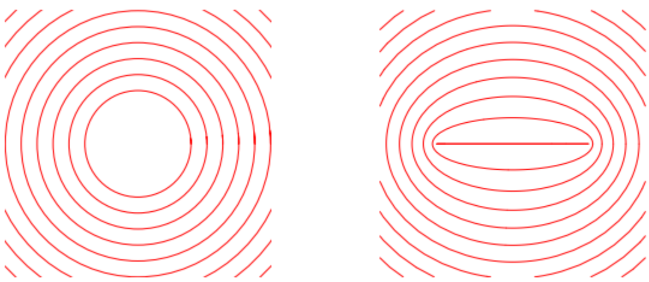
koja preslikava krug u razne likove, među kojima su i oni koji imaju oblik sličan krilu zrakoplova. Budući da je $f'(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) = 0$ ako i samo ako je $z = \pm 1$, Joukowsky preslikavanje je konformno na cijelom području osim u točkama $z = 0$ i $z = \pm 1$.



Slika 12. Mjenjanjem središta i polumjera kružnica
dobivamo razne oblike

Preslikavanje se bazira na tome da jediničnu kružnicu sa središtem u ishodištu stisne u segment [-1,1], a kružnicu $x^2 + y^2 = R^2$ preslika u elipsu sa poluosima

$$a = \frac{R^2+1}{2R}, \quad b = \left|\frac{R^2-1}{2R}\right|.$$



Slika 13. Joukowsky preslikavanje

Literatura

[1] P. J. Olver, Complex Analysis and Conformal Mapping,
University of Minnesota, 2017

[2] C. Berg, Complex Analysis, Department of Mathematical Sciences,
Copenhagen, 2012

[3] Š. Ungar, Kompleksna analiza, Skripta, PMF - matematički odjel,
Sveučilište u Zagrebu, 2009

[4] V. Čuljak, Primijenjena matematika, Skripta, Građevinski fakultet,
Sveučilište u Zagrebu, 2011

[5] I. Batistić, Uporaba konformnog preslikavanja u problemima strujanja idealne tekućine,
PMF - fizički odjel, Sveučilište u Zagrebu, 2008

[6] A. Kostić, Viša matematika za inženjere, Prirodno-matematički fakultet Sarajevo,
Sarajevo, 2015