

Riemann - Stieltjesov integral

Strmečki, Josip

Undergraduate thesis / Završni rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:336725>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-06**



mathos

Repository / Repozitorij:

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)



Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Josip Strmečki

Riemann-Stieltjesov integral

Završni rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Josip Strmečki

Riemann-Stieltjesov integral

Završni rad

Voditelj: izv. prof. dr. sc. Mihaela Ribičić Penava

Osijek, 2017.

Sadržaj

1	Lebesgue-Stieltjesov integral	3
2	Riemann-Stieltjesov integral i primjeri	7
2.1	Riemann-Stieltjesov integral	7
2.2	Svojstva Riemann-Stieltjesovog integrala	12
2.3	Računanje matematičkog očekivanja	15
2.4	Primjeri i zadaci	17
	Literatura	21

Riemann-Stieltjesov integral

Sažetak

U radu ćemo se baviti Riemann-Stieltjesovim integralom, njegovim svojstvima i primjenama. Dovedet ćemo u vezu Lebesgue-Stieltjesov i Riemann-Stieltjesov integral, kao i Riemann-Stieltjesov i Riemannov integral. Definirat ćemo pojmove kao što su matematičko očekivanje, Lebesgue-Stieltjesova mjera, disperzija, Lebesgue-Stieltjesov integral, te Lebesgueov integral kao poseban slučaj prethodno navedenog integrala. Najbitnije tvrdnje i teoreme, kao i svojstva Riemann-Stieltjesovog integrala ćemo dokazati. Također, uz primjere i zadatke pokazat ćemo kako se Riemann-Stieltjes integral koristi u praksi.

Ključne riječi

Riemann-Stieltjesov integral, matematičko očekivanje, Lebesgue-Stieltjesov integral, Riemannov integral.

Riemann-Stieltjes integral

Abstract

In this work our topic will be Riemann-Stieltjes integral, it's properties and applications. We will show the difference between Lebesgue-Stieltjes and Riemann-Stieltjes integral, as well as difference between Riemann-Stieltjes and Riemann integral. We will define terms such as mathematical expectation, Lebesgue-Stieltjes integral and Lebesgue integral as special case of Lebesgue-Stieltjes integral. Most important claims and theorems, as well as properties of Riemann-Stieltjes integral will be proved. Also, through examples and tasks we will demonstrate how is Riemann-Stieltjes integral used in practice.

Key words

Riemann-Stieltjes integral, mathematical expectation, Lebesgue-Stieltjes integral, Riemann integral.

Uvod

Veliki dio teorije vjerojatnosti bavi se proučavanjem slučajnih varijabli i njihovih svojstava. Tema ovog rada je Riemann - Stieltjesov integral i njegova svojstva, kao i primjene. Definirat ćemo najbitnije pojmove, te iskazati i dokazati neke nužne tvrdnje i teoreme. Neki od tih pojmova su matematičko očekivanje, Lebesgueova mjera, itd. Također ćemo definirati Lebesgue-Stieltjesov integral i pokazati neka njegova svojstva. Nadalje, uspostaviti ćemo vezu između Lebesgue-Stieltjes i Riemann-Stieltjesovog integrala. Osnovna svojstva Riemann-Stieltjesovog integrala ćemo iskazati i dokazati, kao i uvjete koje funkcija mora zadovoljavati da bi bila Riemann-Stieltjes integrabilna. Isto tako, zanimati će nas nepravi Riemann-Stieltjesov integral zbog čestog pojavljivanja u primjenama. Na kraju rada pokazat ćemo kada i kako je moguće integriranje po skupu Ω svesti na integriranje po \mathbb{R} . Uz to, navest ćemo konkretne primjere određivanja matematičkog očekivanja diskretnih i nekih tipova neprekidnih slučajnih varijabli.

1 Lebesgue-Stieltjesov integral

Jedan od osnovnih pojmova u teoriji vjerojatnosti je vjerojatnosni prostor (Ω, \mathcal{F}, P) . Vjerojatnosni prostor nam služi za proučavanje slučajnih pokusa. Jedna od osnovnih numeričkih karakteristika slučajne varijable je matematičko očekivanje. U slučaju da slučajna varijabla može poprimiti sve realne vrijednosti, odnosno, da ju promatramo nad općim vjerojatnosnim prostorom, zbog dobivanja sadržajne matematičke teorije, najbolje se koristiti Lebesgue-Stieltjesovim integralom. Ipak, u stvarnim problemima, računanje matematičkog očekivanja svodi se na računanje Riemann-Stieltjes ili najčešće Riemannova integrala.

Za početak, definirat ćemo najbitnije pojmove te istaknuti važne propozicije i teoreme. Pojmovi koji su bitni za ovo poglavlje su vjerojatnosni prostor, matematičko očekivanje, Lebesgue-Stieltjesova mjera i drugi.

Neka je Ω prostor elementarnih događaja, dakle, Ω je proizvoljan neprazan skup. Sa $\mathcal{P}(\Omega)$ označimo partitivni skup od Ω .

Definicija 1: ¹ *Familija \mathcal{F} podskupova od Ω ($\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$) jest σ -algebra skupova (na Ω) ako je*

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$.
2. $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$.
3. $A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Može se pokazati da je \mathcal{F} zatvorena na prebrojive presjeke i skupovne razlike.

