Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Marija Šarić

Indeksi snage u sustavu glasovanja da-ne

Diplomski rad

Osijek, 2017.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Marija Šarić

Indeksi snage u sustavu glasovanja da-ne

Diplomski rad

Mentor:
doc. dr. sc. Tomislav Marošević

Osijek, 2017.

Sadržaj

Uvod

Jedan od glavnih pojmova u sustavu glasovanja da-ne je politička snaga. U radu ćemo promatrati političku snagu glasača, odnosno igrača, te kako ona utječe na konačan rezultat glasovanja. Često ćemo u radu spominjati broj glasova (kvota) potreban za prihvaćanje odluke-prolaz koji je u većini slučajeva određen kao natpolovični broj ukupnog broja glasača. Pojam igrača podrazumijeva više slučajeva. Igrači u sustavu glasovanja da-ne mogu biti članovi neke stranke, države članice, predstavnici u skupštini i slično (vidi [1, 3, 4]).
Uzet ćemo u obzir situacije u kojoj skupine od nekoliko birača pokušavaju odabrati između nekoliko alternativa (izbora, opcija). U slučaju da postoje samo dvije alternative, standardno je dopustiti da svaka osoba glasa za svoju najviše rangiranu alternativu (svoj prvi izbor), a društveni izbor ("pobjednik") je ona alternativa koja dobiva najviše glasova. Postupak društvenog izbora je funkcija čiji je ulaz niz lista nekog skupa A (skup alternative), a odgovarajući izlaz je ili element skupa A (podskup od A) ili da nema pobjednika. Povećanjem alternativa, sustav glasovanja se komplicira.
Također ćemo dati i rezultate za težinski sustav glasovanja. Težinski sustav glasovanja (weighted voting system) je sustav glasovanja u kojem se donosi odluka u tzv. da-ne pitanjima ili prijedlozima, a karakteriziramo ga prema skupu glasača (v_i), težini glasa (w_i broj glasova glasača) i kvoti q.

U sustavu glasovanja definiramo *koaliciju, pobjedničku koaliciju, minimalnu pobjedničku koaliciju, gubitničku koaliciju i težinu.* *Koalicija* je skupina glasača bilo kojeg broja članova počevši bez glasača do svih glasača u sustavu glasovanja. *Pobjednička koalicija* je koalicija koja sa svim svojim pripadnim glasovima dovodi do toga da se prijedlog prihvati (tj. ima ukupan broj glasova veći od kvote). *Minimalna pobjednička koalicija* je ona pobjednička koalicija koja više neće biti pobjednička, ako bilo koji njezin član izađe iz nje. *Gubitnička koalicija* je koalicija koja nema sa svim svojim pripadnim glasovima potrebnu većinu.

U pogavlju 1 ćemo iskazati Shapley-Shubik indeks snage koji vrijedi za bilo koji sustav glasovanja da-ne. Kako bi mogli izračunati Shapley-Shubik indeks snage spomenut ćemo neke osnovne matematičke pojmove koji uključuju "načelo množenja" i njegove posljedice. Izračunavat ćemo Shapley-Shubikove indekse za Europsku ekonomsku zajednicu, a kasnije i ilustrirati fenomen poznat kao "paradoks novih članova" (gdje nam se snaga čini manja a zapravo je veća). Jednostavniji način računanja Shapley-Shubikovog indeksa snage iskazat ćemo teoremom o glasačkim blokovima. Poglavlje ćemo završiti sa procjenom snage koja je slična Shapley-Shubikovom indeksu snage a to je Banzhafov indeks snage. Procjene snage koje su vrlo slične Shapley-Shubik i Banzhaf indeksu snage su Johnston i Deegan-Packel indeks snage

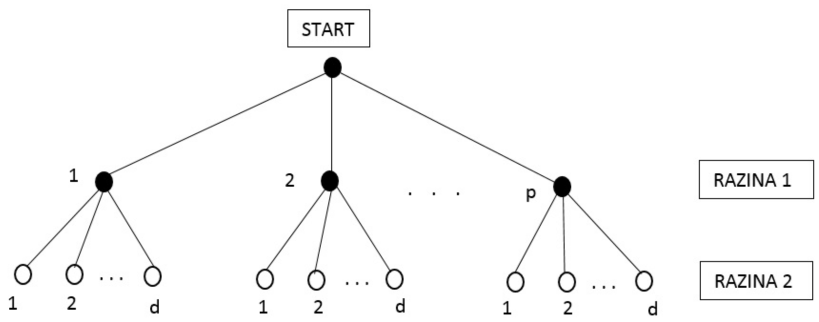
koje ćemo također obraditi u ovom poglavlju i prikazati njihovo računanje na primjeru. Važno je napomenuti da su se Johnston i Deegan-Packel indeksi snage uveli 1978. godine te da se Deegan-Packel indeks snage zasniva na minimalnim pobjdničkim koalicijama.
U poglavlju 2 opisujemo primjer određivanja snage predsjednika Sjedinjenih Američkih Država u odnosu na Zastupnički dom i Senat SAD-a, obzirom na prihvaćanje i donošenje zakona.
U trećem poglavlju promatramo pojam usporedive ili neusporedive snage glasača. Definicija nam daje pojam ordinalne ("redne") snage glasača. Ordinalna snaga se odnosi na poredak snage glasača obzirom na njihov određeni utjecaj gledan pojedinačno.
U zadnjem, četvrtom poglevlju opisujemo paradoks predsjedavajućeg, kojim se pokazuje da vidljiva politička moć-snaga ne mora značiti potpunu kontrolu na ishodima-prihvaćenim odlukama.

1 Indeksi snage u sustavu glasovanja da-ne

Razmotrimo na početku neke osnovne matematičke činjenice. Pretpostavimo da imamo n osoba $o_1, o_2..., o_n$, gdje nam je n pozitivan cijeli broj. Postavlja se pitanje: na koliko načina možemo tih n osoba poredati?
Za n osoba, broj poredaka je $n! = (n) \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.
Sve to je formalizirano u sljedeća tri rezultata.

PROPOZICIJA 1 (Načelo množenja)**.** *Pretpostavimo da promatramo objekte od kojih se svaki može načiniti u dva koraka. Pretpostavimo da je točno p (za "prvih") načina kako napraviti prvi korak i točno d (za"drugih") načina kako napraviti drugi korak. Tada je broj takvih objekata (koji se mogu načiniti sveukupno) produkt $p \cdot d$. (Pretpostavljamo da drugačije konstrukcije daju drugačije objekte.)*

Dokaz:



Slika 1: Graf konstrukcije produkta

Dokaz ćemo prikazati vizualno, pomoću grafa koji je prikazan na slici 1.
Slika 1. prikazuje čvorove označene od 1 do p koji predstavljaju p načina kako načiniti prvi korak u prethodno opisanoj konstrukciji objekta. Za svaki čvor od 1 do p, čvorovi označeni od 1 do d predstavljaju načine za drugi korak konstrukcije. Primijetimo da svaki čvor na drugoj razini odgovara konstrukciji u dva koraka, te da je konačan broj čvorova očito $p \cdot d$ budući da imamo p grupa čvorova (razina 1) i svaka grupa je veličine d.
Time je tvrdnja dokazana.

$\blacksquare$

Ako konstruiramo objekte za koje je potrebno tri koraka konstrukcije, tada imamo k_1 načina za konstrukciju prvog koraka, k_2 načina za konstrukciju drugog koraka i k_3 načina za konstrukciju trećeg koraka. Koliko ih zapravo onda ima?
Iskoristimo Propoziciju 1 koja nam govori da imamo $k_1 \cdot k_2$ drugog koraka. Primjenom Propozicije 1 na konstrukciju u tri koraka dobivamo sljedeći rezultat:

$$k_1 \cdot (k_2 \cdot k_3) = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3.$$

Dobiveni rezultat nam potvrđuje sljedeća tvrdnja, a to je *generalizacija načela množenja.*

PROPOZICIJA 2 (Generalizacija načela množenja)**.** *Pretpostavimo da promatramo objekte od kojih se svaki može načiniti u n koraka. Pretpostavimo da je točno k_1 načina kako napraviti prvi korak, k_2 načina kako napraviti drugi korak,...,k_n načina kako napraviti n-ti korak. Tada je broj takvih objekata (koji se mogu načiniti sveukupno) produkt*

$$k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \dots \cdot k_n,$$

pri čemu pretpostavljamo da drugačije konstrukcije daju drugačije objekte.

