Zaključivanje i razumijevanje u geometriji i algebri

Stanić, Sara

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Sara Stanić

Zaključivanje i razumijevanje u geometriji i algebri

Diplomski rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Sara Stanić

Zaključivanje i razumijevanje u geometriji i algebri

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2017.

Sadržaj

Uvod

Proces zaključivanja i razumijevanja treba biti prisutan u svim područjima matematičkog kurikuluma. Iako su aspekti formalnog zaključivanja često naglašeni u geometriji, učenici će se rijetko susresti sa zaključivanjem u ostalim dijelu kurikuluma, kao što je algebra. Međutim, kada su zaključivanje i razumijevanje prisutni u cijelom kurikulumu povezat će se sve grane matematike (aritmetika, algebra, geometrija i statistika). Cilj ovog rada je prikaz zaključivanja i razumijevanja u geometriji i algebri.

U prvom poglavlju definiramo pojam zaključivanja i razumijevanja te zašto su oni bitni. Naveden je niz navika pomoću kojih se razvija i poboljšava zaključivanje. Vidjet će se važnost matematičkog modeliranja kao i važnost korištenja tehnologije prilikom rješavanja zadataka.

U drugom poglavlju govori se o zaključivanju u geometriji. Čitatelja se upoznaje s Van Hielovom teorijom koja je vrlo korisna za učenje geometrije. Na kraju su navedeni i objašnjeni ključni elementi zaključivanja u ovom području matematike, zajedno sa primjerima.

Treće poglavlje nam govori o zaključivanju i razumijevanju algebre. Na početku se opisuje algebra koja se pojavljuje na školskoj razini kao i opis tradicionalne slike o algebri. Nabrojani su i detaljnije opisani ključni elementi zaključivanja i razumijevanja te su dani primjeri.

1 Zaključivanje i razumijevanja

Matematika koja se uči u školama priprema učenike za daljnje obrazovanje i za sudjelovanje na tržištu rada u tri široka područja:

- matematika za život,
- matematika za radno mjesto,
- matematika za znanstvenu i tehničku zajedicu.

Povećavanjem potražnje za matematičkom pismenošću, učenici se susreću s izazovima u sva tri područja. Izvještaj programa za međunarodnu procjenu učenika iz 2007. godine navodi da učenici u Sjedinjenim Američkim Državama zaostaju u matematičkoj pismenosti. Ovaj izvještaj definira matematičku pismenost kao mogućnost primjene matematike u analizi, zaključivanju i efikasnom komuniciranju te kao mogućnost rješavanja i interpretiranja matematičkih problema u različitim situacijama. U ekonomiji i radnoj snazi prisutna je globalizacija i razvoj tehnologije te je tradicionalni matematički kurikulum često nedovoljan za potrebe nekih područja. SAD je u opasnosti od gubljenja svojeg vodećeg položaja u znanosti, tehnologiji, inženjerstvu i matematici.

Usredotočenost na zaključivanje i razumijevanje osigurat će da učenici precizno izvršavaju matematičke procedure, razumiju zašto one rade te da znaju kako ih mogu iskoristiti i kako interpretirati dobivene rezultate. Ovakvo razumijevanje proširit će učenikove sposobnosti da po potrebi primijeni matematičke koncepte i alate u sva tri gore navedena područja.

Kurikulum koji se temelji na zaključivanju i razumijevanju pomoći će u zadovoljavanju povećane potražnje za znanstvenicima, inženjerima i matematičarima dok učenike priprema za daljnji razvoj u profesionalnim, strukovnim ili tehničkim područjima. Istraživanja su pokazala da ljudi tijekom svojeg života nekoliko puta promjene karijeru i da će u budućnosti raditi poslove koji trenurno i ne postoje. Važnost matematike se povećava u širokom spektru karijera, uključujući financije, oglašavanje, forenziku i športsko novinarstvo. Naglašavajući oboje, i sadržaj i sposobnost zaključivanja, matematički programi u školama mogu pomoći u pripremanju učenika da postanu radnicima koji su sposobni upravljati neistraženim područjima.

Najčešće se pod zaključivanjem misli se na proces donošenja zaključaka na temelju dokaza ili navedenih pretpostavki. Iako je zaključivanje važan dio svih

disciplina, ono predstavlja specijalnu i osnovnu ulogu u matematici. Zaključivanje je u matematici često shvaćeno kao formalno obuhvaćanje obrazloženja ili dokaza, u kojima su zaključci logički izvedeni iz pretpostavki i definicija.
Međutim, matematičko se zaključivanje može pojaviti u puno oblika počevši od neformalnog objašnjavanja i opravdavanja do formalnih dedukcija te induktivnih opažanja. Zaključivanje često započinje s istraživanjem, nagađanjima na različitim razinama, lažnim početcima i djelomičnim tumačenjima prije nego što se dobije rezultat. Kako učenici tijekom svoga školovanja razvijaju repertoar sve sofisticiranijih metoda rasuđivanja i dokazivanja, standardi za prihvaćanje objašnjenja trebaju postati sve stroži.

Razumijevanje smisla definiramo kao razvoj razumijevanja situacija, konteksta ili koncepata tako da ih povezujemo s postojećim znanjem. U praksi, zaključivanje i razumijevanje smisla je povezano, počevši od neformalnog opažanja pa do formalnih dedukcija. Razumijevanje smisla se nalazi na jednom, neformalnom kraju, dok se zaključivanje, posebice dokazi, nalaze na drugom, formalnom kraju. Formalno zaključivanje se može temeljiti na donošenju zaključaka u kojima se kroz niz opažanja identificiraju zajednički elementi te se uviđa kako se ti zajednički elementi povezuju s već doživljenim situacijama. Dobar dokaz je onaj koji ujedno pomaže da pojedinac razumije značenje onoga što se dokazuje, odnosno ne da vidi samo da je to točno, nego i zašto je točno. Razvijanjem mogućnosti donošenja zaključaka povećavaju se formalni elementi.

Matematičko zaključivanje i razumijevanje predstavljaju bitne ishode matematičkih uputa, također su bitni kao sredstvo pomoću kojih učenici upoznaju matematiku. Prema NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) oni su temeljni standardi dokazivanja.

U matematičke procese ubrajamo rješavanje problema, tumačenje i dokaz rješenja, veze, komunikacije i izlaganje. To su sve oblici procesa donošenja matematičkih zaključaka i razumijevanje u skladu s ranijim definicijama. Bez zaključivanja ne možemo riješti problem ili nešto dokazat jer oni predstavljaju korake pomoću kojih učenik razvija matematičko zaključivanje i stvara smisao matematičkim idejama. Komunikacije, veze i metode izlaganja odabrane od strane učenika moraju podržavati zaključke i smisao te zaključivanje mora biti uključeno u donošenje tih odluka.

Dokaz je oblik komunikacije formalnog zaključivanja koje je izgrađeno na smislenim temeljima te je važan ishod matematičkog mišljenja.

Dokaz može:

- objasniti zašto određeni matematičkih rezultat mora biti točan,
- razviti nezavisnost kod učenika, odnosno može pružiti potrebne vještine za ocjenjivanje valjanosti vlastitih zaključaka i zaključaka drugih učenika;
- otkriti veze i pružiti uvid u temeljnu strukturu matematike.

Bez obzira na oblik dokaza, učenici mogu koristiti formalno zaključivanje kako bi stvorili veze s prethodnim nastavnim jedinicama, proširili razmišljanja, podržali artikulaciju i potaknuli refleksiju.

Na srednjoškolskoj razini, zaključivanje i procesi donošenja smislenih zaključaka su od velikog značaja. U povijesti je zaključivanje bilo ograničeno na samo odabrana područja školskog kurikuluma te u mnogim slučajevima nije bilo prisutno. Međutim, naglasak na učenikovom zaključivanju i razumijevanje može pomoći učenicima da organiziraju svoje znanje na načine koji će poboljšati razvoj svijesti o brojevima, algebarskoj tečnosti, funkcionalnim odnosima, geometrijskom rasuđivanju i statističkom mišljenju. Kada učenici povezuju novo gradivo s već postojećim znanjem, imaju veće mogućnosti razumijeti i zadržati nove informacije nego kada je novo gradivo prezentirano kao niz izoliranih postupaka. Bez razumijevanja sadržaja, učenje novih nastavnih jedinica postaje teže kada se ne može povezati s već naučenim sadržajima i vještinama. To znači da se postupci mogu zaboraviti onako brzo kako se i nauče. Promjenom fokusa na zaključivanje i razumijevanje povećat će se zaključivanje i poticanje na donošenje zaključaka.

Zaključivanje i razumijevanje nastavnih jedinica treba se pojavljivati svakog dana na svakom satu matematike. U takvom okruženju nastavnici i učenici postavljaju i daju odgovore na pitanja kao što su *Što se događa ovdje?* i *Zašto to mislite?* Korištenje zaključivanja i razumijevanja smisla ne treba predstavljati dodatan teret nastavnicima koji imaju problema s učenicima koji imaju teškoće pri učenju. Struktura koju zaključivanje donosi stvara bitnu podršku za razumijevanje i nastavak učenja. Trenutno, mnogi učenici imaju teškoće zato što smatraju matematiku beznačajnom. Bez veza koje pružaju zaključivanje i razumijevanje može se stvoriti beskonačan ciklus ponovnog učenja onoga što se već prije učilo. Dobrim planiranjem nastavnici na svim satovima matematike mogu smatrati učenike odgovornima za vlastito uključivanje u proces zaključivanja i razumijevanja.

Nadalje, to navodi svakog učenika da iskusi proces zaključivanja, a ne da bude samo promatrač.

Tehnologija se treba strateški upotrebljavati kroz školski kurikulum kako bi pomogla u dostizanju cilja.

Sljedeći primjer pokazuje kako se zaključivanje i razumijevanje smisla može uključiti u učenje formule udaljenosti koju mnogi učenici smatraju teškom za sjetiti se.

Primjer 1. *Udaljenost*

Prvi slučaj prikazuje što se često događa kada se od učenika traži da izvedu postupak naučen bez razumijevanja.

<u>Nastavnik:</u> Danas trebamo izračunati udaljenost između središta kružnice i točke na kružnici kako bi odredili polumjer kružnice. Tko se sjeća kako se računa udaljenost između dvije točke?

<u>Učenik 1:</u> Ne postoji li formula za to?

<u>Učenik 2:</u> Ja mislim da je x_1 plus x_2 kvadrirano ili nešto slično tome.

<u>Učenik 1:</u> Tu je veliki znak za drugi korijen, ali se ne sjećam što ide ispod njega.

<u>Učenik 3:</u> Ja znam! To je x_1 plus x_2 sve na kvadrat, zar ne?

<u>Učenik 4:</u> Ne, to je formula za točku polovišta.

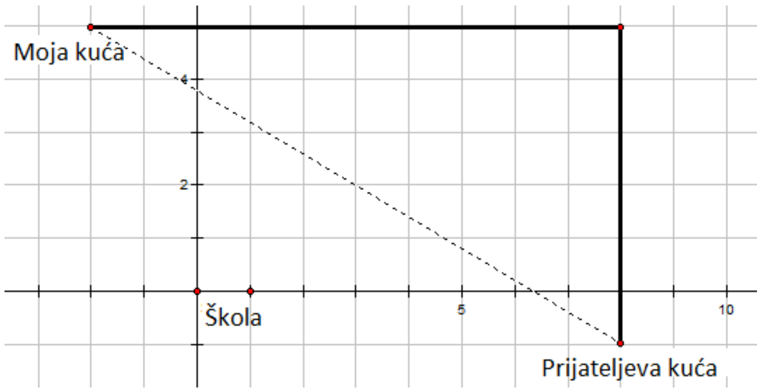
Rasprava se nastavlja na ovaj način sve dok nastavnik ne podsjeti razred na formulu. Iduće godine, isti nastavnik je pokušao primijeniti drugačiji pristup kojim bi uključio učenike u rješavanje problema. U sljedećem slučaju vidimo učeničko zaključivanje. Povezuju ono što uče s već postojećim znanjem te donose zaključak o tome što znači formula udaljenosti.

