Fibonaccijevi i Lucasovi brojevi

Zirdum, Ivona

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Ivona Zirdum

Fibonaccijevi i Lucasovi brojevi

Diplomski rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Ivona Zirdum

Fibonaccijevi i Lucasovi brojevi

Diplomski rad

Voditelj: doc. dr. sc. Mirela Jukić Bokun

Osijek, 2017.

Sadržaj

Uvod

Tko je bio Fibonacci? Leonardo Fibonacci najveći je matematičar srednjeg vijeka. Rođen je u Pisi i zbog toga su ga zvali Leonardo od Pise ili Leonardo Pisano. Iako su porijeklom Talijani, Fibonacci i njegov otac živjeli su na sjeveru Afrike, gdje je Leonardov otac radio kao službenik trgovačke tvornice. Tamo je Fibonacci dobio svoje prve matematičke poduke od muslimanskih učitelja, koji su ga učili hindo-arapskom brojevnom sustavu i načinu računanja. Vrlo brzo je prepoznao ogromnu nadmoć hindo-arapskog sustava sa decimalnim točkama i brojem 0 nad, ne tako jednostavnim, rimskim sustavom koji se u to vrijeme još uvijek koristio u njegovoj rodnoj Italiji. Leonardo je hindo-arapske brojeve nazivao indijskim brojevima, a 1202. godine napisao je djelo Liber Abaci u kojem je objasnio kako se oni koriste u računanju. To djelo pomoglo je da se rimski brojevni sustav zamijeni sustavom koji je vrlo sličan današnjem.

Devet indijskih brojeva su: 9,8,7,6,5,4,3,2,1. S ovih 9 brojeva i znakom 0, koji Arapi nazivaju zefir, bilo koji broj može biti zapisan.

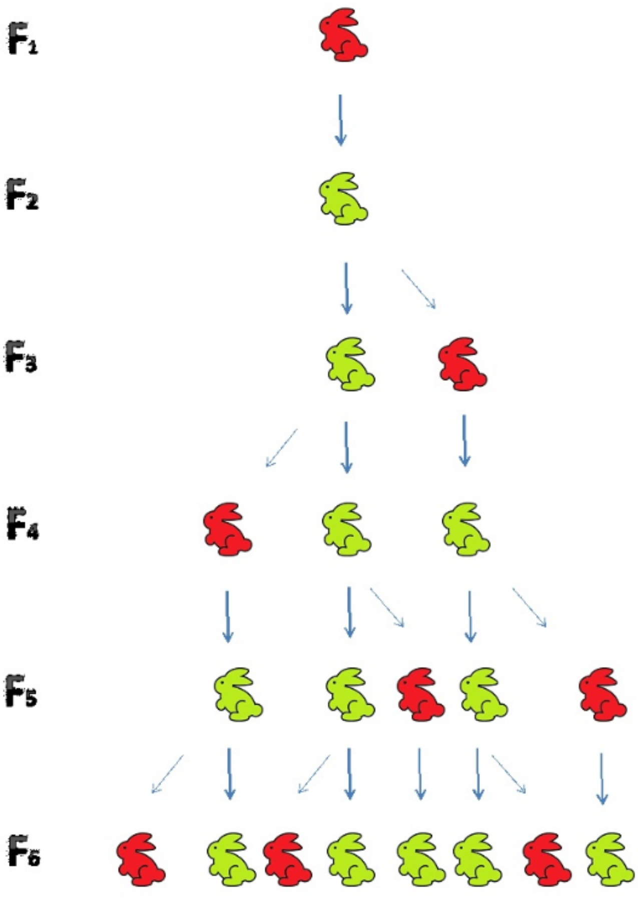
Ovom rečenicom Fibonacci je započeo svoje djelo i to se smatra prvom uporabom brojevnog sustava s bazom 10 u zapadnom svijetu.
Leonardo Fibonacci, koji je dao vrlo značajne doprinose u matematici, zapamćen je uglavnom zbog francuskog teoretičara iz 19. stoljeća, Edouarda Lucasa. Upravo je Lucas dao ime Fibonaccijevom nizu brojeva koji se pojavljuje kao trivijalni problem u djelu Liber Abaci. Leonardo je pretpostavio da se muško-ženski par zečeva stavi u nekakav ograđeni prostor kako bi se razmnožavali. Pretpostavimo da zečevi počinju nositi mlade dva mjeseca nakon rođenja i da svi daju samo jedan muško-ženski par. Ukoliko niti jedan zec ne ugine, koliko parova zečeva će biti unutar ograđenog prostora nakon jedne godine?
Lako je vidjeti da brojevi parova zečeva na kraju svakog mjeseca čini niz brojeva 1,2,3,5,8,... u kojem je svaki član dobiven kao zbroj prethodna dva člana, kao što je Fibonacci i istaknuo u svom djelu. Do početka 19. stoljeća nisu se poduzela nikakva ozbiljnija istraživanja o ovom nizu, a tek je tada Lucas počeo ozbiljnije istraživanje ovakvih nizova. On je otkrio niz, danas poznat kao generalizirani Fibonaccijev niz, koji počinje sa bilo koja dva pozitivna cijela broja, a svaki sljedeći broj jest suma prethodna dva. Najjednostavniji takav niz 1,1,2,3,5,8,13,... nazvao je Fibonaccijev niz. Sljedeći najpoznatiji niz 1,3,4,7,11,18,29,... zove se Lucasov niz. Upravo ova dva niza, odnosno njihovi članovi, bit će tema ovog diplomskog rada.

U prvom dijelu rada definirani su Fibonaccijev i Lucasov niz te su navedene eksplicitne formule za računanje n-tih članova ovih nizova. U drugom dijelu rada dokazana su osnovna svojstva Fibonaccijevih i Lucasovih brojeva, opisana je veza između ovih brojeva i Pascalovog trokuta te su navedeni neki trikovi za brzo izračunavanje njihovih suma. Treći dio rada je Fibonometrija. U ovom dijelu opisana je veza Fibonaccijevih brojeva i zlatnog reza. Na kraju rada navedene su neke zanimljivosti o Fibonaccijevim i Lucasovim brojevima kao što su Fibonaccijeve krivotvorine i brojevni sustavi koji za bazu imaju članove ovih nizova.

1. Osnovno o Fibonaccijevim i Lucasovim brojeva

1.1 Definicije

Objasnimo pobliže kako je Fibonacci zapravo došao do niza koji je danas poznat kao Fibonaccijev niz. Pretpostavimo da je jedan par tek rođenih zečeva doveden na pusti otok 1. siječnja. Taj par dobit će jedan par mladih svaki prvi dan u mjesecu, s tim da će prvi novorođeni par doći na svijet 1. ožujka. Isto tako će svaki od novih parova dobiti potomke, također jedan muško-ženski par zečeva, svakog prvog dana u mjesecu, ali tek nakon što budu stari dva mjeseca. Koliko će parova zečeva biti na otoku 1. siječnja sljedeće godine? Napomenimo da ovaj zadatak podrazumijeva idealne uvjete u kojima svaki par zečeva uvijek dobiva potomke i to baš jednog muškog i jednog ženskog zeca. Također, na ovom zamišljenom otoku zečevi ne ugibaju. Na Slici 1. prikazan je broj parova zečeva nakon prvih šest mjeseci. Vidimo dvije vrste simbola: crveni zec označava mladi par zečeva, a zeleni zec označava par zečeva koji je star 1 mjesec i spreman je za potomstvo idućeg mjeseca.



Slika 1: Shema razmnožavanja zečeva

Pozicija svakog broja u ovom nizu tradicionalno se označava indeksom tako da je $F_1 = 1, F_2 = 1$. Označimo sa F_n broj parova zečeva na početku n-tog mjeseca. To znači da će na početku sljedećeg, odnosno $(n+1)$-og mjeseca, broj parova zečeva biti F_{n+1}, a na početku $(n+2)$-og mjeseca F_{n+2}. Uočimo da ćemo na početku $(n+2)$-og mjeseca imati sve parove zečeva koje smo imali i prošlog mjeseca, a svi parovi koje smo imali pretprošlog mjeseca, dat će još jedan novi par. Iz ovoga slijedi da je broj parova na početku $(n+2)$-og mjeseca zadan s $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Kako znamo da je $F_1 = F_2 = 1$, slijedi da je $F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2, F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$, itd. Tako dolazimo do beskonačnog niza prirodnih brojeva, koji zovemo Fibonaccijev niz, u čast Leonardu Fibonacciju:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \ldots$$

Odgovorimo sada na pitanje koliki će biti broj zečeva na pustom otoku nakon godinu dana, odnosno na početku 13-og mjeseca. Odgovor na ovo pitanje je trinaesti Fibonaccijev broj: $F_{13} = 233$.
Sada možemo definirati Fibonaccijev niz, tj. Fibonaccijeve brojeve.

Definicija 1.1. *Fibonaccijev niz definiramo rekurzivnom formulom*

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \qquad n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \tag{1}$$

uz početne vrijednosti $F_1 = 1, F_2 = 1$.

Pokušamo li proširiti Fibonaccijev niz na negativne indekse, tako da rekurzivna relacija (1) ostane zadovoljena, dobit ćemo sljedeći niz

$$\begin{aligned}
F_0 &= F_2 - F_1 = 0, \\
F_{-1} &= F_1 - F_0 = 1, \\
F_{-2} &= F_0 - F_{-1} = -1, \\
F_{-3} &= F_{-1} - F_{-2} = 2, \\
F_{-4} &= F_{-2} - F_{-3} = -3,
\end{aligned}$$

tako da početak niza glasi:

$$\ldots, 13, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

i na temelju toga pretpostavljamo da vrijedi

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n.$$

Dokažimo matematičkom indukcijom da ova relacija vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$.

(B) Uočimo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$ i $n = 2$ jer je

$$\begin{aligned}
F_{-1} &= F_1 - F_0 = 1 = (-1)^{1+1} F_1, \\
F_{-2} &= F_0 - F_{-1} = -1 = (-1)^{2+1} F_2.
\end{aligned}$$

(P) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve $n \leq k$, $k \in \mathbb{N}$.

(K) Provjerimo vrijedi li tvrdnja za $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}
F_{-(k+1)} &= F_{-(k-1)} - F_{-k} \\
&= (-1)^k F_{k-1} - (-1)^{k+1} F_k \\
&= (-1)^k F_{k-1} + (-1)^k F_k \\
&= (-1)^k (F_{k-1} + F_k) \\
&= (-1)^k F_{k+1} \\
&= (-1)^{k+2} F_{k+1}.
\end{aligned}$$

Time je tvrdnja dokazana.