Očigledno je da onda ima n načina za korak 1, $n-1$ načina za korak 2, ..., 2 načina za korak $n-1$ i 1 način za korak n.
Stoga, neposredna posljedica Propozicije 2 je sljedeći korolar:

KOROLAR 1. *Broj načina na koji se n objekata može razmjestiti je*

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (3) \cdot (2) \cdot (1) = n!.$$

1.1 Shapley-Shubik indeks snage

Prije formalne definicije Shapley-Shubikovog indeksa snage, potrebno je razjasniti pojam "pivotna osoba". Pivotna osoba je ona osoba koja pridruživanjem nekoj koaliciji, pretvara tu koaliciju iz gubitničke u pobjedničku koaliciju (formiramo sve veću i veću koaliciju tako da povećavamo članove krečući se s lijeva na desno u zadanom poretku članova). Pogledajmo sljedeći primjer:

Primjer 1. Pretpostavimo da imamo da-ne sustav glasovanja koji sadrži 7 osoba $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$ i l_7 (mogućih poredaka od sedam osoba je 7!) i svaka osoba ima jedan glas osim osobe l_4 koja ima tri glasa. Za pobjedu je potrebno pet glasova. Promotrimo sljedeći poredak: $l_7, l_3, l_5, l_4, l_2, l_1, l_6$. Koalicija l_7, l_3, l_5 je gubitnička jer ukupan broj glasova ne zadovoljava broj glasova koji je potreban za prolaz, odnosno da bude pobjednička koalicija. Zato je koalicija l_7, l_3, l_5, l_4 pobjednička koalicija jer njezin broj glasova zadovoljava uvjet za pobjedničku koaliciju. Osoba koja je svojim pristupanjem koaliciji, koaliciju pretvorila iz gubitničke u pobjedničku je l_4, što ju čini pivotnom osobom.
Iskažimo to i formalno, sljedećom definicijom.

DEFINICIJA 1. *Pretpostavimo da je p glasač u sustavu glasovanja da-ne i X skup svih glasača. Tada je Shapley-Shubik indeks od p, u oznaci $SSI(p)$, dan u sljedećem zapisu:*

$$SSI(p) = \frac{\text{broj poredaka od } X \text{ za koje je } p \text{ pivotni}}{\text{broj svih poredaka skupa } X}.$$

Uočimo da:

- je nazivnik od $SSI(p)$ jednak $n!$ ukoliko imamo n glasača,
- za svakog glasača p je $0 \leq SSI(p) \leq 1$,
- ako su $p_1, \ldots, p_n$ glasači tada je $SSI(p_1) + \cdots + SSI(p_n) = 1$.

Možemo reći da je Shapley-Shubik indeks od p, $SSI(p)$, "razlomak snage". Promotrimo sljedeći primjer.

Primjer 2. Pretpostavimo da imamo tri osobe u težinskom sustavu glasovanja p_1, p_2, p_3 u kojem p_1 ima 50 glasova, p_2 ima 49 glasova, i p_3 ima jedan glas. Neka je potrebno 51 glas za prihvaćanje odluke. Kako imamo tri osobe, broj mogućih poredaka je $3! = 6$. Ispišimo ih redom.

1.	p_1	p_2	p_3
2.	p_1	p_3	p_2
3.	p_2	p_1	p_3
4.	p_2	p_3	p_1
5.	p_3	p_2	p_1
6.	p_3	p_1	p_2

Osoba p_1 je pivotna u poredcima: 3., 4., 5. i 6., pa je $SSI(p_1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Osoba p_2 pivotna je samo u poretku 1., pa je $SSI(p_2) = \frac{1}{6}$. Osoba p_3 pivotna je samo u poretku 2., pa je $SSI(p_3) = \frac{1}{6}$. Iako p_2 i p_3 imaju različiti broj glasova, njihov Shapley-Shubik indeks je isti.

Primjer 3. Promotrimo početak Europske ekonomske zajednice koja je osnovana 1958. godine. Zemlje članice su tada bile Francuska, Njemačka, Italija, Belgija, Nizozemska i Luksemburg. Izračunajmo njihove Shapley-Shubikove indekse, ako znamo da su Francuska (F), Njemačka (G) i Italija (I) imale četiri glasa, Belgija (B) i Nizozemska (N) dva glasa, a Luksemburg (L) jedan glas. Ukupan broj glasova je sedamnaest, a broj dovoljan za prolaz je najmanje dvanaest što je $70,6\%$ od ukupnog broja glasova. Imamo šest zemalja članica što nam govori da imamo $6! = 720$ mogućih poredaka.
Kako bi izračunali $SSI(F)$ moramo pronaći sve poretke zemalja u kojima je Francuska pivotna zemlja. Primijetimo da je Francuska pivotna zemlja upravo kada je zbroj glasova država koje se nalaze lijevo od nje osam, devet, deset ili jedanaest. Kako ne bi morali provjeravati 720 poredaka, promotrit ćemo prethodne slučajeve.

- **Slučaj 1. Zbroj glasova država koje se nalaze lijevo od Francuske je osam:**

1. Lijevo u poretku od Francuske su Njemačka (4 glasa), Belgija (2 glasa) i Nizozemska (2 glasa): Tri države koje se nalaze lijevo od Francuske mogu biti poredana na $3! = 6$ načina, dok preostale dvije države koje se nalaze desno od Francuske mogu biti poredana na $2! = 2$ načina. Konačno dobivamo $3! \cdot 2! = 6 \cdot 2 = 12$ poredaka.

2. Lijevo u poretku od Francuske su Italija (4), Belgija (2) i Nizozemska (2): Ovaj slučaj je isti kao i prethodni, pa imamo 12 poredaka.

3. Lijevo u poretku od Francuske su Njemačka (4) i Italija (4): Dvije države koje se nalaze lijevo od Francuske mogu biti poredana na $2! = 2$ načina, dok preostale tri države koje se nalaze desno od Francuske mogu biti poredane na

$3! = 6$ načina. Konačno dobivamo $2! \cdot 3! = 12$ poredaka.

U ovom slučaju imamo ukupno $12 + 12 + 12 = 36$ različitih poredaka u kojima je Francuska pivotna zemlja.

- **Slučaj 2. Zbroj glasova država koje se nalaze lijevo od Francuske je devet:**

1. Lijevo u poretku od Francuske su Njemačka (4), Belgija (2), Nizozemska (2) i Luksemburg (1). Analognim zaključivanjem dobivamo $4! \cdot 1! = 24 \cdot 1 = 24$ poretka.

2. Lijevo u poretku od Francuske su Italija (4), Belgija (2), Nizozemska (2) i Luksemburg (1): Ovaj slučaj je isti kao i prethodni, pa imamo $4! \cdot 1! = 24$ poretka.

3. Lijevo u poretku od Francuske su Njemačka (4), Italija (4) i Luksemburg (1). Analogno, dobivamo $3! \cdot 2! = 12$ poredaka.

Konačno, u ovom slučaju imamo $24 + 24 + 12 = 60$ različitih poredaka u kojemu je Francuska pivotna zemlja.

- **Slučaj 3. Zbroj glasova država koje se nalaze lijevo od Francuske je deset:**

1. Lijevo u poretku od Francuske su Njemačka (4), Italija (4) i Belgija (2). Analognim zaključivanjem dobivamo $3! \cdot 2! = 12$ poredaka.

2. Lijevo u poretku od Francuske su Njemačka (4), Italija (4) i Nizozemska (2): Ovaj slučaj je isti kao i prethodni, pa imamo $3! \cdot 2! = 12$ poretka.

Slučaj 3. ukupno ima $12 + 12 = 24$ različitih poredaka u kojemu je Francuska pivotna zemlja.

- **Slučaj 4. Zbroj glasova država koje se nalaze lijevo od Francuske je jedanaest:**

1. Lijevo od Francuske su Njemačka (4), Italija (4), Belgija (2) i Luksemburg (1). Analognim zaključivanjem dobivamo $4! \cdot 1! = 24$ poretka.

2. Lijevo od Francuske su Njemačka (4), Italija (4), Nizozemska (2) i Luksemburg (1). Ovaj slučaj je isti kao i prethodni, pa imamo 24 poretka.

U ovom slučaju imamo $24 + 24 = 48$ različitih poredaka u kojemu je Francuska pivotna zemlja.

Kako bi dobili konačan broj poredaka u kojima je Francuska pivotna zemlja, zbrojimo sve rezultate prethodnih slučajeva: $36 + 60 + 24 + 48 = 168$. Sada možemo izračunati Shapley-Shubikov indeks snage Francuske.
Rezultati dobiveni za preostale države su prikazani u sljedećoj tablici.

$$SSI(F) = \frac{36 + 60 + 24 + 48}{720} = \frac{168}{720} = \frac{14}{60} \approx 23.3\%$$

DRŽAVA	**BROJ GLASOVA**	**SSI**	**POSTOTAK SSI ($\approx$)**
Francuska	4	14/60	23.3
Njemačka	4	14/60	23.3
Italija	4	14/60	23.3
Belgija	2	9/60	15
Nizozemska	2	9/60	15
Luksemburg	1	0	0

1.1.1 Paradoks novih članova

U prethodnom poglavlju smo razmatrali slučaj Europske ekonomske zajednice, tj. njene države članice 1958. godine, a to su Njemačka, Francuska, Italija, Belgija, Nizozemska i Luksemburg. Tada je broj država članica bio šest. Prisjetimo se da su Njemačka, Francuska i Italija imale četiri glasa, Belgija i Nizozemska dva glasa, te Luksemburg jedan glas. Što bi se dogodilo pristupanjem novih država Europskoj ekonomskoj zajednici, kako bi se rasporedili glasovi? Indeksi snage ukazuju na to da dodavanjem novih članova u biračko tijelo snaga postojećih država članica može se povećati, čak i ako su broj glasova svih postojećih država članica i izborni sustav glasovanja ostali nepromijenjeni. Taj je fenomen poznat kao "paradoks novih članova".
1973. godine Europskoj ekonomskoj zajednici su pristupile Engleska, Danska i Irska.

Odlučeno je da Engleska ima isti broj glasova kao i Francuska, Njemačka i Italija, a Danska i Irska više od Luksemburga, a manje od Belgije i Norveške. Glasovi prvotnih država članica su proporcionalno povećani za faktor 2.5, osim Luksemburga (u tablici je prikazan novi broj glasova).

DRŽAVA	**BROJ GLASOVA**
Francuska	10
Njemačka	10
Italija	10
Belgija	5
Nizozemska	5
Luksemburg	2
Engleska	10
Danska	3
Irska	3

Sada, potreban broj glasova za prihvaćanje odluke (za većinu) je 41 što je 70.7% od ukupno 58 glasova. Luksemburg je u pristupanju novih članica povećao svoj broj glasova a time i vrijednost Shapley-Shubikovog indeksa snage, koji je prije bio nula, jer sada sigurno možemo napraviti barem jedan poredak u kojem je Lukseburg pivotni član.

1.1.2 Teorem o glasačkim blokovima

Ovim teoremom ćemo pokazati jednostavniji način računanja Shapley-Shubikovog indeksa snage glasača. Prije iskaza teorema, uvest ćemo potrebne oznake i dati primjer.
Pretpostvimo da imamo težinski sustav glasovanja sa n birača $p_1, p_2, \ldots, p_n$ i pripadnim težinama $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Pretpostavimo da je q kvota. Tada imamo sljedeći zapis kojeg nazivamo težinsko glasačko tijelo:

$$[q : w_1, w_2, \ldots, w_n].$$

Za primjer ovoga zapisa uzmimo Europsku ekonomsku zajednicu:

$$[12 : 4, 4, 4, 2, 2, 1].$$

Primjer 4. Promotrimo da-ne sustav glasovanja Senata SAD-a koji sadrži 100 glasača. Svaki glasač ima jedan glas i potrebno je ukupno 51 glas za prolaz. Pretpostavimo da dvanaest senatora iz šest država Nove Engleske (Maine, New Hampshire, Vermont, Massachusetts, Rhode Island, Connecticut) odluče glasovati zajedno, u takozvanom glasačkom bloku. Taj glasački blok ćemo gledati kao jednoga glasača.

Tada imamo glasačko tijelo $[51 : 12, 1, \ldots, 1]$ koje sadrži 89 članova. Broj svih mogućih poredaka ovoga glasačkog tijela je 89!. Mi ne moramo gledati sve moguće poretke nego ćemo uzeti u obzir one poretke u kojima je glasački blok pivotni. Kako bi izračunali Shapley-Shubikov indeks snage moramo zapravo utvrditi koliko od 89 (89! smo razbili na 89 jednakih skupina koje su određene mjestom zauzimanja glasačkog bloka u nizu od 89 glasača) različitih poredaka ima glasački blok kao pivotnoga glasača. Kako bi glasački blok bio pivotni, broj ostalih članova mora biti najmanje trideset i devet. To znači da poredak koji ima glasački blok kao pivotnog glasača ima slijed, koji imaju po jedan glas, od 39, 40, ..., 50 glasača. U ovom slijedu se nalazi dvanaest brojeva što nam daje sljedeći rezultat koji ćemo potvrditi teoremom u nastavku:

$$SSI(blok\ senatora\ Nove\ Engleske) = \frac{12}{89}$$

TEOREM 1. *Pretpostavimo da imamo n glasača te jedan blok veličine b i kvotu q, tj. težinsko glasačko tijelo*

$$[q : b, 1, \ldots, 1].$$

Pretpostavimo da je $b - 1 \leq q - 1 \leq n - b$. Tada je Shapley-Shubikov indeks bloka dan sljedećim izrazom:

$$SSI(blok) = \frac{b}{n - b + 1}.$$

Dokaz: Uočimo da je $n - b + 1$ broj različitih poredaka, zatim imamo $n - b$ glasača s jednim glasom i broj mjesta gdje b može biti smješten u samo jednom poretku više od ovoga. Blok b će biti pivotni blok upravo onda kada je slijed glasača s jednim glasom duljine najmanje $q - b$, ali ne više od $q - 1$. Primijetimo da, kako je $q - 1 \leq n - b$ i $n - b$ broj raspoloživih glasača s jednim glasom, možemo konstruirati sve slijedove, a njih je b. Time je Shapley-Shubikov indeks bloka veličine b dan izrazom:

$$SSI(p) = \frac{broj\ poredaka\ u\ kojima\ je\ b\ pivotni}{broj\ svih\ poredaka} = \frac{b}{n - b + 1}.$$

Dokazali smo našu tvrdnju i ujedno pokazali jednostavniji način računanja Shapley-Shubikovog indeksa snage glasača.

1.2 Banzhaf indeks snage

Procjena snage koja je slična, Shapley-Shubik indeksu snage je takozvani Banzhaf indeks snage glasača, nazvan prema odvjetniku John F. Banzhaf III.
Banzhaf je proučavao sustav glasovanja Županijskog odbora Nassau, New York 1960. godine, koji je svojim općinama dodijelio ukupno 30 glasova i u kojem je većina od 16 glasova dovoljna za pobjedu. (Hempstead 1: 9, Hempstead 2: 9, North Hempstead: 7, Oyster Bay: 3, Glen Cove: 1, Long Beach: 1) Prema Banzhafovu zapisu, postoje 32 pobjedničke koalicije i 48 glasačkih glasova. John F. Banzhaf je predložio indeks kako bi izmjerio snagu svake općine (Hempstead 1 = 1/3, Hempstead 2 = 1/3, North Hempstead = 1/3, Oyster Bay = 0, Glen Cove = 0, Long Beach = 0), te je tvrdio da je glasovanje koje daje nula snagu za jednu šestinu stanovništva županije nepravedno, tj. da biračka prava nisu nužno jednako podijeljena među biračima ili dioničarima. Slijedi i formalna definicija kojom ćemo iskazati "totalnu Banzhafovu snagu" glasača.

DEFINICIJA 2. *Pretpostavimo da je p glasač u sustavu glasovanja da-ne. Tada je totalna Banzhafova snaga glasača p, u oznaci TBP(p), broj koalicija K koje zadovoljavaju sljedeća tri uvjeta:*

1. *p je član koalicije K.*
2. *K je pobjednička koalicija.*
3. *ukoliko je p izbačen iz koalicije K, ona prestaje biti pobjednička koalicija.*

Neka je K pobjednička koalicija. Ako izbacivanjem birača p iz koalicije ona prestaje biti pobjednička koalicija, tada birača p nazivamo kritičnim biračem koalicije K. Kako numerički prikazati Banzhaf indeks snage, iskazati ćemo u nastavku.

DEFINICIJA 3. *Pretpostavimo da je p_1 glasač u sustavu glasovanja da-ne, te da su ostali glasači označeni sa $p_2, p_3, \ldots, p_n$. Tada je Banzhaf indeks snage od glasača p_1, u oznaci $BI(p_1)$, broj dan s :*

$$BI(p_1) = \frac{TBP(p_1)}{TBP(p_1) + \cdots + TBP(p_n)}.$$

Primjer 5. Iskoristit ćemo prethodni primjer, tj pretpostavimo da imamo tri osobe u težinskom sustavu glasovanja p_1, p_2, p_3 u kojem p_1 ima 50 glasova, p_2 ima 49 glasova, p_3 ima jedan glas i potreban je 51 glas za prolaz. Prvo pronađimo sve pobjedničke koalicije, a zatim izračunajmo totalnu Banzhafovu snagu za pojedinog glasača. Pobjedničke koalicije su:

$$K_1 = \{p_1, p_2, p_3\},$$
$$K_2 = \{p_1, p_2\},$$
$$K_3 = \{p_1, p_3\}.$$

Vidimo da je glasač p_1 kritičan za sve tri koalicije, glasač p_2 je kritičan za koaliciju K_2 i glasač p_3 je kritičan za koaliciju K_3. Prema tome, totalna Banzhafova snaga i Banzhaf indeks snage za glasače su:

$$TBP(p_1) = 3\ , \quad TBP(p_2) = 1, \quad TBP(p_3) = 1.$$
$$BI(p_1) = \frac{3}{(3+2+1)} = \frac{3}{5}, \quad (SSI(p_1) = \tfrac{2}{3})$$
$$BI(p_2) = \frac{1}{(3+2+1)} = \frac{1}{5}, \quad (SSI(p_2) = \tfrac{1}{6})$$
$$BI(p_2) = \frac{1}{(3+2+1)} = \frac{1}{5}. \quad (SSI(p_3) = \tfrac{1}{6})$$

Danas je Banzhaf indeks snage, zajedno s Shapley-Shubik indeks snage prihvatljiv način za ispitivanje glasačke snage.

1.3 Johnston indeks snage

Do sada smo promatrali igrače u koaliciji čiji izlazak iz koalicije može biti kritičan $(k = 1, \cdots, n)$. Ako nam je izlazak ukupnog broja igrača iz koalicije kritičan doći ćemo na ideju na kojoj je zasnovan upravo Johnston indeks snage. Johnston indeks snage je sličan Shapley-Shubik i Banzhaf indeksu snage, a sljedećom definicijom ćemo ga i formalno definirati.
Pretpostavimo da su $C_1, \ldots, C_m$ one pobjedničke koalicije kod kojih je igrač p_k kritičan. Neka je n_1 broj onih igrača čiji izlazak iz C_1 je kritičan, n_2 je broj onih igrača čiji izlazak iz C_2 je kritičan, $\ldots$, n_m je broj onih igrača čiji izlazak iz C_m je kritičan. Tada se definira *ukupna Johnston snaga igrača* p_k na sljedeći način:

$$TJP(p_k) = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \ldots + \frac{1}{n_m}.$$

DEFINICIJA 4. *Johnston indeks igrača p_k definira se izrazom*

$$JI(p_k) = \frac{TJP(p_k)}{\sum_{l=1}^{n} TJP(p_l)}\ .$$

Koristeći primjer iz poglavlja u kojemu smo prikazali Shapley-Shubik i Banzhaf indeks snage vidjet ćemo kako izračunavamo Johnston indeks snage igrača.

Primjer 6. Pretpostavimo da imamo tri igrača u težinskom sustavu glasovanja p_1, p_2, p_3 u kojem p_1 ima 50 glasova, p_2 ima 49 glasova, p_3 ima jedan glas i potreban je 51 glas za prolaz. Pobjedničke koalicije su:

$$K_1 = \{p_1, p_2, p_3\},$$
$$K_2 = \{p_1, p_2\},$$
$$K_3 = \{p_1, p_3\}.$$

Vidimo da je igrač p_1 kritičan za koaliciju K_1, ali kritičnost za preostale dvije koalicije K_2 i K_3 dijeli s drugim igračima. Prema tome ukupna Johnston snaga igrača iznosi:

$$TJP(p_1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ , \quad TJP(p_2) = \ 0 + \ \frac{1}{2} + 0, \quad TJP(p_3) = \ 0 + 0 + \frac{1}{2},$$

dok su Johnston indeksi snage igrača:

$$JI(p_1) = \frac{2}{2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\ ,$$
$$JI(p_2) = \frac{\frac{1}{2}}{2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{6},$$
$$JI(p_3) = \frac{\frac{1}{2}}{2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{6}.$$

Johnston indeks snage prvi puta se spominje 1978. godine (vidi [4]).

1.4 Deegan-Packel indeks snage

Još jedna procjena snage je Deegan-Packel indeks snage koji je uveden 1978. godine. Deegan-Packel indeks snage sličan je Johnston indeksu snage, ali se zasniva na minimalnim pobjedničkim koalicijama (vidi [4]).

Pretpostavimo da su $C_1, \ldots, C_j$ minimalne pobjedničke koalicije kojima pripada igrač $p_k, k = 1, \cdots, n$. Neka je m_1 broj članova C_1, m_2 broj članova C_2, ..., m_j broj članova C_j. Tada se definira *totalna Deegan-Packel snaga igrača* p_k (u oznaci $TDPP(p_k)$) na sljedeći način:

$$TDPP(p_k) = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \ldots + \frac{1}{m_j}.$$

DEFINICIJA 5. *Deegan-Packel indeks igrača* p_k *definira se izrazom*

$$DPI(p_k) = \frac{TDPP(p_k)}{\sum_{l=1}^{n} TDPP(p_l)}\ .$$

Prikažimo izračunavanje Deegan-Packel indeksa snage primjerom koji smo koristili i u prethodnim poglavljima.

Primjer 7. Pretpostavimo da imamo tri igrača u težinskom sustavu glasovanja p_1, p_2, p_3 u kojem p_1 ima 50 glasova, p_2 ima 49 glasova, p_3 ima jedan glas i potreban je 51 glas za prolaz. Minimalne pobjedničke koalicije su:

$$K_2 = \{p_1, p_2\},$$
$$K_3 = \{p_1, p_3\}.$$

Za računanje totalne Deegan-Packel snage promatramo minimalne pobjedničke koalicije kojima pripada pojedini igrač. Kako igrač p_1 pripada koaliciji K_2 i K_3 dobivamo

$$TDPP(p_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Kako igrač p_2 pripada koalicije K_2 i igrač p_3 pripada koaliciji K_3 dobivamo sljedeće ukupne Deegan-Packel snage:

$$TDPP(p_2) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}, \quad TDPP(p_3) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Dok je Deegan-Packel inde snaga igrača:

$$DPI(p_1) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ ,$$
$$DPI(p_2) = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{4},$$
$$DPI(p_3) = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}.$$

2 Indeksi snage predsjednika SAD-a

U našem dosadašnjem razmatranju izbornih glasačkih sustava SAD-a, promatrali smo samo glasače, tj. snagu glasa pojedinoga glasača. Izostavljali smo vrlo važnu osobu, a to je predsjednik.

Prisjetimo se sljedećih matematičkih izraza:

Ako je $1 \leq k \leq n$, tada broj različitih načina kojim možemo odabrati točno k objekata od njih točno n, dan je s:

$$\binom{n}{k}$$

i čitamo "n povrh k".

TEOREM 2. *Za $1 \leq k \leq n$ i $0! = 1$ vrijedi sljedeći izraz:*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Dokaz: Prisjetimo se iz prošloga odjeljka, Korolara 1. koji nam govori da na $n!$ načina možemo razmjestiti n objekata. Za fiksan k možemo zamisliti svaki takav raspored od n objekata koji dobivamo u sljedeća tri koraka:

1. Izaberimo k objekata za početni blok.
2. Razmjestimo tih k objekata u nekakav poredak.
3. Razmjestimo $n-k$ objekata u nekakav poredak.

Ako uzmemo, na primjer, objekte a, b, c, d, e, f i $k = 3$, tada u prvom koraku možemo odabrati objekte a, d i f. U drugom koraku možemo objekte poredati na sljedeći način: $f \;\; a \;\; d$. Poredak u trećem koraku možemo napraviti na sljedeći način: $e \;\; b \;\; c$. Konačno, imamo sljedeći poredak : $f \;\; a \;\; d \;\; e \;\; b \;\; c$.
Prvi korak možemo napraviti na n povrh k načina, drugi na $k!$ načina i treći na $(n-k)!$ načina. Prema generaliziranom načelu množenja slijedi :

$$\binom{n}{k} \cdot k! \cdot (n-k)!.$$

Kako znamo da se n objekata mogu razmjestiti na $n!$ načina, vrijedi :

$$\binom{n}{k} \cdot k! \cdot (n-k)! = n!.$$

Dijeljenjem obiju strana sa $k! \cdot (n-k)!$ dobivamo traženi izraz:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

što nam dokazuje tvrdnju. ∎

Snagu predsjednika ćemo izraziti pomoću, već poznatih, Shapley-Shubik indeksa snage i Banzhaf indeksa snage.

2.1 Shapley-Shubik indeks predsjednika SAD-a

U ovom poglavlju, zbog jednostavnosti i lakšeg razumijevanja, promatrat ćemo savezni sustav koji se sastoji od trinaest članova, šest senatora (The Senat), šest članova Zastupničkog doma (The House of Representatives) i predsjednika. Za prolaz dalje je potrebno ili dvije trećine Senata i Zastupničkog doma skupa, ili pola Senata, pola Zastupničkog doma i predsjednik SAD-a. Da bi predsjednik bio pivotni, u poretku od trinaest glasača, njemu moraju prethoditi najmanje tri člana Zastupničkog doma i tri člana Senata. To se može dogoditi u sljedećih sedam slučajeva:

1. Tri člana Zastupničkog doma i tri senatora prethode predsjedniku, te tri člana Zastupničkog doma i tri senatora slijede nakon predsjednika.

2. Tri člana Zastupničkog doma i četiri senatora prethode predsjedniku, te tri člana Zastupničkog doma i dva senatora slijede nakon predsjednika.

3. Tri člana Zastupničkog doma i pet senatora prethode predsjedniku, te tri člana Zastupničkog doma i jedan član Senata slijede nakon predsjednika.

4. Tri člana Zastupničkog doma i šest senatora prethode predsjedniku, te tri člana Zastupničkog doma slijede nakon predsjednika.

5. Četiri člana Zastupničkog doma i tri senatora prethode predsjedniku, te dva član Zastupničkog doma i tri člana Senata slijede nakon predsjednika.

6. Pet članova Zastupničkog doma i tri senatora prethode predsjedniku, te jedan član Zastupničkog doma i tri člana Senata slijede nakon predsjednika.

7. Šest članova Zastupničkog doma i tri senatora prethode predsjedniku, te tri člana Senata slijede nakon predsjednika.

U ovih sedam slučajeva želimo izračunati koliko ima svih mogućih poredaka, a to ćemo napraviti u četiri koraka. Pogledajmo korake za prvi slučaj:

• KORAK 1: Tri od 6 članova Zastupničkog doma koji prethode predsjedniku možemo odabrati na šest povrh tri načina.
• KORAK 2: Tri od 6 članova Senata koji prethode predsjedniku možemo odabrati na šest povrh tri načina.
• KORAK 3: Šest članova iz prethodna dva koraka koji prethode predsjedniku možemo odabrati na 6! načina.
• KORAK 4: Šest članova iz prethodna dva koraka koji su poslije predsjednika možemo odabrati na 6! načina.

Prema načelu množenja iz prethodna četiri koraka nam slijedi izraz:

$$\binom{6}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot 6! \cdot 6!.$$

Na isti način dobivamo preostale slučajeve:

Drugi slučaj: $\binom{6}{3} \cdot \binom{6}{4} \cdot 7! \cdot 5!.$
Treći slučaj: $\binom{6}{3} \cdot \binom{6}{5} \cdot 8! \cdot 4!.$
Četvrti slučaj: $\binom{6}{3} \cdot \binom{6}{6} \cdot 9! \cdot 3!.$
Peti slučaj: $\binom{6}{3} \cdot \binom{6}{4} \cdot 7! \cdot 5!.$
Šesti slučaj: $\binom{6}{3} \cdot \binom{6}{5} \cdot 8! \cdot 4!.$
Sedmi slučaj: $\binom{6}{3} \cdot \binom{6}{6} \cdot 9! \cdot 3!.$

Suma svih sedam izraza podijeljena sa 13! nam daje naš Shapley-Shubikov indeks snage predsjednika u pojednostavljenom sustavu.
Savezni sustav SAD-a se sastoji od Senata (kojeg čini 100 članova), Zastupničkog doma (kojeg čini 435 članova), te potpredsjednika i predsjednika što je ukupno 537 članova. Ako bi računali stvarni sustav glasovanja SAD-a onda bi imali nazivnik koji je jednak 536! (zbog jednostavnosti ćemo zanemariti podpredsjednika, tj. imat ćemo 536 glasača u saveznom sustavu SAD-a). Promatrali bi slučajeve kada je predsjednik pivotni u poretku od 100 članova Senata i 435 članova Zastupničkog doma.
Kako bi predsjednik bio pivotni u takvom poretku njemu mora prethoditi minimalno 218 članova Zastupničkog doma i 51 senator. Ovaj slučaj bi zatim raščlanili na slučajeve kao što smo raščlanili i prethodni jednostavni sustav glasovanja. Sumiranjem svih slučajeva dobili bi sljedeći izraz:

$$\binom{435}{218}\left[\binom{100}{51}(218+51)!(266)! + \cdots + \binom{100}{100}(218+100)!(217)!\right]$$
$$+\ldots$$
$$+\binom{435}{289}\left[\binom{100}{51}(289+51)!(195)! + \cdots + \binom{100}{100}(289+100)!(146)!\right]$$
$$+\binom{435}{290}\left[\binom{100}{51}(290+51)!(194)! + \cdots + \binom{100}{66}(290+66)!(179)!\right]$$
$$+\ldots$$
$$+\binom{435}{435}\left[\binom{100}{51}(435+51)!(49)! + \cdots + \binom{100}{66}(435+66)!(151)!\right].$$

Konačno, prema Shapley-Shubikovom indeksu snage predsjednik ima SSI od 0.16047, tj. 16 % u saveznom sustavu SAD-a (vidi [4, 5]).

2.2 Banzhaf indeks predsjednika SAD-a

Banzhafov indeks predsjednika dobivamo dijeljenjem totalne Banzhafove snage predsjednika sa sumom Banzhafove snage svih glasača u saveznom sustavu SAD-a. Prisjetimo se da se savezni sustav SAD-a sastoji od Senata koji broji 100 članova i Zastupničkog doma koji broji 435 članova, potpredsjednika i predsjednika što je ukupno 537 članova, tj. glasača (zbog jednostavnosti podpredsjednika zanemarujemo, tj. imat ćemo 536 članova u saveznom sustavu SAD-a). Kako bi dobili totalnu Banzhafovu snagu predsjednika moramo najprije izračunati totalnu Banzhafovu snagu svih pojedinih članova Senata i svakog pojedinog člana Zastupničkog doma.
Pogledajmo prvo kako ćemo označiti koalicije unutar Senata.
Označimo sa S broj koalicija unutar Senata koji se sastoji od najmanje dvije trećine svojih članova, te sa S_p označimo broj koalicija unutar Senata koji se sastoji od najmanje dvije trećine svojih članova uključujući jednog određenog senatora p:

$$S = \binom{100}{67} + \cdots + \binom{100}{100},$$

$$S_p = \binom{99}{66} + \cdots + \binom{99}{99}.$$

Zatim, sa s označimo broj koalicija unutar Senata koji se sastoji od najmanje polovine svojih članova, te sa s_p označimo broj koalicija unutar Senata koji se sastoji od najmanje polovine svojih članova uključujući jednog određenog senatora p:

$$s = \binom{100}{50} + \cdots + \binom{100}{100},$$

$$s_p = \binom{99}{49} + \cdots + \binom{99}{99}.$$

Na isti način napravimo i sa Zastupničkim domom, tj. označimo sa Z broj koalicija unutar Zastupničkog doma koji se sastoji od najmanje dvije trećine svojih članova:

$$Z = \binom{435}{290} + \cdots + \binom{435}{435}.$$

Sa Z_p označimo broj koalicija unutar Zastupničkog doma koji se sastoji od najmanje dvije trećine svojih članova uključujući jednog određenog člana Zastupničkog doma p:

$$Zp = \binom{434}{289} + \cdots + \binom{434}{434}.$$

Također, sa z označimo broj koalicija unutar Zastupničkog doma koji se sastoji od najmanje polovine svojih članova:

$$z = \binom{435}{218} + \cdots + \binom{435}{435},$$

i sa z_p označimo broj koalicija unutar Zastupničkog doma koji se sastoji od najmanje polovine svojih članova uključujući jednog određenog člana Zastupničkog doma p:

$$z_p = \binom{434}{217} + \cdots + \binom{434}{434}.$$

Nakon ovakvog zapisa, lagano možemo izračunati totalnu Banzhaf snagu predsjednika, članova Zastupničkog doma i članova Senata. Traženi rezutat je dvostruki broj pobjedničkih koalicija kojima glasač pripada od kojeg se oduzima broj svih mogućih pobjedničkih koalicija. Konačni rezultati su dani u sljedećoj tablici.

BANZHAF INDEX	*VRIJEDNOST*
Predsjednik	0.038
Senator	0.0033
Član Zastupničkog doma	0.0015

Prikazane vrijednostima možemo izraziti u postotcima i zaključiti da je snaga predsjednika = 4% , snaga Senata = 33%, i snaga Zastupničkog doma = 63%.

3 Ordinalna snaga

Pretpostavimo da imamo dva glasača, x i y. Nas zanima u kakvom odnosu x i y mogu biti, kakav je odnos snage između x i y, tj. pokušat ćemo formalizirati izraze kao što su:
"x i y imaju jednaku snagu",
"x i y imaju jednaki utjecaj",
"x i y su jednako poželjni za stvaranje pobjedničke koalicije",
te kada možemo reći da je utjecaj x i y neusporediv i usporediv.

Prvo ćemo promotriti izraz da x i y imaju jednaki utjecaj, tj. da su "jednako poželjni". Ako su nam x i y poželjni u koaliciji K, tada se mogu dogoditi četiri tipa koalicije:

1. x i y pripadaju koaliciji K.
2. x pripada koaliciji K dok y ne pripada koaliciji K.
3. y pripada koaliciji K dok x ne pripada koaliciji K.
4. Niti x niti y ne pripadaju koaliciji K.

Ako su x i y jednako poželjni koaliciji K kako bi ona bila pobjednička koalicija, tada za sva četiri tipa koalicija koje smo prethodno nabrojali imamo istinite tvrdnje:

1. Ako je K pobjednička koalicija, isključivanjem x iz koalicije, ona postaje gubitnička koalicija ako i samo ako ju izbacivanje y iz koalicije čini gubitničkom.
2. Ako x napusti koaliciju K a y se pridruži koaliciji K, tada koalicija K ne prelazi iz gubitničke u pobjedničku niti iz pobjedničke u gubitničku koaliciju.
3. Ako y napusti koaliciju K a x se pridruži koaliciji K, tada koalicija K ne prelazi iz gubitničke u pobjedničku niti iz pobjedničke u gubitničku koaliciju.
4. Pridruživanje x koaliciji K čini koaliciju K pobjedničkom ako i samo ako ju pridruživanje y u koaliciju čini pobjedničkom koalicijom.

Kada pogledamo tvrdnju 4., vidimo da iz nje slijede prethodne tvrdnje, što nas dovodi do sljedeće definicije.

DEFINICIJA 6. *Pretpostavimo da su x i y dva glasača u da-ne sustavu glasovanja. Tada kažemo da su x i y jednako poželjni, u oznaci $x \approx y$, ako i samo ako vrijedi :*

Za svaku koaliciju K koja ne sadrži niti x niti y, pridruživanjem x koaliciji K čini ju pobjedničkom ako i samo ako ju pobjedničkom koalicijom čini pridruživanje y-a u koaliciju.

Pogledajmo sljedeći primjer kako bi bolje razumjeli prethodnu definiciju. Također, ovaj primjer nam govori kako dva glasača u težinskom sustavu glasovanja mogu biti jednako poželjni iako imaju različite težine.

Primjer 8. Imamo tri glasača a, b, c u težinskom sustavu glasovanja i kvotu q koja iznosi 51. Glasač a sa težinom 1, b sa težinom 49, c sa težinom 50 . Pobjedničke koalicije su tada $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ i $\{a, b, c\}$. Primijetimo kako je jedina koalicija koja ne sadrži niti a niti b ona bez članova, $K_1 = \emptyset$. Neka nam je koalicija K_2 koalicija koja za člana ima samo glasača c. Ako glasača a pridružimo koaliciji

K_1, isto je kao i da smo glasača b pridružili koaliciji K_1, jer ona ostaje gubitnička koalicija. Također, ako glasača a pridružimo koaliciji K_2, isto je kao i da smo glasača b pridružili koaliciji K_2 kako bi ona bila pobjednička koalicija. Stoga, možemo reći da je $a \approx b$. Možemo li reći da je $a \approx c$?
Neka je $K_3 = \{b\}$ koalicija. Ako pridružimo a koaliciji K_3 dobivamo koaliciju $\{a, b\}$ koja ima težinu 50, a ako pridružimo c koaliciji K_3 dobivamo koaliciju $\{b, c\}$ koja ima težinu 99. Vidimo da je koalicija $\{b, c\}$ pobjednička i tada zaključujemo da ne možemo reći da su a i c jednako poželjni.

Binarna relacija biti "jednako poželjan" je zapravo relacija ekvivalencije, što znači da je ona refleksivna, simetrična i tranzitivna. Iskazat ćemo i formalno, sljedećom propozicijom.

PROPOZICIJA 3. *Relacija "biti jednako poželjan" je relacija ekvivalencije u skupu glasača u sustavu glasovanja da-ne. To jest, vrijedi sljedeće:*

1. *Relacija je REFLEKSIVNA: ako je $x = y$, tada su x i y jednako poželjni ($x \approx y$).*

2. *Relacija je SIMETRIČNA: ako su x i y jednako poželjni ($x \approx y$), tada su y i x jednako poželjni ($y \approx x$).*

3. *Relacija je TRANZITIVNA: ako su x i y jednako poželjni ($x \approx y$) i y i z jednako poželjni ($y \approx z$), tada su x i z jednako poželjni ($x \approx z$).*

Ako promatramo težinski sustav glasovanja, rekli bi da su x i y jednako poželjni ($x \approx y$) ako imaju jednake težine, što nije u potpunosti točno. Sljedeća propozicija nam govori kada su točno dva glasača jednako poželjna u težinskom sustavu glasovanja.

PROPOZICIJA 4. *Za bilo koja dva glasača u težinskom sustavu glasovanja sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1. *x i y su jednako poželjni ($x \approx y$).*

2. *Postoji raspodjela težina glasačima i kvota koja ostvaruje sustav u kojemu x i y imaju jednake težine.*

3. *Postoji dva načina raspodjele težina glasačima i dvije kvote tako da oba ostvaruju težine u kojima, u jednoj x ima veću težinu od y, a u drugoj y ima veću težinu od x.*

Relacija "biti jednako poželjan" nam je potrebna kako bi mogli iskazati kada su utjecaji glasača neusporedivi i usporedivi, što ćemo vidjeti u sljedećim poglavljima.

3.1 Neusporediva snaga

Ovim poglavljem ćemo odgovoriti na pitanje kada dva glasača nisu jednako poželjna i kada ima smisla reći da je njihov utjecaj "neusporediv".
Kada pogledamo kako smo definirali $x \approx y$ i ako primijenimo takvo razmišljenje, mogli bi reći da su x i y neusporedivi ako je nekoj koaliciji K više poželjan x od y, a drugoj koaliciji K' je više poželjan y od x, što nam točnije govori sljedeća definicija.

DEFINICIJA 7. *Za dva glasača x i y u sustavu glasovanja da-ne, kažemo da je poželjnost x i y neusporediva, u oznaci xIy , ako i samo ako postoje koalicije K i K', koje ne sadrže niti x niti y, takve da vrijedi sljedeće:*

1. *pridruživanjem x koaliciji K ona postaje pobjednička, ali pridruživanjem y koaliciji K ona ostaje gubitnička koalicija i*

2. *pridruživanjem y koaliciji K' ona postaje pobjednička, ali pridruživanjem x koaliciji K' ona ostaje gubitnička koalicija.*

Primjer 9. Neka je x član Zastupničkog doma i y član Senata u saveznom sustavu SAD-a, tada je xIy.

Sljedeća propozicija nam govori kada će točno sustav glasovanja da-ne imati neusporedive glasače. Prije nego krenemo na propoziciju moramo se upoznati sa pojmom sustava glasovanja da-ne robusnog na zamjenu 1-1.

DEFINICIJA 8. *Sustav glasovanja da-ne nazivamo robustan na zamjenu 1-1, ako svaka moguća zamjena 1-1 između pobjedničkih koalicija X i Y ostavlja barem jednu koaliciju i dalje pobjedničkom. Jedan od glasača na zamjeni mora pripadati X ali ne Y, a drugi mora pripadati Y, ali ne X.*

PROPOZICIJA 5. *Za bilo koji sustav glasovanja da-ne, sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1. *Postoje glasači x i y čija je poželjnost neusporediva.*

2. *Sustav nije robustan na zamjenu 1-1.*

Dokaz: ($1 \to 2$): Pretpostavimo da je poželjnost x i y neusporediva i da su K i K' koalicije takve da je

pridruživanjem x koaliciji K, $K \cup \{x\}$ postaje pobjednička koalicija;
pridruživanjem y koaliciji K, $K \cup \{y\}$ ostaje gubitnička koalicija;
pridruživanjem y koaliciji K', $K' \cup \{y\}$ postaje pobjednička koalicija;
pridruživanjem x koaliciji K', $K' \cup \{x\}$ ostaje gubitnička koalicija.

Neka je X koalicija nastala pridruživanjem x koaliciji K i Y koalicija nastala pridruživanjem y koaliciji K'. Koalicija X i koalicija Y je pobjednička pa ne možemo reći da je sustav glasovanja robustan na zamjenu 1-1, jer zamjena 1-1 u ovom slučaju čini obje koalicije gubitničkim koalicijama.

($2 \to 1$): Pretpostavimo da sustav nije robustan na zamjenu 1-1. Možemo odabrati pobjedničke koalicije X, koja sadrži x i ne sadrži y, i Y koja sadrži y i ne sadrži x, tako da obje koalicije postaju gubitničke zamjenom x i y. Neka je K koalicija nastala izbacivanjem x iz koalicije X i K' koalicija nastala izbacivanjem y iz koalicije Y. Tada

koaliciji K pridruživanjem x dobiva se pobjednička koalicija X;
pridruživanjem y koaliciji K dobiva se koalicija koja je gubitnička;
koaliciji K' pridruživanjem y dobiva se pobjednička koalicija Y;
pridruživanjem x koaliciji K' dobiva se koalicija koja je gubitnička.

Ovime smo pokazali da je poželjnost x i y neusporediva, te smo dokazali tvrdnju. ∎

KOROLAR 2. *U težinskom sustavu glasovanja ne postoje glasači kojama je poželjnost neusporediva.*

3.2 Usporediva snaga

U ovom poglavlju promatrit ćemo glasače x i y čija poželjnost nije niti jednaka niti je neusporediva. Pogledamo li dosadašnje tvrdnje koje smo iskazali, mogli bi reći da su snage glasača usporedive ako je nekoj koaliciji više poželjan glasač x od glasača y i niti jednoj drugoj koaliciji nije poželjniji glasač y od glasača x.

DEFINICIJA 9. *Za bilo koja dva glasača u sustavu glasovanja da-ne , kažemo da je x više poželjan od x, u oznaci $x > y$, ako i samo ako vrijedi sljedeće:*

1. *za svaku koaliciju K koja ne sadrži niti x niti y, ako je $K \cup \{y\}$ pobjednička onda je i $K \cup \{x\}$ pobjednička koalicija,*

2. *postoji koalicija K' koja ne sadrži niti x niti y, takva da je $K' \cup \{x\}$ pobjednička ali $K' \cup \{y\}$ je gubitnička koalicija.*

Primjer 10. U saveznom sustavu SAD-a ako je x predsjednik a y senator, onda je $x > y$.

Za težinski sustav glasovanja vrijedi sljedeća tvrdnja:

PROPOZICIJA 6. *U težinskom sustavu glasovanja je $x > y$ ako i samo ako x ima strogo veću težinu od y u svakoj težinskoj realizaciji sustava.*

Ako imamo slučaj da je ili $x > y$ ili $x \approx y$, imamo relaciju $x \geq y$ koju nazivamo relacija poželjnosti za pojednice, kao i kod brojeva, relacija poželjnosti za pojedince je tranzitivna i refleksivna, a nazivamo ju relacija preduređaja. Pogledajmo još nekoliko tvrdnji koje nam govore nešto o linearnosti (totalnosti) relacije poželjnosti kod sustava glasovanja da-ne.

DEFINICIJA 10. *Za sustav glasovanja da-ne kažemo da je linearan ako ne sadrži neusporedive glasače.*

PROPOZICIJA 7. *Sustav glasovanja da-ne je linearan ako i samo ako je robustan na zamjenu 1-1.*

PROPOZICIJA 8. *Svaki težinski sustav glasovanja je linearan.*

Dokazi prethodnih propizicija mogu se vidjeti u [4].

4 Paradoks predsjedavajućeg

Dosadašnje razmatranje političke snage je bilo kvantitativno. U ovome poglavlju ćemo vidjeti drugačiju perspektivu političke snage kroz takozvani paradoks predsjedavajućeg.
Pretpostavimo da imamo tri osobe A, B i C, i njihove alternative koje ćemo označiti redom sa a, b, c. Lista prioriteta je dana sljedećom tablicom.

A	**B**	**C**
a	b	c
b	c	a
c	a	b

Lista prioriteta nam koristi za testiranje opsega u kojemu su pojedine osobe A, B i C zadovoljne društvenim izborom. Društveni izbor ćemo odrediti standardnim glasovanjem u kojemu, u slučaju neriješenog glasovanja glasač A ima odlučujući glas (odnosno A je predsjedavajući). Nećemo koristiti listu preferencija glasača zato što ne želimo prisiliti glasače da glasaju za svoj prvi izbor. Glasovanje u kojemu je ograničeno glasati za svoj prvi izbor, odnosno, najveći prioritet naziva se *iskreno glasovanje*, a sve ostalo se naziva $sofisticirano\ glasovanje$. Naša strategija je da glasači A, B i C glasaju za jednu od alternativa a, b, c. Slijed glasova ćemo nazivati $scenarij$.

DEFINICIJA 11. *Fiksirajmo glasača G i promatrajmo dvije strategije glasovanja $V(x)$ i $V(y)$ za glasača G (gdje $V(x)$ znači "glas za x"). Tada kažemo da je $V(x)$ slabo dominantna u odnosu na $V(y)$ za glasača G pod uvjetom da:*

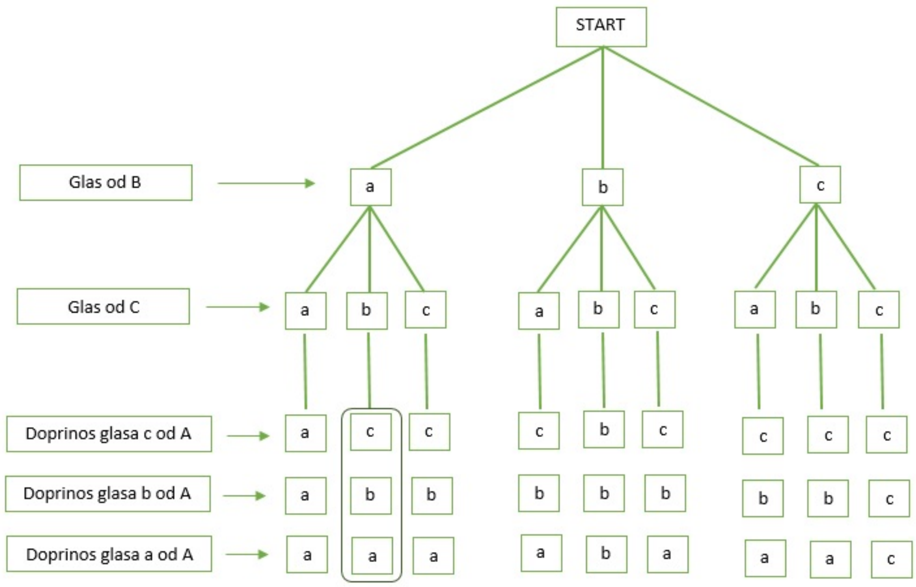
1. *Za bilo koji mogući scenarij, društveni izbor koji slijedi iz $V(x)$ je barem jednako povoljan za glasača G kao i društveni izbor koji slijedi iz $V(y)$.*

2. *Postoji barem jedan scenarij u kojem društveni izbor koji slijedi iz $V(x)$ je bolji za glasača G od društvenog izbora koji slijedi iz $V(y)$.*

Strategija je *slabo dominantna* za glasača G ako slabo dominira bilo koju drugu strategiju. Moramo uzeti u obzir sve moguće scenarije i uspoređivati ih kako bi znali je li strategija slabo dominantna. Scenarije glasova ćemo prikazati u obliku stabla. Različite strategije za glasača će biti prikazane okomitim stupcima, a predložene dominantne strategije će biti prikazane na dnu stabla. Sljedeće propozicije će nam pomoći u kreiranju stabla.

PROPOZICIJA 9. *"Glasovati za alternativu a" je slabo dominantno za predsjedavajućeg A.*

Dokaz: Postoji devet scenarija koje glasači B i C mogu napraviti budući da svaki može glasati za a, b ili c, te oni su prikazani na slici 2.

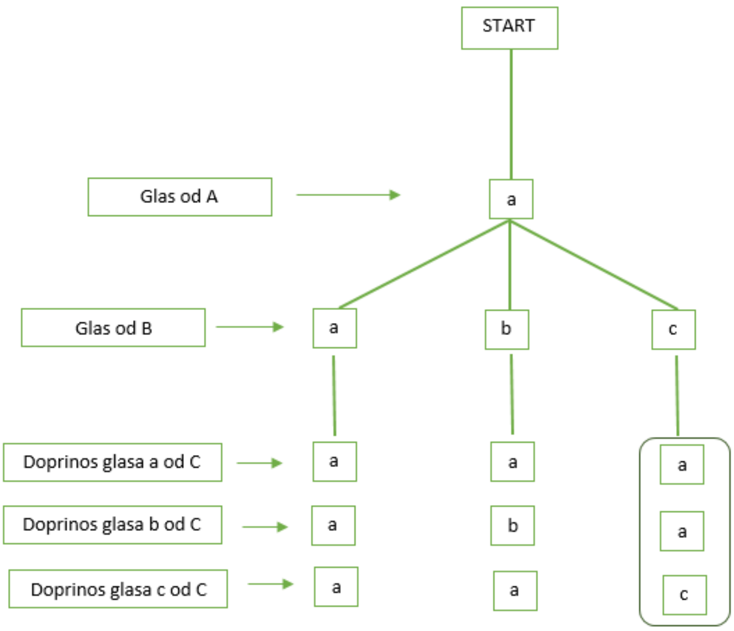


Slika 2: Devet scenarija glasova

Stablom smo prikazali sve moguće glasove od glasača B i glasača C. Stupci ispod devet scenarija prikazuju ishod koji ovisi o tome je li glasač A glasovao za a, b ili c. Na primjer, stupac koji je zaokružen odgovara scenariju u kojem je glasač B glasovao za a i glasač C za b. Ako predsjedavajući A glasa za c, tada je glasovanje izjednačeno, svaka alternativa ima jedan glas. Sada će odlučujući glas od A utjecati da ishod bude c (c je na vrhu stupca). Ako umjesto c glasač A glasa za b, tada b pobjeđuje (b je u sredini stupca). Ako glasač A glasa za a, tada je a društveni izbor sa dva glasa (a je na dnu stupca). Sada vidimo da je *glas za a* stvarno slabo dominantna strategija za glasača A. Primijetimo da ishod na dnu svakog stupca nije nikada lošiji za A nego ishod iznad. Drugi stupac pokazuje da glasovanje za a može biti bolje glasaču A nego glasovanje za b ili c, što dokazuje našu propoziciju. ■

PROPOZICIJA 10. *U slučaju kada glasač A iskoristi svoju slabu dominantnu strategiju glasovanjem za a, strategija "glas za c" je slabo dominantna za glasača C.*

Dokaz: Kako smo pretpostavili da je glasač A glasovao za a, imamo samo tri moguća scenarija koja su prikazana na slici 3.



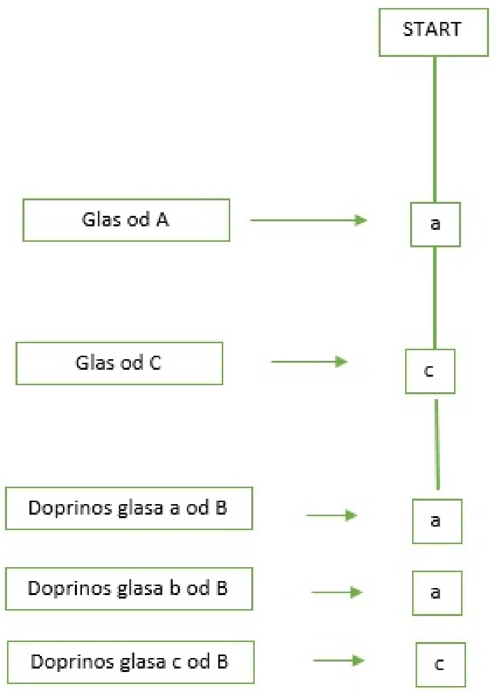
Slika 3: Tri scenarija glasova

Treći stupac nam pokazuje scenarij u kojemu je glas za c bolji za C nego glasovanje za a ili b. Vidimo da glasač C daje veću prednost glasu a od b i glasu c od a. Time smo dokazali tvrdnju. ■

Zadnjom propozicijom pogledajmo što će biti ishod za glasača B ako glasači A i C iskoriste svoje slabo dominantne strategije.

PROPOZICIJA 11. *U slučaju kada glasač A iskoristi svoju slabu dominantnu strategiju glasovanjem za a i glasač C iskoristi svoju slabu dominantnu strategiju glasovanjem za c, strategija "glas za c" je slabo dominantna za glasača B.*

Dokaz: Slika 4. nam dokazuje tvrdnju, budući da B daje više prednosti glasu c od a. ■



Slika 4: Scenarij glasova

Ako promatramo sofisticirano glasovanje, kada svi glasaju po svom interesu, onda je rezultat sljedeći:

$$A \text{ daje glas za } a,\ B \text{ daje glas za } c,\ C \text{ daje glas za } c,$$

što nam daje ishod c.

No, kada pogledamo listu prioriteta, ishod c glasaču A je zadnja alternativa, iako je A bio predsjedavajući i imao dodatnu snagu kao odlučujući glas u slučaju neriješenog ishoda. Važno je da ovaj ishod ne ovisi o nikakvoj zajedničkoj suradnji glasača B i C. Svaki glasač daje glas ovisno o vlastitom interesu.

Zaključak

Iskazali samo četiri mjerila za računanje političke snage u sustavu glasovanja da-ne i pokazali smo utjecaj političke snage na konačan rezultat glasovanja. Prvo mjerilo za računanje političke snage koju smo iskazali je Shapley-Shubikov indeks snage. Prikazali smo ga na Europskoj ekonomskoj zajednici, gdje smo promatrali težinski sustav glasovanja. Paradoksom novih članova smo pokazali na primjeru indeksa snage Luksemburga, koji se pristupanjem novih država članica povećao umjesto da se umanjio.
Slična kvantitativna mjera je Banzhaf indeks snage kojeg smo također prikazali na primjeru Europske ekonomske zajednice. Johnston indeks snage i Deegan-Packel indek snage smo prikazali na jednostavnim primjerima. Također smo pomoću Shapley-Shubik i Banzhaf indeksa snage izračunali utjecaj, tj. snagu, predsjednika SAD-a u saveznom sustavu glasovanja SAD-a.
Razmotrili smo i pojam ordinalne snage glasača. Predstavili smo formalne definicije usporedbe članova u koaliciji tako da ona ostane pobjednička. Usredotočili smo se na pojam "neusporedive" ili "usporedive" snage glasača.
Rad smo zaključili takozvanim "paradoksom predsjedavajućeg" koji predstavlja situacije u kojoj su pojedini prioriteti takvi da, iako predsjedavajući ima veću snagu, njegova prioritetna alternativa ne mora biti konačna odluka (izbor). Ovdje je važno napomenuti da glasači daju glasove ovisno o vlastitom intresu.

Sažetak

Upoznali smo se sa kvantitativnim mjerilima političke snage u sustavu glasovanja da-ne i njenim utjecajima na konačni rezultat glasovanja. Iskazali smo kvantitativna mjerila političke snage pomoću četiri rezultata, a to su Shapley-Shubik, Banzhaf, Johnston i Deegan-Packel indeks sange, koje smo prikazali pomoću primjera. Pristupanjem novih članica koaliciji iskazali smo paradoks novih članova, gdje nam se čini da indeks snaga treba biti manji, a zapravo je veći. Na primjeru saveznog sustava SAD-a smo vidjeli snagu predsjednika, članova Senata i Zastupničkog doma. Također, opisali smo paradoks predsjedavajućeg.
Pomoću pojma ordinalne snage, definirali smo jesu li snage pojedinog glasača usporedive ili neusporedive.

Ključne riječi: sustav glasovanja da-ne, indeksi snage: Sapley-Shubik, Banzhaf, Johnston, Deegan-Packel indeks sange, pobjedničke koalicije, ordinalna snaga, društveni izbor

Summary

We introduced us with the quantitative measure of political power in the yes-no voting system and its influence on the final voting result. We have presented the quantitative measures of the political power by four results, which are Shapley-Shubik, Banzhaf, Johnson and Deegan-Packel index of power which were shown by means of examples. With the joining of new members to the coalition, we have shown the paradox of new members, where the power seemed to be smaller but is actually bigger. In the example of the U. S. federal system, we have seen the power of president, members of the Senate and the House of Representatives. We presented the president's power which is a paradox called The Chair's Paradox. Through the ordinal power we have defined when we can say that power of voter is comparable or incomparable.

Key words: yes-no voting system, power indices: Shapley-Shubik, Banzhaf, Johnston, Deegan-Packel power index , winning coalitions, ordinal power, social choice

Literatura

[1] P. G. Cortona, C. Manzi, A. Pennisi, F. Ricca, B. Simeone, *Evaluation and optimization of electoral systems*, SIAM, Philadelphia, 1999.

[2] J. K. Hodge, R. E. Klima *The Mathematics of Voting and Elections*, AMS, 2005.

[3] D. Leech, *Computation of power indices*, Department of Economics, University of Warwick, UK, 2002.

[4] A. M. Pacelli, A. D. Taylor, *Mathematics and Politics*, Springer, 2008.

[5] Pajala, A., Meskanen, T. and T. Kause *Powerslave Power Index Calculator: A Voting Body Analyser in the Voting Power and Power Index*, University of Turku, 2002
`http://powerslave.val.utu.fi/`

[6] D. Leech, R. Leech, *Computer algorithms for voting power analysis*, `http://homepages.warwick.ac.uk/`

[7] T. Marošević, I. Soldo *Neki kvantitativni (brojčani) pokazatelji političke snage u sustavu glasovanja da-ne*, Sveučilišni glasnik, 2016.
`http://www.glas-slavonije.hr/314553/25/Kako-se-mjeri-snaga-stranaka-u-parlamentu`

[8] Members of United States Congress
`https://www.govtrack.us/congress/members`

Životopis

Rođena sam u Osijeku, 12. veljače 1992. godine. Odrastala sam u Đakovu s roditeljima i sestrom. Pohađala sam Osnovnu školu "Vladimir Nazor" u Đakovu. Nakon završene osnovne škole, upisala sam Opću gimnaziju "Antun Gustav Matoš" u Đakovu. Tijekom srednjoškolskog obrazovanja javila mi se želja za podučavanjem koja se odražavala kroz sudjelovanje u brojnim radionicama i pristupanju edukatorima MEMO AIDS-a (Mladi educiraju mlade o AIDS-u). Informirala sam se o deficitarnim zanimanjima te 2010. godine upisala Sveučilišni preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku.
Tijekom studiranja sam radila mnoge studentske poslove i zamjene u nastavi matemetike te matematike i fizike u Osnovnoj školi "Vladimir Nazor" u Đakovu, Osnovnoj školi "Satnica Đakovačka" u Satnici Đakovačkoj i Osnovnoj školi "Josip Kozarac" u Josipovcu Punitovačkom. Volontirala sam u dobrotvornoj udruzi Dokkica, gdje sam davala poduke iz matematike djeci s poteškoćama u učenju.