<u>Nastavnik:</u> Pogledajmo situaciju u kojoj trebamo naći udaljenost između dvije lokacija na mapi. Pretpostavimo da ova mapa pokazuje vašu školu, vašu kuću, koja je smještena dva bloka prema zapadu i pet blokova prema sjeveru u odnosu na školu i kuću vašeg najboljeg prijatelja, koje se nalazi 8 *blokova istočno i jedan blok sjeverno od škole. Ako grad ima sistem jednako raspoređenih okomitih ulica, kroz koliko blokova bi trebali proći vožnjom auta da od svoje kuće dođemo do prijateljeve?*

<u>Učenik 1:</u> Trebali bi proći 10 *blokova prema istoku i šest blokova prema sjeveru, pa pretpostavljam da bi to bilo* 16 *blokova, zar ne?*

<u>Nastavnik:</u> Da. Sada, kada bi mogli koristiti helikopter da preletimo do prijateljeve kuće, kako bi pronašli najkraću udaljenost? Radite u paru kako sjedite u klupi da uspostavite sustav koordinatnih osi i nađete put kojim bi trebali proći autom da dođete do prijateljeve kuće. Kada to napravite trebate izračunati direktnu udaljenost

između kuća kada možete koristiti helikopter.
Učenik 2: *Što ako koristimo školu kao središte? Ne bi li onda moja kuća imala koordinate* $(-2, 5)$*, a prijateljeva* $(8, -1)$*?*



Slika 1

Učenik 1: *Mislim da bi to moglo biti točno. Idemo nacrtati put na ulicama koji povezuju dvije kuće i nacrtati dužinu koja povezuje dvije kuće.*
Učenik 2: *Možda možemo izmjeriti dužinu bloka i pronaći udaljenost s ravnalom.*
Učenik 1: *Upravo si nacrtao pravokutan trokut zato što su ulice okomite.*
Učenik 2: *Onda možemo koristiti Pitagorin teorem:* $10^2 + 6^2 = c^2$*, pa je* $c = \sqrt{136}$.
Učenik 1: *Koliko onda tu ima blokova?*
Učenik 2: *Ne bi li udaljenost trebala biti između* 11 *i* 12 *blokova, kako je*
$121 < 136 < 144$*? To bi onda bilo bliže 12 blokova jer je 136 puno bliži 144.*
Nastavnik proširuje raspravu na razmatranje drugih primjera i na kraju donose općenitu formulu.

Kako je nastavnik druge godine svojim učenicima dao da pristupe formuli udaljenosti s perspektive zaključivanja i razumijevanja, učenici su bolje razumjeli tu formulu i zašto je ona točna. Na taj je način povećana učenikova mogućnost prisjećanja i izvođenja formule udaljenosti.

1.1 Navike zaključivanja

Fokusiranje na zaključivanje i razumijevanje smisla proučavanog sadržaja podrazumijeva da nije dovoljno samo proći matematičke sadržaje nego učenici trebaju iskusiti i razviti navike matematičkog zaključivanja. Navike zaključivanja su produktivan način mišljenja koji postaje učestao u procesima postavljanja matematičkih pitanja i donošenja zaključaka. Sljedeća lista navika zaključivanja prikazuje tipove razmišljanja koji trebaju postati rutina i koji trebaju postati u potpunosti očekivani u razrednoj kulturi na svim satima matematike i na svim razinama školovanja. Lista neće imati učinak ako se prema njoj pristupa kao novom skupu tema koje se trebaju podučavati u već prepunom kurikulumu. Umjesto toga, navike zaključivanja se trebaju pažljivo integrirati unutar kurikuluma kako bi se osiguralo da učenici razumiju naučeno i naučeno mogu primijeniti.

- Analiziranje problema, na primjer:
  - identificiranje bitnih matematičkih sadržaja, postupaka ili izvoda koji otkrivaju važne informacije o problemu i koje pridonose rješavanju problema (na primjer: odabir modela za simulaciju slučajnog eksperimenta);
  - precizno definiranje bitnih varijabli i uvjeta uključujući odgovarajuće mjerne jedinice;
  - traženje uzoraka i veza (na primjer: sustavno ispitivanje slučajeva ili stvaranje podatkovnih prikaza);
  - traganje za skrivenom strukturom (na primjer: crtanjem pomoćnih linija u geometrijskim likovima ili traženje ekvivalentnih oblika nekih izraza koji će otkriti drugačije stajalište problema)
  - uzimanje u obzir posebnih slučajeva ili jednostavnih analogija;
  - primjena ranije naučenih sadržaja na nove problemske situacije koji se po potrebi mogu prilagoditi i proširiti;
  - donošenje preliminarnih zaključaka i pretpostavki uključuje predviđanje što bi rješenje problema moglo uključivati ili stavljanje dodatnih ograničenja na rješenja;
- Implementacija strategije, na primjer:
  - namjerno korištenje nekih postupaka;
  - organiziranje rješenja uključuje računanje, algebarske manipulacije i prikaze podataka;

  - donošenje logičkih zaključaka koji se temelje na trenutnom napretku, potvrđivanju pretpostavki ili proširivanju početnih zaključaka;
  - praćenje napretka prema rješenju uključuje vlastito razmatranje ili razmatranje drugih o odabranoj strategiji te razmatranje mogućnosti korištenja drugih strategija;
- traženje i korištenje veza između različitih matematičkih područja, različitih konteksta i različitih prikaza;
- odražaj rješenja na problem, na primjer:
  - interpretiranje rješenja i kako ono odgovara problemu uključuje donošenje odluka unutar nepouzdanih uvjeta;
  - uzimanje u obzir smislenosti rješenja;
  - ponovno pregledavanje početnih pretpostavki o prirodi problema uključuje svjesnost o posebnim slučajevima ili nemogućim rješenjima;
  - opravdavanje ili potvrđivanje točnosti rješenja uključuje korištenje dokaza;
  - prepoznavanje opsega zaključivanja za statističko rješenje;
  - usklađivanje različitih pristupa da bi se riješio problem;
  - izbacivanje nepotrebnih argumenata kako bi se na prikladniji način opisao proces dolaska do rješenja;
  - generalizacija rješenja koja se pripisuju široj klasi problema i traženje veze s drugim problemima.

Neke se navike zaključivanja mogu tumačiti tako da pripadaju većem broju kategorije te se od učenika očekuje da se po potrebi koristi različitim navikama zaključivanja.

1.2 Napredovanje u zaključivanju

Kada je zaključivanje isprepleteno s razumijevanjem te kada nastavnici daju potrebnu podršku i povratne informacije, od učenika se može očekivati da pokažu povećanu razinu formalnosti u svojim zaključivanjima tijekom školskih godina, kako u usmenom tako i u pismenom radu te u donošenju nekih procjena. Zaključivanje u matematici zahtjeva povećanu razinu razumijevanja, a razine su navedene u nastavku:

- empirijska razina, koja obuhvaća empirijske dokaze koji podržavaju ali ne opravdavaju pretpostave koje su točne u velikom broju slučajeva;
- predformalna razina, koja obuhvaća tumačenja na intuitivnoj razini i djelomične argumente koji daju uvid u ono što se događa;
- formalna razina, koja obuhvaća formalnu argumentaciju koja se temelji na logici u utvrđivanju matematičke točnosti ili u stvaranju statističkih zaključaka.

Ove razine pokazuju napredak od neformalnog zaključivanja prema formalnom. Međutim, svaka razina ima svoju vrijednost. Učenici se mogu stalno pomicati među ovim razinama, čak i unutar istog matematičkog sadržaja. Ovo pomicanje među razinama nije samo očekivano, nego je i poželjno. Tako učenici sami razumiju smisao i daju objašnjenje svome načinu dolaska do zaključka. Nastavnici predstavljaju bitnu ulogu u poticanju učenika da istražuju sofisticiranije razine zaključivanja.

Formalna argumentacija uključuje sposobnost učenika da stvori značajne poveznice logičkim zaključivanjem koje se temelje na određenim pretpostavkama, definicijama ili prethodnim rezultatima. Uključuje i učenikovu sposobnost čitanja i procjenjivanja zaključaka drugih učenika. Važna je njihova sposobnost da odrede točnost argumenata, odnosno da razumiju što argumenti govore o idejama koje se razmatraju.

1.3 Razvoj navika zaključivanja

Nastavnici pomažu učenicima u napretku do viših razina zaključivanja koristeći dobro odabrane zadatke i pitanja otvorenog tipa. Učenici tada uče kako analizirati svoj pristup rješavanju problema, odnosno kako prepoznati prednosti i nedostatke pristupa koji trenutno koriste te kako koristiti moć formalnog zaključivanja pri formuliranju i obrazloženju matematičkih zaključaka. U razredima prioritet treba biti na nastavaku razvoja matematičkog zaključivanja. Slijedi lista uputa kako razviti te navike.

- Postaviti zadatke iz kojih učenici trebaju samostalno stvoriti neke zaključke.
- Od učenika treba zahtijevati da problem izlože svojim riječima i da pri tome iskažu vlastite pretpostavke o problemu.

- Učenicima treba dati dovoljno vremena kako bi analizirali problem na intuitivnoj razini i dodatno ga istražili koristeći modele. Nakon toga treba problemu pristupiti s formalne razine.
- Oduprijeti se težnji da se učenicima kaže rješenje problema kada postanu frustrirani. Treba pronaći druge načine pomoću kojih će se učenicima pružiti podrška tijekom njihovog samostalnog rada.
- Učenicima treba postavljati pitanja koja će ih poticati na razmišljanje. Neka od tih pitanja su oblika *Zašto je ovo točno?* ili *Kako to znaš?*
- Nakon što se učenicima postavi pitanje treba osigurati dovoljno vremena kako bi oni mogli stvoriti vlastito mišljenje i dati odgovor.
- Poticati učenike da postavljaju dodatna pitanja jedni drugima.
- Očekivati da učenici razgovaraju o svojim zaključcima s ostalim učenicima i s nastavnikom, verbalno i pismeno, koristeći pravilan matematički vokabular.
- Naglasiti objašnjenje kroz primjere i od učenika zahtijevati da daju osvrt na ono što čini ta objašnjenja efikasnim.
- U razredu treba stvoriti ozračje u kojem će se učenici osjećati ugodno pri dijeljenju svojih argumenata i pri kritiziranju argumenata drugih učenika.

Nastavnici trebaju uputiti učenike da koriste drugu literaturu koja im može pomoći pri rješavanju određenih zadataka, dati prijedloge tehnika kojima će ispitati točnosti i slično.

1.4 Zaključivanje kao temelj matematičke kompetencije

Zaključivanje i razumijevanje matematičkih sadržaja su nerazdvojni u razvoju matematičke kompetencije te su usko povezani. Tečnost pri izvršavanju matematičkih postupaka uključuje učenje s razumijevanjem te znanje o tome koji postupak kada treba provesti i s kojom svrhom. Kada zaključivanje nije prisutno učenici mogu točno izvesti matematičke postupke, ali isto tako mogu koristiti netočna ili neutemeljena pravila kao na primjer ”drugi korijen sume je suma drugih korijena”. Učenici postupke mogu smatrati kao korake koje su im nastavnici rekli da trebaju provesti umjesto da ih smatraju nizom odabranih koraka koji imaju određenu svrhu i koji se temelje na matematičkim principima. Kada razumijevanje postupaka nije ukorijenjeno u zaključivanju i razumijevanju njihovog smisla, učenici mogu točno izvesti te postupke, ali ih mogu smatrati samo nizom trikova. Rezultat toga su poteškoće koje učenici imaju prilikom odabira odgovarajućeg postupka za rješavanje zadataka ili njihove kompetencije u jednostavnim zadacima mogu nestati u kompliciranijim situacijama. Prava proceduralna tečnost zahtjeva usavršenost tehničkih vještina i razumijevanje kako bi se pravilno upotrijebile.

Standardi matematičkog znanja obuhvaćaju:

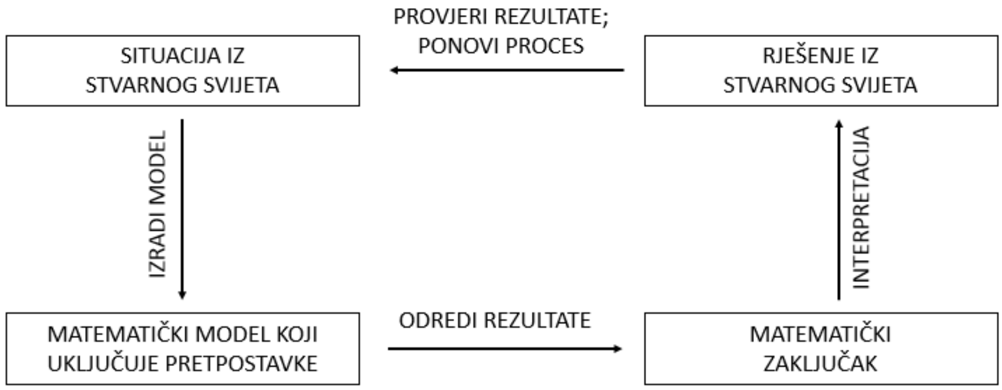
- konceptualno razumijevanje koje se odnosi na razumijevanje matematičkih sadržaja, operacija i veza,
- proceduralnu tečnost koja se odnosi na vještine fleksibilnog, točnog, efikasnog i prikladnog izvršavanja postupaka,
- strateške kompetencije koje se odnose na sposobnost formuliranja, prikazivanja i rješavanja matematičkih problema,
- prilagodljivo razmišljanje koje se odnosi na sposobnost logičkog mišljenja, objašnjavanja i opravdavanja,
- produktivno raspolaganje koje se odnosi na sklonost da se matematika smatra korisnom i vrijednom truda, zajedno s vjerovanjem u marljivost i vlastitu učinkovitost.

Razvoj produktivnog raspolaganja predstavlja prioritet u školskim programima matematike. On se može ostvariti samo ako su učenici osobno uključeni u proces matematičkog zaključivanja i razumijevanja tijekom učenja matematičkih sadržaja.

1.5 Matematičko modeliranje

Alati i zaključivanje o matematičkim procesima pomažu nam da razumijemo i djejujemo u fizičkom i društvenom svijetu. Matematičko modeliranje uključuje proces povezivanja matematike sa situacijama iz stvarnog svijeta. Slika 2 prikazuje krug koji se koristi kako bi se u modeliranju organizirao proces zaključivanja.

Prednost modeliranja je stvaranje poveznica između različitih matematičkih područja jer u raznim situacijama problemi iz stvarnog života zahtijevaju korištenje



Slika 2: Krug modeliranja

različitih matematičkih alata. Učenici tako mogu kombinirati različite matematičke ideje na nove načine. Aktivnosti vezane za uspostavljanje matematičkih modela omogućuju učenicima veću zainteresiranost za matematiku što unaprjeđuje matematičko zaključivanje. Modeliranje pruža mogućnost razvoja novih matematičkih ideja koje će se primjenjivati te može služiti kao temelj nastavnih jedinica.

1.6 Zaključivanje i razumijevanje uz pomoć tehnologije

Tehnologija ima važnu ulogu u društva pa tako i u mnogim matematičkim istraživanjima te bi zbog toga učionice u kojima se izvodi nastava matematike trebale odražavati tu stvarnost. Tehnologija se može koristiti kako bi se u razredu unaprijedili ciljevi zaključivanja i razumijevanja nastavnih jedinica. Tehnologija može biti izrazito korisna kod traženja uzoraka i odnosa te pri donošenju zaključaka. Ona može olakšati učenikovu preopterećenost računanjem te mu tako dati slobodu da strateški razmišlja o problemu. Probleme možemo prikazati na više načina i te prikaze možemo dinamički povezati. To nam nudi priliku da izvršimo značajne postupke iz kojih se mogu vidjeti posljedice. Tehnologija također može biti korisna pri generalizaciji rješenja.

Uvođenje tehnologije u učionice ne treba zasjeniti razvoj proceduralnih vještina jer su one potrebne učeniku za daljnji matematički razvoj. Tehnologija se treba koristiti kao alat koji će pomoći pri boljem razumijevanju matematičkih sadržaja.

2 Zaključivanje i razumijevanje u geometriji

Geometrija je grana matematike u kojoj se učenici susreću s matematičkim dokazima koji se temelje na formalnom zaključivanju. Dokaz je aktivnost rješavanja problema, a ne postupak koji se može provoditi rutinski. Njih treba na prirodan način uvesti u sva područja kurikuluma. U dijelu kurikuluma koji se odnosi na geometriju dokazi su utemeljeni fokusiranjem na zaključivanje i razumijevanje. Dodatno, geometrija ima poveznica sa svim ostalim granama matematike i ima važnu ulogu u svakodnevnom životu. Geometrijske ideje čine značajan dio mnogih visoko tehnoloških razvitaka, uključujući TV prijemnike visokih rezolucija, globalne navigacijske sustave, računalne animacije, računalnu tomografiju (CT), telefonske mreže, robotiku i virtualnu stvarnost.

Prilikom planiranja nastavnih jedinica iz geometrije zadaci se mogu poredati tako da započnu s vrlo izravnim problemima, kao što je jednostavna skica na kojoj nedostaje neka vrijednost. Zadaci s vremenom postaju sve složeniji tako da se na kraju treba nešto dokazati. Van Hielova teorija je bila vrlo korisna kod davanja prijedloga da geometrija zahtjeva višu razinu mišljenja. Prema njoj učenici trebaju riješiti više zadataka na nižim razinama kako bi mogli ostvariti uspjeh na višim razini mišljenja.

Povezivanje nastavnih jedinica može biti najbolja strategija kojom bi učenici mogli razumjeti cilj lekcije. Geometrijske probleme je potrebno prikazati na način pristupačan učenicima kako bi oni mogli iskoristiti svoje dosadašnje znanje u rješavanju te ih ujedno motivirati kako bi mogli proširiti svoje znanje. Važna je pravilna organizacija problema. Međutim ona neće osigurati svim učenicima da poboljšaju svoje zaključivanje i razumijevanje. Cilj je postići da svi učenici imaju jednake mogućnosti za poboljšanjem te izbjeći opasnost praćenja učenika po njihovim sposobnostima. U razredima u kojima se prate sposobnosti učenika, oni koji su nisko rangirani često imaju ograničenu izloženost matematičkom obrazovanju visoke kvaliteta. Školski sustav treba biti pravedan i prilagodljiv prema svim učenicima.

2.1 Van Hielova teorija

Teorija Nizozemca Pierra van Hiela objašnjava zašto veliki broj učenika ima problema s geometrijom, posebno s formalnim dokazima. Dao je nekoliko prijedloga kako izbjeći ove probleme. Njegova teorija sastoji se od pet razina mišljenja kroz koje će učenici steći sposobnost izvođenja formalnih dokaza i razumijevanja. Razine su:

0. **razina: Prepoznavanje ili vizualizacija** započinje neverbalnim mišljenjem. Oblicima se sudi po onome na što nalikuju. Na ovoj razini učenici mogu razvrstati oblike u skupine koje su im na neki način slične. Na primjer, učenici tvrde da li je neki lik kvadrat jer vide da je to kvadrat ili je to pravokutnik koji izgleda kao kutija.

1. **razina: Analiza** zahtjeva vještine crtanja i govora. Djeca na ovoj razini misle o svojstvima. Ne donose zaključke zato što im nalikuju na nešto. Mogu navesti niz svojstava nekog lika, ali ne mogu uočiti nikakve odnose među tim svojstvima. Ne shvaćaju da iz nekih svojstva mogu slijediti neka druga. Ovdje je važan način izražavanja prilikom opisivanja oblika. Na primjer, jednakostraničan trokut ima svojstva kao što su: tri stranice; sve stranice jednake duljine; tri jednaka kuta i simetrija. Učenici možda neće moći zaključiti iz svojstva da ako su sve stranice trokuta jednake da su onda svi kutovi jednaki. To znači da svojstva još uvijek nisu logički poredana.

2. **razina: Neformalna dedukcija** također zahtjeva vještinu govora. Učenici ne samo da mogu razmišljati o svojstvima nego mogu i uočiti odnose unutar i između oblika. Ovdje su svojstva logički poredana, pa se zaključci o svojstvima mogu izvoditi jedan iz drugog; jedno svojstvo prethodi ili slijedi iz drugog svojstva. Sposobni su formulirati smislene definicije te donositi i pratiti argumente pri neformalnom zaključivanju.

3. **razina: Dedukcija** zahtjeva logičke vještine. Učenici razmišljaju o vezama među svojstvima oblika i razumiju veze između aksioma, definicija, teorema, korolara i postulata. Razumiju kako da izvedu formalni dokaz i razumiju zašto je on potreban. Srednjoškolska geometrija zahtjeva razumijevanje geometrija na razini formalne dedukcije.

4. **razina: Strogost** zahtjeva mogućnost primjene. Učenici na ovoj razini razmišljaju u terminima apstraktnog matematičkog sistema. Objekt pažnje je aksiomatski sustav, a ne samo dedukcija unutar sustava te se razumiju razlike i odnosi među različitim sustavima. Ovo je razina studenata matematike i samih matematičara.

Van Hielova teorija je poznata po svojoj hijerarhijskog strukturi. Svaka od pet razina opisuje proces razmišljanja koji je korišten u geometrijskom smislu. Svaka razina opisuje način razmišljanja i koji tip geometrijskih ideja se koristi. Napredak po razinama utječe na mijenjanje geometrijskog mišljenja o objektu. Razine ne ovise o dobi učenika, nego o njihovom iskustvu. Svaka razina se nastavlja na prethodnu što znači da učenici prolaskom kroz svaku razinu poboljšavaju svoju razumijevanje. Kako bi se pomicali s jedne razine na sljedeću trebaju imati što više iskustva u kojem su aktivno uključeni u istraživanja i rasprave o opažanjima oblika, svojstva i veza. Ako je jezik koji se koristi iznad razine učenikovog razumijevanja, oni će moći naučiti sve procedure i zapamtiti ih bez razumijevanja. Iz tog razloga nastavnik mora shvatiti da učenici mnoge izraze razumiju na drugačiji način nego on sam te treba prilagoditi svoj način izražavanja.

Velik broj istraživanja o učenikovim zaključivanjima i razumijevanjima u ovom području podupire Van Hielove razine razmišljanja.

2.2 Ključni elementi zaključivanja i razumijevanja u geometriji

Ključni elementi zaključivanja i razumijevanja smisla nastavnih sadržaja geometrije uključuju:

- pretpostavke o geometrijskim objektima - analiza pretpostavki te induktivno zaključivanje o odnosima kako bi se donijeli zaključci;
- oblikovanje i vrednovanje geometrijskih argumenata - razvoj i vrednovanje deduktivnih argumenata, bili oni formalni ili neformalni, o likovima i njihovim svojstvima koji pomažu pri boljem razumijevanju geometrijske situacije;
- višestruki geometrijski pristupi - analiza matematičkih situacija korištenjem sinteze i transformacija koordinatnog sustava;
- geometrijske veze i modeli - primjena geometrijskih ideja u drugim područjima matematike, drugim disciplinama i situacijama iz stvarnog života.

2.2.1 Pretpostavke o geometrijskim objektima

Stvaranje pretpostavki je temeljna navika zaključivanja u matematičkom istraživanju. Geometrija nudi mnoge mogućnosti za razvoj navika zaključivanja kroz mnoštvo zanimljivih i često iznenađujućih vizualnih i mjerljivih geometrijskih veza. Učenici mogu stvarati pretpostavke analiziranjem planarnih i specijalnih postavki ili ispitujući mogu li određene postavke postojati. Pretpostavke pokreću njihovu prirodnu znatiželju ne samo o tome što se može dogoditi nego i zašto bi se to moglo dogoditi tražeći potvrdu ili negaciju pretpostavke. Proces traženja i stvaranja pretpostavki daje učenicima mogućnost da postanu zadubljeni u matematiku te da prodube svoje razumijevanje matematičkih odnosa i da usavrše sposobnosti vrednovanja tih odnosa. Stvaranjem pretpostavki o novim situacijama učenici uče kako primijeniti matematiku u novim situacijama, a to danas u svijetu predstavlja traženu vještinu.

Sljedeći primjer pokazuje kako učenici donose matematičke pretpostavke vezane za situaciju iz stvarnog života. Osim što je rezultat koristan sam po sebi, takav sadržaj

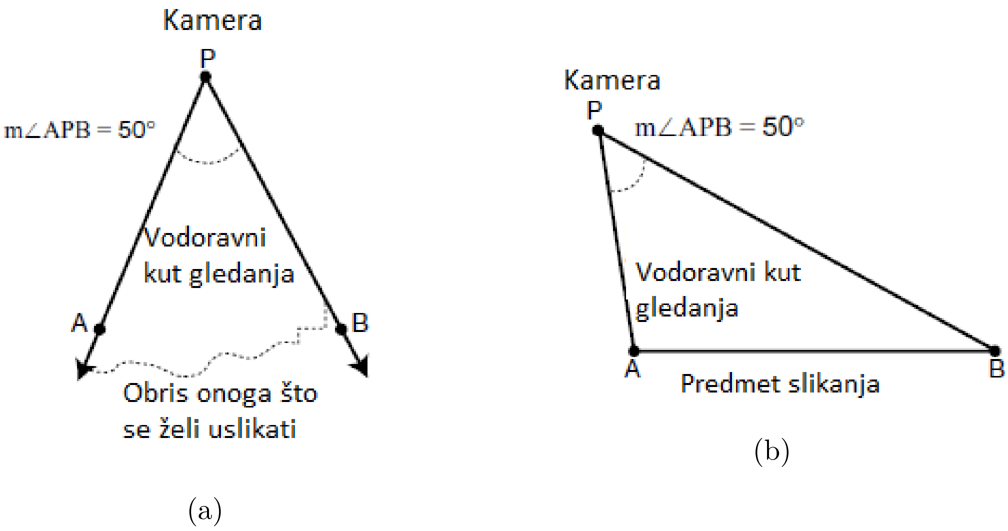
- omogućuje prepoznatljivu i zanimljivu situaciju u koju se učenici mogu udubiti u svrhu matematičke analize,
- nudi više prihvatljivih metoda za istraživanje situacije u svrhu stvaranja pretpostavki i
- potvrđuje činjenicu da je matematika svugdje oko nas.

Primjer 2. *Uslikaj zgradu*

U fotografiranju vodoravni kut gledanja prikazuje prostor koji se promatra kroz leću pri čemo leća kamera predstavlja vrh (Slika 3*a).*

Shelly želi uslikati zid zgrade koji se nalazi na ravnoj površini i koji je ukrašen grafitima. Želi uslikati cijelu širinu zgrade bez obzira na to što neće uslikati i njezinu visinu. Vodoravna širina slike je stalna. Koristi kameru s fiksnim kutom gledanja od 50° *i želi uslikati tu stranu zgrade u razini oka. Pronašla je jedno mjesto koje odgovara i ono je na slici* $3(b)$ *označeno sa* P*. Međutim ona vjeruje kako može uslikati zgradu i kada stoji na drugim mjestima. Odredite sve pozicije gdje Shelly može stajati pri tome da su zadovoljeni njezini kriteriji.*

Istražite situaciju, zapišite pretpostavke o mogućim mjestima i ako možete, opravdajte.



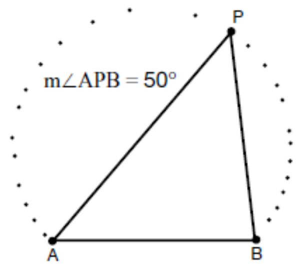
Slika 3

Cilj je da na kraju stvorite pretpostavku o punom rasponu mogućnosti mjesta s kojih može slikati. Pripremite se da jasno opravdate svoje pretpostavke kao i istraživanja koja ste proveli i zaključke kojima ćete objasniti kako ste došli do tih pretpostavki.

Za izvođenje sata potreban je program dinamičke geometrije koji sadrži datoteku sa slikom 3(*a*)*, tiskani primjerak slike i fizički primjerak kuta koji se ne može mijenjati ili se može koristiti prava kamera i zid kako bi se olakšalo traženje mogućih mjesta.*

Nastavnik: *Što mislite s kojih bi lokacija Sally mogla slikati zgradu?*
Učenik 1*:* *Mislim da može stajati u točki koja se nalazi točno u sredini.*
Nastavnik: *Što misliš pod tim u sredini?*
Učenik 1*:* *Mislim da bih ja stajao u točki na slici koja je jednako udaljena od točke* A *i* B*.*
Učenik 2*:* *To znači da bi ta točka bila negdje na simetrali dužine* $\overline{AB}$ *koja predstavlja krajeve zgrade jer je simetrala dužine skup točaka koje su jedno udaljene od točke* A *i* B*.*
Nastavnik: *Kako bi našli tu točku?*
Učenik 3*:* *Ja bi stavila točku na simetrali* $\overline{AB}$ *i pomicala bi ju gore-dolje dok kut u potpunosti ne bi odgovarao dužini.*
Nastavnik: *Dobro, to daje neke detalje o tome kako netko može pronaći drugu točku.*

Ima li netko ideje o drugim mogućim vrhovima?
Učenik 2: *Na temelju mog iskustva s fotoaparatom, mislim da postoji puno mjesta gdje se može stati kako bi se mogla uslikati cijeli zid zgrade.*
I drugi učenici se slažu s ovom pretpostavkom. Jedan učenik je predložio kako bi moguća mjesta stajanja trebale imati svojstvo simetrije u odnosu na simetralu $\overline{AB}$.
Nastavnik: *Koristeći program dinamičke geometrije ili fizičku manipulaciju nacrtajte skup točaka koji predstavlja gdje bi Sally mogla stajati kako bi uslikala željeni zid zgrade. Provjerite možete li iz ovog istraživanja doći do nekih drugih pretpostavki.*
Učenik 4: *Čini se da se sve točke nalaza na kružnom luku koji ide od točke A do točke B iako fotograf ne može stajati u tim točkama.*



Slika 4

Nastavnik dodatno olakšava raspravu tako da glavni zaključak iskazuje koristeći se apstraktnim pojmovima: "Na danoj dužini $\overline{AB}$ i određenoj strani pravca AB svaka točka P s te strane AB sa svojstvom da $\measuredangle APB = 50°$ leži na kružnom luku koji sadrži A i B." Ovaj zaključak nije odmah donesen. Postavljen je niz pitanja kako bi učenici mogli doći do ovog zaključka, a ta pitanja su:

1. *Možemo li naći kružni luk o kojem govorimo? Odnosno možemo li naći kružnicu koja sadrži ovaj kružni luk?*

2. *Hoće li svaka točka na luku osim točaka A i B predstavljati mjesto gdje Sally može stajati?*

3. *Postoje li točke koje zadovoljavaju uvijete a da se ne nalaza na tom kružnom luku?*

2.2.2 Oblikovanje i vrednovanje geometrijskih argumenata

Kao što smo vidjeli u prethodnom primjeru, donošenje pretpostavki predstavlja prvi korak u matematičkom istraživanju. Nakon što donesu pretpostavke, učenici ih trebaju opravdati ili pokazati da one ne vrijede. Iako glavna pretpostavka u prethodnom primjeru nije odmah donesena, provedena aktivnost prirodno vodi do donošenja nekoliko bitnih geometrijskih rezultata koje proizlaze iz prvog pitanja.

Sljedeći primjer odgovara na prvo pitanje postavljeno na kraju drugog primjera, a ono glasi ”Koja kružnica sadrži traženi luk?” Pomoću primjera ostvaruje se napredak tako da učenici utvrđuju činjenicu da u ravnini tri nekolinearne točke leže na jedinstvenoj kružnici. On će se dodatno ostvariti kada učenici dokažu teorem o središnjem i obodnom kutu te zaključe da svaka točka P na pretpostavljenom kružnom luka zadovoljava uvjet da je $\measuredangle APB = 50°$. Učenici trebaju dokazati da niti jedna druga točka na istoj strani pravca AB ne može biti vrh tog kuta. U trećem primjeru koristi se navika zaključivanja traženja pomoćnog lika, u ovom slučaju to je pomoćni pravac.

Primjer 3. *Točke kružnice*

Učenici su podjeljeni u grupe i trebaju odlučiti kako pronaći kružnicu koji sadrži kružni luk na kojemu se nalaze sve točke s kojih se može uslikati zid zgrade. Nakon kratkog vremena grupe izlažu svoje istraživanje.
<u>Grupa 1</u>*: Mi mislimo da trebamo pronaći središte i polumjer kružnice.*
<u>Grupa 2</u>*: Mi mislimo da trebamo pronaći samo središte kružnice. Ne trebamo tražiti polumjer jer znamo barem jednu točku koja se na kružnici, bilo to točka P iz prethodnog primjera ili jedna od točaka A i B koje su dio pretpostavke. Možemo koristiti središte i jednu od ove tri točke kako bi nacrtali cijelu kružnicu.*
<u>Grupa 3</u>*: Mi mislimo da središte treba biti točka dužine $\overline{AB}$ koja se nalazi na polovici između A i B. Polumjer treba biti polovica duljine $\overline{AB}$.*
Učenici opet u grupama raspravljaju o ovim i mogućim novim idejama. Nakon nekog vremena opet izlažu svoje zaključke.
<u>Grupa 4</u>*: Testirali smo hoće li polovište $\overline{AB}$ biti središte. Kružnica nije prolazila kroz točku P koja nam je dana pa u ovom slučaju polovište nije središte kružnice. Zatim smo koristili program dinamičke geometrije kako bi nacrtali kružnicu koji prolazi tim točkama i odredili njegovo središte. Dobili smo poprilično dobru kružnicu. Nismo mislili da će ona odgovarati svim točkama zato što smo ih približno postavili na mjesta gdje bi se trebali nalaziti vrhovi kutova od $50°$. Sad smo još više uvjereni da*

postoji kružnica koja prolazi točkom P koju smo koristili za kut od 50° i kroz točke A i B. Nakon toga smo razmišljali o središtu i složili se da središte mora biti na jednakoj udaljenosti od A i B zato što kroz njih prolazi kružnica. Kao i u prethodnom primjeru, središte kružnice mora biti na simetrali $\overline{AB}$ i na njoj se nalazilo središte nacrtane kružnice. Onda je netko iz grupe uočio da isti način zaključivanja vrijedi i za točke A i P. Ovo vrijedi zato što kružnica prolazi kroz A i P pa njegovo središte treba ležati na simetrali $\overline{AP}$. Našem crtežu smo dodali tu simetralu i uočili da se te dvije simetrale sijeku u jednoj točki koju smo označili s G. To je jedina točka koja leži na obje simetrale, pa je to jedina moguća točka za središte kružnice. Iz ovoga možemo nacrtati kružnicu tako da odaberemo središte i jednu točku između A, P ili B.

Nastavnik: Nemojte još crtati kružnice. Pokazali ste da ako postoji kružnica kroz točke P, A i B onda središte mora biti G. Može li mi neka grupa dokazati da takva kružnica sigurno postoji - da vam se ovaj put nije samo posrećilo s točkama ili da je crtež netočan? Opet radite na tome u grupama.

Nakon nekoliko minuta nova grupa je spremna pokazati svoj dokaz.

Grupa 5: Ako pretpostavimo da imamo tri nekolinearne točke P, A i B te ako je G sjecište simetrala $\overline{AB}$ i $\overline{AP}$ pokazat ćemo da je G središte kružnice koje prolazi kroz P, A i B. Konstruirali smo dužine $\overline{GP}$, $\overline{GA}$ i $\overline{GB}$. $\overline{GP}$ i $\overline{GA}$ moraju biti jednakih duljina zato što se G nalazi na simetrali $\overline{AP}$. Isto tako $\overline{GA}$ i $\overline{GB}$ moraju biti jednakih duljina zato što se G nalazi na simetrali $\overline{AB}$. Kako su obje dužine $\overline{GP}$ i $\overline{GB}$ jednakih duljina kao i $\overline{GA}$, sve tri dužine moraju biti jednakih duljina. Ako nacrtamo kružnicu sa središtem G i polumjerom jednakoj duljini $\overline{GA}$ kružnica će definitivno prolaziti kroz točke P, A i B.

Nastavnik je nakon ovog dokaza pitao imaju li ostali kakvih komentara ili kritika na izlaganje zadnje grupe i oni nisu postojali. On navodi kako ova rasprava nudi tri rezultata:

1. *Tri nekolinearne točke u ravnini određuju jedinstven kružnice.*
2. *(Algoritam konstrukcije kružnice) Središte kružnice se može odrediti tako da pronađemo točke sjecišta simetrala od bilo koje dvije stranice trokuta kojemu su vrhovi nekolinearne točke.*
3. *Simetrale dužina triju stranica trokuta sijeku se u jednoj točki.*

Prva dva rezultata proizlaze direktno iz rasprave, a treći je usko povezan. Učenici su za zadaću morali dokazati prvu i treću izjavu. U nekim slučajevima ovi zadaci *zahtijevaju organizaciju, generalizaciju i proširivanje argumenata danih u raspravi. U drugim slučajevima oni uključuju dodavanje detalja. Za drugu izjavu od učenika se tražila da napišu algoritam, odnosno da dobro definiraju niz koraka potrebnih za konstrukciju kružnice kroz tri nekolinearne točke u ravnini.*

Treći primjer se nadovezuje na drugi te će se oni pojaviti u kurikulumu nakon što učenici nauče neka svojstva okomitosti kao što je svojstvo da točka leži na simetrali dužine ako i samo ako je jednako udaljena od krajnjih točaka te dužine. Ovi primjeri će se pojaviti prije geometrijskih svojstava kružnice i na kraju će dovesti do teorema o središnjem i obodnom kutu.

Kroz ove primjere može se jasno vidjeti napredak u razinama zaključivanja. Učenici su započeli istraživanje na empirijskoj razini te prešli na neformalnu razinu jer predlažu početne zaključke kao na primjer da luk kružnice prolazi kroz krajnje točke A i B. Kasnije se rasprava provodi s povećanim formalnim zaključivanjem, te dostiže vrhunac u zaključcima koji su podržani dokazima.

Opravdanost rješenja nije određena načinom na koje je ono prezentirano. Dokaz u dva stupca nije nužno bolji nego dokaz dan u obliku odlomka. Zapravo, stroga privrženost određenom obliku dokaza može povećati pozornost na oblik umjesto na funkciju dokaza. Tako se sprječava kreativnost pri korištenju različitih navika zaključivanja te otežava mogućnost uspješnog razumijevanja matematičkih posljedica nekih argumenata. Zatim, lakoća stvaranja lanaca zaključivanja pri izgradnji matematičkih dokaza često zahtjeva snalažljivost u odabiru strategija, intuiciju i dobru procjenu.

2.2.3 Višestruki geometrijski pristupi

Geometrijskim problemima se može pristupiti na više načina uključujući i koordinatni pristup iz prvog primjera. On primjenjuje algebarske sadržaje u geometriji i obrnuto.

Vrijednost geometrijskih transformacija je prepoznata prije više od 30 godina, ali još uvijek mnogi kurikulumi njima ne pridaju dovoljno pozornosti.

Geometrijske transformacije uključuju translaciju, rotaciju, simetriju i homotetiju. One pružaju još jedan koristan pristup pri razumijevanju geometrijskih veza i odnosa te uzimaju u obzir sukladnost, sličnost i simetriju.

2.2.4 Geometrijske veze i modeli

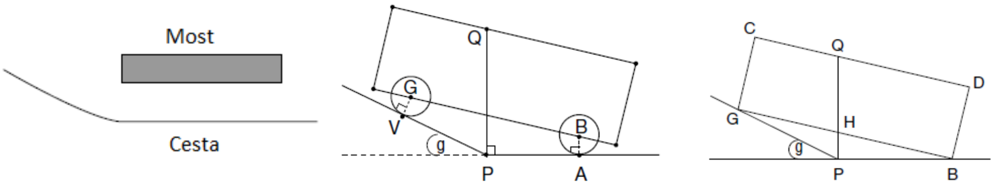
Veza između geometrije i algebre je vidljiva prilikom korištenja koordinatne geometrije kako bi se opravdala geometrijska svojstva. Geometrijske ideje povezuju se s idejama iz drugih područja matematike. Takve veze prirodno proizlaze i korisne su u situacijama matematičkog modeliranja.

Sljedeći primjer sadrži niz zadataka koji uključuju učenike u proces modeliranja koji obuhvaća sve elemente koji predstavljaju standarde matematičkog znanja. U njemu se ideje iz geometrije, trigonometrije, algebre, funkcija, brojeva i mjera koriste kako bi se modelirao problem koji je jednostavan za formulirati i započeti, ali kasnije postaje sve složeniji. Problem predstavlja situaciju iz stvarnog života: kamion se zaglavio ispod mosta. U prvom i drugom dijelu zadatka učenici prikupljaju neke informacije kao što je nagib mosta te stvaraju matematički model tako da pojednostave pretpostavke.

Primjer 4. *Most*

Matematičar Henry Pollak proučavao je zašto se prikolice traktora često zaglave ispod nekog podvožnjaka kada je „maksimalni razmak“ jasno označen znakom koji ukazuje visinu mosta. Most koji se razmatra je ravan i smješten u podnožju ceste koja se spušta (Slika 5*a).*

1. *U početnom zadatku učenici trebaju skicirati ovu situaciju i navesti pretpostavke do kojih su došli. Na slici je jedan par kotača prikolice podignut na padajućem dijelu cesta te zbog tog položaja je dio prikolice na većoj visini nego što bi bio na ravnoj površini. Pravo pitanje je koliko je prikolica viša. Model koji su učenici konstruirali najvjerojatnije ima ili posjeduje slične karakteristike kao slika* 5*b). Takav model treba sadržavati dužinu* $\overline{PQ}$ *koja predstavlja opasnu visinu na kojoj prikolica može udariti most. On može sadržavati pojednostavljene pretpostavke (kotači su prikazani pomoću krugova i cesta pomoću dvije ravne linije, odnosno dužine). Nakon rasprave učenici mogu odlučiti da u stupnjevima izmjere nagib ceste. U ovom primjeru je nagib ceste* g *ograničen na* $7°$*. Učenicima može biti dan model na računalu kako bi istražili promjene u različitim dimenzijama prikolice i mjesta koja mogu utjecati na opasnu visinu* PQ*. Jedna od varijabli je udaljenost prikolice od mosta. Druga, suptilnija varijabla je udaljenost između osovina kotača pri čemu dio prikolice koji prelazi osovine kotača ne utječe na visinu te se ona*



(a) (b) (c)

Slika 5

može ignorirati. Model se može dodatno pojednostaviti tako da se uklone kotači prikolice (Slika 5c*).*

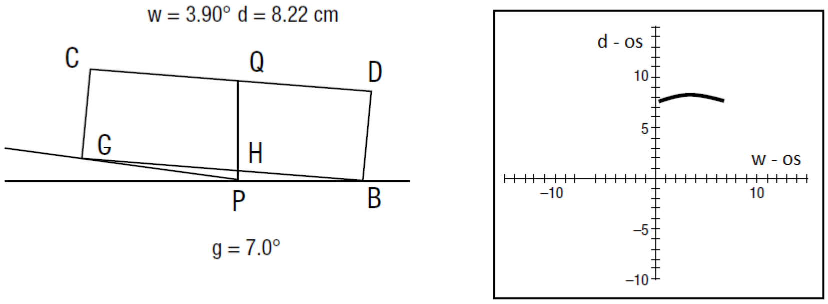
2. *U sljedećem zadatku se od učenika tražilo da ispitaju što su mogli propustiti ili pogrešno napraviti pri pojednostavljenju problema u prvom dijelu zadatka. Ovdje su učenici trebali uočiti da uklanjanjem kotača i spuštanjem prikolice ne smanjuju opasnu visinu za vrijednost jednaku promjeru kotača. Lijevi, podignuti kraj skraćene prikolice je spušten malo više nego desni te ovakva pozicija ima dodatan utjecaj na opasnu visinu. Analiziranje pojednostavljenog modela pomaže da analiziramo početnu situacija sa složenijim modelom u kojem prikolica ima kotače.*

3. *Iduće, neka d predstavlja duljinu $\overline{PQ}$, w mjeru kuta $\measuredangle PBH$ (nagib prikolice), s duljinu $\overline{PB}$ (koliko daleko se prikolica nalazi ispod mosta) te g nagib u stupnjevima. Učenici trebaju provjeriti kada je opasna visina d najveća s obzirom na w ili s ili oboje.*

   Jedna grupa je koristila program dinamične geometrije kako bi pratila graf opasne visine d kao funkciju od w kao što je prikazano na slici 6*. Stavili su da je $g = 7°$. Oni nisu mogli pronaći simbolički prikaz ove funkcije i koristili su nekoliko malih vrijednost za g. Svaki put je opasna visina bila veća od $w = \frac{g}{2}$.*

   Druga grupa je koristila velike kutove za nagib, na primjer 55°*, i za takve kutove zaključak prve grupe nije vrijedio. Drugi učenici su prigovorili ovoj grupi kako tako veliki nagib nije realan i da nije unutar granica modela.*

   Nakon dodatnog rada, treća grupa je prezentirala teorijske dokaze koji daju uvid i podržavaju tvrdnju da se maksimalna vrijednost opasne visine događa kada je $w = \frac{g}{2}$, pri čemu g ima male vrijednosti koje model dopušta.



Slika 6

4. *U zadnjem zadatku učenici trebaju izraziti opasnu visinu d koristeći nagib prikolice w. Dopušteno im je korištenje drugih mjera koji su povezani s modelom kao što je s (udaljenost prikolice ispod mosta prikazana dužinom $\overline{PB}$) te duljina skraćene prikolice koja je prikazana dužinom $\overline{GB}$ ili neke druge mjere vezane za ovu situaciju. Učenici su opet koristili trigonometriju jer se ona pokazala korisnom te su dobili formulu $d = s \cdot \operatorname{tg} w + \frac{h}{\cos w}$ pri čemu je h originalna visina traktora, odnosno $h = |QT|$.*

Za zadaću trebaju istražiti kolika prihvatljiva visina prikolice i koja je duljina prikolice između točaka G i B prihvatljiva. Dodatno, za $w = \frac{g}{2}$ i $|GB| = m$ trebaju odrediti vrijednost s. Kako bi to napravili trebaju odrediti vrijednost d.

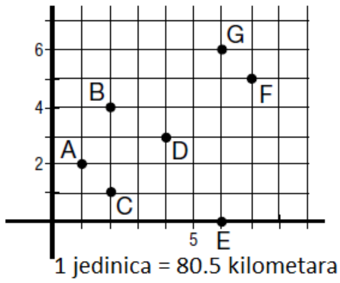
Učenici su odredili da je $h = 3$ metra i $m = 12$ metara. Trokut PGB je jednakokračan kada je $w = \frac{g}{2}$. Iz ovoga su dobili da je d iznosi 3.43 metra.

Gledajući vrijednost 7° kao mali broj možemo pretpostaviti da nagib ceste nije bitan. Međutim, ova analiza za ovaj realan primjer pokazuje da za početnu visinu prikolice od 3 metra, da je opasna visina barem 30 centimetara viša. Kao što je Pollak naveo, nagib ceste se ne može zanemariti.

Geometrija se proteže izvan dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih oblika u Euklidskom prostoru kako bi uključila druga specijalna svojstva i vizualizacije. Sljedeći primjer prikazuje postupak modeliranja u kojem najočitiji geometrijski model situacije - crtanje kružnica i traženje njihovih sjecišta kojima je središte lokacija radio stanice - nije najkorisniji. Bolje bi bilo koristiti osnovni prikaz iz teorije grafova kako bi se zabilježile bitne informacije u danom problemu.

Primjer 5. *Frekvencije radio postaja*

Trebaju se dodijeliti frekvencije sedam novih radio postaja prikazanih na slici 7. *Ovakvi zadaci se temelje na nekoliko uvjeta uključujući mogućnost stvaranja smetnji ako dodijelimo istu frekvenciju postajama koje su preblizu jedna drugoj. U ovoj pojednostavljenoj situaciji ako su dvije postaje udaljene manje od* 322 *kilometra jedna od druge stvaraju smetnje ako se emitiranje vrši na istoj frekvenciji, a postaje udaljene više od* 322 *kilometra mogu koristiti istu frekvenciju za emitiranje bez da stvaranju smetnje jedna drugoj.*



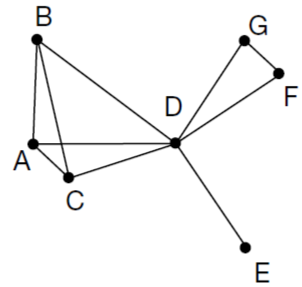
Slika 7

Kako se može iskoristiti graf pri dodjeljivanju frekvencija tako da se dodjeli najmanji mogući broj frekvencije te da niti jedna postaja ne ometa drugu? Što bi predstavljao svaki vrh grafa, a što brid? Koji je najmanji broj potrebnih frekvencija?

Učenici su radili u grupama. Sve grupe su se složila da vrh grafa predstavlja radio postaju te bi graf imao sedam vrhova. Neke grupe su odlučila napraviti model grafa u kojemu su dva vrha spojena bridom ako se nalaze unutar 322 *kilometra. Druge grupe su predložile da se dva vrha spoje bridom ako je njihova udaljenost veća od* 322 *kilometra. Nakon dodatne rasprave, odabrao se prvi prijedlog.*

Sljedeći je zadatak bio da konstruiraju takav graf. Kako bi to napravili moraju izračunati udaljenosti između svakog para radio postaja. Za izračun su koristili formulu udaljenost dvije točke ili Pitagorin teorem te kalkulator. Ovdje je bitna organizacija zbog brojnih izračuna. Neke grupe su računale udaljenost počevši od postaje A do ostalih šest postaja, zatim udaljenost od B pa do ostalih pet postaja i tako dalje. Određivanjem potrebnog broja izračuna može pomoći pri određivanju da li neka udaljenost nije izračunata.