□

Ovako zadan niz naziva se negafibonaccijev niz.

Definicija 1.2. *Neka je $u_1 = p$, a $u_2 = q$. Ako je $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, dobivamo sljedeći niz:*

$$p, q, p+q, p+2q, 2p+3q, 3p+5q, \ldots$$

koji nazivamo generalizirani Fibonaccijev niz.

Za zadane početne vrijednosti p i q možemo pokazati da za bilo koji niz $(G_n), n \in \mathbb{N}$, koji zadovoljava rekurzivnu relaciju (1), vrijedi sljedeća relacija

$$G_n = pF_{n-1} + qF_n,$$

o čemu nam govori sljedeći teorem.

Teorem 1.1. *Neka je niz $(G_n), n \in \mathbb{N}$, zadan rekurzivnom relacijom*

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-2},$$

uz početne uvjete $G_0 = a$ i $G_1 = b$. Onda vrijedi

$$G_n = aF_{n-1} + bF_n.$$

Dokaz: Početnim uvjetom i rekurzivnom relacijom niz (G_n), $n \in \mathbb{N}$, jednoznačno je određen. Definirajmo niz $(H_n), n \in \mathbb{N}$, formulom

$$H_n = aF_{n-1} + bF_n.$$

Pokažimo da on zadovoljava iste početne uvjete $G_0 = a, G_1 = b$ te istu rekurzivnu relaciju kao G_n. Vrijedi

$$\begin{aligned} H_0 &= aF_{-1} + bF_0 = a, \\ H_1 &= aF_0 + bF_1 = b. \end{aligned}$$

Dalje slijedi

$$\begin{aligned} H_n &= aF_{n-1} + bF_n \\ &= a(F_{n-2} + F_{n-3}) + b(F_{n-1} + F_{n-2}) \\ &= (aF_{n-2} + bF_{n-1}) + (aF_{n-3} + bF_{n-2}) \\ &= H_{n-1} + H_{n-2}. \end{aligned}$$

Time smo pokazali da je $H_n = G_n$, pa se G_n zaista može prikazati kao $G_n = aF_{n-1} + bF_n$.

□

Uočimo da za $a = 0$ i $b = 1$ dobijemo Fibonaccijev niz.

Definicija 1.3. *Generalizirani Fibonaccijev niz s početnim vrijednostima* $u_1 = 1, u_2 = 3$ *naziva se Lucasov niz brojeva.*

Pokažimo sada da, kako za Fibonaccijev, tako i za Lucasov niz brojeva vrijedi:

$$\begin{aligned} L_0 &= L_2 - L_1 = 3 - 1 = 2, \\ L_{-1} &= L_1 - L_0 = 1 - 2 = -1, \\ L_{-2} &= L_0 - L_{-1} = 2 + 1 = 3, \\ L_{-3} &= L_{-1} - L_{-2} = -1 - 3 = -4, \\ L_{-4} &= L_{-2} - L_{-3} = 3 + 4 = 7 \end{aligned}$$

pa početak niza glasi:

$$\ldots, 7, -4, 3, -1, 2, 1, 3, 4, 7, \ldots$$

Generalizacijom zaključujemo da vrijedi:

$$L_{-n} = (-1)^n L_n.$$

Na sličan način kao i za negafibonaccijev niz, može se pokazati i da je negalucasov niz dobro definiran.

1.2 Binetova formula

U ovom ćemo dijelu izvesti eksplicitne formule za Fibonaccijeve i Lucasove brojeve.

Propozicija 1.1. *Neka je* $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *i* $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

a) Za svaki prirodan broj n *vrijede sljedeće formule:*

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n), \\ L_n &= \alpha^n + \beta^n. \end{aligned}$$

b) Vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \alpha.$$

Dokaz:

a) Prvu formulu dokazat ćemo metodom matematičke indukcije.

(B) Tvrdnja vrijedi za $n = 0$ i $n = 1$ jer je

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(1 - 1) = 0, \\ F_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^1 - \beta^1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1. \end{aligned}$$

(P) Pretpostavimo da formula vrijedi za prirodne brojeve k i $k+1$.

(K) Pokažimo da formula vrijedi i za prirodni broj $k+2$.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right]\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right]\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right]\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right]+\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right]\\
&=F_{k+1}+F_k=F_{k+2}.
\end{aligned}$$

Uočimo da su α i β korijeni kvadratne jednadžbe $x^2-x-1=0$, pa je $\alpha^2=\alpha+1$, $\beta^2=\beta+1$. Uzmimo sada za $u_n=\alpha^n+\beta^n$, $n\in\mathbb{N}$. Iz toga slijedi

$$\begin{aligned}
u_1&=\alpha+\beta=1,\\
u_2&=\alpha^2+\beta^2=\alpha+1+\beta+1=(\alpha+\beta)+2=1+2=3,\\
&\vdots\\
u_{n+2}&=\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}=\alpha^2\alpha^n+\beta^2\beta^n=(\alpha+1)\alpha^n+(\beta+1)\beta^n\\
&=(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})+(\alpha^n+\beta^n)=u_{n+1}+u_n.
\end{aligned}$$

Stoga je ovaj niz niz Lucasovih brojeva, pa dobivamo:

$$L_n=\alpha^n+\beta^n.$$

b) Uočimo da vrijedi

$$\frac{F_{n+1}}{F_n}=\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})}{\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)}=\frac{\alpha-\beta\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}.$$

Kako je

$$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|=\frac{\sqrt{5}-1}{1+\sqrt{5}}<1,$$

slijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha.$$

Analogno je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{\alpha^n + \beta^n} = \alpha.$$

$\square$

U dokazu prethodne propozicije spomenuli smo da su α i β rješenja jednadžbe $x^2 - x - 1 = 0$. Ova jednadžba se ponekad naziva i Fibonaccijeva kvadratna jednadžba.

Eksplicitne formule za Fibonaccijeve i Lucasove brojeve navedene u prethodnoj propoziciji, tj. formule

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \\ L_n &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{aligned}$$

nazivaju se Binetove formule.

Primjer 1.1. *Odredimo F_5 i L_5. Formule nam daju*

$$\begin{aligned} F_5 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^5\right] = 5, \\ L_5 &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^5 = 11. \end{aligned}$$

Unošenjem ovih izraza u kalkulator dobivamo upravo tražene Fibonaccijeve i Lucasove brojeve.

Ove eksplicitne formule vrlo su nespretne za računanje s velikim brojevima. Može se pokazati ([16]) da postoje i jednostavnije formule za određivanje Fibonaccijevih brojeva:

$$\begin{aligned} F_n &= \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\rfloor, \\ L_n &= \left\lfloor \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\rfloor. \end{aligned}$$

Primjer 1.2. *Uvrštavanjem u prethodne formule dobivamo*

$$F_6 = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^6 \right\rfloor = \lfloor 8.0249 \rfloor = 8,$$

$$F_4 = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^4 \right\rfloor = \lfloor 3.0652 \rfloor = 3,$$

$$L_1 = \left\lfloor \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 \right\rfloor = \lfloor 1.168034 \rfloor = 1,$$

$$L_3 = \left\lfloor \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^3 \right\rfloor = \lfloor 4.236068 \rfloor = 4.$$

Najveća važnost gornjih formula jest da one nisu rekurzivne jer izračunavaju n-ti Fibonaccijev broj direktno iz n-a, tj. ne moramo poznavati prethodna dva Fibonaccijeva broja da bismo izračunali n-ti.

2. Svojstva Fibonaccijevih i Lucasovih brojeva

2.1 Osnovna svojstva

Postoji jako puno svojstava Fibonaccijevih i Lucasovih brojeva. U ovom dijelu rada iskazat ćemo i dokazati neka od njih. Jedno od važnih svojstava Fibonaccijevih brojeva dano je u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 2.1. *Svaka dva uzastopna Fibonaccijeva broja su relativno prosta.*

Dokaz: Za $n \in \mathbb{N}$, stavimo da je najveći zajednički djelitelj dvaju uzastopnih Fibonacijevih brojeva jednak $d = (F_n, F_{n+1})$. Kako d dijeli F_n i F_{n+1}, onda d dijeli i

$$F_{n+1} - F_n = F_{n-1}.$$

Iz toga zaključujemo da d dijeli redom

$$F_{n+1} - F_n = F_{n-1}, \quad F_n - F_{n-1} = F_{n-2}, \quad \ldots, \quad F_3 - F_2 = F_1 = 1.$$

Dakle $d = 1$ i time je tvrdnja dokazana.

$\square$

Također, ova propozicija vrijedi i za dva uzastopna Lucasova broja, što se pokaže na sličan način. Neki od mnogih identiteta zaslužuju posebnu pozornost. Jedan od njih je Cassinijev identitet. Iskažimo ga i dokažimo.

Teorem 2.1. *(Cassinijev identitet) Za tri uzastopna Fibonaccijeva broja vrijedi:*

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

Dokaz: Dokaz ćemo provesti metodom matematičke indukcije.

(B) Za $n = 1$ vrijedi da je

$$F_2F_0 - F_1^2 = 0 - 1 = (-1)^1 = -1.$$

(P) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve $n \leq k$, $k \in \mathbb{N}$.

(K) Pokažimo sada da tvrdnja vrijedi i za $n = k + 1$. Tada je

$$\begin{aligned} F_{k+2}F_k - F_{k+1}^2 &= (F_{k+1} + F_k)F_k - F_{k+1}^2 \\ &= F_k^2 - F_{k+1}(F_{k+1} - F_k) \\ &= F_k^2 - F_{k+1}F_{k-1} \\ &= -(-1)^k = (-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

Time je teorem dokazan.

$\square$

Kada u Cassinijevom identitetu zamijenimo F_{n-1} s $F_{n+1} - F_n$ dobijemo sljedeću jednakost:

$$F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = (-1)^n.$$

Za Fibonaccijeve brojeve vrijedi i sljedeći identitet.

Propozicija 2.2. *Za dva prirodna broja m i n vrijedi:*

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}.$$

Dokaz: Tvrdnju ćemo dokazati indukcijom po m.

(B) Tvrdnja vrijedi za $n = 1$ jer je

$$\begin{aligned} F_{m+1} &= F_{m-1} + F_m \\ &= F_{m-1} \cdot 1 + F_m \cdot 1 \\ &= F_{m-1}F_1 + F_mF_2 \\ &= F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}. \end{aligned}$$

(P) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve $n \leq k$, $k \in \mathbb{N}$.