Definicija 2: *Neka je \mathcal{F} σ -algebra na skupu Ω . Uređeni par (Ω, \mathcal{F}) zovemo **izmjeriv prostor**.*

Definicija 3: *Neka je (Ω, \mathcal{F}) izmjeriv prostor. Funkcija $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ jest **vjerojatnost** (na Ω , na \mathcal{F}) ako vrijedi*

1. $P(A) \geq 0, A \in \mathcal{F}; P(\Omega) = 1$.
2. $A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N}$ i $A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j \implies P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Definicija 4: *Uređenu trojku (Ω, \mathcal{F}, P) , gdje je \mathcal{F} σ -algebra na Ω i P vjerojatnost na \mathcal{F} , zovemo **vjerojatnosni prostor**.*

Svojstva pod 1 iz Definicije 3 su svojstva **nenegativnosti i normiranosti vjerojatnosti**, respektivno, a drugo je svojstvo **prebrojive ili σ -aditivnosti vjerojatnosti**. Na jeziku teorije mjere, vjerojatnost je normirana mjera, tako da ćemo umjesto vjerojatnosti nekada koristiti termin **vjerojatnosna mjera**. Elemente σ -algebre zovemo **događaji**, a broj $P(A), A \in \mathcal{F}$ zove se **vjerojatnost događaja A**.

¹definicije preuzete iz *Teorija vjerojatnosti*, N.Sarapa [3]

Označimo sa \mathcal{B} σ -algebru generiranu familijom svih otvorenih podskupova na \mathbb{R} . \mathcal{B} zovemo **σ -algebra Borelovih skupova na \mathbb{R}** , a elemente od \mathcal{B} zovemo **Borelovi skupovi**.

Prema definiciji slijedi da je svaki otvoren interval (a, b) , $a, b \in \mathbb{R}$ Borelov skup. Kako je \mathcal{B} σ -algebra slijedi da je i svaki zatvoren interval $[a, b]$ Borelov skup, jer je komplement otvorenog skupa.

Definicija 5: Neka je (Ω, \mathcal{F}, P) vjerojatnosni prostor. Funkcija $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jest **slučajna varijabla** (na Ω) ako je $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ za proizvoljno $B \in \mathcal{B}$, tj. $X^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{F}$.

Definicija 6: Neka je X slučajna varijabla na (Ω, \mathcal{F}, P) . X je **jednostavna slučajna varijabla** ako je njezino područje definicije konačan skup.

Jedan od osnovnih motiva za naše proučavanje Lebesgue-Stieltjesovog i Riemann-Stieltjesovog integrala je njihova primjena u računanju matematičkog očekivanja. Matematičko očekivanje je, jedna od **numeričkih karakteristika** slučajne varijable, odnosno služi nam za bolje predočavanje i definiranje slučajnih varijabli.

Za dobivanje prikladnih svojstava matematičkog očekivanja usvajamo sljedeća pravila za računanje u slupu $\overline{\mathbb{R}}^2$:

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \begin{cases} \infty & \text{ako je } a \in \overline{\mathbb{R}} \text{ i } a > 0 \\ -\infty & \text{ako je } a \in \overline{\mathbb{R}} \text{ i } a < 0 \end{cases},$$

$$0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0.$$

Neka je X slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) . Vrijedi $X = X^+ - X^-$, gdje je

$$X^+ = \max\{X, 0\} \geq 0, \quad X^- = \max\{-X, 0\} \geq 0.$$

Detalji o gornjem rastavu funkcije mogu se naći u ([3], 240. str.)

Neka je X nenegativna slučajna varijabla na Ω . Može se pokazati da je tada $X = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$, gdje je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ rastući niz nenegativnih jednostavnih slučajnih varijabli, i da je niz $(EX_n, n \in \mathbb{N})$ rastući niz u \mathbb{R}_+ . Vidi ([3], 288. str.)

Definicija 7: Matematičko očekivanje od X ili kraće **očekivanje** od X definira se sa

$$EX = \lim_{n \rightarrow \infty} EX_n.$$

Definirajmo sada matematičko očekivanje u općem slučaju. Neka je X proizvoljna slučajna varijabla na Ω .

Definicija 8: Kažemo da **matematičko očekivanje od X** ili, kraće **očekivanje od X** , koje označujemo s EX **postoji** ili da je **definirano** ako barem jedna od veličina EX^+ ili EX^- konačna, tj. vrijedi

$$\min\{EX^+, EX^-\} < \infty.$$

Gdje je $X = X^+ - X^-$, a X^+, X^- su **pozitivan i negativan dio realne funkcije**. Tada stavljamo

$$EX = EX^+ - EX^-. \quad (1)$$

Budući da je dekompozicija slučajne varijable na njen pozitivan i negativan dio jedinstvena, očekivanje je dobro definirano.

² $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Definicija 9: Funkciju $K_A : S \rightarrow \{0, 1\}$, gdje je $A \subseteq S$, S proizvoljan skup, definiranu formulom

$$K_A(a) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$$

nazivamo **karakteristična funkcija** skupa A .

U teoriji vjerojatnosti za matematičko očekivanje često se koriste oznake

$$EX = \int_{\Omega} X dP = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega) = \int_{\Omega} X(\omega) P d\omega$$

Definicija 10: Neka je $A \in \mathcal{F}$ proizvoljan događaj. Izrazom

$$\int_A X dP = \int_{\Omega} X K_A dP = E(X K_A)$$

definiramo integral koji zovemo **Lebesgue-Stieltjesov integral** od X u odnosu na vjerojatnosnu mjeru P po skupu A .

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ proizvoljan prostor s mjerom (μ može primati i vrijednosti $+\infty$) i $g : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ izmjeriva funkcija. Tada se Lebesgue-Stieltjesov integral $\int_{\Omega} g d\mu$ definira analogno.

Definicija 11: **Lebesgue-Stieltjesova mjera na \mathbb{R}** jest mjera $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$ takva da je $\mu(I) < \infty$ za svaki ograničeni interval $I \subset \mathbb{R}$.

Neka je $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ rastuća i neprekidna zdesna funkcija. Može se dokazati da relacija

$$\mu(a, b] = F(b) - F(a)$$

uspostavlja 1-1 korespondenciju između Lebesgue-Stieltjesovih mjera i rastućih neprekidnih zdesna funkcija na \mathbb{R} .

Prema tome, svaka rastuća neprekidna zdesna funkcija na \mathbb{R} generira jednoznačno mjeru na \mathbb{R} . Posebno je važna mjera generirana funkcijom $F(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Nju zovemo **Lebesgueova mjera** na \mathbb{R} i označavamo s λ

Za matematičku analizu posebno je važan slučaj $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}$, $\mu = \lambda$ -Lebesgueova mjera. Integral $\int_{\mathbb{R}} g(x) d\lambda(x)$ zovemo **Lebesgueov integral funkcije** g i često ga označavamo s $(L) \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx$ da bismo naznačili razliku od Riemannova integrala.

Također, ako je μ Lebesgue-Stieltjesova mjera na \mathbb{R} i ako je $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ rastuća i neprekidna zdesna funkcija koja odgovara μ , tada integral $\int_{\mathbb{R}} g(x) d\mu(x)$ često označavamo (L-S) $\int_{\mathbb{R}} g dF$.

Ako neko svojstvo koje ovisi o točkama skupa Ω vrijedi u svim točkama od Ω osim eventualno podskupa od Ω , koji je događaj i ima vjerojatnost nula, kažemo da je to svojstvo ispunjeno **gotovo sigurno** (g.s.) na Ω . Sljedeće propozicije i teoreme koji su bitni u daljnjem radu navodimo bez dokaza. Detalji se mogu naći u ([3], str. 294-296).

Propozicija 1:³

1. Ako je $X = 0$ (g.s.) tada je $EX = 0$.
2. Ako je $X = Y$ (g.s.) i $X \in \mathcal{L}(P)$, tada je $Y \in \mathcal{L}(P)$ i vrijedi $EX = EY$.

Propozicija 2:

1. Neka je $X \geq 0$ i $EX = 0$. Tada je $X = 0$ (g.s.).
2. Neka je $X \in \mathcal{L}(P)$, $Y \in \mathcal{L}(P)$ i neka je $E(XK_A) \leq E(YK_A)$ za sve $A \in \mathcal{F}$. Tada je $X \leq Y$ (g.s.). Specijalno, ako je $E(XK_A) = E(YK_A)$ za sve $A \in \mathcal{F}$, tada je $X = Y$ (g.s.).
3. Neka je $X : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (proširena) slučajna varijabla i neka je $E|X| < \infty$. Tada je $|X| < \infty$ (g.s.).

Teorem 1: Lebesgueov teorem o monotonoj konvergenciji

Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ rastući niz nenegativnih slučajnih varijabli i neka je (g.s.) $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$. Tada je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EX_n = EX.$$

Teorem 2: Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji

Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih varijabli takav da je (g.s.) $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ i neka je $|X_n| \leq Y$ (g.s.) za sve n , pri čemu je $Y \in \mathcal{L}(P)$. Tada je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EX_n = EX.$$

³ $\mathcal{L}(P)$ označava skup svih slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) koje imaju konačno matematičko očekivanje.

2 Riemann-Stieltjesov integral i primjeri

2.1 Riemann-Stieltjesov integral

Prethodno smo matematičko očekivanje slučajne varijable X definirali kao Lebesgue-Stieltjesov integral od X u odnosu na vjerojatnosnu mjeru P . Takva definicija je pogodna zbog mnogih dobrih svojstava Lebesgue-Stieltjesovog integrala. Međutim, Riemannov integral je najpogodniji za primjene, ali je definiran samo za funkcije na \mathbb{R} , odnosno na \mathbb{R}^* . Konstrukcije Lebesgueova i Riemannova integrala radikalno se razlikuju. U Lebesgueovoj konstrukciji točke $x \in \mathbb{R}$ grupiraju se na osnovi bliskosti vrijednosti funkcije koju integriramo (provodimo particiju osi ordinata), dok u Riemannovoj konstrukciji točke x grupiramo na osnovu njihove bliskosti s osi apscisa.

Neka je $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotonu rastuća i neprekidna zdesna funkcija (**poopćena funkcija distribucije**) i neka je μ_F Lebesgue-Stieltjesova mjera na \mathbb{R} koja odgovara F . Može se pokazati da tada za $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ vrijedi $\mu_F(a, b] = F(b) - F(a)$.

Neka je $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ograničena funkcija.

Particija \mathcal{P} od $[a, b]$ jest konačan skup točaka x_0, x_1, \dots, x_n takav da je $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Stavimo

$$M_i = \sup \{g(y); x_{i-1} < y \leq x_i\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$m_i = \inf \{g(y); x_{i-1} < y \leq x_i\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

i definirajmo gornje i donje sume sa

$$U(\mathcal{P}, g, F) = \sum_{i=1}^n M_i [F(x_i) - F(x_{i-1})], \quad (2)$$

$$L(\mathcal{P}, g, F) = \sum_{i=1}^n m_i [F(x_i) - F(x_{i-1})]. \quad (3)$$

Definirajmo jednostavne funkcije g_U, g_L sa

$$g_U(x) = M_i \text{ za } x_{i-1} < x \leq x_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$g_L(x) = m_i \text{ za } x_{i-1} < x \leq x_i, \quad i = 1, \dots, n$$

i $g_U(a) = g_L(a) = g(a)$. Pretpostavimo da je funkcija F neprekidna u točki a . Tada je

$$U(\mathcal{P}, g, F) = (L - S) \int_a^b g_U(x) dF(x) = \int_a^b g_U d\mu_F,$$

$$L(\mathcal{P}, g, F) = (L - S) \int_a^b g_L(x) dF(x) = \int_a^b g_L d\mu_F.$$

Particija \mathcal{P}' **profinjuje** particiju \mathcal{P} ako je $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$.