Grupe su konstruirale grafove slične grafu na slici 8 *i onda su dodjeljivali*



Slika 8

frekvencije vrhovima tako da niti koja dva vrha spojena bridom nemaju istu frekvenciju. Traže metodu koja će koristiti najmanje frekvencija za ovaj graf. Jedna grupa je svoje rješenje objasnila na sljedeći način: Pronašli smo da je četiri najmanji broj frekvencija koji se može iskoristiti. Prvo smo gledali skup vrhova od A *do* D*. Svaki od tih vrhova je spojen bridom sa svim ostalim vrhovima iz toga skupa. Dakle, ne postoje dva vrha iz tog skupa koji imaju istu frekvenciju i to znači da ne možemo imati manje do četiri frekvencije. Nadalje, pretpostavimo da smo vrhu* A *dali frekvenciju* 1*, vrhu* B *frekvenciju* 2*, vrhu* C *frekvenciju* 3 *i vrhu* D *frekvenciju* 4*. Zadatak možemo dovršiti tako da frekvenciju* 1 *damo vrhu* G *(zato što* G *ne ometa postaju* A*),* 2 *dodijelimo* F*, i* 3 *dodijelimo* E*. Ovo dokazuje da ne trebamo koristiti više od četiri frekvencije.*

Primjetite da prikaz problema o frekvencijama pomoću grafova olakšava strukturiranje argumenata da su dovoljne četiri frekvencije - čak i algoritam zadavanja frekvencija u ovom primjeru. Pronalaženje učinkovitih algoritama za analogne problema najmanjih frekvencija za veće grafove ostaje aktivno područje u sadašnjem matematičkom istraživanju. Slični algoritmi mogu biti korisni u mnogim situacijama.

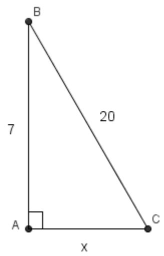
2.3 Četiri razine složenosti

Wong i Bukalov su nastavnu jedinicu podijelili na paralelne zadatke kako bi omogućili učenicima da istovremeno rješavaju isti zadatak bez obzira na to što se nalaze na različitim razinama razumijevanja te lekcije. Zadatak je podijeljen na četiri dijela prema razinama složenosti, a učenici samostalno odabiru svoju razinu te imaju slobodu pomicanja među tim razinama. Oni mogu pratiti svoj napredak te na taj način znaju što trebaju napraviti kako bi prešli na veću razinu. Nastavni sat se sastoji od uvodne rasprave u kojoj sudjeluju svi učenici, samostalnog rada pod nadzorom nastavnika te zaključka u kojem sudjeluju svi učenici. Njihov model je jednostavan kako bi ga ostali nastavnici, učenici i roditelji mogli razumjeti.

Podjelom problema na četiri razine, pitanja na svakoj razini postaju složenija nego što su bila na prethodnoj.

Zadaci s ovih razina se nalaze na jednom radnom listiću koji je podijeljen svim učenicima kako bi mogli vidjeti pitanja sa svih razina. Učenici sami odabiru s koje će razine početi rješavati zadatke. Slabiji učenici mogu vježbati zadatke s nižih razina kako bi došli do viših. Neki učenici mogu odabrati razinu koja zahtjeva bolje razumijevanje nastavne jedinice nego što oni posjeduju te se onda vraćaju na nižu, dok neki mogu otkriti da znaju riješiti zadatke sa zahtjevnijih razina nego što su mislili u početku. Nastavnici trebaju podupirati učenike da rješavaju zadatke s viših razina ako su im zadaci na nižim prelagani i trebaju pružiti pomoć onima koji ne mogu sami odabrati prikladnu razinu

Prva razina je najjednostavnija i sadrži zadatke koji se mogu riješiti direktnom uporabom zadanih podataka, poznatih metoda ili formula. Obično zadaci s ove razine ne zahtijevaju od učenika korištenje preciznog matematičkog jezika. Zadatak koji se može pojaviti na ovoj razini od učenika može tražiti da sa slike 9 pronađu vrijednost x u najjednostavnijem zapisu. Učenici mogu odmah uočiti dvije katete i



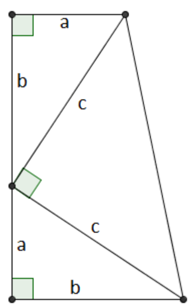
Slika 9

hipotenuzu trokuta te primijeniti Pitagorin poučak $a^2 + b^2 = c^2$. Ime teorema se ne treba navesti kao i razlog zašto je trokut ABC pravokutan.

Problem na drugoj razini zahtjeva dodatak korak izvan zadatka s prve razine. Ovdje zadaci mogu zahtijevati da učenici nacrtaju i precizno označe potrebne elemente kada slika nije zadana. Dodatno se od učenika može tražiti da algebarski zapišu zadatak koji je iskazan riječima. Uz zadatke na ovoj razini mogu postojati uputstva o metodi koja se treba koristiti kako bi se on mogao riješiti. Primjer zadatka s ove razine je *Duljine stranica trokuta su* $25, 7$ *i* 14. *Odredite da li je trokut pravokutan.* Kako bi učenici riješili ovaj zadatak trebaju prepoznati da stranica duljine 25 mora biti hipotenuza ako je trokut pravokutan. U ovom primjeru uputstvo je bilo da se odredi da li je trokut pravokutan.

Zadaci s treće razine traže od učenika da samostalno odrede koje su informacije potrebne za njihovo rješavanje. Uobičajeno je to nekoliko formula, teorema ili činjenica. Mogu se pojaviti i konstrukcije od više koraka te zadaci koji zahtijevaju primjenu nekoliko teorema. Ova razina ne zahtijeva primjenu deduktivnog razmišljanja za formalan zapis euklidskih dokaza. Od učenika se može tražiti da sami odaberu odgovarajuću metodu za rješavanje i da objasne svoje zaključke tako da navedu odgovarajuće definicije ili teoreme. Zadak s ove razine je *U jednakokračnom trapezu duljine baza su* 14 *cm i* 30 *cm. Duljine neparalelnih stranica su 10 cm. Izračunaj visinu trapeza.* Učenici u ovom zadatku trebaju povezati nekoliko ideja: pravilno crtanje skice i označavanje elemenata na njoj, prepoznavanje da visina dijeli trapez na dva pravokutna trokuta i pravokutnik te na kraju korištenje Pitagorinog teorema kako bi se izračunala visina.

Četvrta razina od učenika traži da koriste deduktivno razmišljanje kako bi dokazali matematičke tvrdnje. Učenici moraju imati vještine zaključivanja koje su dovoljno dobre za pisanje formalnih dokaza. Zadaci uključuju formalne dokaze. U zadatku na ovoj razini treba se objasniti kako slika 10 može biti iskorištena za dokaz Pitagorinog teorema.



Slika 10

Ova metoda nije prikladna za svaku nastavnu jedinicu. Neke teme zahtijevaju puno izravnih uputa i one bi se teško ostvarile koristeći samo paralelne zadatke.

Nastavnici trebaju biti oprezni prilikom odabira zadataka. Količina zadataka treba biti podjednaka na svim razinama. Postoje razine koje zahtijevaju puno manje vremena za rješavanje te učenici mogu završiti ranije dok ostali moraju još mnogo raditi kako bi završili zadatke svoje razine. Nekada se zadaci iz udžbenika mogu organizirati po razinama.

3 Zaključivanje i razumijevanje u algebri

Na školskoj razini algebra se može opisati kao:

- manipulacija i tranformacija izraza zapisanih simbolima,
- generalizacija pravaila o brojevima i uzorcima,
- proučavanje struktura i sustava dobivenih iz izračuna i odnosa,
- niz pravila o transformiranju i rješavanju jednadžbi,
- učenje o varijablama, funkcijama i izražavanju promjena i veza te
- matematičko modeliranje situacija unutar i izvan matematike.

Tradicionalnu sliku algebre čine zadaci pojednostavljivanja algebarskih izraza, rješavanja jednadžbi te učenja pravila za manipuliranje simbolima. Algebra se u školama predavala i učila kao niz procedura koje nisu povezane s drugim poljima matematike niti sa stvarnim životom učenika.

Stvaranje veza i primjena novo stečenog znanja nije u centru tradicionalne algebre. Korišteni zadaci iz primjene nisu stvarni kao na primjer zadaci s godinama i novcima. Učenicima nije dana prilika da iskoriste svoje iskustvo niti im je pružena potpora da tumače svoje znanje drugima. Umjesto toga, oni naučene procedure pamte kao operacije koje se provode nad nizom simbola i rješavaju zadatke koji nisu od nikakvog značaju u njihovim životima. Učenici se ne ocjenjuju prema njihovom razumijevanju matematičkih sadržaja i potrebnom zaključivanju nego prema njihovoj sposobnosti da za rješenje dobiju pravi niz simbola.

Algebarsko zaključivanje i algebarski prikazi, kao što su grafovi, tablice i formule, predstavljaju jedan od najsnažnijih intelektualnih alata. Algebarski zapis koji danas koristimo predstavlja veliki uspjeh jer nam dopušta kompaktan zapis složenih izračuna i problema. Međutim, upravo ta kompaktnost može biti zapreka u razumijevanju. Bez nekog algebarskog zapisa viša matematika ne bi mogla postojati pa onda ni tehnologija i moderan život kakvog znamo. Osnovni zadatak nastavnika je pomoći učenicima pri donošenju zaključaka bez obzira na tu zapreku. Izazov je u pronalasku načina kako algebru učiniti dostupnom svim učenicima, pronaći načine predavanja koji će učiniti atmosferu u razredu pogodnom za učenje s razumijevanjem.

Ključni elementi zaključivanja i razumijevanja algebarskih simbola uključuju:

- **smislenu uporabu simbola** - odabir varijabli te smislena konstrukcija izraza i jednadžbi, tumačenje oblika izraza i jednadžbi, manipulacija izrazima kako bi se mogla donijeti zanimljiva tumačenja;
- **promišljenu manipulaciju** - povezivanje manipulacija sa aritmetičkim pravilima, predviđanje rezultata manipulacija, odabir postupaka ovisno o smislu;
- **argumentirano rješavanje** - vidjeti korake rješenja kao zaključke o jednakosti, tumačenje rješenja u kontekstu;
- **povezivanje algebre s geometrijom** - algebarski prikaz geometrijskih situacija i geometrijski prikaz algebarskih situacija, korištenje veza za rješavanje problema te
- **povezivanje izraza i funkcija** - korištenje većeg broja algebarskih prikaza za razumijevanje funkcija; rad s funkcijskim zapisom.

Slijedi detaljan opis ključnih elemenata.

3.1 Smislena uporaba simbola

Kako bi učenici razumjeli algebarske simbole, moraju razumjeti osnovne operacije i postati tečni u pravilnom zapisivanju. Učenje značenja zapisa i simbola se čini najuspješnijima kada učenici znaju što se izražava i kada imaju dovoljno vremena da postanu tečni u korištenju algebarskog zapisa.

Smislena uporaba simbola uključuje pažljivo definiranje značenja simbola uvedenih u rješavanju problema, uključujući navođenje jedinica i razlikovanje varijabla koje se mogu pojaviti u tri različita slučaja - kao nepoznanice (na primjer: pronađi vrijednost Q tako da je $3Q - 4 = 11$), kao mjesta koja mogu primiti niz vrijednosti (na primjer: $a + c = c + a$ za sve a i c) i kao parametri funkcije (na primjer: Koja je posljedica povećanja m na grafu $y = mx + b$?)

Dugoročni cilj učenja algebre je tečnost, odnosno skoro automatska lakoća manipuliranja algebarskim izrazima koja može nalikovati na ono što se često zove nepromišljenom manipulacijom. Ova lakoća najbolje se može postići ako se prvo uči da je bitno dobro obratiti pažnju na tumačenje izraza na formalnoj razini i iskaza vezanih za situacije iz svakodnevnog života. Na početku naglasak treba biti na uputstvima pri donošenju i objašnjavanju zaključaka kod formiranja i manipuliranja matematičkim izrazima. Kako raste udobnost s algebarskim izrazima, njihovo konstruiranje i tumačenje zahtjeva sve manje napora i na kraju postaje skoro nesvjesno. Pravi temelj za algebarsku manipulaciju je usredotočenost na značenje i strukturu.

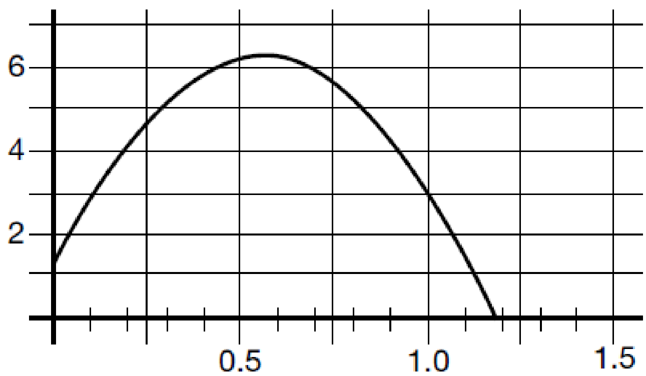
Zaključivanje temeljeno na algebarskim izrazima ovisi o mogućnosti njihovog čitanja na različite načine. Na primjer, vidimo $3-(4-x)^2$ kao 3 minus kvadratna veličina i time kao vrijednost manju ili jednaku od 3, kao funkciju $4-x$ i kao funkciju od x.

U sljedećem primjeru učenici trebaju interpretirati svrhu različitih oblika istog izraza.

Primjer 6. *Bacanje potkove*

Visina bačene potkove ovisi o vremenu koje je proteklo od trenutka kada je ona puštena kao što je prikazano na slici 11. *Uočite kako je graf parabola, ali ne mora biti isti kao graf put potkove. Visina (mjerena u metrima) je funkcija vremena (mjerenog u sekundama) od trenutka puštanja i dana je sljedećom formulom*

$$1\frac{3}{16}+18t-16t^2.$$



Slika 11

Izrazi od a) do d) su ekvivalentni.

a) $1\frac{3}{16} + 18t - 16t^2$

b) $-16(t - \frac{19}{16})(t + \frac{1}{16})$

c) $\frac{1}{16}(19 - 16t)(16t + 1)$

d) $-16(t - \frac{9}{16})^2 + \frac{100}{16}$

Koji izraz je najkorisniji za traženje maksimalne visine potkova i zašto?

Jedna grupa je izložila svoje rješenje. Eliminirali su izraz a) jer su zaključili da iz njega mogu odrediti početnu visinu i početnu brzinu. Izrazi b) i c) su skoro slični osim što je u c) iz faktora izlučen nazivnik i stavljen na početku izraza. Jedna osoba iz te grupe je iskoristila b) kako bi pronašao nultočke ($\frac{19}{16}$ *i* $-\frac{1}{16}$*) i polovište (*$\frac{9}{16}$*) koje bi trebalo predstavljati vrijeme kada je postignuta maksimalna visina. Na kraju su se odlučila za d) zato što je izraz* $-16(t - \frac{9}{16})^2$ *uvijek negativan ili je nula. Iz toga možemo vidjeti da visina nikad ne ide iznad* $\frac{100}{16}$ *stopa i da postiže tu visinu za* $t = \frac{9}{16}$ *sekundi, što je jednako polovištu dobivenom iz b).*

Ovaj primjer može izazvati zbunjenost učenika kod prikaza stvarnog leta nekog objekta (u ovom slučaju potkove) i grafa koji prikazuje vezu između vremena i visine. Nastavnici moraju biti osjetljivi na ovaj problem jer se on pojavljuje kod većine učenika. Kako bi ga razjasnili nastavnici mogu postavljati pitanja kao što je *Što mislite koliko daleko će potkova pasti?* ili *Kako usporediti skale dvije osi?*

3.2 Promišljena manipulacija

Promišljena manipulacija uključuje učenje algebarske manipulacije kao proces vođen razumijevanjem i ciljevima zadatka budući da osnovna pravila aritmetike daju obrazloženje za sve opravdane manipulacije polinomijalnih izraza. Od tih, svojstvo distribucije, jedino pravilo koje povezuje zbrajanje i množenje, je ono na koje se stalno moramo pozivati kada radimo nešto što istodobno uključuje obje operacije, uključujući široki raspon manipulacija: proširivanje, faktorizaciju, pojednostavljivanje, svođenje razlomaka na zajednički nazivnik i druge.

Sedmi primjer prikazuje razliku između nepromišljene i promišljene manipulacije prilikom množenja polinoma. Također prikazuje važnost organiziranja rješenja.

Primjer 7. *Distribucija*

Učenici trebaju proširiti sljedeća dva izraza:

a) $(1 + x^3)(1 + x + x^2)$

b) $(1 - x)(1 + x + x^2)$

Jedan učenik je za rješenje prvog zadatka dobio $1 + x^2 + x^3 + x^5$*. Drugi učenik ga je ispravio i rekao da je zaboravio produkte srednjeg člana,* x*, drugog faktora.*

Svojstvo distributivnosti znači da moramo pomnožiti svaki element jednog faktora sa svakim elementom drugog faktora i onda zbrojiti sve produkte. Tako dobijemo

$$\begin{aligned}(1+x^3)(1+x+x^2) &= 1\cdot 1+1\cdot x+1\cdot x^2+x^3\cdot 1+x^3\cdot x+x^3\cdot x^2\\ &= 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5.\end{aligned}$$

Dodatno je naveo da ovaj postupak zove "svaki sa svakim" te da voli vizualizirati korake i zapisati što je manje moguće. Na primjer, kada on primjeni postupak "svaki sa svakim" na

$$(1-x)(1+x+x^2) = 1+x+x^2-x-x^2-x^3 = 1-x^3,$$

vidi da kada se drugi i treći izraz pomnoži s 1 suprotni od prvog i drugog izraza pomnoženih s $-x$*, te na kraju može zapisati samo preostale izraze.*

3.3 Argumentirano rješavanje

Rješavanje jednadžbi je ciljno orijentiran proces logičkih argumenata. Temeljen je na općim principima jednakosti i procedurama algebarske manipulacije u skladu s aritmetičkim pravilima. Prilikom rješavanja problema korištenjem jednadžbi treba obratiti pozornost na sve teže probleme koji se protežu između granica aritmetike i algebre. Takvi problemi mogu pomoći učenicima da vide algebru kao smislenu aktivnost koja proširuje vještine rješavanja problema u domene kao što je aritmetika u kojoj je donošenje zaključaka postalo sve složenije i nespretnije. Učenicima može pomoći traženje paralela između algebarskih i aritmetičkih metoda kako bi shvatili da algebra nije nešto posve novo nego jednostavno moćniji alat pri bavljenju s problemima kojima je teže pristupiti na aritmetički način.

Osmim primjerom je ilustrirano argumentirano rješavanje jednadžbi. Iako je jedan učenik koristio standardni algebarski pristup, a ostali zaključivanje temeljeno na konkretnom kontekstu, koraci u njihovim rješenjima su u suštini jednaki. Primjeri ovakvog oblika mogu pomoći učenicima da vide algebru kao konkretno proširenje aritmetičkog zaključivanja.

Primjer 8. *Traženje ravnoteže*

Sapun na jednoj strani vage je u ravnoteži s $\frac{3}{4}$ *sapuna jednake težine i* $\frac{3}{4}$*-kilograma na drugoj strani. Koliko teži sapun? Zadatak riješi koristeći algebarske jednadžbe i direktnim aritmetičkim zaključivanjem.*

Učenik 1: *Ako je* x *težina sapuna u kilogramima, onda jedna strana vage teži* x *kilograma a druga strana teži* $\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$ *te iz toga vrijedi*

$$x = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}.$$

Oduzimanjem $\frac{3}{4}x$ *s obje strane dobivamo*

$$\frac{1}{4}x = \frac{3}{4}$$

te je $x = 3$.

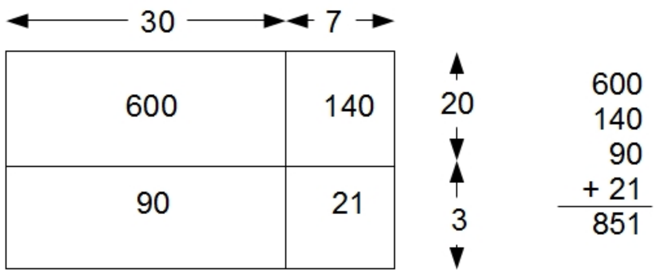
Učenik 2: *Lagano je i bez korištenja jednadžbe. Ako je jedan sapun u ravnoteži s* $\frac{3}{4}$ *drugog sapuna i* $\frac{3}{4}$ *kilograma, uzmimo* $\frac{3}{4}$ *sapuna s obje strane. Tada će na jednoj strani ostati* $\frac{3}{4}$ *sapuna, a na drugoj* $\frac{3}{4}$ *kg. Dakle, četvrtina sapuna teži* $\frac{3}{4}$ *kg. Cijeli sapun čine četiri četvrtine pa će to činiti* 3 *kg.*

Prvi učenik je uočio da je drugi učenik napravio istu stvar kao i on samo što nije koristio varijablu x.

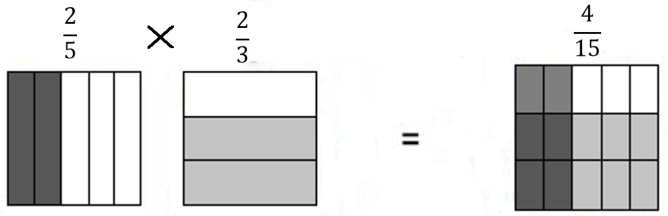
3.4 Povezivanje algebre s geometrijom

Između algebre i geometrije postoji uzajaman utjecaj: geometrijski prikazi kao što su grafovi i likovi mogu baciti svjetlo na algebarske izraze i jednadžbe te algebarski prikazi se mogu iskoristiti za utvrđivanje geometrijski odnosa.

Model površine koristi pravokutnik za množenje i dijeljenje cijelih brojeva i za množenje razlomaka (slika 12). Deveti primjer pokazuje kako se ovaj model može proširiti na geometrijski privlačan način kako bi se pomoglo učenicima u razumijevanju popunjavanja kvadrata koji je njima često tajanstven. Dodatno, ovaj primjer ilustrira snagu efikasnog prikaza kao bazu za zaključivanje i prikazuje kako otkrivena struktura u ovakvom prikazu može voditi do općeg rješenja.



(a) množenje cijelih brojeva



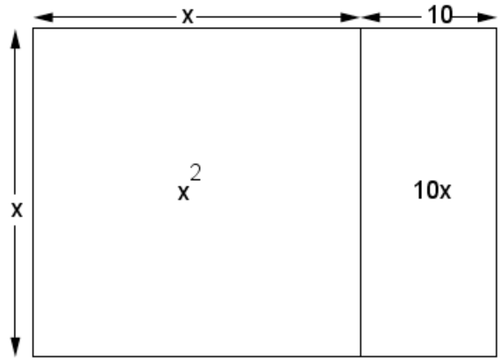
(b) množenje razlomaka

Slika 12: Model površine

Primjer 9. *Kvadriraj*

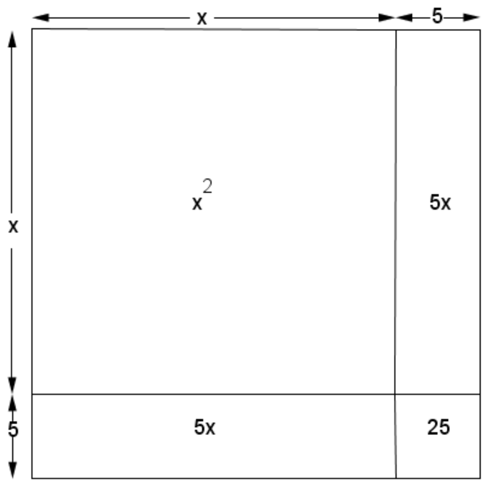
Učenici su u ovom primjeru trebali riješiti jednadžbu $x^2 + 10x = 144$ *koristeći model površine.*

Nastavnik: *Može li netko vidjeti kako treba misliti o* $x^2 + 10x$ *kao površini?*
Učenik 1: x^2 *je površina kvadrata sa stranicama* x*, a* $10x$ *je površina pravokutnika sa stranicama* 10 *i* x*, pa možemo spojiti pravokutnik i kvadrat kao na slici* 13*. Ali ne vidim kako to pomaže.*
Učenik 2: *Možda ako bi znali kolika je površina kvadrata možemo samo korjenovati kako bi pronašli* x*.*
Nastavnik: *Postoji li način kako bi mogli preurediti sliku tako da nalikuje kvadratu?*
Učenik 1: *Ako pravokutnik podijelimo u dva pravokutnika širine* 5*, možemo jedan staviti sa svake strane kao na slici* 14*.*
Učenik 2: *Ali to nije potpuni kvadrat jer nedostaje jedan kut.*
Nastavnik: *Kolika je površina tog kuta?*
Učenik 2: *Mora biti* 25 *jer se on podudara s rubovima pravokutnika i onda su njegove stranice duljine* 5*. Kako je sivo područje* 144*, površina velikog kvadrata je* $144 + 25 = 169$*.*
Učenik 1: *To znači da je duljine stranice kvadrata* 13 *pa iz* $x + 5 = 13$ *dobijemo da je* $x = 8$*.*



Slika 13

Učenik 2: Ne bi li trebalo postojati još neko rješenje s obzirom na to da $x + 5$ kvadriramo?



Slika 14

Nastavnik: Pogledajmo malo bolje. Možete li algebarski zapisati ono što se napravili?
Učenik 2: Započeli smo s $x^2 + 10x = 144$ i onda smo dodali 25 na 144. Mislim da to onda znači da smo dodali 25 na obje strane jednadžbe i dobili $x^2 + 10x + 25 = 169$.
Učenik 1: Kako bi dobili 25, podijelili smo 10 s 2 kako bi dobili 5 i onda to kvadrirali da dobijemo 25.
Učenik 2: Da i onda je lijeva strana potpuni kvadrat te smo dobili $(x + 5)^2 = 169$.
Učenik 1: Ovaj algebarski način nam daje oba rješenja zato što dobijemo $x + 5 = 13$

ili $x + 5 = -13$ *te iz toga izračunamo da je* $x = 8$ *ili* $x = -8$*, ali mislim da nam model površine ne može dati negativno rješenje.*
Nastavnik: *Odlično uočavanje. Proces dodavanja konstante kvadratnom izrazu kako bi dobili potpuni kvadrat zove se "svođenje na potpuni kvadrat". U geometrijskoj interpretaciji samo pronađete konstantu dodavanjem kuta koji nedostaje. Možete li vidjeti kako ovaj postupak radi i za druge kvadratne jednadžbe?*
Nastavnik može nastaviti ovu raspravu koja će voditi do razvoja kvadratne formule.

3.5 Povezivanja izraza i funkcija

Višestruki prikazi funkcija - simbolički, grafički, numerički i verbalni - su često prisutni. Različiti, ali ekvivalentni načini zapisivanja iste funkcije mogu otkriti različita svojstva funkcije kao što smo vidjeli u šestom primjeru.

Simbolički prikaz prelazi u višu razini kada počnemo koristiti slova za prikaz funkcija i uvođenje funkcijskog zapisa. Često se prijeđe preko važnosti ovog prijelaza. Srednjoškolci imaju teškoća s proširivanjem osnovnih aritmetičkih operacija na funkcije i s kompozicijama funkcija. Uvođenjem ovih iskustava u nastavu učenicima se može pomoći pri povećanju razumijevanja ovih koncepata i poboljšanju sposobnosti za stvaranjem veza.

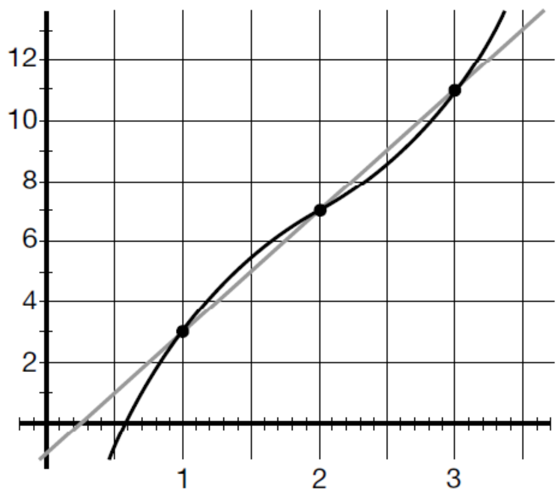
Gradnja tečnosti u radu s algebarskim zapisom koji je utemeljen na zaključivanju i razumijevanju, učenicima će osigurati fleksibilnost pri korištenju algebarskih alata u različitim situacijama unutar i izvan matematike.

Sljedeći primjer prikazuje snagu korištenja tehnologije za povezivanje funkcija i izraza u apstraktnom matematičkom kontekstu.

Primjer 10. *Funkcije*

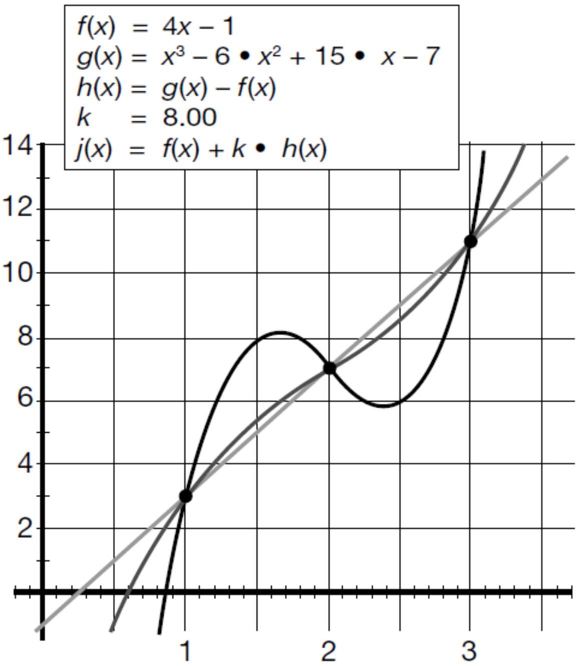
U nižim razredima učenici su se susretali sa zadacima u kojima su trebali pronaći sljedeći element niza poput $3, 7, 11$*. Jedno moguće rješenje je* 15*, ako pretpostavimo da je niz generiran vrijednostima* $f(x) = 4x - 1$ *za* $x = 1, 2, 3$*. Međutim jesu li to sva moguća rješenja?*
Nastavnik: *Pronađite niz generiran vrijednostima* $g(x) = x^3 - 6x^3 + 15x - 7$ *za* $x = 1, 2, 3$.
Učenik: *Dobio sam* $g(1) = 3, g(2) = 7$ *i* $g(2) = 11$*. To je isti niz:* $3, 7, 11$.
Nastavnik: *Koji bi bio idući član ako koristite* $g(x)$ *umjesto* $f(x)$*?*
Učenik: *Dobije se* $g(x) = 21$ *i to je drugačije od onoga što dobijemo kada koristimo* $f(x)$.

<u>Nastavnik:</u> *Možete li pronaći druge polinome koji generiraju niz* $3, 7, 11$*?*
<u>Učenik:</u> *Ja ne kužim kako ste vi uopće došli do ovog kuba za* g*.*
<u>Nastavnik:</u> *Što znači kada kažemo da je* $g(1) = 3$*?*
<u>Učenik:</u> *Znači da je* y *jednak* 3 *kada je* $x = 1$*.*



Slika 15

<u>Nastavnik:</u> *Kako onda mogu dvije različite funkcije,* f *i* g*, imati jednake vrijednosti za* $x = 1, 2, 3$*?*
<u>Učenik:</u> *Mislim da bi oba njihova grafa trebala imati iste vrijednosti za* y*. To bi onda značilo da se oni moraju sjeći u barem tri točke. Pričekajte malo dok ih ne nacrtam da provjerim. (Slika 15.) Da, kada sam ih nacrtao, vidim da graf pravca* $f(x)$ *siječe graf* $g(x)$ *za* $x = 1, 2, 3$*.*
<u>Nastavnik:</u> *Možeš li sada skužiti kako grafički pronaći druge polinome?*
<u>Učenik:</u> *Može mogu smisliti način kako promijeniti oblik kubnog grafa a da zadrži iste točke sjecišta.*
<u>Nastavnik:</u> *Kako bi to napravio algebarski?*
<u>Učenik:</u> *Mogu probati proširiti razliku između* $f(x)$ *i* $g(x)$ *koja je* $g(x) - f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$*. Na primjer, mogu to utrostručiti i dodati to na* $f(x)$ *i dobiti* $4x - 1 + 3(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = 3x^3 - 18x^2 + 37x - 19$*.*
<u>Nastavnik:</u> *Odlično. Postoji li nešto posebno kod polinoma* $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ *što čini da ovo funkcionira?*
<u>Učenik:</u> *Koliko ja vidim ne postoji.*



Slika 16

<u>Nastavnik:</u> Probaj to faktorizirati.
<u>Učenik:</u> Dobio sam $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$. *Vidim sada. Kada gledam faktorizirani oblik mogu vidjeti da je razlika između* $f(x)$ *i* $g(x)$ 0 *za* $x = 1, 2, 3$. *Iz toga mogu dobiti puno polinoma koji generiraju isti niz ako* $f(x)$ *dodam ovaj pomnoženi polinom.*
<u>Nastavnik:</u> Koji je opći oblik takvog polinoma?
<u>Učenik:</u> To je $4x - 1 + k(x-1)(x-2)(x-3)$ *gdje je* k *bilo koji realan broj. Kada to nacrtam (slika 16), mogu vidjeti da kako se* k *povećava graf polinoma se udaljava od pravca.*

Sažetak

Zaključivanje i razumijevanje smisla proučavanog sadržaja predstavljaja temelj matematike. Rekonstrukcijom matematičkih programa u školama povećava se učenikov razvoj u sadržajnom i proceduralnom znanju koji je potreban učenicima kako bi bili uspješni u nastavku učenja matematike i u svojim životima. Zaključivanje i razumijevanje matematičkih sadržaja su nerazdvojni u razvoju matematičke kompetencije te su usko povezani. Zaključivanje u matematici zahtjeva veću razinu razumijevanja. Povezivanje nastavnih jedinica predstavlja najbolju strategiju kojom učenici mogu razumiti cilj lekcije.

Geometrija nudi mnoge mogućnosti za razvoj navika zaključivanja kroz različite zanimljive primjere. Ključni elementi zaključivanja i razumijevanja geometrije obuhvaćaju pretpostavke o geometrijskim objektima, oblikovanje i vrednovanje geometrijskih argumenata, različite geometrijske pristupe te geometrijske veze i modele.

Ključni elementi zaključivanja u algebri su smislena uporaba simbola, promišljena manipulacija, argumentirano rješavanje zadataka, povezivanje s geometrijom te povezivanje izraza i funkcija. Dugoročni cilj učenja algebre je lakoća manipuliranja algebarskim izrazima.

Ključne riječi: zaključivanje, razumijevanje, geometrija, algebra

Summary

Reasoning and sense making of content that a person study represents the foundation of mathematics. Reconstruction of mathematical programs in schools increases students development in procedural way that is esential for successfull extension of the process of learning mathematics. Reasoning and sense making of mathematical content are inseparable in development of mathematical competence and are closely related. Reasoning in mathematics demands higher level of understanding. Connecting lectures represents the best strategy for understanding the point of lecture.

Geometry offers many opportunities for development of reasoning habits through different interesting examples. The key elements for reasoning and sense making of geometry covers conjectures about geometric objects, construction and evaluation of geometric arguments, multiple geometric approaches and geometric connections and modeling.

The key elements of reasoning with algebra are meaningful use of symbols, mindful manipulation, reasoned solving, conecting algebra with geometry and linking expressions and functions. Long term purpose of studying algebra is algebraic expression manipulating with easiness.

Keywords: reasoning, sense making, geometry, algebra

Literatura

[1] L. Bukalov, B. Wong, *Improving Student Reasoning in Geometry*, Mathematics Teacher, 107 (2013), 54-60.

[2] J. J. Kaput, *Teaching and Learning a New Algebra With Understanding*, University of Massachusetts-Dartmouth, 2000.

[3] G. Martin, *Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making*, NCTM, USA, 2009.

[4] D. A. Romano, *Van-Hielova teorija o učenju geometrije*, Metodički obzori: časopis za odgojno-obrazovnu teoriju i praksu, 4 (2009) 1-2, 95-103.

[5] *Levels of Mental Development in Geometry*, preuzeto s http://www.math.uiuc.edu/ castelln/VanHiele.pdf

Životopis

Rođena sam u Slavonskom Brodu 24.11.1993. godine. Osnovnu školu Antun Mihanović u Slavonskom Brodu završila sam 2008. godine te sam upisala Ekonomsko - birotehničku školu smjer ekonomist. 2012. godine sam upisala Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku.