Simetrične, persimetrične i bisimetrične matrice

Crnobrnja, Martina

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Martina Crnobrnja

Simetrične, persimetrične i bisimetrične matrice

Završni rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Martina Crnobrnja

Simetrične, persimetrične i bisimetrične matrice

Završni rad

Mentor: doc.dr.sc. Darija Marković

Osijek, 2017.

Sažetak

U ovom radu proučit ćemo pojam transponiranja matrica i njegova svojstva, definirati simetričnu matricu i navesti nekoliko primjera simetričnih matrica. Zatim ćemo definirati flip transponiranje matrice, neka svojstva flip-transponiranja, persimetričnu matricu i njene primjere. Definirat ćemo pojam grupe i podgrupe, opisati neke matrične grupe, poput opće linearne grupe i neke matrične podgrupe opće linearne grupe, kao što su ortogonalna grupa i flip transponirana grupa. U ovom radu matricu koja je simetrična i persimetrična zvat ćemo bisimetrična matrica. Matrice koje su simetrične na više načina česta su pojava u prirodnim i tehničkim znanostima. Navest ćemo i dokazati nekoliko svojstava takvih matrica. Pogledat ćemo svojstvene vektore i svojstvene vrijednosti bisimetričnih matrica i matrica s dvije simetrije.

Ključne riječi: simetrične matrice, persimetrične matrice, bisimetrične matrice, svojstvena vrijednost, svojstveni vektor, matrične grupe, ortogonalna grupa, flip transponirana grupa

Abstract

In this paper we will study transposition of a matrix and some of its properties, we will define symmetric matrix and give some exapmles of symmetic matrices. Then we will define flip tranposition, some of its properties, persymmetric matrix and examples of persymmetric matrices. The definition of a group and a subgroup will be given, along with some matrix groups, like general linear group, and some matrix subgroups, like orthogonal and flip transpose group. In this paper we refer to matrices which are both symmetric and persymmetric as bisymmetric. Matrices with two symmetries are common in natural sciences and engineering. We will formulate and prove some properties of such matrices. We will examine the eigenvectors and eigenvalues of bisymmetric matrices and matrices with two symmetries.

Key words: symmetric matrices, persymmetric matrices, bisymmetric matrices, eigenvalues, eigenvectors, matrix groups, orthogonal group, flip transpose group

Sadržaj

1 Uvod

Tema ovog rada su simetrične, persimetrične i bisimetrične matrice, klase matrica koje imaju specifična svojstva koja ćemo iskazati i dokazati.

Simetrične matrice su one matrice koje su simetrične s obzirom na glavnu dijagonalu. Često se pojavljuju u kvantnoj mehanici, statistici (matrice korelacije), teoriji grafova, numeričkoj analizi i kriptografiji. Persimetrične matrice su one matrice koje su simetrične obzirom na sporednu dijagonalu. Pojavljuju u teoriji informacije, statistici, fizici, diferencijalnim jednadžbama, numeričkoj analizi i prepoznavanju uzoraka.

Bisimetrične matrice su matrice koje su simetrične i persimetrične, tj. matrice koje su simetrične obzirom na glavnu i sporednu dijagonalu. U literaturi se još definiraju kao simetrično centrosimetrične matrice, pri čemu za kvadratnu matricu kažemo da je centrosimetrična ako je simetrična s obzirom na svoj središnji element - onaj element koji se nalazi na sjecištu glavne i sporedne dijagonale.

Bisimetrične matrice pojavljuju se u mnogo različitih područja matematike:

1. teoriji informacije,

2. linearnoj teoriji procjena, matrice kovarijance stacionarnih stohastičkih procesa,

3. linearnoj teoriji sustava, na primjer stabilnost vremenski diskretnih sustava,

4. numeričkoj analizi, na primjer rješavanje diferencijalnih jednadžbi.