Teorem 3: Ako particija \mathcal{P}' profinjuje particiju \mathcal{P} , tada je

$$L(\mathcal{P}, g, F) \leq L(\mathcal{P}', g, F) \quad (4)$$

$$U(\mathcal{P}', g, F) \leq U(\mathcal{P}, g, F) \quad (5)$$

DOKAZ: Da bi dokazali (4), pretpostavimo prvo da \mathcal{P}' sadrži samo jednu točku više nego \mathcal{P} . Označimo tu dodatnu točku s x^* i pretpostavimo da je $x_{i-1} < x^* < x_i$, gdje su x_{i-1} i x_i dvije uzastopne točke iz \mathcal{P} .

Stavimo

$$w_1 = \inf g(x), \quad (x_{i-1} < x < x^*)$$

$$w_2 = \inf g(x), \quad (x^* < x < x_i)$$

Očito je $w_1 \geq m_1$ i $w_2 \geq m_1$, gdje je

$$m_1 = \inf g(x), \quad (x_{i-1} < x < x_i).$$

Stoga

$$\begin{aligned} & L(\mathcal{P}', g, F) - L(\mathcal{P}, g, F) \\ &= w_1[F(x^*) - F(x_{i-1})] + w_2[F(x_i) - F(x^*)] - m_1[F(x_i) - F(x_{i-1})] \\ &= (w_1 - m_1)[F(x^*) - F(x_{i-1})] + (w_2 - m_1)[F(x_i) - F(x^*)] \geq 0. \end{aligned}$$

Ako \mathcal{P}' sadrži k točaka više nego \mathcal{P} , tada ponavljajući gornji postupak dolazimo do (4). Dokaz za (5) provodi se analogno. \square

Neka je sada $(\mathcal{P}_n, n \in \mathbb{N})$ niz particija od $[a, b]$ takav da je $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1}$ za sve n i neka je $\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathcal{P}_n| = 0$. Tada za jednostavne funkcije g_{U_n}, g_{L_n} pridružene particijama $\mathcal{P}_n (n \in \mathbb{N})$, prema gornjem vrijedi

$$g_{U_1} \geq g_{U_2} \geq \dots \geq g \geq \dots \geq g_{L_2} \geq g_{L_1}.$$

Odavde slijedi da postoje funkcije $\bar{g} = \lim_n g_{U_n}$ i $g = \lim_n g_{L_n}$ i da je $g \leq \bar{g}$. Ako je $|g| \leq M$ na $[a, b]$, tada je $|g_{U_n}| \leq M, |g_{L_n}| \leq M$, pa prema Teoremu o dominiranoj konvergenciji (Teorem 2) slijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(\mathcal{P}_n, g, F) = (L - S) \int_a^b \bar{g}(x) dF(x), \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(\mathcal{P}_n, g, F) = (L - S) \int_a^b g(x) dF(x). \quad (7)$$

Definicija 12: Ako su limesi u (6) i (7) konačni, podudaraju se i njihova zajednička vrijednost ne zavisi od izbora niza particija $(\mathcal{P}_n, n \in \mathbb{N})$, tada kažemo da je funkcija g **Riemann - Stieltjes integrabilna na $[a, b]$ u odnosu na F i označavamo**

$$(R - S) \int_a^b g(x) dF(x) \text{ ili } (R - S) \int_a^b g(x) F(dx). \quad (8)$$

U slučaju da je $F(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, integral (8) se svodi na Riemannov integral. Prema tome, sva svojstva Riemann - Stieltjesova integrala vrijede i za Riemannov integral. Za teoriju vjerojatnosti vrlo je važna sljedeća propozicija.

Propozicija 3: *Ako je funkcija g neprekidna na $[a, b]$, tada je ona Riemann - Stieltjes integrabilna i vrijedi*

$$(L - S) \int_a^b g(x)dF(x) = (R - S) \int_a^b g(x)dF(x).$$

DOKAZ: *Budući da je g neprekidna na $[a, b]$, imamo $\bar{g} = \lim_n g_{U_n} = g$, $g = \lim_n g_{L_n} = g$, pa vrijedi*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(\mathcal{P}_n, g, F) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(\mathcal{P}_n, g, F) = (L - S) \int_a^b g(x)dF(x). \quad \square$$

Sljedeći teorem generalizira tu tvrdnju.

Teorem 4: *Ako je g Riemann - Stieltjes integrabilna na $[a, b]$, tada je ona i Lebesgue - Stieltjes integrabilna na $[a, b]$ i vrijedi*

$$(R - S) \int_a^b g(x)dF(x) = (L - S) \int_a^b g(x)dF(x).$$

DOKAZ: *Neka je $(\mathcal{P}_n, n \in \mathbb{N})$ niz particija od $[a, b]$, $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1}$ za sve n i $|\mathcal{P}_n| \rightarrow 0$ za $n \rightarrow \infty$. Tada iz gore navedenog slijedi*

$$\begin{aligned} (R - S) \int_a^b g(x)dF(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} U(\mathcal{P}_n, g, F) = (L - S) \int_a^b \bar{g}(x)dF(x) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} L(\mathcal{P}_n, g, F) = (L - S) \int_a^b g(x)dF(x). \end{aligned}$$

Iz $g \leq \bar{g}$ i Propozicije 2 slijedi $g = g = \bar{g}$ (g.s.) (μ_F) . Odatavde slijedi da je g izmjeriva, a prema Propoziciji 1 imamo

$$(L - S) \int_a^b g(x)dF(x) = (L - S) \int_a^b \bar{g}(x)dF(x) = (L - S) \int_a^b g(x)dF(x). \quad \square$$

Može se dokazati da je ograničena funkcija g Riemann-Stieltjes integrabilna na $[a, b]$ u odnosu na F ako i samo ako je g neprekidna (g.s.) (μ_F) na $[a, b]$.

Primjedba 1: Neka je g Riemann-Stieltjes integrabilna na $[a, b]$ u odnosu na funkciju F i neka F nije neprekidna u točki a . Lagano se pokaže da je tada

$$\begin{aligned} (R - S) \int_a^b g(x) dF(x) &= (R - S) \int_{[a, b]} g(x) dF(x) \\ &= (R - S) \int_{(a, b]} g(x) dF(x) + g(a)[F(a) - F(a-)] \\ &= (R - S) \int_{a+0}^b g(x) dF(x) + g(a)[F(a) - F(a-)]. \end{aligned}$$

Prema tome, vidimo da dodavanje jedne točke području integracije može dovesti do promjene vrijednosti integrala.

Ako je F neprekidna u točki a , imamo

$$(R - S) \int_a^b dF(x) = F(b) - F(a),$$

a ako F u točki a ima prekid, vrijedi

$$(R - S) \int_a^b dF(x) = F(b) - F(a-).$$

Primjedba 2: Neka je \mathcal{P} particija od $[a, b]$ zadana s $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Neka je \tilde{x}_i proizvoljna točka u intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, n$). Stavimo

$$S(\mathcal{P}, g, F) = \sum_{i=1}^n g(\tilde{x}_i)[F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

Neka je $(\mathcal{P}_n, n \in \mathbb{N})$ niz particija od $[a, b]$ takva da je $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1}$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathcal{P}_n| = 0$. Može se dokazati da je g Riemann-Stieltjes integrabilna na $[a, b]$ u odnosu na F ako i samo ako postoji $\lim_{n \rightarrow \infty} S(\mathcal{P}_n, g, F)$ koji je konačan i ne ovisi od izbora particija niti od izbora točaka \tilde{x}_i .

U tom slučaju vrijedi

$$(R - S) \int_a^b g(x) dF(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(\mathcal{P}_n, g, F). \quad (9)$$

To znači da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za proizvoljnu particiju \mathcal{P} , takvu da je $|\mathcal{P}| < \delta$ vrijedi

$$|(R - S) \int_a^b g(x) dF(x) - S(\mathcal{P}, g, F)| < \varepsilon, \quad (10)$$

neovisno o izboru točaka \tilde{x}_i .

Teorem 5: Funkcija g je Riemann-Stieltjes integrabilna u odnosu na F ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji particija \mathcal{P} takva da je

$$U(\mathcal{P}, g, F) - L(\mathcal{P}, g, F) < \varepsilon.$$

Teorem 6: Neka je g Riemann-Stieltjes integrabilna na $[a, b]$, u odnosu na F , $m \leq g \leq M$, ϕ neprekidna funkcija na $[m, M]$ i $h(x) = \phi(g(x))$ na $[a, b]$. Tada je h Riemann-Stieltjes integrabilna u odnosu na F na $[a, b]$.

DOKAZ: Odaberimo $\varepsilon > 0$. Kako je ϕ uniformno neprekidna na $[m, M]$, postoji $\delta > 0$ takav da je $\delta < \varepsilon$ i $|\phi(s) - \phi(t)| < \varepsilon$ ako je $|s - t| < \delta$ i $s, t \in [m, M]$.

Kako je g Riemann-Stieltjes integrabilna, prema Teoremu 5 postoji particija $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ segmenta $[a, b]$ takva da je

$$U(\mathcal{P}, g, F) - L(\mathcal{P}, g, F) < \delta^2. \quad (11)$$

Neka su

$$M_i = \sup \{g(y); x_{i-1} < y \leq x_i\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$m_i = \inf \{g(y); x_{i-1} < y \leq x_i\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

i neka su M_i^* i m_i^* analogni brojevi za funkciju h . Podijelimo brojeve u dvije klase: $i \in A$ ako je $M_i - m_i < \delta$ te $i \in B$ ako je $M_i - m_i \geq \delta$.

Za $i \in A$, slijedi da je $M_i^* - m_i^* \leq \varepsilon$. Za $i \in B$ vrijedi $M_i^* - m_i^* \leq 2K$, gdje je $K = \sup |\phi(t)|$, $m \leq t \leq M$ iz (11) imamo

$$\delta \sum_{i \in B} \Delta F_i \leq \sum_{i \in B} (M_i - m_i) \Delta F_i < \delta^2 \quad (12)$$

tako da je $\sum_{i \in B} \Delta F_i \leq \delta$. Sada slijedi da je

$$U(\mathcal{P}, h, F) - L(\mathcal{P}, h, F) = \sum_{i \in A} (M_i - m_i) \Delta F_i + \sum_{i \in B} (M_i - m_i) \Delta F_i$$

$$\leq \varepsilon[F(b) - F(a)] + 2K\delta < \varepsilon[F(b) - F(a) + 2K].$$

Kako je ε proizvoljan, iz Teorema 5 slijedi da je h Riemann-Stieltjes integrabilna. \square

2.2 Svojstva Riemann-Stieltjesovog integrala

Sljedeća svojstva lako dobijemo iz definicije integrala, dokazi svih svojstava mogu se naći u ([2], 128.-130. str.).

Teorem 7: 1. Neka su g_1 i g_2 Riemann-Stieltjes integrabilne. Tada je $g_1 + g_2$ Riemann-Stieltjes integrabilna funkcija i vrijedi

$$(R - S) \int_a^b [g_1(x) + g_2(x)]dF(x) = (R - S) \int_a^b g_1(x)dF(x) + (R - S) \int_a^b g_2(x)dF(x).$$

2. Neka je g Riemann-Stieltjes integrabilna. Tada je i cg Riemann-Stieltjes integrabilna za svaku konstantu $c \in \mathbb{R}$ i vrijedi

$$(R - S) \int_a^b cg(x)dF(x) = (R - S) c \int_a^b g(x)dF(x).$$

3. Neka su g_1 i g_2 Riemann-Stieltjes integrabilne. Ako je $g_1(x) \leq g_2(x)$ za sve $x \in [a, b]$ tada je

$$(R - S) \int_a^b g_1(x)dF(x) \leq (R - S) \int_a^b g_2(x)dF(x).$$

4. Neka je g Riemann-Stieltjes integrabilna na $[a, b]$ te $a < c < b$. Tada je

$$(R - S) \int_a^b g(x)dF(x) = (R - S) \int_a^c g(x)dF(x) + (R - S) \int_c^b g(x)dF(x).$$

5. Ako je g Riemann-Stieltjes integrabilna na $[a, b]$ i ako vrijedi $|g(x)| \leq M$ na $[a, b]$ tada je

$$|(R - S) \int_a^b g(x)dF(x)| \leq M[F(b) - F(a)].$$

6. Ako je g Riemann-Stieltjes integrabilna u odnosu na F_1 te u odnosu na F_2 tada vrijedi

$$(R - S) \int_a^b g(x)d[F_1(x) + F_2(x)] = (R - S) \int_a^b g(x)dF_1(x) + (R - S) \int_a^b g(x)dF_2(x).$$

7. Neka je g Riemann-Stieltjes integrabilna u odnosu na F . Ako je c pozitivna konstanta tada vrijedi

$$(R - S) \int_a^b g(x)d[cF(x)] = (R - S) c \int_a^b g(x)dF(x).$$

ДОКАЗ: Ako je $g = g_1 + g_2$ i \mathcal{P} bilo koja particija od $[a, b]$, tada imamo

$$L(\mathcal{P}, g_1, F) + L(\mathcal{P}, g_2, F) \leq L(\mathcal{P}, g, F) \leq U(\mathcal{P}, g, F) \leq U(\mathcal{P}, g_1, F) + U(\mathcal{P}, g_2, F). \quad (13)$$

Prvo ćemo dokazati da ako su g_1 i g_2 (R-S) integrabilne, tada je i $g = g_1 + g_2$ (R-S) integrabilna. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan, postoje particije \mathcal{P}_1 i \mathcal{P}_2 takve da je

$$U(\mathcal{P}_1, g_1, F) - L(\mathcal{P}_1, g_1, F) < \varepsilon,$$

$$U(\mathcal{P}_2, g_2, F) - L(\mathcal{P}_2, g_2, F) < \varepsilon.$$

Gornje nejednakosti ostaju valjane ako \mathcal{P}_1 i \mathcal{P}_2 zamijenimo particijom \mathcal{P} koja je njihovo zajedničko profinjenje. Tada (11) povlači

$$U(\mathcal{P}, g, F) - L(\mathcal{P}, g, F) < 2\varepsilon, \quad (14)$$

što znači da je g (R-S) integrabilna. Nadalje imamo

$$U(\mathcal{P}, g_j, F) < \int g_j dF + \varepsilon \quad (j = 1, 2), \quad (15)$$

pa (11) povlači

$$\int g dF \leq U(\mathcal{P}, g, F) < \int g_1 dF + \int g_2 dF + 2\varepsilon.$$

Kako je ε proizvoljan, zaključujemo da je

$$\int g dF \leq \int g_1 dF + \int g_2 dF. \quad (16)$$

Ako u (14) g_1 i g_2 zamijenimo s $-g_1$ i $-g_2$ dobijamo obrnutu nejednakost, iz čega slijedi jednakost integrala. \square

Dokazi ostalih tvrdnji teorema vrlo su slični gornjem dokazu, pa ćemo ih izostaviti.

Primjedba 3: Iz egzistencije jednog od integrala $(R-S) \int_a^b g(x)dF(x)$ odnosno $(R-S) \int_a^b F(x)dg(x)$ slijedi egzistencija drugog i vrijedi

$$(R-S) \int_a^b g(x)dF(x) + (R-S) \int_a^b F(x)dg(x) = g(b)F(b) - g(a)F(a). \quad (17)$$

Gornju relaciju zovemo **formula parcijalne integracije**.

Da bismo dokazali ovu relaciju pretpostavimo da postoji $(R-S) \int_a^b F(x)dg(x)$. Za particiju \mathcal{P} od $[a, b]$ načinimo sumu

$$S(\mathcal{P}, g, F) = \sum_{i=1}^n g(\tilde{x}_i)[F(x_i) - F(x_{i-1})]. \quad (18)$$

Za $\tilde{x}_0 = a$ vrijedi

$$\begin{aligned} S(\mathcal{P}, g, F) &= - \sum_{i=1}^n F(x_{i-1})[g(\tilde{x}_i) - g(\tilde{x}_{i-1})] - F(x_0)g(\tilde{x}_0) + F(x_n)g(\tilde{x}_n) \\ &= g(b)F(b) - g(a)F(a) - \{F(b)[g(b) - g(\tilde{x}_n)] + \sum_{i=1}^n F(x_{i-1})[g(\tilde{x}_i) - g(\tilde{x}_{i-1})]\}. \end{aligned}$$

Izraz u vitičastoj zagradi odgovara integralnoj sumi za $(R-S) \int_a^b F(x)dg(x)$. U teoriji vjerojatnosti često srećemo nepravu Riemann-Stieltjesove odnosno Riemannove integrale.

Definicija 13: Neka je F poopćena funkcija distribucije na \mathbb{R} i neka je $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija, takva

da za svaki segment $[a, b]$ postoji integral $(R-S) \int_a^b g(x)dF(x)$. Ako postoji

$$\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} (R-S) \int_a^b g(x)dF(x)$$

i ako je taj limes konačan, onda ga zovemo **nepravu Riemann-Stieltjesov integral** od g i označavamo

$$(R-S) \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x).$$

Teorem 8: Neka je $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nenegativna funkcija i neka g ima nepravi Riemann-Stieltjesov integral. Tada je g Lebesgue-Stieltjes integrabilna na \mathbb{R} (u odnosu na μ_F) i vrijedi

$$(R - S) \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x) = (L - S) \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x) = \int_{\mathbb{R}} g d\mu_F.$$

DOKAZ: Za $n \in \mathbb{N}$ stavimo $g_n = gK_{[-n,n]}$. Za svako n postoji $(R - S) \int_{-n}^n g(x) dF(x)$ i prema Teoremu 3 vrijedi

$$(R - S) \int_{-n}^n g(x) dF(x) = \int_{-n}^n g d\mu_F = \int_{\mathbb{R}} gK_{[-n,n]} d\mu_F = \int_{\mathbb{R}} g_n d\mu_F.$$

Imamo $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots$ i $g = \lim_n g_n$, pa prema Lebesgueovom teoremu o monotonij konvergenciji (Teorem 1) slijedi

$$\int_{\mathbb{R}} g d\mu_F = \lim_n \int_{\mathbb{R}} g_n d\mu_F = \lim_n (R - S) \int_{-n}^n g(x) dF(x) = (R - S) \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x). \quad \square$$

2.3 Računanje matematičkog očekivanja

Neka je X slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) , neka je P_x vjerojatnosna mjera inducirana na X i neka je F_x funkcija distribucije od X . Tada vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 9: Ako je $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Borelova funkcija, tada za proizvoljno $B \in \mathcal{B}$ vrijedi

$$\int_{X^{-1}(B)} g(X) dP = \int_B g dP_x = (L - S) \int_B g(x) dF_x(x)$$

DOKAZ: Uzmimo prvo da je $g = K_E$, $E \in \mathcal{B}$. Tada zbog $K_E(X) = K_{X^{-1}(E)}$ gornja jednakost prelazi u

$$P(X^{-1}(E \cap B)) = P_X(E \cap B)$$

što je istina prema definiciji od P_X . Ako je g nenegativna jednostavna Borelova funkcija, $g = \sum_{i=1}^k x_i K_{E_i}$, $x_i \geq 0$, $E_i \in \mathcal{B}$, tada zbog linearnosti integrala i ranije dokazanog slijedi

$$\int_{X^{-1}(B)} g(X) dP = \sum_{i=1}^k x_i \int_{X^{-1}(B)} K_{E_i}(X) dP = \sum_{i=1}^k x_i \int_B K_{E_i} dP_X = \int_B g dP_X. \quad (19)$$

Neka je sada g nenegativna Borelova funkcija. Tada postoji rastući niz $(g_n, n \in \mathbb{N})$ nenegativnih jednostavnih Borelovih funkcija takav da je $g = \lim_n g_n$.

Iz Lebesgueova teorema o monotonij konvergenciji slijedi

$$\int_{X^{-1}(B)} g(X)dP = \lim_n \int_{X^{-1}(B)} g_n(X)dP = \lim_n \int_B g_n dP_X = \int_B g dP_X,$$

dakle jednakost iz teorema vrijedi za nenegativne Borelove funkcije.

Neka je sada $g = g^+ - g^-$ ($g^+, g^- \geq 0$) proizvoljna Borelova funkcija. Ako je $\int_B g^+ dP_X < \infty$, tada je

$\int_{X^{-1}(B)} g^+(x)dP < \infty$, a odatle slijedi ako jedan od integrala u tvrdnji teorema postoji, tada postoji

i drugi i vrijednosti su im jednake. \square

Ako sada stavimo $B = \mathbb{R}$ dobijamo

$$E[g(X)] = \int_{\Omega} g(X)dP = \int_{\mathbb{R}} g dP_X = (L - S) \int_{\mathbb{R}} g(x)dF_x(x).$$

Gornji izraz i tvrdnja prethodnog teorema ključni su za teoriju vjerojatnosti zbog toga što integriranje po Ω svode na integriranje po \mathbb{R} . Ako sada stavimo $g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ dobijemo

$$EX = \int_{\mathbb{R}} x dP_X = (L - S) \int_{-\infty}^{\infty} x dF_x(x). \quad (20)$$

Dovedimo još u vezu Riemann-Stieltjesov i klasični Riemannov integral. Sljedeća konstrukcija preuzeta je iz ([1], 10. str.)

Neka je F po dijelovima konstantna na intervalu $[a, b]$, sa skokom iznosa p u točki c unutar tog intervala:

$$F(x) = \begin{cases} r, & x \leq c \\ r + p, & x > c. \end{cases} \quad (21)$$

Neka je g neprekidna na $[a, b]$. Izračunajmo sada Riemann-Stieltjesov integral funkcije g u odnosu na funkciju F na intervalu $[a, b]$.

Za bilo koju particiju vrijedi $F(x_i) - F(x_{i-1}) = 0$ za svaki indeks i osim za onaj za koji je $x_{i-1} \leq c < x_i$, jer je F konstantna lijevo i desno od točke c . Zato u integralnoj sumi ostaje jedino član

$$S(\mathcal{P}, g, F) = g(\tilde{x}_i)[F(x_i) - F(x_{i-1})] = g(\tilde{x}_i)p.$$

U limesu kada $\Delta \rightarrow 0$, točka \tilde{x} teži ka c . Zato je

$$\int_a^b g(x)dF(x) = g(c) \cdot p. \quad (22)$$

Ako F ima skokove iznosa p_i u točkama c_i , za njen Riemann-Stieltjesov integral vrijedi

$$\int_a^b g(x)dF(x) = \sum_{i=1}^n g(c_i) \cdot p_i. \quad (23)$$

Neka je sada F neprekidno diferencijabilna. Tada, po teoremu srednje vrijednosti imamo $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, za neku točku $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$. Integralna suma glasi

$$\sum_{i=1}^n g(\tilde{x}_i)F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \quad (24)$$

Limes integralne sume (23) očito definira Riemannov integral, pa je

$$\int_a^b g(x)dF(x) = \int_a^b g(x)F'(x)dx. \quad (25)$$

2.4 Primjeri i zadaci

Daljni primjeri i zadaci preuzeti su iz ([1], 12 str.) i ([3], 307-309 str.). Pogledajmo kako sada formula (19) izgleda za dva, u primjenama, najvažnija tipa slučajnih varijabli. Neka je X diskretna slučajna varijabla zadana zakonom razdiobe

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}$$

Tada je vjerojatnosna mjera P_x koncentrirana na diskretnom skupu $D = \{x_1, x_2, \dots\}$ i za svako k vrijedi

$$E[g(X)] = \sum_k g(x_k)p_k.$$

Gornji red interpretira se kao

$$\sum_k g^+(x_k)p_k - \sum_k g^-(x_k)p_k$$

i jedna od ovih suma mora biti konačna. U daljnjim primjerima ćemo izostavljati oznake ispred integrala, jer će biti jasno o kojem se integralu radi.

Neka je sada X neprekidna slučajna varijabla. U primjerima koji slijede navest ćemo najvažnije tipove neprekidnih slučajnih varijabli i izračunati njihova matematička očekivanja.

1. Neka X ima uniformnu razdiobu na segmentu $[a, b]$. Tada je matematičko očekivanje dano s

$$EX = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{a+b}{2}.$$

2. Neka X ima eksponencijalnu razdiobu s parametrom λ ($\lambda > 0$). Tada je

$$EX = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[-\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \right] = \frac{1}{\lambda}.$$

3. Neka X ima dvostranu eksponencijalnu razdiobu s parametrom λ ($\lambda > 0$). Tada je

$$EX = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\lambda|x|} dx = 0,$$

jer je podintegralna funkcija neparna.

4. Neka X ima jediničnu Cauchyjevu razdiobu s parametrom λ ($\lambda > 0$). Tada je

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_x(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{x dx}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{\pi} \ln(1+x^2) \Big|_0^{\infty} = \infty.$$

Odavde slijedi da $|X|$ nije integrabilna, dakle ni X nije integrabilna, odnosno, to znači da X nema očekivanje.

Pokažimo sada na primjerima računanje Riemann-Stieltjesovog integrala.

Zadatak 1: Izračunati $\int_0^1 x dx^2$.

Rješenje: Označimo $g(x) = x$, $F(x) = x^2$. Kako je funkcija g ograničena na $[0, 1]$ i F je neprekidno derivabilna, prema relaciji (25) je

$$\int_0^1 x dx^2 = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Zadatak 2: Izračunati Riemann-Stieltjesov integral $\int_0^\pi x d \cos(x)$.

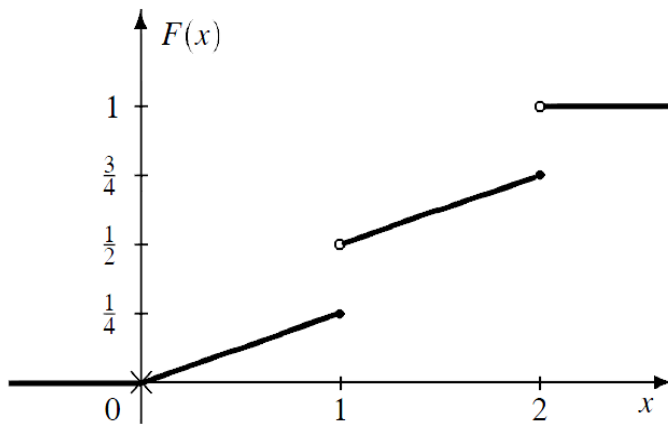
Rješenje: Prema formuli parcijalne integracije (17) slijedi

$$\int_0^\pi x d \cos x + \int_0^\pi \cos x dx = \pi \cos(\pi) - 0(\cos(0)),$$

$$\int_0^\pi x d \cos x + \sin x \Big|_0^\pi = -\pi,$$

$$\int_0^\pi x d \cos x = -\pi.$$

Zadatak 3: Izračunati očekivanje slučajne varijable čija je funkcija razdiobe zadana slikom.



Rješenje: Funkcija razdiobe glasi

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{4}x, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}, & 1 < x \leq 2, \\ 1, & 2 \leq x. \end{cases}$$

F ima skokove iznosa $\frac{1}{4}$ u točkama $x = 1$ i $x = 2$. Zato je

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) \\ &= \int_0^1 x F'(x) dx + 1 \cdot \frac{1}{4} + \int_1^2 x F'(x) dx + 2 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \int_0^1 \frac{x}{4} dx + \frac{1}{4} + \int_1^2 \frac{x}{4} dx + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Literatura

- [1] N. ELEZOVIĆ, *Vjerojatnost i statistika, Slučajne varijable*, Element, Zagreb, 2007.
- [2] W. RUDIN, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Inc., New York, 1976.
- [3] N. SARAPA, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.