Riemann - Stieltjesov integral

Strmečki, Josip

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku

Odjel za matematiku

Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Josip Strmečki

Riemann-Stieltjesov integral

Završni rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku

Odjel za matematiku

Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Josip Strmečki

Riemann-Stieltjesov integral

Završni rad

Voditelj: izv. prof. dr. sc. Mihaela Ribičić Penava

Osijek, 2017.

Sadržaj

Riemann-Stieltjesov integral

Sažetak

U radu ćemo se baviti Riemann-Stieltjesovim integralom, njegovim svojstvima i primjenama. Dovest ćemo u vezu Lebesgue-Stieltjesov i Riemann-Stieltjesov integral, kao i Riemann-Stieltjesov i Riemannov integral. Definirat ćemo pojmove kao što su matematičko očekivanje, Lebesgue-Stieltjesova mjera, disperzija, Lebesgue-Stieltjesov integral, te Lebesgueov integral kao poseban slučaj prethodno navedenog integrala. Najbitnije tvrdnje i teoreme, kao i svojstva Riemann-Stieltjesovog integrala ćemo dokazati. Također, uz primjere i zadatke pokazat ćemo kako se Riemann-Stieltjes integral koristi u praksi.

Ključne riječi

Riemann-Stieltjesov integral, matematičko očekivanje, Lebesgue-Stieltjesov integral, Riemannov integral.

Riemann-Stieltjes integral

Abstract

In this work our topic will be Riemann-Stieltjes integral, it's properties and applications.We will show the difference between Lebesgue-Stieltjes and Riemann-Stieltjes integral, as well as difference between Riemann-Stieltjes and Riemann integral. We will define terms such as mathematical expectation, Lebesgue-Stieltjes integral and Lebesgue integral as special case of Lebesgue-Stieltjes integral. Most important claims and theorems, as well as properties of Riemann-Stieltjes integral will be proved. Also, through examples and tasks we will demonstrate how is Riemann-Stieltjes integral used in practice.

Key words

Riemann-Stieltjes integral, mathematical expectation, Lebesgue-Stieltjes integral, Riemann integral.

Uvod

Veliki dio teorije vjerojatnosti bavi se proučavanjem slučajnih varijabli i njihovih svojstava. Tema ovog rada je Riemann - Stieltjesov integral i njegova svojstva, kao i primjene. Definirat ćemo najbitnije pojmove, te iskazati i dokazati neke nužne tvrdnje i teoreme. Neki od tih pojmova su matematičko očekivanje, Lebesgueova mjera, itd. Također ćemo definirati Lebesgue-Stieltjesov integral i pokazati neka njegova svojstva. Nadalje, uspostavit ćemo vezu između Lebesgue-Stieltjes i Riemann-Stieltjesovog integrala. Osnovna svojstva Riemann-Stieltjesovog integrala ćemo iskazati i dokazati, kao i uvjete koje funkcija mora zadovoljavati da bi bila Riemann-Stieltjes integrabilna. Isto tako, zanimati će nas nepravi Riemann-Stieltjesov integral zbog čestog pojavljivanja u primjenama. Na kraju rada pokazat ćemo kada i kako je moguće integriranje po skupu Ω svesti na integriranje po $\mathbb{R}$. Uz to, navest ćemo konkretne primjere određivanja matematičkog očekivanja diskretnih i nekih tipova neprekidnih slučajnih varijabli.

1 Lebesgue-Stieltjesov integral

Jedan od osnovnih pojmova u teoriji vjerojatnosti je vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Vjerojatnosni prostor nam služi za proučavanje slučajnih pokusa. Jedna od osnovnih numeričkih karakteristika slučajne varijable je matematičko očekivanje. U slučaju da slučajna varijabla može poprimiti sve realne vrijednosti, odnosno, da ju promatramo nad općim vjerojatnosnim prostorom, zbog dobivanja sadržajne matematičke teorije, najbolje se koristiti Lebesgue-Stieltjesovim integralom. Ipak, u stvarnim problemima, računanje matematičkog očekivanja svodi se na računanje Riemann-Stieltjes ili najčešće Riemmanova integrala.
Za početak, definirat ćemo najbitnije pojmove te istaknuti važne propozicije i teoreme. Pojmovi koji su bitni za ovo poglavlje su vjerojatnosni prostor, matematičko očekivanje, Lebesgue-Stieltjesova mjera i drugi.
Neka je Ω prostor elementarnih događaja, dakle, Ω je proizvoljan neprazan skup. Sa $\mathcal{P}(\Omega)$ označimo partitivni skup od Ω.

Definicija 1: [1] *Familija $\mathcal{F}$ podskupova od Ω ($\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$) jest σ-**algebra skupova** (na Ω) ako je*

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$.
2. $A \in \mathcal{F} \implies A^C \in \mathcal{F}$.
3. $A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{A_i} \in \mathcal{F}$.

Može se pokazati da je $\mathcal{F}$ zatvorena na prebrojive presjeke i skupovne razlike.

Definicija 2: *Neka je $\mathcal{F}$ σ-algebra na skupu Ω. Uređeni par $(\Omega, \mathcal{F})$ zovemo **izmjeriv prostor.***

Definicija 3: *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor. Funkcija $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ jest **vjerojatnost** (na Ω, na $\mathcal{F}$) ako vrijedi*

1. $P(A) \geq 0, A \in \mathcal{F}; P(\Omega) = 1$.
2. $A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N}$ *i* $A_i \cap Aj = \emptyset$ *za* $i \neq j \implies P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Definicija 4: *Uređenu trojku $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdje je $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω i P vjerojatnost na $\mathcal{F}$, zovemo **vjerojatnosni prostor**.*

Svojstva pod 1 iz Definicije 3 su svojstva **nenegativnosti i normiranosti vjerojatnosti**, respektivno, a drugo je svojstvo **prebrojive ili σ-aditivnosti vjerojatnosti.** Na jeziku teorije mjere, vjerojatnost je normirana mjera, tako da ćemo umjesto vjerojatnosti nekada koristiti termin **vjerojatnosna mjera.** Elemente σ-algebre zovemo **događaji**, a broj P(A), $A \in \mathcal{F}$ zove se **vjerojatnost događaja** A.

[1]definicije preuzete iz *Teorija vjerojatnosti*, N.Sarapa [3]

Označimo sa $\mathcal{B}$ σ-algebru generiranu familijom svih otvorenih podskupova na $\mathbb{R}$. $\mathcal{B}$ zovemo **σ-algebra Borelovih skupova na $\mathbb{R}$**, a elemente od $\mathcal{B}$ zovemo **Borelovi skupovi.**
Prema definiciji slijedi da je svaki otvoren interval (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$ Borelov skup. Kako je $\mathcal{B}$ σ-algebra slijedi da je i svaki zatvoren interval $[a, b]$ Borelov skup, jer je komplement otvorenog skupa.

Definicija 5: *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ jest* ***slučajna varijabla*** *(na Ω) ako je $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ za proizvoljno $B \in \mathcal{B}$, tj. $X^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{F}$.*

Definicija 6: *Neka je X slučajna varijabla na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. X je* ***jednostavna slučajna varijabla*** *ako je njezino područje definicije konačan skup.*

Jedan od osnovnih motiva za naše proučavanje Lebesgue-Stieltjesovog i Riemann-Stieltjesovog integrala je njihova primjena u računanju matematičkog očekivanja. Matematičko očekivanje je, jedna od **numeričkih karakteristika** slučajne varijable, odnosno služi nam za bolje predočavanje i definiranje slučajnih varijabli.

Za dobivanje prikladnih svojstava matematičkog očekivanja usvajamo sljedeća pravila za računanje u slupu $\overline{\mathbb{R}}^2$:

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \begin{cases} \infty \; ako\, je \; a \in \overline{\mathbb{R}} \; i \; a > 0 \\ -\infty \; ako\, je \; a \in \overline{\mathbb{R}} \; i \; a < 0 \end{cases} \quad ,$$

$$0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0.$$

Neka je X slučajna varijabla na vjeroajtnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Vrijedi X $= X^+ - X^-$, gdje je

$$X^+ = max\{X, 0\} \geq 0, \; X^- = max\{-X, 0\} \geq 0.$$

Detalji o gornjem rastavu funkcije mogu se naći u ([3], 240. str.)
Neka je X nenegativna slučajna varijabla na Ω. Može se pokazati da je tada $X = \lim_{n\to\infty} X_n$, gdje je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ rastući niz nenegativnih jednostavnih slučajnih varijabli, i da je niz $(EX_n, n \in \mathbb{N})$ rastući niz u $\mathbb{R}_+$. Vidi ([3], 288. str.)

Definicija 7: ***Matematičko očekivanje*** *od X ili kraće očekivanje od X definira se sa*

$$EX = \lim_{n\to\infty} EX_n.$$

Definirajmo sada matematičko očekivanje u općem slučaju. Neka je X proizvoljna slučajna varijabla na Ω.

Definicija 8: *Kažemo da* ***matematičko očekivanje od*** X *ili, kraće* ***očekivanje od*** X*, koje označujemo s* EX ***postoji*** *ili da je* ***definirano*** *ako barem jedna od veličina* EX^+ *ili* EX^- *konačna, tj. vrijedi*

$$min\{\mathrm{EX}^+, \; \mathrm{EX}^-\} < \infty.$$

Gdje je $\mathrm{X} = \mathrm{X}^+ - \mathrm{X}^-$, *a* $\mathrm{X}^+, \mathrm{X}^-$ ***su pozitivan i negativan dio realne funkcije.*** *Tada stavljamo*

$$\mathrm{EX} = \mathrm{EX}^+ - \mathrm{EX}^-. \tag{1}$$

Budući da je dekompozicija slučajne varijable na njen pozitivan i negativan dio jedinstvena, očekivanje je dobro definirano.

[2] $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Definicija 9: *Funkciju $K_A : S \to \{0,1\}$, gdje je $A \subseteq S$, S proizvoljan skup, definiranu formulom*

$$K_A(a) = \begin{cases} 1\ , & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$$

*nazivamo **karakteristična funkcija** skupa A.*

U teoriji vjerojatnosti za matematičko očekivanje često se koriste oznake

$$\mathrm{EX} = \int_\Omega \mathrm{X} dP = \int_\Omega \mathrm{X}(\omega)\ dP(\omega) = \int_\Omega \mathrm{X}(\omega)\ Pd\omega$$

Definicija 10: *Neka je $\mathrm{A} \in \mathcal{F}$ proizvoljan događaj. Izrazom*

$$\int_\mathrm{A} \mathrm{X} dP = \int_\Omega \mathrm{X} K_A dP = \mathrm{E}(\mathrm{X}K_A)$$

definiramo integral koji zovemo Lebesgue-Stieltjesov integral od X u odnosu na vjerojatnosnu mjeru P po skupu A.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ proizvoljan prostor s mjerom (μ može primati i vrijednosti $+\infty$) i $\mathrm{g} : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ izmjeriva funkcija. Tada se Lebesgue-Stieltjesov integral $\int_\Omega \mathrm{g} d\mu$ definira analogno.

Definicija 11: ***Lebesgue-Stieltjesova mjera na** $\mathbb{R}$ jest mjera $\mu : \mathcal{B} \to [0,\infty]$ takva da je $\mu(I) < \infty$ za svaki ograničeni interval $I \subset \mathbb{R}$.*

Neka je $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rastuća i neprekidna zdesna funkcija. Može se dokazati da relacija

$$\mu(a,b] = F(b) - F(a)$$

uspostavlja 1-1 korespondenciju između Lebesgue-Stieltjesovih mjera i rastućih neprekidnih zdesna funkcija na $\mathbb{R}$.

Prema tome, svaka rastuća neprekidna zdesna funkcija na $\mathbb{R}$ generira jednoznačno mjeru na $\mathbb{R}$. Posebno je važna mjera generirana funkcijom $F(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$. Nju zovemo **Lebesgueova mjera** na $\mathbb{R}$ i označavamo s λ
Za matematičku analizu posebno je važan slučaj $\Omega = \mathbb{R},\ \mathcal{F} = \mathcal{B},\ \mu = \lambda$ -Lebesgueova mjera. Integral $\int_\mathbb{R} \mathrm{g}(\mathrm{x}) d\lambda(\mathrm{x})$ zovemo **Lebesgueov integral funkcije** g i često ga označavamo s $(L) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{g}(\mathrm{x}) d\mathrm{x}$ da bismo naznačili razliku od Riemannova integrala.
Također, ako je μ Lebesgue-Stieltjesova mjera na $\mathbb{R}$ i ako je $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rastuća i neprekidna zdesna funkcija koja odgovara μ, tada integral $\int_\mathbb{R} \mathrm{g}(\mathrm{x}) d\mu(\mathrm{x})$ često označavamo (L-S) $\int_\mathbb{R} \mathrm{g} d\mathrm{F}$.

Ako neko svojstvo koje ovisi o točkama skupa Ω vrijedi u svim točkama od Ω osim eventualno podskupa od Ω, koji je događaj i ima vjerojatnost nula, kažemo da je to svojstvo ispunjeno **gotovo sigurno** (g.s.) na Ω. Sljedeće propozicije i teoreme koji su bitni u daljnjem radu navodimo bez dokaza. Detalji se mogu naći u ([3], str. 294-296).

Propozicija 1: [3]

1. *Ako je* $X = 0$ *(g.s.) tada je* $EX = 0$.

2. *Ako je* $X = Y$ *(g.s.) i* $X \in \mathcal{L}(P)$, *tada je* $Y \in \mathcal{L}(P)$ *i vrijedi* $EX = EY$.

Propozicija 2:

1. *Neka je* $X \geq 0$ *i* $EX = 0$. *Tada je* $X = 0$ *(g.s.).*

2. *Neka je* $X \in \mathcal{L}(P)$, $Y \in \mathcal{L}(P)$ *i neka je* $E(XK_A) \leq E(YK_A)$ *za sve* $A \in \mathcal{F}$. *Tada je* $X \leq Y$ *(g.s.). Specijalno, ako je* $E(XK_A) = E(YK_A)$ *za sve* $A \in \mathcal{F}$, *tada je* $X = Y$ *(g.s.).*

3. *Neka je* $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *(proširena) slučajna varijabla i neka je* $E|X| < \infty$. *Tada je* $|X| < \infty$ *(g.s.).*

Teorem 1: *Lebesgueov teorem o monotonoj konvergenciji*
Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *rastući niz nenegativnih slučajnih varijabli i neka je (g.s.)* $\lim_{n\to\infty} X_n = X$. *Tada je*

$$\lim_{n\to\infty} EX_n = EX.$$

Teorem 2: *Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji*
Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *niz slučajnih varijabli takav da je (g.s.)* $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ *i neka je* $|X_n| \leq Y$ *(g.s.) za sve n, pri čemu je* $Y \in \mathcal{L}(P)$. *Tada je*

$$\lim_{n\to\infty} EX_n = EX.$$

[3] $\mathcal{L}(P)$ označava skup svih slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ koje imaju konačno matematičko očekivanje.

2 Riemann-Stieltjesov integral i primjeri

2.1 Riemann-Stieltjesov integral

Prethodno smo matematičko očekivanje slučajne varijable X definirali kao Lebesgue-Stieltjesov integral od X u odnosu na vjerojatnosnu mjeru P.Takva definicija je pogodna zbog mnogih dobrih svojstava Lebesgue-Stieltjesovog integral. Međutim, Riemannov integral je najpogodniji za primjene, ali je definiran samo za funkcije na $\mathbb{R}$, odnosno na $\mathbb{R}^*$. Konstrukcije Lebesgueova i Riemannova integrala radikalno se razlikuju. U Lebesgueovoj konstrukciji točke $x \in \mathbb{R}$ grupiraju se na osnivi bliskosti vrijednosti funkcije koju integriramo (provodimo particiju osi ordinata), dok u Riemannovoj konstrukciji točke x grupiramo na osnovu njihove bliskosti s osi apscisa.
Neka je $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotono rastuća i neprekidna zdesna funkcija (**poopćena funkcija distribucije**) i neka je μ_F Lebesgue-Stieltjesova mjera na $\mathbb{R}$ koja odgovara F. Može se pokazati da tada za $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ vrijedi $\mu_F(a, b] = F(b) - F(a)$.
Neka je $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija.
Particija $\mathcal{P}$ od $[a, b]$ jest konačan skup točaka $x_0, x_1, ..., x_n$ takav da je $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$
Stavimo

$$M_i = \ sup \, \{g(y);\ x_{i-1} < y \leq x_i\},\ i = 1, ..., n,$$

$$m_i = \ inf \, \{g(y);\ x_{i-1} < y \leq x_i\},\ i = 1, ..., n,$$

i definirajmo gornje i donje sume sa

$$U(\mathcal{P}, g, \mathrm{F}), = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}_i[\mathrm{F}(\mathrm{x_i}) - \mathrm{F}(\mathrm{x_{i-1}})], \tag{2}$$

$$L(\mathcal{P}, g, \mathrm{F}), = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{m}_i[\mathrm{F}(\mathrm{x_i}) - \mathrm{F}(\mathrm{x_{i-1}})]. \tag{3}$$

Definirajmo jednostavne funkcije $\mathrm{g_U}, \mathrm{g_L}$ sa

$$\mathrm{g_U}(\mathrm{x}) = M_i \ za \ x_{i-1} < x \leq x_i, i = 1, ..., n,$$

$$\mathrm{g_L}(\mathrm{x}) = m_i \ za \ x_{i-1} < x \leq x_i, i = 1, ..., n$$

i $\mathrm{g_U}(a) = \mathrm{g_L}(a) = g(a)$. Pretpostavimo da je funkcija F neprekidna u točki a. Tada je

$$U(\mathcal{P}, g, \mathrm{F}) = (L - S) \int_a^b g_u(x) dF(x) \ = \int_a^b g_u d\mu_F,$$

$$L(\mathcal{P}, g, \mathrm{F}) = (L - S) \int_a^b g_L(x) dF(x) \ = \int_a^b g_L d\mu_F.$$

Particija $\mathcal{P}'$ **profinjuje** particiju $\mathcal{P}$ ako je $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$.

Teorem 3: *Ako particija $\mathcal{P}'$ profinjuje particiju $\mathcal{P}$, tada je*

$$L(\mathcal{P}, g, F) \leq L(\mathcal{P}', g, F) \tag{4}$$

$$U(\mathcal{P}', g, F) \leq U(\mathcal{P}, g, F) \tag{5}$$

DOKAZ: *Da bi dokazali (4), pretpostavimo prvo da $\mathcal{P}'$ sadrži samo jednu točku više nego $\mathcal{P}$. Označimo tu dodatnu točku s x^* i pretpostavimo da je $x_{i-1} < x^* < x_i$, gdje su x_{i-1} i x_i dvije uzastopne točke iz $\mathcal{P}$.*
Stavimo

$$w_1 = inf g(x)\ , \ \ (x_{i-1} < x < x^*)$$

$$w_2 = inf g(x)\ , \ \ (x^* < x < x_i)$$

Očito je $w_1 \geq m_1$ i $w_2 \geq m_1$, gdje je

$$m_1 = inf \mathrm{g}(x)\ , \ \ (x_{i-1} < x < x_i).$$

Stoga

$$\begin{aligned} & L(\mathcal{P}', g, F) - L(\mathcal{P}, g, F) \\ &= w_1[F(x^*) - F(x_{i-1})] + w_2[F(x_i) - F(x^*)] - m_1[F(x_i) - F(x_{i-1})] \\ &= (w_1 - m_1)[F(x^*) - F(x_{i-1})] + (w_2 - m_1)[F(x_i) - F(x^*)] \geq 0. \end{aligned}$$

Ako $\mathcal{P}'$ sadrži k točaka više nego $\mathcal{P}$, tada ponavljajući gornji postupak dolazimo do (4). Dokaz za (5) provodi se analogno. □

Neka je sada $(\mathcal{P}_n, n \in \mathbb{N})$ niz particija od $[a, b]$ takav da je $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1}$ za sve n i neka je $\lim_{n\to\infty} |\mathcal{P}_n| = 0$. Tada za jednostavne funkcije g_{Un}, g_{Ln} pridružene particijama $\mathcal{P}_n (n \in \mathbb{N})$, prema gornjem vrijedi

$$\mathrm{g}_{\mathrm{U}_1} \geq \mathrm{g}_{\mathrm{U}_2} \geq ... \geq g \geq ... \geq \mathrm{g}_{\mathrm{L}_2} \geq \mathrm{g}_{\mathrm{L}_1}.$$

Odavde slijedi da postoje funkcije $\bar{\mathrm{g}} = \lim_n g_{U_n}$ i $\mathrm{g} = \lim_n g_{L_n}$ i da je $g \leq \bar{g}$. Ako je $|g| \leq M$ na $[a, b]$, tada je $|g_{U_n}| \leq M$, $|g_{Ln}| \leq M$, pa prema Teoremu o dominiranoj konvergenciji (Teorem 2) slijedi

$$\lim_{n\to\infty} U(\mathcal{P}_n, g, \mathrm{F}) = (L - S) \int_a^b \bar{g}(x) dF(x), \tag{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} L(\mathcal{P}_n, g, \mathrm{F}) = (L - S) \int_a^b g(x) dF(x). \tag{7}$$

Definicija 12: *Ako su limesi u (6) i (7) konačni, podudaraju se i njihova zajednička vrijednost ne zavisi od izbora niza particija $(\mathcal{P}_n, n \in \mathbb{N})$, tada kažemo da je funkcija* g ***Riemann - Stieltjes integrabilna na*** $[a, b]$ ***u odnosu na*** F *i označavamo*

$$(R - S) \int_a^b g(x) dF(x) \ ili \ (R - S) \int_a^b g(x) F(dx). \tag{8}$$

U slučaju da je F(x) = x, $x \in \mathbb{R}$, integral (8) se svodi na Riemannov integral. Prema tome, sva svojstva Riemann - Stieltjesova integrala vrijede i za Riemannov integral. Za teoriju vjerojatnosti vrlo je važna sljedeća propozicija.

Propozicija 3: *Ako je funkcija* g *neprekidna na* $[a, b]$, *tada je ona Riemann - Stieltjes integrabilna i vrijedi*

$$(L - S) \int_a^b g(x) dF(x) = (R - S) \int_a^b g(x) dF(x).$$

Dokaz: *Budući da je* g *neprekidna na* $[a, b]$, *imamo* $\bar{\text{g}} = \lim_n g_{U_n} = \text{g}$, $\text{g} = \lim_n g_{L_n} = \text{g}$, *pa vrijedi*

$$\lim_{n \to \infty} U(\mathcal{P}_n, g, \text{F}) = \lim_{n \to \infty} L(\mathcal{P}_n, g, \text{F}) = (L - S) \int_a^b g(x) dF(x). \quad \square$$

Sljedeći teorem generalizira tu tvrdnju.

Teorem 4: *Ako je* g *Riemann - Stieltjes integrabilna na* $[a, b]$, *tada je ona i Lebesgue - Stieltjes integrabilna na* $[a, b]$ *i vrijedi*

$$(R - S) \int_a^b g(x) dF(x) = (L - S) \int_a^b g(x) dF(x).$$

Dokaz: *Neka je* $(\mathcal{P}_n, n \in \mathbb{N})$ *niz particija od* $[a, b]$, $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1}$ *za sve* n *i* $|\mathcal{P}_n| \to 0$ *za* $n \to 0$. *Tada iz gore navedenog slijedi*

$$(R - S) \int_a^b g(x) dF(x) = \lim_{n \to \infty} U(\mathcal{P}_n, g, \text{F}) = (L - S) \int_a^b \bar{g}(x) dF(x) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} L(\mathcal{P}_n, g, \text{F}) = (L - S) \int_a^b g(x) dF(x).$$

Iz $g \leq \bar{\text{g}}$ *i Propozicije 2 slijedi* $\text{g} = g = \bar{\text{g}}$ *(g.s.)* (μ_F). *Odavde slijedi da je* g *izmjeriva, a prema Propoziciji 1 imamo*

$$(L - S) \int_a^b \text{g}(x) dF(x) = (L - S) \int_a^b \bar{\text{g}}(x) dF(x) = (L - S) \int_a^b g(x) dF(x). \quad \square$$

Može se dokazati da je ograničena funkcija g Riemann-Stieltjes integrabilna na $[a, b]$ u odnosu na F ako i samo ako je g neprekidna (g.s.) (μ_F) na $[a, b]$.

Primjedba 1: *Neka je g Riemann-Stieltjes integrabilna na* $[a, b]$ *u odnosu na funkciju* F *i neka* F *nije neprekidna u točki a. Lagano se pokaže da je tada*

$$(R-S)\int_a^b g(x)dF(x) = (R-S)\int_{[a,b]} g(x)dF(x)$$

$$= (R-S)\int_{(a,b]} g(x)dF(x) + g(a)[\mathrm{F}(a) - \mathrm{F}(a-)]$$

$$= (R-S)\int_{a+0}^b g(x)dF(x) + g(a)[\mathrm{F}(a) - \mathrm{F}(a-)].$$

Prema tome, vidimo da dodavanje jedne točke području integracije može dovesti do promjene vrijednosti integrala.
Ako je F neprekidna u točki a, imamo

$$(R-S)\int_a^b dF(x) = \mathrm{F(b) - F(a)},$$

a ako F u točki a ima prekid, vrijedi

$$(R-S)\int_a^b dF(x) = \mathrm{F(b) - F(a-)}.$$

Primjedba 2: *Neka je* $\mathcal{P}$ *particija od* $[a, b]$ *zadana s* $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$*. Neka je* $\widetilde{x_i}$ *proizvoljna točka u intervalu* $[x_{i-1}, x_i](i = 1, ..., n)$*. Stavimo*

$$S(\mathcal{P}, g, \mathrm{F}) = \sum_{i=1}^n g(\widetilde{x_i})[\mathrm{F(x_i) - F(x_{i-1})}].$$

Neka je $(\mathcal{P}_n, n \in \mathbb{N})$ niz particija od $[a, b]$ takva da je $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1}$ i $\lim_{n\to\infty} |\mathcal{P}_n| = 0$. Može se dokazati da je g Riemann-Stieltjes integrabilna na $[a, b]$ u odnosu na F ako i samo ako postoji $\lim_{n\to\infty} S(\mathcal{P}_n, g, \mathrm{F})$ koji je konačan i ne ovisi od izbora particija niti od izbora točaka $\widetilde{x_i}$.
U tom slučaju vrijedi

$$(R-S)\int_a^b g(x)dF(x) = \lim_{n\to\infty} S(\mathcal{P}_n, g, \mathrm{F}). \tag{9}$$

To znači da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za proizvoljnu particiju $\mathcal{P}$, takvu da je $|\mathcal{P}| < \delta$ vrijedi

$$|(R-S)\int_a^b g(x)dF(x) - S(\mathcal{P}, g, \mathrm{F})| < \varepsilon, \tag{10}$$

neovisno o izboru točaka $\widetilde{x_i}$.

Teorem 5: *Funkcija g je Riemann-Stieltjes integrabilna u odnosu na F ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji particija $\mathcal{P}$ takva da je*

$$U(\mathcal{P}, g, F) - L(\mathcal{P}, g, F) < \varepsilon.$$

Teorem 6: *Neka je g Riemann-Stieltjes integrabilna na $[a,b]$, u odnosu na F, $m \le g \le M$, ϕ neprekidna funkcija na $[m,M]$ i $h(x) = \phi(g(x))$ na $[a,b]$. Tada je h Riemann-Stieltjes integrabilna u odnosu na F na [a,b].*

DOKAZ: *Odaberimo $\epsilon > 0$. Kako je ϕ uniformno neprekidna na $[m,M]$, postoji $\delta > 0$ takav da je $\delta < \epsilon$ i $|\phi(s) - \phi(t)| < \epsilon$ ako je $|s-t| < \delta$ i $s,t \in [m,M]$.*
Kako je g Riemann-Stieltjes integrabilna, prema Teoremu 5 postoji particija $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ segmenta $[a,b]$ takva da je

$$U(\mathcal{P}, g, F) - L(\mathcal{P}, g, F) < \delta^2. \tag{11}$$

Neka su

$$M_i = \ sup\,\{g(y);\ x_{i-1} < y \le x_i\},\ i = 1, ..., n,$$

$$m_i = \ inf\,\{g(y);\ x_{i-1} < y \le x_i\},\ i = 1, ..., n,$$

i neka su M_i^* i m_i^* analogni brojevi za funkciju h. Podijelimo brojeve u dvije klase: $i \in A$ ako je $M_i - m_i < \delta$ te $i \in B$ ako je $M_i - m_i \ge \delta$.
Za $i \in A$, slijedi da je $M_i^* - m_i^* \le \epsilon$. Za $i \in B$ vrijedi $M_i^* - m_i^* \le 2K$, gdje je K=sup$|\phi(t)|$, $m \le t \le M$ iz (11) imamo

$$\delta \sum_{i\in B} \triangle F_i \le \sum_{i\in B} (M_i - m_i) \triangle F_i < \delta^2 \tag{12}$$

tako da je $\sum_{i\in B} \triangle F_i \le< \delta$. Sada slijedi da je

$$U(\mathcal{P}, h, F) - L(\mathcal{P}, h, F) = \sum_{i\in A} (M_i - m_i) \triangle F_i + \sum_{i\in B} (M_i - m_i) \triangle F_i$$

$$\le \varepsilon[F(b) - F(a)] + 2K\delta < \epsilon[F(b) - F(a) + 2K].$$

Kako je ε proizvoljan, iz Teorema 5 slijedi da je h Riemann-Stieltjes integrabilna. □

2.2 Svojstva Riemann-Stieltesovog integrala

Sljedeća svojstva lako dobijemo iz definicije integrala, dokazi svih svojstava mogu se naći u ([2], 128.-130. str.).

Teorem 7: *1. Neka su g_1 i g_2 Riemann-Stieltjes integrabilne. Tada je $g_1 + g_2$ Riemann-Stieltjes integrabilna funkcija i vrijedi*

$$(R-S)\int_a^b [g_1(x)+g_2(x)]dF(x) = (R-S)\int_a^b g_1(x)dF(x) + (R-S)\int_a^b g_2(x)dF(x).$$

2. Neka je g Riemann-Stieltjes integrabilna. Tada je i cg Riemann-Stieltjes integrabilna za svaku konstantu $c \in \mathbb{R}$ i vrijedi

$$(R-S)\int_a^b cg(x)dF(x) = (R-S)\, c\int_a^b g(x)dF(x).$$

3. Neka su g_1 i g_2 Riemann-Stieltjes integrabilne. Ako je $g_1(x) \leq g_2(x)$ za sve $x \in [a,b]$ tada je

$$(R-S)\int_a^b g_1(x)dF(x) \leq (R-S)\int_a^b g_2(x)dF(x).$$

4. Neka je g Riemann-Stieltjes integrabilna na $[a,b]$ te $a < c < b$. Tada je

$$(R-S)\int_a^b g(x)dF(x) = (R-S)\int_a^c g(x)dF(x) + (R-S)\int_c^b g(x)dF(x).$$

5. Ako je g Riemann-Stieltjes integrabilna na $[a,b]$ i ako vrijedi $|g(x)| \leq M$ na $[a,b]$ tada je

$$|(R-S)\int_a^b g(x)dF(x)| \leq M[F(b)-F(a)].$$

6. Ako je g Riemann-Stieltjes integrabilna u ondosu na F_1 te u odnosu na F_2 tada vrijedi

$$(R-S)\int_a^b g(x)d[F_1(x)+F_2(x)] = (R-S)\int_a^b g(x)dF_1(x) + (R-S)\int_a^b g(x)dF_2(x).$$

7. *Neka je g Riemann-Stieltjes integrabilna u ondosu na F. Ako je c pozitivna konstanta tada vrijedi*

$$(R-S)\int_a^b g(x)d[cF(x)] = (R-S)\; c\int_a^b g(x)dF(x).$$

DOKAZ: *Ako je* $g = g_1 + g_2$ *i* $\mathcal{P}$ *bilo koja particija od* $[a, b]$, *tada imamo*

$$L(\mathcal{P}, g_1, F) + L(\mathcal{P}, g_2, F) \le L(\mathcal{P}, g, F) \le U(\mathcal{P}, g, F) \le U(\mathcal{P}, g_1, F) + U(\mathcal{P}, g_2, F). \tag{13}$$

Prvo ćemo dokazati da ako su g_1 *i* g_2 *(R-S) integrabilne, tada je i* $g = g_1 + g_2$ *(R-S) integrabilna. Neka je* $\varepsilon > 0$ *proizvoljan, postoje particije* $\mathcal{P}_1$ *i* $\mathcal{P}_2$ *takve da je*

$$U(\mathcal{P}_1, g_1, F) - L(\mathcal{P}_1, g_1, F) < \varepsilon,$$

$$U(\mathcal{P}_2, g_2, F) - L(\mathcal{P}_2, g_2, F) < \varepsilon.$$

Gornje nejednakosti ostaju valjane ako $\mathcal{P}_1$ *i* $\mathcal{P}_2$ *zamijenimo particijom* $\mathcal{P}$ *koja je njihovo zajedničko profinjenje. Tada (11) povlači*

$$U(\mathcal{P}, g, F) - L(\mathcal{P}, g, F) < 2\varepsilon, \tag{14}$$

što znači da je g (R-S) integrabilna. Nadalje imamo

$$U(\mathcal{P}, g_j, F) < \int g_j dF + \varepsilon \quad (j = 1, 2), \tag{15}$$

pa (11) povlači

$$\int g dF \le U(\mathcal{P}, g, F) < \int g_1 dF + \int g_2 dF + 2\varepsilon.$$

Kako je ε *proizvoljan, zaključujemo da je*

$$\int g dF \le \int g_1 dF + \int g_2 dF. \tag{16}$$

Ako u (14) g_1 *i* g_2 *zamijenimo s* $-g_1$ *i* $-g_2$ *dobijamo obrnutu nejednakost, iz čega slijedi jednakost integrala.* □

Dokazi ostalih tvrdnji teorema vrlo su slični gornjem dokazu, pa ćemo ih izostaviti.

Primjedba 3: *Iz egzistencije jednog od integrala* $(R-S)\int_a^b g(x)dF(x)$ *odnosno* $(R-S)\int_a^b F(x)dg(x)$ *slijedi egzistencija drugog i vrijedi*

$$(R-S)\int_a^b g(x)dF(x) + (R-S)\int_a^b F(x)dg(x) = g(b)F(b) - g(a)F(a). \tag{17}$$

Gornju relaciju zovemo ***formula parcijalne integracije.***

Da bismo dokazali ovu relaciju pretpostavimo da postoji $(R-S)\int_a^b F(x)dg(x)$. Za particiju $\mathcal{P}$ od $[a,b]$ načinimo sumu

$$S(\mathcal{P}, g, \mathrm{F}) = \sum_{i=1}^{n} g(\widetilde{x_i})[\mathrm{F}(\mathrm{x_i}) - \mathrm{F}(\mathrm{x_{i-1}})]. \tag{18}$$

Za $\widetilde{x_0} = a$ vrijedi

$$S(\mathcal{P}, g, \mathrm{F}) = -\sum_{i=1}^{n} F(x_{i-1})[\mathrm{g}(\widetilde{\mathrm{x_i}}) - \mathrm{g}(\widetilde{\mathrm{x_{i-1}}})] - F(x_0)g(\widetilde{x_0}) + F(x_n)g(\widetilde{x_n})$$

$$= g(b)F(b) - g(a)F(a) - \{F(b)[g(b) - g(\widetilde{x_n})] + \sum_{i=1}^{n} F(x_{i-1})[\mathrm{g}(\widetilde{\mathrm{x_i}}) - \mathrm{g}(\widetilde{\mathrm{x_{i-1}}})]\}.$$

Izraz u vitičastoj zagradi odgovara integralnoj sumi za $(R-S)\int_a^b F(x)dg(x)$. U teoriji vjerojatnosti često srećemo neprave Riemann-Stieltjesove odnosno Riemannove integrale.

Definicija 13: *Neka je* F *poopćena funkcija distribucije na* $\mathbb{R}$ *i neka je* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funkcija, takva da za svaki segment* $[a,b]$ *postoji integral* $(R-S)\int_a^b g(x)dF(x)$. *Ako postoji*

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} (R-S)\int_a^b g(x)dF(x)$$

i ako je taj limes konačan, onda ga zovemo ***nepravi Riemann-Stieltjesov integral*** *od* g *i označavamo*

$$(R-S)\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x).$$

Teorem 8: *Neka je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nenegativna funkcija i neka g ima nepravi Riemann-Stieltjesov integral. Tada je g Lebesgue-Stieltjes integrabilna na $\mathbb{R}$ (u odnosu na μ_F) i vrijedi*

$$(R-S)\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x) = (L-S)\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x) = \int_{\mathbb{R}} gd\mu_F.$$

DOKAZ: *Za $n \in \mathbb{N}$ stavimo $g_n = g\mathrm{K}_{[-n,n]}$.Za svako n postoji $(R-S)\int_{-n}^{n} g(x)dF(x)$ i prema Teoremu 3 vrijedi*

$$(R-S)\int_{-n}^{n} g(x)dF(x) = \int_{-n}^{n} gd\mu_F = \int_{\mathbb{R}} g\mathrm{K}_{[-n,n]}d\mu_F = \int_{\mathbb{R}} g_n d\mu_F.$$

Imamo $0 \le g_1 \le g_2 \le ...$ i $g = \lim_n g_n$, pa prema Lebesgueovom teoremu o monotonoj konvergenciji (Teorem 1) slijedi

$$\int_{\mathbb{R}} gd\mu_F = \lim_n \int_{\mathbb{R}} g_n d\mu_F = \lim_n (R-S)\int_{-n}^{n} g(x)dF(x) = (R-S)\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x). \quad \square$$

2.3 Računanje matematičkog očekivanja

Neka je X slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, neka je P_x vjerojatnosna mjera inducirana na X i neka je F_x funkcija distribucije od X. Tada vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 9: *Ako je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borelova funkcija, tada za proizvoljno $B \in \mathcal{B}$ vrijedi*

$$\int_{X^{-1}(B)} g(X)dP = \int_B gdP_x = (L-S)\int_B g(x)dF_x(x)$$

DOKAZ: *Uzmimo prvo da je $g = \mathrm{K}_g$, $E \in \mathcal{B}$. Tada zbog $K_E(X) = K_{X^{-1}(E)}$ gornja jednakost prelazi u*

$$P(X^{-1}(E \cap B)) = P_X(E \cap B)$$

što je istina prema definiciji od P_X. Ako je g nenegativna jednostavna Borelova funkcija, $g = \sum_{i=1}^{k} x_i K_{E_i}$, $x_i \ge 0$, $E_i \in \mathcal{B}$, tada zbog linearnosti integrala i ranije dokazanog slijedi

$$\int_{X^{-1}(B)} g(X)dP = \sum_{i=1}^{k} x_i \int_{X^{-1}(B)} K_{E_i}(X)dP = \sum_{i=1}^{k} x_i \int_B K_{E_i}dP_X = \int_B gdP_X. \tag{19}$$

Neka je sada g nenegativna Borelova funkcija. Tada postoji rastući niz $(g_n, n \in \mathbb{N})$ nenegativnih jednostavnih Borelovih funkcija takav da je $g = \lim_n g_n$.

Iz Lebesgueova teorema o monotonoj konvergenciji slijedi

$$\int_{X^{-1}(B)} g(X)dP = \lim_n \int_{X^{-1}(B)} g_n(X)dP = \lim_n \int_B g_n dP_X = \int_B g dP_X,$$

dakle jednakost iz teorema vrijedi za nenegativne Borelove funkcije.
Neka je sada $g = g^+ - g^-(g^+, g^- \geq 0)$ *proizvoljna Borelova funkcija. Ako je* $\int_B g^+ dP_X < \infty$, *tada je* $\int_{X^{-1}(B)} g^+(x)dP < \infty$, *a odatle slijedi ako jedan od integrala u tvrdnji teorema postoji, tada postoji i drugi i vrijednosti su im jednake.* □

Ako sada stavimo $B = \mathbb{R}$ dobijamo

$$E[g(X)] = \int_\Omega g(X)dP = \int_{\mathbb{R}} g dP_X = (L-S)\int_{\mathbb{R}} g(x)dF_x(x).$$

Gornji izraz i tvrdnja prethodnog teorema ključni su za teoriju vjerojatnosti zbog toga što integriranje po Ω svode na integriranje po $\mathbb{R}$. Ako sada stavimo $g(x) = x, x \in \mathbb{R}$ dobijemo

$$EX = \int_{\mathbb{R}} x dP_X = (L-S)\int_{-\infty}^{\infty} x dF_x(x). \tag{20}$$

Dovedimo još u vezu Riemann-Stieltjesov i klasični Riemannov integral. Sljedeća konstrukcija preuzeta je iz ([1], 10. str.)
Neka je F po dijelovima konstantna na intervalu $[a, b]$, sa skokom iznosa p u točki c unutar tog intervala:

$$F(x) = \begin{cases} \text{r}, & x \leq c \\ \text{r + p}, & x > c. \end{cases} \tag{21}$$

Neka je g neprekinda na $[a, b]$. Izračunajmo sada Riemann-Stieltjesov integral funkcije g u odnosu na funkciju F na intervalu $[a, b]$.

Za bilo koju particiju vrijedi $F(x_i) - F(x_{i-1}) = 0$ za svaki indeks i osim za onaj za koji je $x_{i-1} \leq c < x_i$, jer je F konstantna lijevo i desno od točke c. Zato u integralnoj sumi ostaje jedino član

$$S(\mathcal{P}, g, \text{F}) = g(\tilde{x}_i)[F(x_i) - F(x_{i-1})] = g(\tilde{x}_i)p.$$

U limesu kada $\triangle \to 0$, točka $\tilde{x}$ teži ka c. Zato je

$$\int_a^b g(x)dF(x) = g(c) \cdot p. \tag{22}$$

Ako F ima skokove iznosa p_i u točkama c_i, za njen Riemann-Stieltjesov integral vrijedi

$$\int_a^b g(x)dF(x) = \sum_{i=1}^{n} g(c_i) \cdot p_i. \tag{23}$$

Neka je sada F neprekidno diferencijabilna. Tada, po teoremu srednje vrijednosti imamo $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, za neku točku $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$. Integralna suma glasi

$$\sum_{i=1}^{n} g(\tilde{x}_i)F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{24}$$

Limes integralne sume (23) očito definira Riemannov integral, pa je

$$\int_a^b g(x)dF(x) = \int_a^b g(x)F'(x)dx. \tag{25}$$

2.4 Primjeri i zadaci

Daljni primjeri i zadaci preuzeti su iz ([1],12 str.) i ([3], 307-309 str.). Pogledajmo kako sada formula (19) izgleda za dva, u primjenama, najvažnija tipa slučajnih varijabli. Neka je X diskretna slučajna varijabla zadana zakonom razdiobe

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... \\ p_1 & p_2 & ... \end{pmatrix}$$

Tada je vjerojatnosna mjera P_x koncentrirana na diskretnom skupu $D = \{x_1, x_2, ...\}$ i za svako k vrijedi

$$E[g(X)] = \sum_k g(x_k)p_k.$$

Gornji red interpretira se kao

$$\sum_k g^+(x_k)p_k - \sum_k g^-(x_k)p_k$$

i jedna od ovih suma mora biti konačna. U daljnjim primjerima ćemo izostavljati oznake ispred integrala, jer će biti jasno o kojem se integralu radi.

Neka je sada X neprekidna slučajna varijabla. U primjerima koji slijede navest ćemo najvažnije tipove neprekidnih slučajnih varijabli i izračunati njihova matematička očekivanja.

1. Neka X ima uniformnu razdiobu na segmentu $[a, b]$. Tada je matematičko očekivanje dano s

$$EX = \frac{1}{b-a}\int_a^b x dx = \frac{a+b}{2}.$$

2. Neka X ima eksponencijalnu razdiobu s paramatrom λ ($\lambda > 0$). Tada je

$$EX = \lambda \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[-\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^\infty + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x} dx \right] = \frac{1}{\lambda}.$$

3. Neka X ima dvostranu eksponencijalnu razdiobu s paramatrom λ ($\lambda > 0$). Tada je

$$EX = \frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^\infty x e^{-\lambda |x|} dx = 0,$$

jer je podintegralna funkcija neparna.

4. Neka X ima jediničnu Cauchyjevu razdiobu s paramatrom λ ($\lambda > 0$). Tada je

$$\int_{-\infty}^\infty |x| f_x(x) dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{|x|}{\pi(1+x^2)} dx = 2\int_0^\infty \frac{x dx}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{\pi} ln(1+x^2)\Big|_0^\infty = \infty.$$

Odavde slijedi da $|X|$ nije integrabilna, dakle ni X nije integrabilna, odnosno, to znači da X nema očekivanje.

Pokažimo sada na primjerima računanje Riemann-Stieltjesovog integrala.

Zadatak 1: *Izračunati* $\int_0^1 x dx^2$.

Rješenje: *Označimo* $g(x) = x$, $F(x) = x^2$. *Kako je funkcija* g *je ograničena na* $[0, 1]$ *i* F *je neprekidno derivabilna, prema relaciji (25) je*

$$\int_0^1 x dx^2 = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Zadatak 2: *Izračunati Riemann-Stieltjesov integral* $\int_0^\pi x d\cos(x)$.

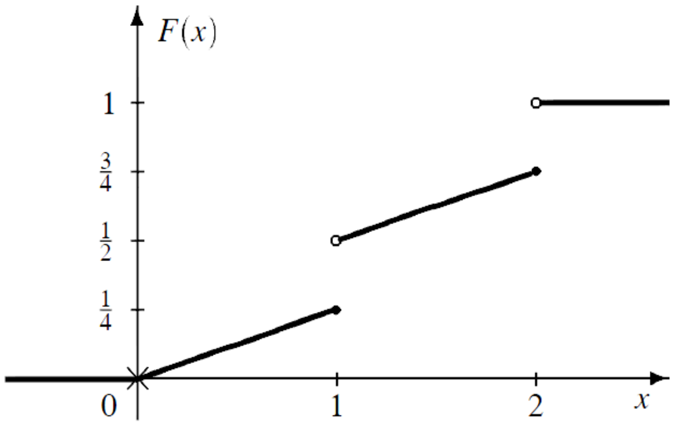
Rješenje: *Prema formuli parcijalne integracije (17) slijedi*

$$\int_0^\pi x d\cos x + \int_0^\pi \cos x dx = \pi\cos(\pi) - 0(\cos(0)),$$

$$\int_0^\pi x d\cos x + \sin x \Big|_0^\pi = -\pi,$$

$$\int_0^\pi x d\cos x = -\pi.$$

Zadatak 3: *Izračunati očekivanje slučajne varijable čija je funkcija razdiobe zadana slikom.*



Rješenje: *Funkcija razdiobe glasi*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{4}x, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}, & 1 < x \leq 2, \\ 1, & 2 \leq x. \end{cases}$$

F ima skokove iznosa $\frac{1}{4}$ *u točkama* $x = 1$ *i* $x = 2$. *Zato je*

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) \\ &= \int_0^1 xF'(x)dx + 1 \cdot \frac{1}{4} + \int_1^2 xF'(x)dx + 2 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \int_0^1 \frac{x}{4}dx + \frac{1}{4} + \int_1^2 \frac{x}{4}dx + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Literatura

[1] N. Elezović, *Vjerojatnost i statistika, Slučajne varijable*, Element, Zagreb, 2007.

[2] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Inc., New York, 1976.

[3] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.