Teorija matričnih grupa omogućava razumijevanje nekih pojmova koji su nužni alati u disciplinama poput geometrije, topologije, diskretne matematike i statistike. Matrične grupe se pojavljuju u raznim granama matematike i njihovim primjenama. Zanimljivo je kako se algebra i geometrija zajedno koriste u proučavanju matričnih grupa. Programeri filmske grafike koriste matrične grupe za rotaciju i translaciju trodimenzionalnih objekata na ekranu računala, matrične grupe se koriste za rješavanje diferencijalnih jednadžbi, u kombinatorici, teoriji brojeva, kompleksnoj analizi i u mnogim drugim, često neočekivanim, granama matematike. Pojavljuju se i u proučavanju bilo kojih objekata sa simetrijama, kao na primjer molekulama u kemiji i česticama u fizici.

Operaciju transponiranja označavat ćemo slovom T, a transponiranu matricu matrice A s A^T, flip-transponiranje ćemo označavati sa slovom F, a flip-transponiranu matricu matrice A sa A^F.

Sa $(A)_{ij}$ ili a_{ij} označavat ćemo element matrice koji se nalazi na presjeku i-tog retka i j-tog stupca matrice A. M_{mn} predstavlja oznaku vektorskog prostora matrica koje imaju m redaka i n stupaca, dok je M_n oznaka vektorskog prostora kvadratnih matrica sa n redaka i stupaca.

2 Osnovni pojmovi

2.1 Simetrične matrice

Sljedeći pojmovi i primjeri su nam nužni za razumijevanje ovog rada. Sve definicije su preuzete iz [1] ili iz [3].

Definicija 2.1 (Dijagonala matrice)**.** *Standardna dijagonala matrice* $A \in M_{mn}$ *je skup elemenata oblika* a_{ii}*, pri čemu je* $1 \leq i \leq min\{m,n\}$*.*

Primjetimo da je dijagonala kvadratne matrice skup elemenata koji leže na zamišljenoj dijagonali između gornjeg lijevog i donjeg desnog kuta matrice.

Definicija 2.2 (Transponiranje matrice)**.** *Za matricu* $A = [a_{ij}] \in M_{mn}$ *definiramo transponiranu matricu* A^T *formulom*

$$A^T = [b_{ij}] \in M_{nm}, \quad b_{ij} = a_{ji}, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

Smisao je u tome da retci matrice A predstavljaju stupce matrice A^T.

Na primjer, transponirana matrica matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ je matrica $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

Teorem 2.3 (Svojstva transponiranja)**.** *Operacija transponiranja ima sljedeća svojstva:*

1. *za* $A \in M_{mn}$ *vrijedi* $(A^T)^T = A$
2. *za* $A, B \in M_{mn}$ *vrijedi* $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. *za* $A \in M_{mn}, B \in M_{ns}$ *vrijedi* $(AB)^T = B^T A^T$*.*

Dokaz. Pokazat ćemo da je proizvoljni element matrice na lijevoj strani jednak odgovarajućem elementu matrice na desnoj strani.

1. Kako je ij-ti element matrice A^T prema definiciji transponiranja jednak a_{ji}, mora vrijediti da je ij-ti element matrice $(A^T)^T$ jednak a_{ij}. A to je upravo ij-ti element matrice A, pa je 1. tvrdnja dokazana.

2. Slično, ij-ti element matrice $(A+B)^T$ je $a_{ji} + b_{ji}$, a to je također ij-ti element matrice $A^T + B^T$.

3. Kako je ij-ti element matrice $(AB)^T$ ji-ti element matrice (AB), tj.

$$((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}.$$

S druge strane, ij-ti element matrice $B^T A^T$ je

$$(B^T A^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}$$

čime je dokazana zadnja jednakost.

$\square$

Primjetimo da je za $A \in M_n$ i $A^T \in M_n$. Zato sljedeće definicije imaju smisla.

Definicija 2.4 (Simetrična matrica)**.** *Za matricu $A \in M_n$ kažemo da je simetrična ako vrijedi $A^T = A$.*

Primjeri simetričnih matrica: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$.

Definicija 2.5 (Antisimetrična matrica)**.** *Za matricu $A \in M_n$ kažemo da je antisimetrična ako vrijedi $A = -A^T$*

Primjer takve matrice je $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$.

Definicija 2.6 (Sporedna dijagonala)**.** *Sporedna dijagonala matrice $A \in M_{mn}$ je skup elemenata oblika a_{ij}, pri čemu je $j = n + 1 - i$ za $1 \leq i \leq min\{m, n\}$.*

Sporednu dijagonalu kvadratne matrice čine elementi koji leže na zamišljenoj dijagonali između gornjeg desnog i donjeg lijevog kuta matrice.

2.2 Persimetrične matrice

Kako bismo mogli definirati persimetričnu matricu, moramo se prvo upoznati sa pojmom flip-transponiranja matrice, odnosno flip-transponirane matrice.

Definicija 2.7 (Flip transponiranje)**.** *Flip transponirana matrica matrice $A = [a_{ij}] \in M_{mn}$ je matrica $A^F = [b_{ij}]$ pri čemu je $b_{ij} = a_{m+1-j,n+1-i}$.*

Na primjer, flip transponirana matrica matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ je matrica $A^F = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 8 & 5 & 2 \\ 7 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Sada kada znamo što je flip-transponirana matrica, možemo definirati persimetričnu matricu.

Definicija 2.8 (Persimetrična matrica)**.** *Za matricu A kažemo da je persimetrična ako je jednaka svojoj flip transponiranoj matrici. Tj. $A = A^F$.*

Primjer persimetrične matrice je $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Definicija 2.9 (Antipersimetrična matrica)**.** *Za matricu A kažemo da je antipersimetrična ako vrijedi $A = -A^F$.*

Na primjer, $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ je antipersimetrična matrica.

Teorem 2.10. *Operacija flip-transponiranja ima sljedeća svojstva:*

1. *za* $A \in M_{mn}, B \in M_{ns}$ *vrijedi* $(AB)^F = B^F A^F$
2. *za* $A \in M_{mn}$ *vrijedi* $(A^F)^F = A$
3. *za* $A, B \in M_{mn}$ *vrijedi* $(A+B)^F = A^F + B^F$.

Dokaz. 1. Prema definiciji je $((AB)^F)_{ij} = (AB)_{n+1-j,n+1-i}$. Prema definiciji množenja matrica vrijedi

$$(AB)_{n+1-j,n+1-i} = a_{n+1-j,1}b_{1,n+1-i} + a_{n+1-j,2}b_{2,n+1-i} + \cdots + a_{n+1-j,n}b_{n,n+1-i}$$

gdje a i b predstavljaju elemente matrice A, odnosno B. Označimo sada $a'_{ij} = a_{n+1-j,n+1-i}$ element matrice A^F i neka je $b'_{ij} = b_{n+1-j,n+1-i}$ element matrice B^F. Prema tome, iz

$$\begin{aligned}(B^F A^F)_{ij} &= b'_{i1}a'_{1j} + b'_{i2}a'_{2j} + \cdots + b'_{in}a'_{nj} \\ &= b_{n,n+1-i}a_{n+1-j,n} + b_{n-1,n+1-i}a_{n+1-j,n-1} + \cdots + b_{1,n+1-i}a_{n+1-j,1} \\ &= a_{n+1-j,1}b_{1,n+1-i} + a_{n+1-j,2}b_{2,n+1-i} + \cdots + a_{n+1-j,n}a_{n,n+1-i} \\ &= ((AB)^F)_{ij}\end{aligned}$$

slijedi da je $(AB)^F = B^F A^F$.

2. Znamo da je $(A^F)_{ij} = a_{n+1-j,n+1-i}$. Iz

$$\begin{aligned}((A^F)^F)_{ij} &= (a_{n+1-j,n+1-i})^F \\ &= a_{n+1-(n+1-i)),n+1-(n+1-j)} \\ &= a_{ij}\end{aligned}$$

slijedi $(A^F)^F = A$.

3. Slično, ij-ti element matrice $(A+B)^F$ je $a_{n+1-j,n+1-i} + b_{n+1-j,n+1-i}$, a to je također ij-ti element matrice $A^F + B^F$.

□

Definicija 2.11 (Hermitska matrica)**.** *Kaže se da je kvadratna matrica* $A = [a_{ij}] \in M_n$ *hermitska ako vrijedi* $A = A^*$, *tj.*

$$a_{ij} = \bar{a}_{ji}, \quad \forall i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Definicija 2.12 (Perhermitska matrica)**.** *Kaže se da je kvadratna matrica* $A = [a_{ij}] \in M_n$ *perhermitska ako vrijedi* $A^F = A^*$.

3 Matrične grupe

Kako bismo mogli promotriti neke specifične matrične grupe, najprije se moramo upoznati sa pojmom grupe. Osnovni pojmovi poput pojma grupe i podgrupe korišteni u ovom poglavlju preuzeti su iz [4].

Definicija 3.1 (Grupa)**.** *Neka je G neprazan skup i $*: G \times G \to G$ binarna operacija na G. Uređen par $(G, *)$ se zove grupa ako su zadovoljeni sljedeći uvjeti:*

1. *$a*(b*c)=(a*b)*c, \quad \forall a,b,c \in G$;*
2. *postoji $e \in G$ takav da je $a*e=e*a=a, \quad \forall a \in G$;*
3. *za svaki $a \in G$ postoji $a^{-1} \in G$ takav da vrijedi $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.*

Skup svih regularnih matrica iz $M_n(\mathbb{R})$ označavamo sa $GL_n(\mathbb{R})$. Množenje matrica, kad se provodi samo na regularnim matricama, je binarna operacija na skupu $GL_n(\mathbb{R})$. Ako su matrice $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ regularne onda je regularan i njihov umnožak AB te vrijedi da je

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Uz korištenje asocijativnosti množenja matrica imamo

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Analogno se pokaže i da vrijedi

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I.$$

Teorem 3.2. *Za binarnu operaciju množenja na skupu $GL_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:*

1. *$A(BC)=(AB)C, \quad \forall A, B, C \in GL_n(\mathbb{R})$;*
2. *postoji $I \in GL_n(\mathbb{R})$ takav da je $AI=IA=A, \quad \forall A \in GL_n(\mathbb{R})$;*
3. *za svaki $A \in GL_n(\mathbb{R})$ postoji $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$ takav da vrijedi $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.*

Prema tome,$(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ je grupa.

Definicija 3.3 (Opća linerna grupa)**.** *$GL_n(\mathbb{R})$ nazivamo opća linearna grupa reda n.*

Prvo ćemo pogledati odnos između opće linearne grupe i ortogonalne grupe, zato što će odnos između opće linearne grupe i flip transponirane grupe biti sličan.

Prisjetimo se, realnu kvadratnu matricu A za koju vrijedi $A^TA = I$ nazivamo ortogonalna matrica. Skup svih ortogonalnih matrica iz $M_n(\mathbb{R})$ označavamo sa $O_n(\mathbb{R})$.

Primjećujemo da je $O_n(\mathbb{R})$ podskup od $GL_n(\mathbb{R})$ jer kako vrijedi $A^TA = I$, znamo da A ima inverz, tj. $detA \neq 0$. Sada ćemo pokazati da je i skup svih ortogonalnih matrica grupa uz operaciju množenja matrica i nazivamo ju ortogonalna grupa. Prvo ćemo uvesti definiciju podgrupe.

Definicija 3.4 (Podgrupa)**.** *Neka je G grupa i H podskup od G. Kažemo da je H podgrupa od G, ako je H grupa uz istu binarnu operaciju kao i G.*

Teorem 3.5. *Podskup H grupe G je podgrupa od G ako su zadovoljeni sljedeći uvjeti:*

1. *H je neprazan skup.*
2. *za $x \in H$ i $y \in H$ je i $x * y \in H$.*
3. *za $x \in H$ je i $x^{-1} \in H$.*

Koristeći rezultate prethodnog teorema ćemo pokazati da je skup svih ortogonalnih matrica grupa.

Teorem 3.6. *Ortogonalna grupa je grupa.*

Dokaz.

1. Skup ortogonalnih matrica je neprazan jer je I ortogonalna matrica.
2. Za matrice $A, B \in O_n(\mathbb{R})$, i matrica AB također mora biti ortogonalna. Treba pokazati da je
$$(AB)^T(AB) = I.$$
Koristeći 3. svojstvo teorema 2.3 i asocijativnost množenja matrica slijedi da je
$$(AB)^T(AB) = (B^TA^T)(AB) = B^T(A^TA)B = B^TIB = B^TB = I.$$
3. Za ortogonalnu matricu A vrijedi $A^TA = I$, pa treba pokazati da je $A^T \in O_n(\mathbb{R})$. Koristeći 1. svojstvo teorema 2.3 imamo
$$A^T(A^T)^T = I$$
$$A^TA = I$$
kao što je trebalo dokazati.

Ortogonalna grupa je podgrupa opće linearne grupe, pa je prema tome grupa.

□

3.1 Flip transponirana grupa

Sada ćemo sa $F_n(\mathbb{R})$ označiti skup svih matrica iz $GL_n(\mathbb{R})$ takvih da je $A^FA = I$ i pokazati da skup takvih matrica, zajedno s operacijom množenja matrica grupa, tj. podgrupa opće linearne grupe.

Teorem 3.7. *Skup $F_n(\mathbb{R})$ je podgrupa opće linearne grupe $GL_n(\mathbb{R})$.*

Dokaz. Skup $F_n(\mathbb{R})$ je po definiciji podskup od $GL_n(\mathbb{R})$, pa možemo koristiti rezultate teorema 3.5.

1. Skup $F_n(\mathbb{R})$ je neprazan jer sadrži jediničnu matricu I.
2. Za matrice $A, B \in F_n(\mathbb{R})$, i matrica AB također mora biti element skupa $F_n(\mathbb{R})$. Treba pokazati da je
$$(AB)^F(AB) = I.$$
Koristeći 1. svojstvo teorema 2.10 i asocijativnost množenja matrica slijedi da je
$$(AB)^F(AB) = (B^FA^F)(AB) = B^F(A^FA)B = B^FIB = B^FB = I.$$

3. Za matricu $A \in F_n(\mathbb{R})$ vrijedi $A^F A = I$, pa treba pokazati da je $A^F \in F_n(\mathbb{R})$. Koristeći 2.. svojstvo teorema 2.10 imamo
$$A^F (A^F)^F = I$$
$$A^F A = I$$
kao što je trebalo dokazati.

Prema tome, $F_n(\mathbb{R})$ je podgrupa opće linearne grupe, pa je $F_n(\mathbb{R})$ grupa.

$\square$

4 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori bisimetričnih matrica

Matrice koje su simetrične i persimetrične nazivamo bisimetrične matrice. Primjeri bisimetričnih matrica:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & c \\ c & f & e & b \\ d & c & b & a \end{bmatrix}.$$

Sada ćemo pogledati neka svojstva takvih matrica, njihove svojstvene vektore i svojstvene vrijednosti. Određivanje determinante matrice je u primjeni često problem, pogotovo kada se radi o matricama velikih dimenzija. Zbog toga ćemo ovdje promatrati matrice u strukturi blok matrica. Podsjetimo se najprije definicije svojsvene vrijednosti i svojstvenog vektora matrice.

Definicija 4.1 (Svojstvena vrijednost, vektor)**.** *Kažemo da je broj λ svojstvena vrijednost matrice A ako postoji ne-nul vektor v tako da je*

$$Av = \lambda v.$$

Vektor v s tim svojstvom naziva se svojstveni vektor matrice A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ.

4.1 Teoremi

Promatrat ćemo realne ili kompleksne kvadratne matrice reda $2n$.

Označimo sa R matricu koja na sporednoj dijagonali ima jedinice, a svi ostali elementi su joj nule. Za takvu matricu vrijede sljedeća svojstva

Svojstvo 1 Množenjem matrice s lijeva matricom R preokrenut će se poredak redova te matrice, a množenjem s desna matricom R preokrenut će se poredak stupaca.

Svojstvo 2 R^2 je identiteta. $R^2 = I$.

Svojstvo 3 $A^F = RA^TR$.

Teorem 4.2. *Zbroj dvije bisimetrične matrice je bisimetrična matrica. Transponirana matrica i flip-transponirana matrica bisimetrične matrice je bisimetrična matrica. Pomnožimo li bisimetričnu matricu skalarom, to će opet biti bisimetrična matrica.*

Dokaz. Neka su $A, B \in M_n$ dvije bisimetrične matrice. Tada vrijedi $A^T = A, A^F = A, B^T = B, B^F = B$.

Treba pokazati da vrijedi $(A + B)^T = A + B$ i $(A + B)^F = A + B$. Koristeći teorem 2.3 pretpostavku teorema imamo:

$$(A + B)^T = A^T + B^T = A + B,$$

a zbog teorema 2.10 slijedi

$$(A + B)^F = A^F + B^F = A + B.$$

Zbog toga je $A+B$ bisimetrična matrica, tj. zbroj dvije bisimetrične matrice je bisimetrična matrica.

Ako je A bisimetrična matrica, po definiciji je $A^T = A, A^F = A$, pa su transponirana matrica i flip transponirana matrica bisimetrične matrice također bisimetrična matrica.

Kako je A bisimetrična matrica, znamo da vrijedi $A^T = A$, $A^F = A$. Pomnožimo li te dvije jednakosti skalarom α slijedi:

$$\alpha(A^T) = \alpha A,$$

tj.

$$(\alpha A^T) = \alpha A$$

pa vidimo da je αA simetrična matrica. Istim zaključivanjem slijedi da je αA persimetrična matrica, pa je i bisimetrična. $\square$

Teorem 4.3. *Svojstvene vrijednosti bisimetrične matrice G, koja mora imati blok strukturu*

$$G = \begin{bmatrix} A^F & B^T \\ B & A \end{bmatrix},$$

gdje je A simetrična i B persimetrična, su svojstvene vrijednosti matrica $A+BR$ i $A-BR$. Svojstvene vrijednosti od $A+BR$ pripadaju centralno simetričnim svojstvenim vektorima od G, pri čemu je v svojstveni vektor matrice $A+BR$, a $[Rv, v]^T$ je svojstveni vektor matrice G s istim svojstvenim vrijednostima. Svojstvene vrijednosti matrice $A-BR$ odgovaraju centralno antisimetričnim svojstvenim vektorima oblika $[-Rv, v]^T$, pri čemu je v svojstveni vektor matrice $A-BR$.

Dokaz. Pretpostavimo da je λ svojstvena vrijednost matrice $A+BR$ s pripadnim svojstvenim vektorom v. Da bismo pokazali da je $[Rv, v]^T$ svojstveni vektor od G sa svojstvenom vrijednosti λ, zahtjevat ćemo da je

$$\begin{bmatrix} A^F - \lambda I & B^T \\ B & A - \lambda I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Rv \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Zbog svojstva 3 i simetričnosti matrice A vrijedi $A^F = RA^TR = RAR$. Slično, primjenom svojstva 3 i persimetričnosti matrice B vrijedi $RB^TR = B$, zatim množenjem s lijeva i s desna matricom R zbog svojstva 2 dobijemo $B^T = RBR$. Jednadžba (1) tada postaje

$$\begin{bmatrix} RAR - \lambda I & RBR \\ B & A - \lambda I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Rv \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Množeći s lijeva prvi blok jednadžbe sa R i koristeći svojstvo 2 na odgovarajućim mjestima dobijemo

$$Av - \lambda v + BRv = 0,$$

odakle slijedi da je λ svojstvena vrijednost od $A+BR$. Analogno za drugi blok jednadžbe. Slična tvrdnja vrijedi za centralno-antisimetričan svojstveni vektor.

Primjetimo da je moguće da matrica G ima nesimetrične svojstvene vektore, formirane kao linearna kombinacija simetričnih i antisimetričnih svojstvenih vektora, kada $A+BR$ i $A-BR$ imaju istu svojstvenu vrijednost. Kada je B persimetrična matrica, onda je BR simetrična, pa su svojstvene vrijednosti matrice G realne ako su elementi realni brojevi. $\square$

Teorem 4.4. *Matrica G koja je antisimetrična i antipersimetrična sa blok strukturom sličnom kao u prethodnom teoremu ima centralno simetrične i centralno antisimetrične svojstvene vektore, koji pripadaju svojstvenim vrijednostima matrica $A + BR$ i $A - BR$.*

Dokazi sljedećih teorema iz ovog poglavlja mogu se pronaći u [5].

Teorem 4.5. *Matrica G, u blok strukturi*

$$G = \begin{bmatrix} \bar{A}^F & \bar{B}^T \\ B & A \end{bmatrix},$$

koja je hermitska i perhermitska ima centralno simetrične i centralno antisimetrične svojstvene vektore. Centralno simetrični svojstveni vektori pripadaju svojstvenim vrijednostima od $A + BR$, a centralno antisimetrični svojstveni vektori pripadaju svojstvenim vrijednostima matrice $A - BR$.

Teorem 4.6. *Matrica G koja je antisimetrična i persimetrična mora imati blok strukturu*

$$G = \begin{bmatrix} A^F & -B^T \\ B & A \end{bmatrix}.$$

Njezine svojstvene vrijednosti se pojavljuju u $\pm$ parovima, kao korjeni svojstvenih vrijednosti $(A - BR)(A + BR)$.

Teorem 4.7. *Matrica G koja je hermitska i persimetrična mora imati blok strukturu*

$$G = \begin{bmatrix} A^F & \bar{B}^T \\ B & A \end{bmatrix},$$

gdje je A hermitska, a B persimetrična matrica. Ako je $[Rw, v]^T$ svojstveni vektor od G, onda $x = v + \bar{w}$ zadovoljava jednadžbu $(A - \lambda I)x + BR\bar{x} = 0$. Obratno, ako je x rješenje, onda je $[R\bar{x}, x]^T$ svojstveni vektor matrice G koji pripada svojstvenoj vrijednosti λ.

Dokaz. Koristeći činjenicu da je A hermitska matrica ($A^T = \bar{A}$), a B persimetrična matrica ($RB^TR = B$, pa je $R\bar{B}^TR = \bar{B}$) slijedi

$$\begin{bmatrix} R\bar{A}R - \lambda I & R\bar{B}R \\ B & A - \lambda I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Rw \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Pomnožimo li slijeva gornju jednadžbu sa R i izlučimo matricu R iz svojstvenog vektora dobijemo

$$\begin{bmatrix} \bar{A} - \lambda I & \bar{B}R \\ BR & A - \lambda I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Dodamo li drugu jednadžbu konjugiranoj prvoj jednadžbi dobijemo prvi zaključak iz teorema. Ako je $w = \bar{v}$, prva jednadžba je konjugirana druga jednadžba, iz čega slijedi drugi zaključak teorema. $\square$

Iskazi i dokazi sličnih tvrdnji za realne ili kompleksne kvadratne matrice reda $2n + 1$ mogu se pronaći u [2].

Literatura

[1] D. Bakić, Linearna algebra, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[2] A. Cantoni, P. Butler, Eigenvalues and eigenvectors of symmetric centrosymmetric matrices, Linear algebra and its aplications, Vol. 13 (1976.), 275-288.

[3] M. Christman, Lie matrix groups: The flip transpose group, Rose-Hulman undergraduate mathematics journal, Vol. 16 (2015), 101-121.

[4] T.W. Hungerford, Algebra, Springer, New York, 1974.

[5] R. M. Reid, Some eigenvalue properties of persymmetric matrices, Siam Review, Vol. 39 (1997.), 313-316.