(K) Dokažimo da tvrdnja vrijedi za $n = k + 1$. Tada je

$$\begin{aligned} F_{m+k+1} &= F_{m+k} + F_{m+k-1} \\ &= F_{m-1}F_k + F_mF_{k+1} + F_{m-1}F_{k-1} + F_mF_k \\ &= F_{m-1}(F_k + F_{k-1}) + F_m(F_{k+1} + F_k) \\ &= F_{m-1}F_{k+1} + F_mF_{k+2}. \end{aligned}$$

□

Napišimo sada prvih 10 članova Fibonaccijevog niza i prvih 10 članova Lucasovog niza.

$F_1 = 1,$	$F_2 = 1,$	$F_3 = 2,$	$F_4 = 3,$	$F_5 = 5,$	
$F_6 = 8,$	$F_7 = 13,$	$F_8 = 21,$	$F_9 = 34,$	$F_{10} = 55,$	$\ldots$
$L_1 = 1,$	$L_2 = 3,$	$L_3 = 4,$	$L_4 = 7,$	$L_5 = 11,$	
$L_6 = 18,$	$L_7 = 29,$	$L_8 = 47,$	$L_9 = 76,$	$L_{10} = 123,$	$\ldots$

Uočimo da vrijedi $F_1 + F_3 = L_2$, $F_2 + F_4 = L_3$ itd. Generalizacijom dobijemo sljedeću propoziciju.

Propozicija 2.3. *Vrijedi:*

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}.$$

Dokaz:

(B) Znamo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$ i $n = 2$ jer je

$$F_2 + F_0 = 1 + 0 = 1 = L_1,$$
$$F_3 + F_1 = 2 + 1 = 3 = L_2.$$

(P) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$ i $n = k + 1$.

(K) Pokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n = k + 2$. Iz pretpostavke indukcije slijedi:

$$F_{k+1} + F_{k-1} = L_k,$$
$$F_{k+2} + F_k = L_{k+1}.$$

Zbrajanjem ovih jednakosti dobivamo $F_{k+3}+F_{k+1}=L_{k+2}$.

□

Kako znamo da je $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, iz prethodne propozicije dobivamo i

$$L_n = F_n + 2F_{n-1}.$$

Propozicija 2.4. *Vrijede sljedeće jednakosti:*

a) $L_n = F_{n+2} - F_{n-2}$,

b) $F_n = \dfrac{L_{n-1} + L_{n+1}}{5}$,

c) $F_n = \dfrac{L_{n-3} + L_{n+3}}{10}$.

Dokaz:

a) Iz Propozicije 2.3. i svojstava Fibonaccijevih brojeva slijedi

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1} = F_{n+2} - F_n + F_n - F_{n-2} = F_{n+2} - F_{n-2}.$$

b) Zbrajanjem sljedećih jednakosti

$$\begin{aligned} L_{n-1} &= F_{n-2} + F_n \\ L_{n+1} &= F_n + F_{n+2}, \end{aligned}$$

dobivamo

$$\begin{aligned} L_{n+1} + L_{n-1} &= 2F_n + F_{n-2} + F_{n+2} \\ &= 2F_n + F_{n-2} + F_n + F_{n+1} \\ &= 3F_n + F_{n-2} + F_n + F_{n-1} \\ &= 5F_n. \end{aligned}$$

c) Slično se dokaže kao i b).

□

Sljedeće identitete nećemo dokazivati jer se svi dokazuju primjenom metode matematičke indukcije i rekurzivnih relacija kojima smo definirali Fibonaccijev i Lucasov niz:

$$F_{n-1}(F_{n-2} + F_n) = F_{2n+2},$$
$$F_{2n}F_{2n+1} - F_{n+1} + 1 = F_{2n-1}F_{2n+2},$$
$$L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1},$$
$$L_nL_{n+1} = L_{2n+1} + (-1)^n.$$

2.2 Matrice s Fibonaccijevim brojevima

Neka je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Računanjem potencija matrice A dobivamo redom

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

Iz ovoga možemo pretpostaviti da je

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix},$$

o čemu govori sljedeća propozicija.

Propozicija 2.5. *Za $n \in \mathbb{N}$ i $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vrijedi*

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Dokaz: Dokažimo ovu tvrdnju matematičkom indukcijom.

(B) Za $n = 1$ dobivamo

$$A^1 = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix}.$$

(P) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$.

(K) Pokažimo da tvrdnja vrijedi za $n = k + 1$. Tada je

$$
\begin{aligned}
A^{k+1} = A^k A &= \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} F_{k+1} + F_k & F_{k+1} \\ F_k + F_{k-1} & F_k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k. \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

□

Karakteristični polinom matrice A zadan je s

$$
\begin{aligned}
\det(A - xI) &= \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \right| \\
&= \begin{vmatrix} 1 - x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 - x - 1,
\end{aligned}
$$

pa je karakteristična jednadžba matrice A $x^2 - x - 1 = 0$, a već od ranije znamo da je to Fibonaccijeva kvadratna jednadžba.

Propozicija 2.6. *Trag matrice A^n, $n \in \mathbb{N}$, je Lucasov broj L_n.*

Dokaz: Prema prethodnoj propoziciji je

$$
A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.
$$

Kako je ranije pokazano (Propozicija 2.3.) da je $F_{n+1} + F_{n-1} = L_n$, slijedi tvrdnja.

□

2.3 Djeljivost

U ovom ćemo dijelu dokazati neka svojstva vezana za djeljivost Fibonaccijevih brojeva.

Teorem 2.2. *Neka su m i n prirodni brojevi. Ako $n \mid m$, onda $F_n \mid F_m$.*

Dokaz: Neka je $m = nk$. Tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom po k.

(B) Tvrdnja očito vrijedi za $k = 1$ jer $F_n \mid F_n$.

(P) Pretpostavimo da $F_n \mid F_{nk}$ za svaki prirodni broj k.

(K) Dokažimo da tvrdnja vrijedi za $n = k + 1$. Prema Propoziciji 2.2. znamo da je

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_m F_{n+1},$$

pa iz pretpostavke indukcije slijedi:

$$F_{n(k+1)} = F_{nk+n} = F_{nk-1}F_n + F_{nk}F_{n+1}.$$

U ovoj sumi prvi pribrojnik je sigurno djeljiv s F_n, a drugi pribrojnik je djeljiv sa F_n po pretpostavci indukcije. Stoga zaključujemo $F_n \mid F_{n(k+1)}$.

□

Teorem 2.3. *Najveći zajednički djelitelj dvaju Fibonaccijevih brojeva jednak je najvećem zajedničkom djelitelju indeksa tih dvaju Fibonaccijevih brojeva, tj.* $(F_n, F_m) = F_{(m,n)}$.

Dokaz: Neka je $m > n$. Najveći zajednički djelitelj dvaju brojeva možemo naći Euklidovim algoritmom. Primijenimo Euklidov algoritam na brojeve m i n.

$$\begin{aligned}
m &= nq_0 + r_1, \quad 0 < r_1 < n,\\
n &= r_1q_1 + r_2, \quad 0 < r_2 < r_1,\\
r_1 &= r_2q_2 + r_3, \quad 0 < r_3 < r_2,\\
&\vdots\\
r_{i-2} &= r_{i-1}q_{i-1} + r_i, \quad 0 < r_i < r_{i-1},\\
r_{i-1} &= r_iq_i.
\end{aligned}$$

Najveći zajednički djelitelj jednak je posljednjem ostatku u Euklidovom algoritmu koji je različit od nule. Dakle, $(m, n) = r_i$.
Odredimo sada najveći zajednički djelitelj brojeva F_m i F_n. Iz prvog koraka Euklidovog algoritma, uz primjenu Propozicije 2.2., dobivamo:

$$(F_m, F_n) = (F_{nq_0+r_1}, F_n) = (F_{nq_0-1}F_{r_1} + F_{nq_0}F_{r_1+1}, F_n) = (F_{nq_0-1}F_{r_1}, F_n).$$

Ovdje smo iskoristili sljedeće svojstvo najvećeg zajedničkog djelitelja: ako $c \mid b$, onda je $(a + b, c) = (a, c)$ i Teorem 2.2. po kojem $F_n \mid F_{nq_0}$. Kako znamo da su svaka dva susjedna Fibonaccijeva broja relativno prosta, znamo da je $(F_{nq_0-1}, F_{nq_0}) = 1$, pa je i $(F_{nq_0-1}, F_n) = 1$. Iskoristimo sada sljedeće svojstvo najvećeg zajedničkog djelitelja: ako je $(b, c) = 1$, onda je $(ab, c) = (a, c)$. Zaključujemo sljedeće: $(F_m, F_n) = (F_{r_1}, F_n)$. Ovo dobijemo iz prvog koraka Euklidovog algoritma. U sljedećim koracima dobivamo:

$$(F_{r_1}, F_n) = (F_{r_2}, F_{r_1}) = \cdots = (F_{r_i}, F_{r_i-1}).$$

Budući da, $r_i \mid r_{i-1}$ i $F_{r_i} \mid F_{r_i-1}$, slijedi da je $(F_{r_i}, F_{r_i-1}) = F_{r_i}$.

Time smo dokazali da vrijedi $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$.

$\square$

U sljedećem teoremu pokazat ćemo da za $n \neq 2$ vrijedi obrat Teorema 2.2.

Teorem 2.4. *Neka su m i n prirodni brojevi i $n \neq 2$. Ako $F_n \mid F_m$, onda $n \mid m$.*

Dokaz: Za $n = 1$, tvrdnja je zadovoljena. Neka je $n \geq 3$. Ako $F_n \mid F_m$, onda je $(F_n, F_m) = F_n$. Prema Teoremu 2.3. slijedi da je $F_{(m,n)} = F_n$. Svi Fibonaccijevi brojevi, s iznimkom $F_1 = F_2$, su međusobno različiti, pa slijedi $(m, n) = n$ tj. $n \mid m$.

$\square$

Sada znamo da vrijedi i sljedeći korolar.

Korolar 2.1. *Za prirodne brojeve m i n, $n \neq 2$ vrijedi: F_m je djeljiv s F_n ako i samo ako je m djeljiv s n.*

Primjer 2.1. *Iz prethodnih tvrdnji slijedi:*

$$\begin{aligned}
(F_{15}, F_{14}) &= (610, 377) = F_{(15,14)} = F_1 = 1, \\
(F_9, F_6) &= (34, 8) = F_{(9,6)} = F_3 = 2, \\
(F_{12}, F_6) &= (144, 8) = F_{(12,6)} = F_6 = 8.
\end{aligned}$$

Uočimo da Teorem 2.2. povlači sljedeće tvrdnje.

1. Svaki treći Fibonaccijev broj je paran.
   Kako je F_3=2, parni F_n imaju svojstvo da im je n višekratnik broja 3, tj. svaki treći Fibonaccijev broj je paran: $F_3, F_6, F_9, \ldots$

2. Kako je $F_4 = 3$, svaki četvrti Fibonaccijev broj je djeljiv sa 3.

3. $F_5 = 5$, pa je F_{5k}, $k \in \mathbb{N}$, djeljiv s 5.

4. $F_6 = 8$, pa je F_{6k}, $k \in \mathbb{N}$, djeljiv sa 8.

5. $F_7 = 13$, pa je F_{7k}, $k \in \mathbb{N}$, djeljiv sa 13.

2.4 Još neka svojstva

Pogledajmo neka od zanimljivih svojstava Fibonaccijevih i Lucasovih brojeva koja navodi Martin Gardner u [5].

1. Suma kvadrata bilo koja dva uzastopna Fibonaccijeva broja F_n^2 i F_{n+1}^2 jednaka je F_{2n+1}. Budući da zadnji broj mora imati neparan indeks, iz ovog svojstva slijedi da, ako u nizu napišemo kvadrate Fibonaccijevih brojeva, sume uzastopnih kvadrata dat će redom Fibonaccijeve brojeve sa neparnim indeksima.

2. Za bilo koja 4 uzastopna Fibonaccijeva broja A, B, C i D vrijedi sljedeća formula $C^2 - B^2 = A \cdot D$.

3. Niz zadnjih znamenki Fibnaccijevog niza ponavlja se u ciklusima od 60. Zadnje dvije znamenke ponavljaju se u ciklusima od 300. Zadnje 3 znamenke ponavljaju se u ciklusima od 1500, zadnje 4 znamenke u ciklusima od 15000, zadnjih 5 znamenaka u ciklusima 150000 i tako dalje za sve veće brojeve znamenaka.

4. Za svaki cijeli broj m postoji beskonačno mnogo Fibonaccijevih brojeva koji su djeljivi sa m i barem jedan se može naći unutar prvih $2m$ brojeva Fibonaccijevog niza.
   Ovo svojstvo ne vrijedi za Lucasov niz jer npr. niti jedan Lucasov broj nije djeljiv sa 5.

5. Sa iznimkom broja 3, svaki Fibonaccijev broj koji je prost ima prost indeks. Na primjer, 233 je prost i njegov indeks 13 je isto prost. Obratno, ako je indeks složen, tj. nije prost broj, onda je takav i Fibonaccijev broj.
   Nažalost, obrat nije uvijek istinit. Ako je indeks prost, ne znači uvijek da je prost i pripadni Fibonaccijev broj. Prvi kontraprimjer je F_{19}=4181; indeks je prost, ali je $4181 = 37 \cdot 113$. Kad bi obrat bio istinit u svakom slučaju, on bi bio odgovor na najveća neodgovorena pitanja o Fibonaccijevim brojevima.
   Postoji li beskonačno mnogo prostih Fibonaccijevih brojeva? Znamo da prostih brojeva ima beskonačno mnogo i stoga, kad bi svaki Fibonaccijev broj sa prostim indeksom bio prost, onda bi postojalo i beskonačno mnogo prostih Fibonaccijevih brojeva. Nije poznato postoji li najveći prost Fibonaccijev broj. Isto pitanje i odgovor vrijede i za Lucasov niz.
   Najveći poznat Fibonaccijev prost broj je F_{130021}, broj sa 27173 znamenki. Najveći poznat Lucasov prost broj je L_{56003}, broj sa 11704 znamenke.

6. Sa trivijalnim iznimkama $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$, jedini potpuni kvadrat među Fibonaccijevim brojevima je $F_{12} = 144$ koji je, iznenađujuće, kvadrat svog indeksa.
   Postoji li ili ne kvadrat Fibonaccijevog broja veći od 144, bilo je otvoreno pitanje sve dok konačno nije riješeno 1963. Problem je riješio John H. E. Cohn koji je dokazao da je 144 jedini potpuni kvadrat u Fibonaccijevom nizu i da su 1 i 4 jedini potpuni kvadrati u Lucasovom nizu.

7. Jedini kubovi među Fibonaccijevim brojevima su 1 i 8, a jedini kub među Lucasovim brojevima je 1.

8. Recipročni broj od 89, 11-og Fibonaccijevog broja, može biti zapisan kao Fibonaccijev niz, počevši sa 0 i dodavanjem ostalih članova na način prikazan na Slici 2.

Još jedna zanimljivost o Fibonaccijevim brojevima jest ta da postoje i Tribonaccijevi brojevi. Njih je tako nazvao matematičar Mark Feinberg koji je napisao članak o njima 1963. godine. U tom članku objasnio je da su to brojevi dobiveni zbrajanjem po tri uzastopna člana Fibonaccijevog niza. Dakle, to je niz brojeva koji izgleda ovako

$$1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, \ldots$$

gdje su $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2$ početne vrijednosti. Za n-ti Tribonaccijev broj vrijedi sljedeća rekurzija:

$$F_{n+3} = F_{n+2} + F_{n+1} + F_n.$$

Ovo možemo generalizirati u nizove koji se formiraju zbrajanjem 4 uzastopna člana Fibonaccijevog niza, tzv. Tetranaccijevi brojevi, 5 uzastopnih članova Fibonaccijevog niza itd.

```
.0112358
       13
        21
         34
          55
           89
           144
            233
             337
              610
               ...
               ....
                ....
                 ....
-------------------
.011235955056........
1/89 = .011235955056179775 ..
```

Slika 2: Recipročni broj od 89 zapisan pomoću znamenki Fibonaccijevog niza

2.4.1 Pascalov trokut

Promatrajmo razvoj binoma $(x+y)^n$, za $n \in \mathbb{N}$. Zapišimo ga u ovoj formi:

$$
\begin{array}{lccccccccc}
(x+y)^0 = & & & & & x^0y^0 & & & & \\
(x+y)^1 = & & & & x^1y^0 & + & x^0y^1 & & & \\
(x+y)^2 = & & & x^2y^0 & + & 2x^1y^1 & + & x^0y^2 & & \\
(x+y)^3 = & & x^3y^0 & + & 3x^2y^1 & + & 3x^1y^2 & + & x^0y^3 & \\
(x+y)^4 = & x^4y^0 & + & 4x^3y^1 & + & 6x^2y^2 & + & 4x^1y^3 & + & x^0y^4 \\
\vdots & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Podsjetimo se, polje koeficijenata koji stoje uz x i y u razvoju binoma nazivamo Pascalov trokut i on se najčešće piše u sljedećem obliku

$$
\begin{array}{lccccccccc}
n=0: & & & & & 1 & & & & \\
n=1: & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2: & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n=3: & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4: & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & & &
\end{array}
$$

U Pascalovom trokutu koeficijenti uz x i y su binomni koeficijenti, koji se računaju po sljedećoj formuli:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

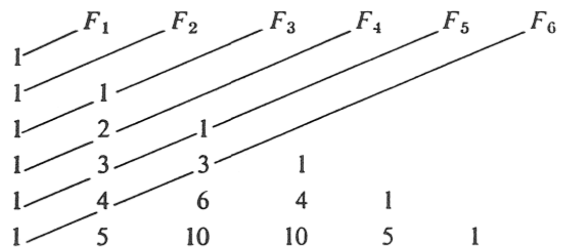
Specijalno vrijedi

$$\binom{0}{0} = \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1, n \geq 1.$$

Za raspis binoma na n-tu potenciju vrijedi Binomni poučak koji je dan formulom

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Sada pogledajmo kako su Fibonaccijevi brojevi povezani s Pascalovim trokutom.



Slika 3: Fibonaccijevi brojevi u Pascalovom trokutu

Uočimo da su u ovom malo drugačije zapisanom Pascalovom trokutu zbrojevi koeficijenata po dijagonalama Fibonaccijevi brojevi. Generalizacijom dolazimo do zaključka da se n-ti Fibonaccijev broj iz Pascalovog trokuta može izračunati po sljedećoj formuli:

$$F_{n+1} = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-i}{i}$$

Dokaz tvrdnje može se naći u [11].

Primjer 2.2. *Primjenom prethodne formule dobivamo*

$$\begin{aligned} F_5 &= \sum_{i=0}^{2} \binom{4-i}{i} = \binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2} = 1+3+1 = 5, \\ F_8 &= \sum_{i=0}^{3} \binom{7-i}{i} = \binom{7}{0} + \binom{6}{1} + \binom{5}{2} + \binom{4}{3} = 1 + \frac{6!}{1!5!} + \frac{5!}{2!3!} + \frac{4!}{3!1!} \\ &= 1+6+10+4 = 21. \end{aligned}$$

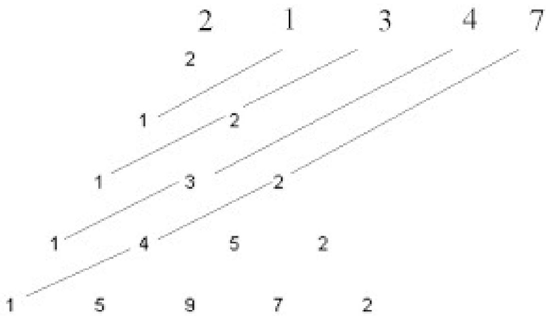
Postoje li u Pascalovom trokutu Lucasovi brojevi? Na standardnom Pascalovom trokutu nisu uočeni uzorci kojima bismo dobili Lucasove brojeve. Osim standardnog Pascalovog trokuta, postoji i Pascalov trokut drugog reda koji izgleda tako da su mu na "hipotenuzi" svi elementi jednaki 2, a svi elementi (osim prvoga) smješteni na vertikalnoj "kateti" jednaki su 1. Zanimljivi su elementi smješteni na prve dvije "usporednice" s "hipotenuzom". Na prvoj su "usporednici" smješteni svi neparni brojevi, a na drugoj svi potpuni kvadrati prirodnih brojeva. Svaki od ostalih brojeva dobiven je uobičajeno, tj. svaki broj y dobiven je kao zbroj broja x smještenoga neposredno iznad y i broja z smještenoga neposredno lijevo od broja x. Pogledajmo Sliku 4.

77 = 50 + 27

2									
1	2								
1	3	2							
1	4	5	2						
1	5	9	7	2					
1	6	14	16	9	2				
1	7	20	30	25	11	2			
1	8	27	50	55	36	13	2		
1	9	35	77	105	91	49	15	2	
1	10	44	112	182	196	140	64	17	2

Slika 4: Pascalov trokut drugog reda

U ovakvom trokutu svi Lucasovi brojevi dobiju se kao zbrojevi elemenata smještenih na "pravcima usporednima s visinom povučenom na hipotenuzu". Na prvom takvom "pravcu" nalazi se samo broj 2, na drugom broj 1, na trećem brojevi 2 i 1, na četvrtom brojevi 3 i 1, na petom brojevi 2, 4, i 1 itd. Računanjem ovih zbrojeva dobiva se niz 2, 1, 3, 4, 7,... tj. niz Lucasovih brojeva kao na Slici 5.



Slika 5: Lucasovi brojevi u Pascalovom trokutu drugog reda

Generalizacijom dolazimo do zaključka da se n-ti Lucasov broj iz Pascalovog trokuta može izračunati po sljedećoj formuli:

$$L_n = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n}{n-i} \binom{n-i}{i}.$$

Dokaz ove tvrdnje nalazi se u [14].

Primjer 2.3. *Primjenom prethodne formule dobivamo*

$$L_7 = \sum_{i=0}^{3} \frac{7}{7-i}\binom{7-i}{i} = \frac{7}{7}\binom{7}{0} + \frac{7}{6}\binom{6}{1} + \frac{7}{5}\binom{5}{2} + \frac{7}{4}\binom{4}{3} = 1+7+14+7 = 29,$$

$$L_4 = \sum_{i=0}^{2} \frac{4}{4-i}\binom{4-i}{i} = \frac{4}{4}\binom{4}{0} + \frac{4}{3}\binom{4}{1} + \frac{4}{2}\binom{4}{2} = 7.$$

2.4.2 Trik za brzo izračunavanje Fibonaccijevih i Lucasovih brojeva

Okreni leđa nekom i pitaj ga da zapiše bilo koja dva pozitivna cijela broja jedan ispod drugog. Neka zbroji ta dva broja da dobije treći. Dobiveni treći broj neka zapiše ispod drugog i zbroji zadnja dva broja da dobije četvrti. Tako neka nastavi sve dok ne dobije stupac od 10 brojeva.

Drugim riječima, naš suigrač je zapisao deset brojeva generaliziranog Fibonaccijevog niza. Zatim se ti okreneš, povučeš crtu ispod zadnjeg broja i odmah napišeš zbroj svih deset brojeva. Tajna je da pomnožiš sedmi broj sa 11.
Dokažimo da je zbroj prvih deset brojeva u generaliziranom Fibonaccijevom nizu uvijek 11 puta sedmi broj niza. Nazovimo prva dva broja a i b. Deset brojeva i njihovi zbrojevi mogu biti prikazani kao na Slici 6.

1.	a		
2.			b
3.	a	+	b
4.	a	+	2b
5.	2a	+	3b
6.	3a	+	5b
7.	5a	+	8b
8.	8a	+	13b
9.	13a	+	21b
10.	21a	+	34b
	55a	+	88b

Slika 6: Zbroj prvih 10 članova jednak je $11 \cdot F_7$

Zbroj je očito 11 puta sedmi broj u generaliziranom Fibonaccijevom nizu. Koeficijenti uz a i b tvore standardni Fibonaccijev niz.

Postoji još jedna igrica za brzo izračunavanje sume prvih n članova generaliziranog Fibonaccijevog niza. Suma prvih n članova iznosi F_{n+2} minus drugi član tog niza. To je baza za brzo izračunavanje.

Neka netko napiše bilo koja dva početna broja, onda neka napiše koliko god želi članova generaliziranog Fibonaccijevog niza. Sada neka povuče crtu između bilo koja dva broja.

Ti možeš brzo dati zbroj svih članova do te crte, samo moraš pogledati drugi član poslije crte i oduzeti ga od drugog člana niza. Ako je to standardni Fibonaccijev niz, oduzimaš 1, ako se radi o Lucasovom nizu oduzimaš 3.

$$2, 5, 7, 12, 19, 31, ||50, 81, 131, \ldots$$
$$81 - 5 = 76.$$

3. Fibonometrija

3.1 Fibonaccijevi brojevi i zlatni rez

Fibonaccijevi brojevi često se povezuju s konstantom zlatnog reza (phi, φ) koja iznosi 1.618.... Pokazat ćemo da je ova konstanta rješenje Fibonaccijeve kvadratne jednadžbe, koje smo označili s α, pa ćemo u ostatku teksta koristiti tu oznaku. Fibonaccijevi brojevi imaju veliku primjenu u geometriji i trigonometriji, pa je spajanjem Fibonaccijevog niza, geometrije i trigonometrije nastala Fibonometrija. Promatranjem omjera dvaju susjednih Fibonaccijevih brojeva dobili smo omjere koji konvergiraju konstanti zlatnog reza.
Broj $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ bio je poznat starim Grcima puno prije nego se pojavio Fibonacci sa svojim nizom. Kako su Egipćani od Grka preuzeli znanje iz geometrije, za gradnju svojih piramida koristili su upravo ovaj broj. Koncept tog broja, odnosno zlatnog omjera koristimo u geometriji ravnine.

Objasnimo što je to zapravo koncept zlatnog reza.

Definicija 3.1. *Tražimo točku C na dužini $\overline{AB}$, tako da omjer duljine cijele dužine $\overline{AB}$ i duljeg dijela $\overline{AC}$ bude jednak omjeru duljine dužine $\overline{AC}$ i duljine dužine $\overline{BC}$.*

Ako je $|AC| = a$ i $|BC| = b$, tada vrijedi $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$. Konstanta zlatnog reza definira se $\frac{a}{b} = \varphi$ i lako se vidi da vrijedi $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ tj. φ je rješenje Fibonaccijeve kvadratne jednadžbe. Kako je $\varphi > 1$, slijedi da je $\varphi = \alpha$.

3.2 Zlatni trokut

Primijenimo sada omjer zlatnog reza i Fibonaccijeve brojeve na trokut koji ćemo zvati zlatni trokut.

Definicija 3.2. *Jednakokračni trokut je zlatni trokut ako mu je omjer duljine jednog kraka i osnovice jednak $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, tj. konstanti zlatnog reza.*

Propozicija 3.1. *Neka je $\triangle ABC$ zlatni trokut s osnovicom $\overline{AC}$. Ako točka D dijeli stranicu $\overline{BC}$ u zlatnom omjeru, pri čemu je $\overline{BD}$ dulji dio stranice $\overline{BC}$, onda $\overline{AD}$ raspolavlja kut u vrhu A.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $|AB| = \alpha|AC|$ i $|BC| = \alpha|AC|$. Ako točka D dijeli stranicu $\overline{BC}$ u zlatnom omjeru (Slika 7.), onda je

$$\begin{aligned} |BD| &= \alpha\,|CD|\,, \\ |BD| + |CD| &= \alpha\,|CD| + |CD| = (\alpha+1)\,|CD| = \alpha^2\,|CD|\,. \end{aligned}$$

No onda slijedi

$$|BC| = \alpha^2\,|CD| = \alpha\,|AC|\,,$$

pa je $\alpha\,|CD| = |AC|$. Kako je

$$\angle BCA = \angle ACD, \quad \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|CD|} = \alpha,$$

slijedi da je trokut $\triangle ABC \sim \triangle CAD$. To povlači da je $\triangle CAD$ jednakokračan i da je $\angle CAD = \angle ABC$. Nadalje, kako je $|AC| = |AD|$ i $\alpha\,|AC| = |BC| = \alpha\,|BD|$, slijedi da je $\triangle ADB$ jednakokračan. Stoga je $\angle DAB = \angle ABD = \angle ABC$. No, onda je $\angle CAD = \angle DAB$, što znači da dužina $\overline{AD}$ raspolavlja kut $\angle BAC$.

$\square$

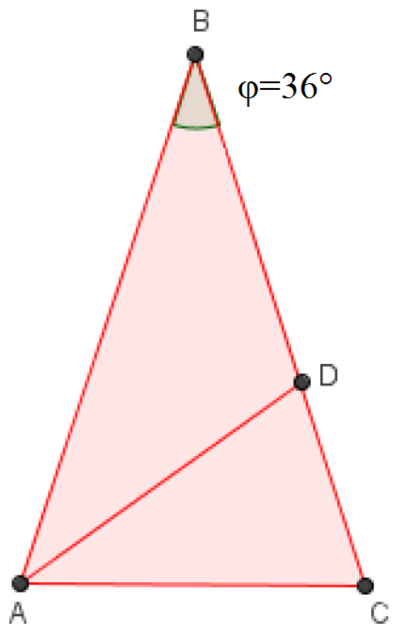
Korolar 3.1. *Neka je $\triangle ABC$ zlatni trokut s osnovicom $\overline{AC}$. Neka točka D dijeli stranicu $\overline{BC}$ u zlatnom omjeru, pri čemu je $\overline{BD}$ dulji dio stranice. Tada je $\triangle CAD$ također zlatni trokut.*

Dokaz: U dokazu Propozicije 3.1. pokazali smo da je trokut $\triangle CAD$ jednakokračan trokut i da je

$$\frac{|AC|}{|CD|} = \alpha,$$

pa je trokut $\triangle CAD$ zlatni trokut.

$\square$



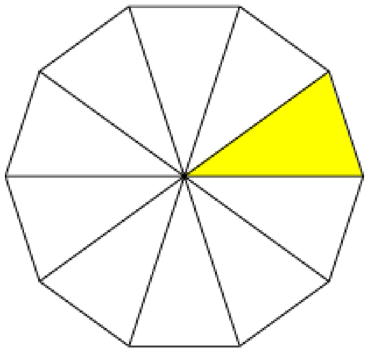
Slika 7: Zlatni trokut

Propozicija 3.2. *Kut nasuprot osnovice zlatnog trokuta jednak je 36°.*

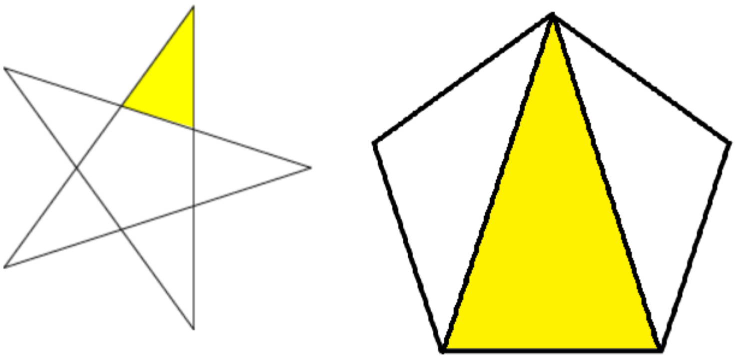
Dokaz: Neka je $\triangle ABC$ zlatni trokut za koji vrijedi $|AB| = |BC| = \alpha\,|AC|$. Neka točka D dijeli stranicu $\overline{BC}$ u zlatnom omjeru. Kako je prema Korolaru 3.1. $\triangle CAD$ zlatni trokut, onda je on sličan početnom trokutu $\triangle ABC$. Neka je kut $\angle ACD = 2x$. Tada je prema Propoziciji 3.1. $\angle DAC = (\angle ACD)/2 = x$. Iz toga slijedi $2x + 2x + x = 180°$, pa je $x = 36°$. Dakle, veličina kuta u vrhu B jednaka je $36°$, a veličina preostala dva kuta iznosi $72°$.

$\square$

Sa zlatnim trokutom susrećemo se često, iako to možda i ne znamo. Na primjer, središnji kut pravilnog deseterokuta iznosi točno 36°, pa je karakteristični trokut pravilnog deseterokuta baš zlatni trokut (Slika 8.). Također, i u pravilnom peterokutu možemo naći zlatni trokut (Slika 9.).



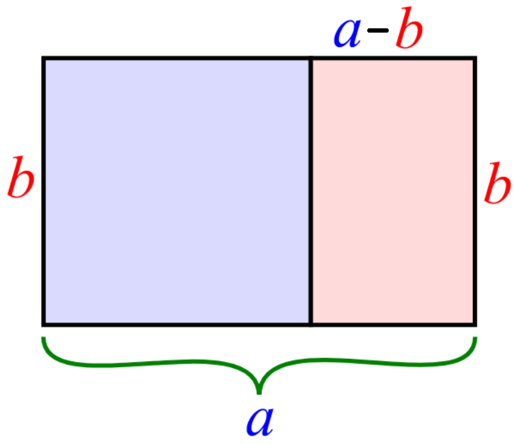
Slika 8: Pravilni deseterokut sa zlatnim trokutom



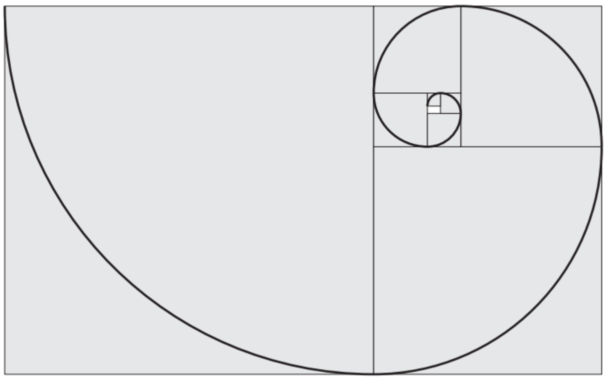
Slika 9: Pravilni peterokut sa zlatnim trokutom

Definicija 3.3. *Pravokutnik je zlatni pravokutnik ako je omjer dulje i kraće stranice tog pravokutnika jednak* $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

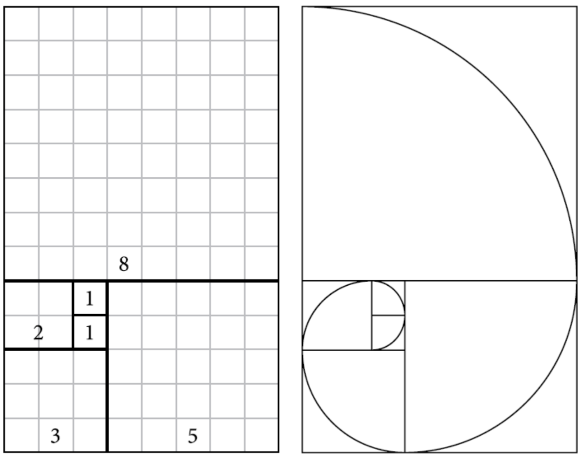
Ako je kraća stranica tog pravokutnika b, a dulja a, tada je $\frac{a}{b} = \alpha$. Lako se pokaže da je u tom slučaju i $\frac{b}{a-b} = \alpha$, pa je i pravokutnik sa stranicama $a - b$ i b također zlatni. Dakle, ako zlatnom pravokutniku oduzmemo kvadrat s duljinom stranice koja je jednaka kraćoj stranici zlatnog pravokutnika, ostat će manji pravokutnik koji je također zlatni (Slika 10). Ponavljanjem tog postupka formiramo beskonačni niz sve manjih i manjih zlatnih pravokutnika te tako nastaje niz od beskonačno mnogo točaka koje imaju svojstvo da se nalaze na jedinstvenoj krivulji koja se naziva logaritamska spirala, što možemo vidjeti na Slici 11.
Uočimo svojstvo popločavanja kvadratima kojima su duljine stranica Fibonaccijevi brojevi. Na Slici 12. lijevo prikazan je početak tog popločavanja, a ono se nastavlja beskonačnim nizom kvadrata. Posebni slučaj logaritamske spirale je Fibonaccijeva spirala, stvorena crtanjem lukova koji spajaju suprotne kuteve kvadrata u Fibonaccijevom popločavanju kvadratima, prikazanom na Slici 12. desno. Ova spirala zove se još i zlatna spirala i nalazimo ju u različitim oblicima u prirodi, kao što su npr. ljudsko uho, jaje, ljuštura glavonošca indijske lađice, rep kameleona, oblik galaksija u svemiru itd.



Slika 10: Zlatni pravokutnik



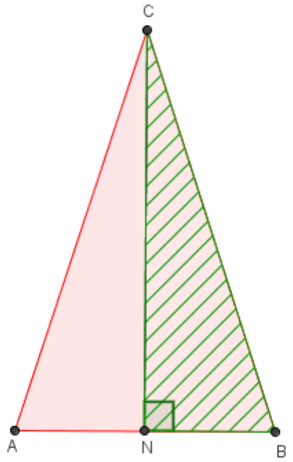
Slika 11: Logaritamska sipirala



Slika 12: Popločavanje Fibonaccijevim kvadratima i Fibonaccijeva spirala

3.3 Trigonometrijske vrijednosti nekih kutova

Svojstva zlatnog trokuta omogućuju računanje trigonometrijskih vrijednosti nekih kutova. Na Slici 13. uočimo pravokutni trokut u zlatnom trokutu. Trokut $\triangle NBC$ je pravokutni trokut, a kut pri vrhu C iznosi $18°$.



Slika 13: Pravokutni trokut u zlatnom trokutu

Neka je $|AB| = b$ i $|BC| = a$. Tada je $\frac{a}{b} = \alpha$ pa je

$$\sin 18^\circ = \frac{|NB|}{|BC|} = \frac{1}{2}\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{b}{2a} = \frac{1}{2\alpha} = \frac{1}{1+\sqrt{5}}.$$

Racionalizacijom dobijemo sljedeću vrijednost za $\sin 18^\circ$:

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Iz toga korištenjem osnovnog trigonometrijskog identiteta slijedi da je

$$\cos 18^\circ = \sqrt{1-\sin^2 18^\circ} = \sqrt{1-\frac{6-2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

U ovisnosti o α možemo dobiti sljedeći izraz:

$$\begin{aligned}\cos 18^\circ &= \sqrt{1-\frac{1}{4\alpha^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{4-(\alpha-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{-\alpha^2+2\alpha+2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\alpha+2} = \frac{\sqrt{\sqrt{5}\alpha}}{2},\end{aligned}$$

koji se dobiva korištenjem sljedećih identiteta

$$\frac{1}{\alpha} = \alpha - 1, \quad \alpha^2 = \alpha + 1, \quad 2 = (\alpha-1)(1+\sqrt{5}), \quad 1+\sqrt{5} = 2\alpha,$$

a oni se lako mogu provjeriti.

Izračunajmo vrijednost od $\sin 3^\circ$ koji je ujedno najmanji cjelobrojni kut čije trigonometrijske vrijednosti možemo eksplicitno izračunati. Računat ćemo ga kao $\sin(18^\circ - 15^\circ)$, a za to su nam potrebne vrijednosti za $\sin 15^\circ$ i $\cos 15^\circ$. Izračunajmo ih.

$$\begin{aligned}
\sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ)\\
&= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\\
&= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

Na sličan način dobijemo da je $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
Dakle, kako $\sin 3^\circ$ možemo izraziti kao $\sin(18^\circ - 15^\circ)$, dobijemo sljedeći izraz:

$$\begin{aligned}
\sin 3^\circ &= \sin(18^\circ - 15^\circ)\\
&= \sin 18^\circ \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \sin 15^\circ\\
&= \frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\
&= \frac{\sqrt{30}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{60+12\sqrt{5}}+\sqrt{20+4\sqrt{5}}}{16}.
\end{aligned}$$

3.4 Zlatni pleter

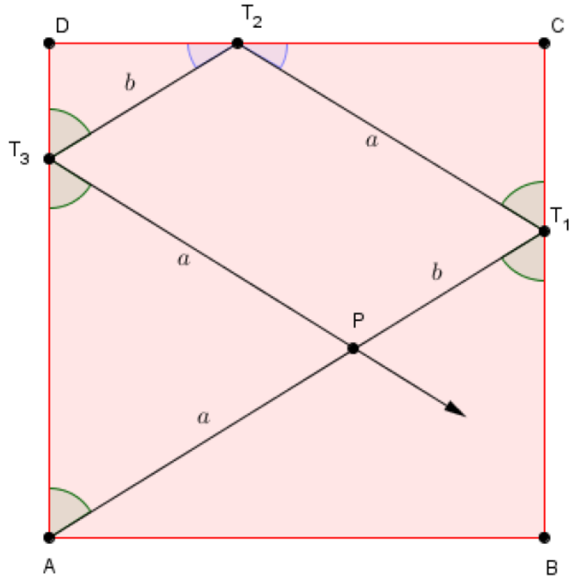
Primjenu Fibonaccijevih brojeva i trigonometrijskih funkcija na Zlatni pleter prvi je proučavao matematičar W.E. Sharpe u [15]. Tu se radi o nastajanju uzoraka tkanja tkanine u jednom kvadratu po volji duge stranice (uglavnom uzimamo duljinu stranice 1). Tkanje se provodi po vrlo jednostavnom principu: kada jednom nit s iglom izađe pod kutom φ iz vrha A kvadrata, zraka pod kojom ta nit putuje reflektira se kao zraka svjetlosti od stranicu koju presjeca. Upadni kut zrake jednak je kutu refleksije zrake. Kut φ pod kojim će igla pri tkanju izaći iz vrha A kvadrata $ABCD$ zadan je formulom

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{n+\alpha}{n+\alpha+1},$$

odnosno

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{n+\alpha}{n+\alpha+1},$$

pri čemu je n proizvoljan nenegativan broj, a α konstanta zlatnog reza. Za različite n-ove dobijemo različite kutove, a time i različite uzorke. Za $n = 0$ dobivamo $\mathrm{tg}\varphi = \frac{\alpha}{\alpha+1}$.



Slika 14: Uzorak nakon 3 refleksije

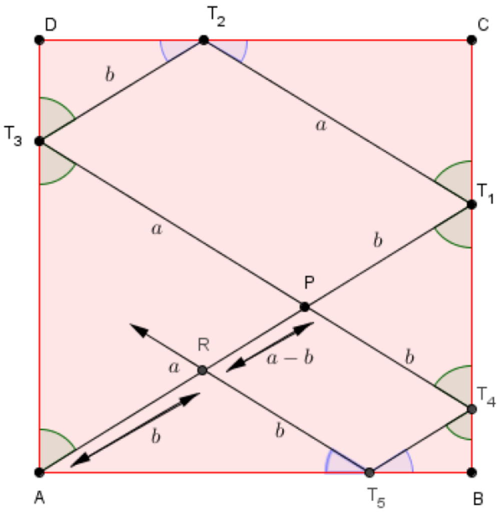
Na Slici 14. uočimo da će već nakon treće refleksije reflektirana zraka presjeći početnu zraku iz vrha A. Kako je upadni kut zrake svjetlosti jednak je kutu refleksije zrake, slijedi da je $\angle AT_1B = \angle T_2T_1C$. Konstruirajmo sada paralelu kroz T_1 s pravcem na kojem se nalazi dužina $\overline{AB}$. Dobit ćemo pravokutnik ABT_1E te dva sukladna pravokutna trokuta $\triangle ABT_1$ i $\triangle AT_1E$. Zbog sukladnosti trokuta slijedi da su kutovi $\angle AT_1B$ i $\angle PAT_3$ jednaki. Zraka se sada dalje odbija od stranicu $\overline{CD}$. Uočimo li slične trokute $\triangle T_1CT_2$ i $\triangle T_3DT_2$, po Teoremu KKK o sličnosti trokuta zaključujemo da su kutovi $\angle T_1T_2C$ i $\angle T_3T_2D$ te $\angle T_2T_3D$ i $\angle T_1AT_3$ jednaki. Iz sljedeće refleksije dobivamo da su kutovi $\angle T_2T_3D$ i $\angle PT_3A$ jednaki. Kako je kut $\angle PT_3A$ jednak kutu $\angle PAT_3$ trokut $\triangle PAT_3$ je jednakokračan. Zrake refleksije paralelne su u parovima, a četverokut $PT_1T_2T_3$ je paralelogram. Kako je tangens kuta jednak omjeru duljina nasuprotne i priležeće katete pravokutnog trokuta, ovdje je zadan s

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\alpha}{\alpha + 1},$$

pa je duljina dužine $\overline{BT_1}$ jednaka tangensu kuta pod kojim zraka izlazi iz vrha A kvadrata $ABCD$. Označimo udaljenost od vrha A do presjeka P reflektirane zrake i početne zrake iz vrha A sa a, a udaljenost od P do točke T_1 sa b. Tada vrijedi:

$$|T_1C| = 1 - \frac{\alpha}{\alpha + 1} = \frac{1}{\alpha + 1}.$$

Uočimo trokute $\triangle ABT_1$ i $\triangle T_2CT_1$ na Slici 14. Trokuti su pravokutni, a kutovi $\angle AT_1B$ i $\angle T_2T_1C$ su veličinom jednaki, pa je omjer hipotenuza tih trokuta jednak omjeru duljina kateta tih trokuta. Tada vrijedi:



Slika 15: Zlatni uzorak

$$\frac{a+b}{a} = \frac{\frac{\alpha}{\alpha+1}}{\frac{1}{\alpha+1}} = \alpha,$$

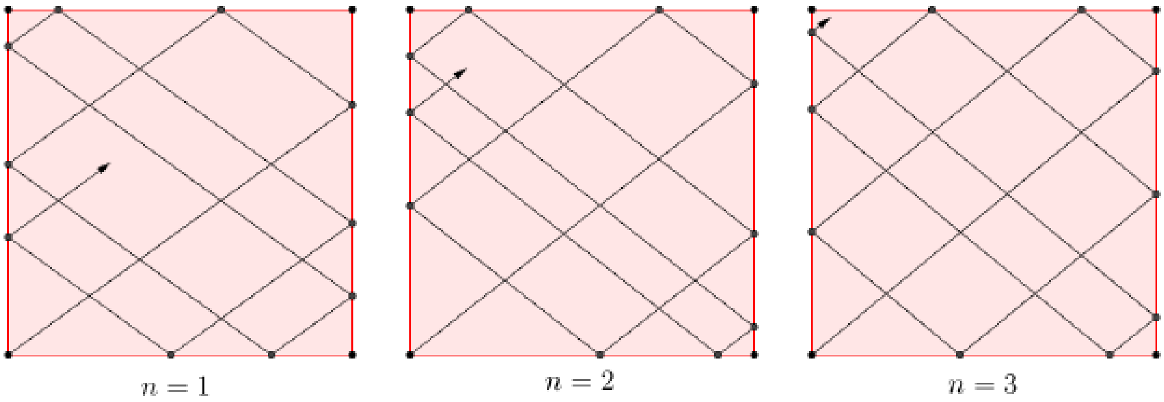
što povlači

$$\frac{b}{a} = 1 - \alpha,$$

tj.

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{\alpha}{\alpha} = \alpha.$$

To znači da točka P dijeli dužinu $\overline{AT_1}$ u zlatnom omjeru.
Napravimo li još dvije refleksije, dobijemo još jednu točku presjeka R koja dijeli dužinu $\overline{AP}$ u omjeru zlatnog reza (Slika 15.).



Slika 16: Zlatni uzorak za $n = 1, 2, 3$ nakon 10 refleksija
$\varphi_1 = \text{arctg}^{-1}\frac{1+\alpha}{2+\alpha}$, za $n = 1$,

$\varphi_2 = \text{arctg}^{-1}\frac{2+\alpha}{3+\alpha}$, za $n = 2$,

$\varphi_3 = \text{arctg}^{-1}\frac{3+\alpha}{4+\alpha}$, za $n = 3$.

Ovakav uzorak nazivamo zlatni uzorak (eng. *golden weaves*) (Slika 16.).

4. Zanimljivosti o Fibonaccijevim i Lucasovim brojevima

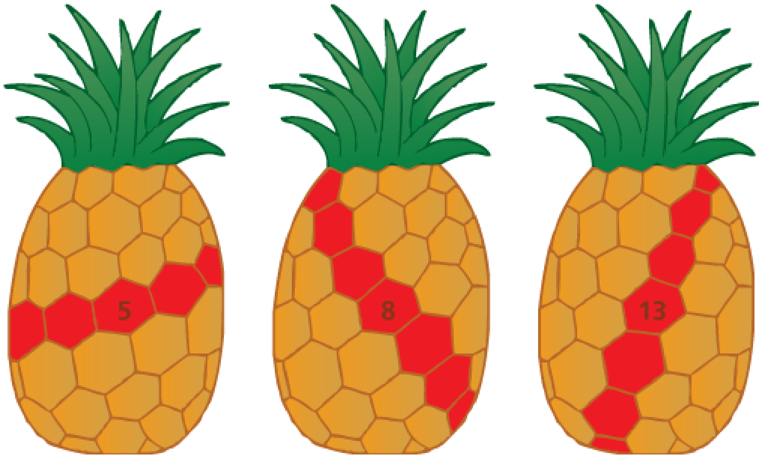
4.1 Fibonaccijevi brojevi u prirodi

Fibonaccijeve brojeve u prirodi susrećemo u mnogim slučajevima. Na primjer, broj latica na cvjetovima biljaka je Fibonaccijev broj (Slika 17.).

Slika 17: Brojevi latica i Fibonaccijevi brojevi

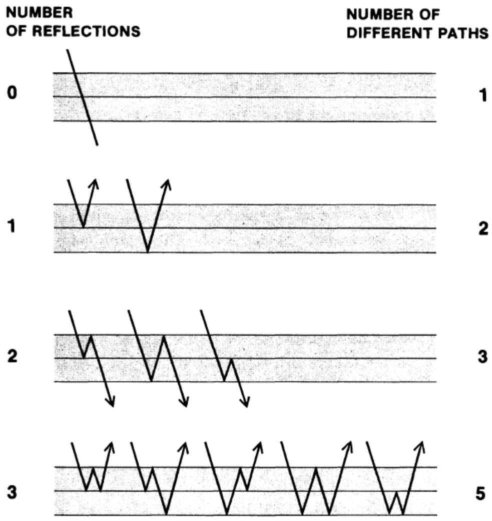
Najpoznatiji primjer pojavljivanja Fibonaccijevih, a ponekad i Lucasovih brojeva u prirodi jest broj spirala u sjemenkama suncokreta. Postoji dva različita seta logaritamskih spirala: jedan set kreće se u smjeru kazaljke na satu, a drugi obrnuto od smjera kazaljke. Brojevi tih spirala su Fibonaccijevi brojevi, vrlo često i uzastopni Fibonaccijevi brojevi. Suncokreti prosječne veličine imaju 34 i 55 spirala (Slika 18.), a zabilježeni su i ogromni suncokreti sa čak 144 spirale. Također kod ananasa uočavamo skale koje su šesterokuti, a broj šesterokuta u skali jest Fibonaccijev broj (Slika 19.).

Slika 18: Sjemenke suncokreta i Fibonaccijevi brojevi



Slika 19: Skale ananasa i Fibonaccijevi brojevi

Kako navodi Gardner u [5], austrijsko-kanadski matematičar Leo Moser proučavao je puteve kosih zraka svjetlosti kroz dvije staklene ploče. Uočio je da ako se zraka reflektira jednom, postoje 2 puta: onaj kojim je krenula i onaj kojim se kreće nakon što se reflektira. Ako se zraka reflektira dva puta, postoje 3 puta itd (Slika 20.). Kako se broj refleksija n povećava, broj puteva su Fibonaccijevi brojevi redom, počevši od trećeg, F_3=2. Za n refleksija, broj puteva je F_{n+2}.

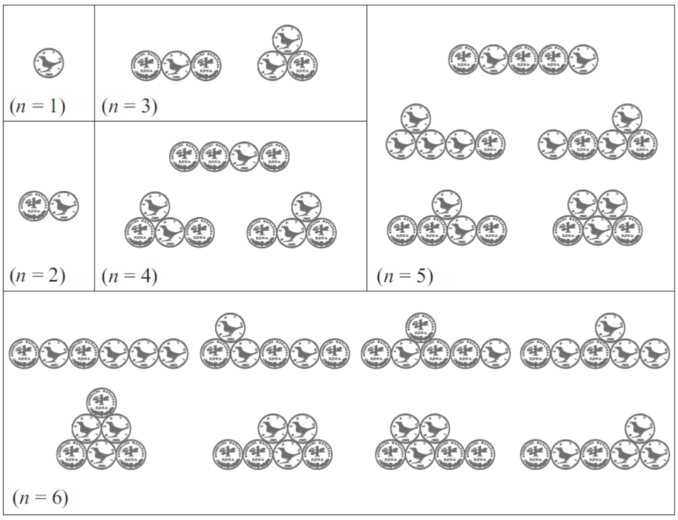


Slika 20: Refleksija zrake i Fibonaccijevi brojevi

4.2 Fibonaccijeve krivotvorine

U nekim primjerima dobit ćemo niz brojeva koji na prvi pogled izgleda kao Fibonaccijev niz, no kako se n bude povećavao, račun će pokazati da to nije točno. Takve nizove zovemo Fibonaccijevim krivotvorinama.

Primjer 4.1. *Posjedujemo n novčića. Zanima nas broj načina na koje ih možemo posložiti tako da se dva uzastopna novčića u svakom retku dodiruju, a svaki novčić u višem retku dodiruje i dva novčića ispod njega. Na Slici 21. pogledajmo situacije za* $1 \leq n \leq 6$.



Slika 21: Broj načina na koje možemo posložiti dva novčića

Zaključujemo da vrijedi:

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8,$$

što odgovara vrijednostima Fibonaccijevog niza. Međutim, pokušamo li dokazati rekurzivnu relaciju

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1},$$

to nećemo uspjeti jer ovaj niz počinje kao Fibonaccijev niz, ali on to zapravo nije. Sljedeće vrijednosti su $a_7 = 12 \neq 13 = F_7$, $a_8 = 18 \neq 21 = F_8$.

4.3 Brojevni sustavi

Još jedna od zanimljivosti vezanih uz Fibonaccijeve i Lucasove brojeve je da ih možemo koristiti kao bazu za prikazivanje prirodnih brojeva. Naravno, želimo da prikaz bude jedinstven, pa moramo uvesti određena pravila. Za prikaz prirodnih brojeva koristimo različite brojevne sustave od kojih su najpoznatiji binarni i dekadski.

Fibonaccijev brojevni sustav je onaj sustav u kojem brojeve prikazujemo kao sumu Fibonaccijevih brojeva, što znači da neki prirodni broj N možemo zapisati u sljedećem obliku:

$$N = a_{n-1}F_{n+1} + \ldots + a_2F_4 + a_1F_3 + a_0F_2,$$

gdje su F_i brojevi Fibonaccijevog niza te $a_i \in \{0, 1\}$.
Ovaj sustav je sličan binarnom brojevnom sustavu jer koristi samo znamenke 0 i 1.

Primjer 4.2. *Prikažimo broj 8 u Fibonaccijevom brojevnom sustavu.*

$$8 = F_6 = F_5 + F_4 = F_5 + F_3 + F_2 = F_5 + F_3 + F_1.$$

Broj 8 možemo prikazati na nekoliko načina koristeći Fibonaccijeve brojeve, što znači da prikaz nije jedinstven. Bolji pregled dan je na Slici 22.

F_i	F_6	F_5	F_4	F_3	F_2	F_1
Vrijednost	8	5	4	3	2	1
a_i	1	0	0	0	0	0
	0	1	1	0	0	0
	0	1	0	1	1	0
	0	1	0	1	0	1

Slika 22: Prikazi broja 8 u Fibonaccijevom brojevnom sustavu

Što trebamo učiniti da bismo za prikaz bilo kojeg prirodnog broja dobili jedinstveni prikaz? Do nejedinstvenosti dolazi zbog sljedeća dva razloga:

- Problem vezan uz činjenicu da je F_1=F_2=1, riješava se tako da se uzme jedan od ova dva broja za korištenje u prikazu.
- Kako za Fibonaccijeve brojeve vrijedi relacija $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, u prikazima trebamo odlučiti hoćemo li koristiti F_n ili $F_{n-1} + F_{n-2}$. Ukoliko koristimo F_n, dobivamo najkraći mogući prikaz, a ako koristimo $F_{n-1} + F_{n-2}$ dobivamo najdulji mogući prikaz. Prirodno je odabrati najkraći prikaz.

Sljedeći teorem slijedi prirodno iz gore navedenog.

Teorem 4.1. *Svaki prirodni broj N može se prikazati u obliku zbroja različitih Fibonaccijevih brojeva*

$$N = F_{i_1} + F_{i_2} + \ldots + F_{i_r}$$

tako da je pritom $i_{k+1} \leq i_k - 2$ za $k = 1, 2, \ldots, r-1$, te je $i_r \geq 2$. Rastav je jedinstven.

Dokaz ove tvrdnje može se naći u [8].

Može se pokazati da slična tvrdnja vrijedi i za Lucasove brojeve.

Teorem 4.2. *Svaki prodni broj N može se prikazati u obliku zbroja Lucasovih brojeva*

$$N = L_{i_1} + L_{i_2} + \cdots + L_{i_r}$$

tako da je pritom $L_{i_j} L_{i_j+1} = 0$, $j = 1, 2, \ldots, r$, i $L_0 L_2 = 0$. Rastav je jedinstven.

Dokaz ove tvrdnje naveden je u [2].

Literatura

[1] B. Bakula, Z. Franušić, *Matrice s Fibonaccijevim brojevima*, math.e **26** (2009).

[2] J. L. Brown, Jr., *Unique Representation of Integers as Sums of Distinct Lucas Numbers*, The Fibonacci Quarterly **7** (1969), 243–252.

[3] A. Dujella, *Fibonaccijevi brojevi*, HMD, Zagreb, 2000.

[4] H. Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, The Saunder Series, Philadelphia, 1953.

[5] M. Gardner, *Mathematical Circus*, MAA, Washington, 1992.

[6] *Golden Triangle*, URL: http://mathworld.wolfram.com/GoldenTriangle.html

[7] E. Hoggatt, Jr., *Fibonacci and Lucas Numbers*, Houghton Miffin Company, Santa Clara, 1969.

[8] LJ. Jukić Matić, H. Velić, *Fibonaccijev brojevni sustav*, math.e **16** (2009).

[9] M. Jurčić Devčić, *Fibonacci, zečevi i pčele*, Matka **19** (2010./2011.), 218–221.
URL: http://hrcak.srce.hr/file/120539

[10] N. Jurić, *Fibonaccijevi brojevi i zlatni rez*, Theoria **11** (2009), 43–45.

[11] T. Koshy, *Fibonacci, Lucas, and Pell Numbers, and Pascal's Triangle*, The Fibonacci Quarterly **43** (2005), 142–148.

[12] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Aplications*, John Wiley and Sons, New York, 2001.

[13] *Math Garden: Fibonacci sequence and Pascal triangle*, URL: http://mathgardenblog.blogspot.hr/2013/02/fibonacci3.html

[14] N. Robins, *The Lucas Triangle Revisited*, The Fibonacci Quarterly 43 (2002)

[15] W. E. Sharpe, *Golden Weaves*, The Mathematical Gazette, South Carolina, 1978.

[16] D. Wells, *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers*, Penguin Books, Middlesex, 1986.

Sažetak

U ovom diplomskom radu dan je uvod u Fibonaccijeve i Lucasove brojeve. U prvom dijelu rada definirali smo Fibonaccijeve i Lucasove brojeve, dokazali različite identitete koji vrijede za Fibonaccijeve brojeve, neke koji vrijede za Lucasove brojeve i neke koji su poveznica između Lucasovih i Fibonaccijevih brojeva. U drugom dijelu rada nabrojana su još neka svojstva ovih brojeva i opisana je njihova veza s Pascalovim trokutom. U trećem dijelu navedene su primjene Fibonaccijevih brojeva u geometriji i trigonometriji, tzv. Fibonometrija. Na kraju rada su navedene neke zanimljivosti vezane uz ove brojeve: njihovo pojavljivanje u prirodi, tzv. Fibonaccijeve krivotvorine i brojevni sustavi bazirani na Fibonaccijevim i Lucasovim brojevima.

Ključne riječi: Fibonaccijev niz, Lucasov niz, Binetova formula, Pascalov trokut, Cassinijev identitet, Fibonometrija, zlatni rez, Fibonaccijev brojevni sustav

Fibonacci and Lucas numbers

Summary

In this paper we give the introduction to Fibonacci and Lucas numbers. First part of the paper gives descriptions od Fibonacci and Lucas numbers, proofs of various identities that are valid for Fibonacci numbers, some that are valid for Lucas numbers and some that bring Lucas and Fibonacci numbers together. The second part of the paper lists some basic properties of this numbers and give connections with Pascal triangle. Next part of the paper contains the applications of Fibonacci numbers in geometry and trigonometry, the so-called Fibonometry. The end of this paper brings some intresting facts about these numbers: their appearance in nature, the so-called Fibonacci falsifications and number systems with Fibonacci and Lucas numbers.

Keywords: Fibonacci sequence, Lucas sequence, Binet's formula, Pascal's triangle, Cassini's identity, Fibonometry, golden ratio, Fibonacci number system

Životopis

Ivona Zirdum rođena je 20. siječnja 1993. godine u Slavonskom Brodu. Školovanje je započela 1999. godine u osnovnoj školi " Blaž Tadijanović " u Podvinju. 2007. godine upisala je Klasičnu gimnaziju fra Marijana Lanosovića s pravom javnosti u Slavonskom Brodu. Od 3. razreda osnovne škole, pa sve do 4. razreda srednje škole trenirala je rukomet. 2009. godine postala je i član kulturno-umjetničkog društva. 2011. godine upisala je integrirani sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku, Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku.