

# Galoisova grupa polinoma

---

Preselj, Ana

Undergraduate thesis / Završni rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:462804>

Rights / Prava: [In copyright](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2021-03-07**



Repository / Repozitorij:

[Repository of Department of Mathematics Osijek](#)



Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku

Ana Preselj

**Galoisova grupa polinoma**

Završni rad

Osijek, 2018.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku

Ana Preselj

Galoisova grupa polinoma

Završni rad

Voditelj: izv. prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2018.

# Sadržaj

Uvod	1
1. Galoisova grupa polinoma	2
Literatura	10

**Sažetak:** U ovom završnom radu bavit ćemo se proučavanjem Galoisove grupe polinoma. Pokazati ćemo kako se pronalazi Galoisova grupa određenih polinoma kroz mnoge primjere.

**Ključne riječi:** Galoisova grupa, polje cijepanja, polinom, Fundamentalni teorem Galoisove teorije, separabilan, ireducibilan, Eisensteineov kriterij

**Abstract:** In this final work, we will explain the Galois group of polynomial. We will show how to find the Galois group of some polynomials through many examples.

**Key words:** Galois group, splitting field, polynomial, Fundamental Theorem of Galois theory, separable, irreducible, Eisenstein's Criterion

# Uvod

Evariste Galois (1811.-1832.) je bio francuski matematičar koji je uvelike doprinio razvoju algebre. Prvi je uveo pojam grupe, a nakon smrti dobiva priznanje za Galoisovu teoriju nazvanu po njemu.

Ključna ideja Galoisove teorije je povezati proširenje polja  $K \subset F$  u grupu svih automorfizama  $F$  koji fiksiraju  $K$  (Galoisova grupa proširenja). Galoisovo proširenje polja  $K$  može se definirati u terminima njegove Galoisove grupe ili u smislu unutarnje strukture proširenja.

Fundamentalni teorem Galoisove teorije navodi da postoji jednoznačna korespondencija između međupolja Galoisovog proširenja (konačno dimenzionalno) i podgrupa Galoisove grupe proširenja. Taj teorem nam omogućuje da prenosimo svojstva i probleme koji uključuju polja, polinome i proširenja polja u pojmove teorije grupa.

Često odgovarajući problem u grupama ima rješenje, zbog čega se može riješiti izvorni problem u teoriji polja. Mi ćemo spominjati ona Galoisova proširenja polja čije su Galoisove grupe konačne cikličke ili rješive.

# 1. Galoisova grupa polinoma

**Definicija 1.1.** Neka je  $K$  polje. Galoisova grupa polinoma  $f \in K[x]$  nad poljem  $K$  je grupa  $\text{Aut}_K F$ , gdje je  $F$  polje cijepanja polinoma  $f$  nad poljem  $K$ .

Galoisova grupa polinoma  $f$  ne ovisi o izboru polja  $F$ . Prije određenih primjera prvo ćemo navesti neke korisne činjenice. Kažemo da je podgrupa  $G$  simetrične grupe  $S_n$  tranzitivna ako za bilo koje  $i \neq j$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ), postoji  $\sigma \in G$  takav da  $\sigma(i) = j$ .

**Definicija 1.2.**  $K$ -automorfizam polja  $F$  je automorfizam  $\sigma \in \text{Aut} F$  koji je  $K$ -homomorfizam. Skup svih  $K$ -automorfizama polja  $F$  označavamo s  $\text{Aut}_K F$  i nazivamo Galoisova grupa proširenja  $F$  polja  $K$ .

**Definicija 1.3.** Neka je  $F$  proširenje polja  $K$  tako da je fiksno polje Galoisove grupe  $\text{Aut}_K F$   $K$ . Tada se kaže da je  $F$  Galoisovo proširenje polja  $K$  ili Galoisovo nad  $K$ .

**Teorem 1.1. (Fundamentalni teorem Galoisove teorije)** Ako je  $F$  konačno dimenzionalno Galoisovo proširenje polja  $K$ , onda postoji jednoznačna korespondencija između skupa svih međupolja proširenja i skupa svih podgrupa Galoisove grupe  $\text{Aut}_K F$  (određeno s  $E \mapsto E' = \text{Aut}_E F$ ) tako da:

- (a) Relativna dimenzija dva međupolja jednaka je relativnom indeksu odgovarajuće podgrupe,  $\text{Aut}_K F$  je reda  $[F:K]$ .
- (b)  $F$  je Galoisova nad svakim međupoljem  $E$ , ali  $E$  je Galoisova nad  $K$  ako i samo ako odgovarajuća podgrupa  $E' = \text{Aut}_E F$  je normalna u  $G = \text{Aut}_K F$ . U tom slučaju je kvocijentna grupa  $G/E'$  (izomorfna) Galoisovoj grupi  $\text{Aut}_K E$  od  $E$  nad  $K$ .

**Teorem 1.2.** Neka je  $K$  polje i  $f \in K[x]$  polinom s Galoisovom grupom  $G$ .

- (a)  $G$  je izomorfna podgrupi neke simetrične grupe  $S_n$ .
- (b) Ako je  $f$  (iredubicilan) separabilan polinom stupnja  $n$ , onda  $n$  dijeli  $|G|$  i  $G$  je izomorfna tranzitivnoj podgrupi od  $S_n$ .

**Dokaz:**

- (a) Ako su  $u_1, \dots, u_n$  različite nultočke od  $f$  u nekom polju cijepanja  $F$  ( $1 \leq n \leq \deg f$ ), tada svaki  $\sigma \in \text{Aut}_K F$  određuje jedinstvenu permutaciju  $\{u_1, \dots, u_n\}$  (ali ne nužno obratno!). Gledati ćemo  $S_n$  kao grupu svih permutacija  $\{u_1, \dots, u_n\}$  i provjeriti ćemo je li pridruživanje  $\sigma \in \text{Aut}_K F$  permutaciji definirano kao monomorfizam  $\text{Aut}_K F \rightarrow S_n$  (primijetimo da je  $F = K(u_1, \dots, u_n)$ ).
- (b)  $F$  je Galoisova nad  $K$  i  $[K(u_1) : K] = n = \deg f$ . Stoga  $G$  ima podgrupu indeksa  $n$  prema Fundamentalnom teoremu Galoisove teorije odakle  $n \mid |G|$ . Za bilo koje  $i \neq j$  imamo  $K$ -izomorfizam  $\sigma : K(u_i) \cong K(u_j)$  takav da  $\sigma(u_i) = u_j$ .  $\sigma$  se proširuje do  $K$ -automorfizma od  $F$ , a  $G$  je izomorfna tranzitivnoj podgrupi od  $S_n$ .  $\square$

U nastavku će se Galoisova grupa polinoma  $f$  često identificirati s izomorfnom podgrupom  $S_n$  i smatrati će se grupom permutacija nultočki od  $f$ . Nadalje, prvenstveno ćemo se baviti polinomima  $f \in K[x]$  čije su nultočke različite u nekom polju cijepanja. Iz toga slijedi da su ireducibilni elementi separabilni. Polje cijepanja  $F$  polinoma  $f$  je Galoisovo nad poljem  $K$ . Ako se Galoisove grupe takvih polinoma uvijek mogu izračunati onda je moguće izračunati Galoisovu grupu bilo kojeg polinoma.

**Korolar 1.1.** *Neka je  $K$  polje i  $f \in K[x]$  ireducibilan polinom drugog stupnja s Galoisovom grupom  $G$ . Ako je  $f$  separabilan (kao što je uvijek slučaj kada je karakteristika od  $K$  različita od 2), onda je  $G \cong \mathbb{Z}_2$  inače  $G=1$ .*

Iz Teorema 1.2.(b) odmah dolazimo do činjenice da je Galoisova grupa separabilnih polinoma trećeg stupnja ili  $S_3$  ili  $A_3$  (jedina tranzitivna podgrupa od  $S_3$ ). Kako bi dobili točniji rezultat, uvest ćemo općenitije razmatranje.

**Definicija 1.4.** *Neka je  $K$  polje karakteristike različite od 2 i  $f \in K[x]$  polinom stupnja  $n$  sa  $n$  različitih nultočki  $u_1, \dots, u_n$  u nekom polju cijepanja  $F$  polinoma  $f$  nad poljem  $K$ . Neka je*

$$\Delta = \prod_{i < j} (u_i - u_j) = (u_1 - u_2)(u_1 - u_3) \cdots (u_{n-1} - u_n) \in F;$$

*diskriminanta od  $f$  je  $D=\Delta^2$ .*

Primijetimo da je  $\Delta$  element određenog polja cijepanja  $F$ , stoga *a priori*  $D = \Delta^2$  je također u  $F$ .

**Propozicija 1.1.** *Neka su  $K, f, F$  i  $\Delta$  kao u Definiciji 1.4.*

- (a) *Diskriminanta  $\Delta^2$  od  $f$  zapravo leži u  $K$ .*
- (b) *Za svaki  $\sigma \in \text{Aut}_K F < S_n$ ,  $\sigma$  je parna (odnosno neparna) permutacija ako i samo ako je  $\sigma(\Delta) = \Delta$  (odnosno  $\sigma(\Delta) = -\Delta$ )*

**Korolar 1.2.** *Neka su  $K, f, F$  i  $\Delta$  kao u Definiciji 1.4. (tako da je  $F$  Galoisovo nad poljem  $K$ ) i gledati ćemo  $G=\text{Aut}_K F$  kao podgrupu od  $S_n$ . U Galoisovoj teoriji potpolje  $K(\Delta)$  odgovara podgrupi  $G \cap A_n$ . Konkretno,  $G$  se sastoji od parnih permutacija ako i samo ako  $\sigma \in K$ .*

**Korolar 1.3.** *Neka je  $K$  polje i  $f \in K[x]$  (ireducibilan) separabilan polinom trećeg stupnja. Galoisova grupa od  $f$  je  $S_3$  ili  $A_3$ . Ako je karakteristika različita od 2, onda je Galoisova grupa od  $f$   $A_3$  ako i samo ako je diskriminanta od  $f$  kvadrat nekog elementa iz  $K$ .*

Ako je bazno polje  $K$  potpolje polja realnih brojeva, tada se diskriminanta polinoma trećeg stupnja  $f \in K[x]$  može upotrijebiti da otkrijemo koliko realnih nultočki ima  $f$ .

Neka je  $f$  kao u Korolaru 1.3. Ako je Galoisova grupa od  $f$   $A_3 \cong \mathbb{Z}_3$ , onda nema međupolja. Ako je riječ o  $S_3$  onda postoje četiri odgovarajuća međupolja  $K(\Delta), K(u_1), K(u_2)$  i  $K(u_3)$  gdje su  $u_1, u_2$  i  $u_3$  nultočke od  $f$ .  $K(\Delta)$  odgovara  $A_3$ , a  $K(u_i)$  odgovara podgrupi  $\{(1), (jk)\} (i \neq j, k)$  od  $S_3$  koja je reda 2 i indeksa 3.



Osim u slučaju kada je karakteristika 2, računanje Galoisove grupe separabilnog polinoma trećeg stupnja se svodi na računanje diskriminante i određivanje da li je ona ili nije kvadrat u  $K$ . Sljedeća tvrdnja je ponekad korisna.

**Propozicija 1.2.** *Neka je  $K$  polje karakteristike različite od 2 i 3. Ako*

*$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d \in K[x]$  ima tri različite nultočke u nekom polju cijepanja onda je polinom  $g(x) = f(x - \frac{b}{3}) \in K[x]$  oblika  $x^3 + px + q$  i diskriminanta od  $f$  je  $-4p^3 - 27q^2$ .*

**Dokaz:**

Neka je  $F$  polje cijepanja polinoma  $f$  nad poljem  $K$  i  $u \in F$  je nultočka od  $f$  ako i samo ako je  $u + \frac{b}{3}$  nultočka od  $g = f(x - \frac{b}{3})$ . Iz toga slijedi da  $g$  i  $f$  imaju istu diskriminantu. Provjerimo da je  $g$  oblika  $x^3 + px + q$  ( $p, q \in K$ ). Neka su  $v_1, v_2$  i  $v_3$  nultočke od  $g$  u  $F$ . Onda je  $(x - v_1)(x - v_2)(x - v_3) = g(x) = x^3 + px + q$  iz čega slijedi da je

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0;$$

$$v_1v_2 + v_1v_3 + v_2v_3 = p;$$

$$-v_1v_2v_3 = q.$$

Budući da je svaki  $v_i$  nultočka od  $g$

$$v_i^3 = -pv_i - q \quad (i = 1, 2, 3).$$

Diskriminanta  $\Delta^2$  od  $g$  je  $-4p^3 - 27q^2$ , a to slijedi iz definicije  $\Delta^2 = (v_1 - v_2)^2(v_1 - v_3)^2(v_2 - v_3)^2$ , gore navedene jednakosti i činjenice da je  $(v_i - v_j)^2 = (v_i + v_j)^2 - 4v_iv_j$ .  $\square$

**Primjer 1.1.** *Polinom  $x^3 - 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$  je ireducibilan i separabilan jer je  $\mathbb{Q}$  karakteristike nula. Diskriminanta je  $-4(-3)^3 - 27(-1)^2 = 108 - 27 = 81$  što je kvadrat u  $\mathbb{Q}$ . Stoga je Galoisova grupa  $A_3$  prema Korolaru 1.3.*

**Primjer 1.2.** *Ako je  $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ , onda je  $g(x) = f(x - \frac{3}{3}) = f(x - 1) = x^3 - 4x + 2$ , koji je ireducibilan po Eisensteinovom kriteriju. Prema Propoziciji 1.2. diskriminanta od  $f$  je  $-4(-4)^3 - 27(2)^2 = 256 - 108 = 148$  što nije kvadrat u  $\mathbb{Q}$ . Stoga je Galoisova grupa  $S_3$ .*

Sada je vrijeme za polinome četvrtog stupnja nad poljem  $K$ . Kao u prethodnom primjeru, baviti ćemo se samo onima  $f \in K[x]$  koji imaju različite nultočke  $u_1, u_2, u_3, u_4$  u nekom polju cijepanja  $F$ . Prema tome,  $F$  je Galoisovo nad poljem  $K$  i Galoisova grupa od  $f$  može biti grupa permutacija  $u_1, u_2, u_3, u_4$  i podgrupa od  $S_4$ . Podskup  $V = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$  je normalna podgrupa od  $S_4$ , što će biti od velike važnosti u nastavku. Primijetimo da je  $V$  izomorfna grupi  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$  i  $V \cap G$  je normalna podgrupa od  $G = \text{Aut}_K F < S_4$ .

**Lema 1.1.** *Neka su  $K, f, F, u_i, V$  i  $G = \text{Aut}_K F < S_4$  kao u prethodnom odjeljku. Ako je  $\alpha = u_1u_2 + u_3u_4, \beta = u_1u_3 + u_2u_4, \gamma = u_1u_4 + u_2u_3$  onda potpolje  $K(\alpha, \beta, \gamma)$  odgovara normalnoj podgrupi  $V \cap G$ . Stoga je  $K(\alpha, \beta, \gamma)$  Galoisovo nad poljem  $K$  i  $\text{Aut}_K K(\alpha, \beta, \gamma) \cong G/(G \cap V)$ .*

**Dokaz:**

Jasno je da svaki element u  $G \cap V$  fiksira  $\alpha, \beta, \gamma$  te stoga i  $K(\alpha, \beta, \gamma)$ . Kako bi se dovršio dokaz, dovoljno je, s obzirom na Fundamentalni teorem, pokazati da svaki element iz  $G$ , a ne iz  $V$  ne fiksira barem jedan od elemenata  $\alpha, \beta, \gamma$ . Na primjer, ako je  $\sigma = (12) \in G$  i  $\sigma(\beta) = \beta$ , onda  $u_2u_3 + u_1u_4 = u_1u_3 + u_2u_4$  i  $u_2(u_3 - u_4) = u_1(u_3 - u_4)$ . Stoga,  $u_1 = u_2$  ili  $u_3 = u_4$ , bilo koji od ovih slučajeva vodi na kontradikciju. Dakle  $\sigma(\beta) \neq \beta$ . Ostale mogućnosti dobijemo na sličan način. Umjesto provjere svih 20 mogućnosti, dovoljno je uzeti u obzir samo jednog predstavnika iz svakog člana od  $V$  u  $S_4$ .  $\square$

Neka su  $K, f, F, u_i$  i  $\alpha, \beta, \gamma$  definirani kao u Lemi 1.1. Elementi  $\alpha, \beta, \gamma$  imaju ključnu ulogu u određivanju Galoisove grupe proizvoljnih polinoma četvrtog stupnja. Polinom  $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \in K(\alpha, \beta, \gamma)$  naziva se rastav polinoma trećeg stupnja  $f$ . To je zapravo polinom nad poljem  $K$ .

**Lema 1.2.** *Ako je  $F$  polje i  $f = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \in K[x]$  onda je rastav polinoma trećeg stupnja  $f$  polinom  $x^3 - cx^2 + (bd - 4e)x - b^2e + 4ce - d^2 \in K[x]$*

**Dokaz:**

Neka  $f$  ima nultočke  $u_1, \dots, u_4$  u nekom polju cijepanja  $F$ . Zatim iz  $f = (x - u_1)(x - u_2)(x - u_3)(x - u_4)$  izrazimo  $b, c, d$  i  $e$  u terminima  $u_i$ . Proširimo rastav polinoma trećeg stupnja  $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$  i trebamo naći odgovarajuće supstitucije koristeći definiciju od  $\alpha, \beta, \gamma$  (Lema 1.1.) i ranije dobivene izraze za  $b, c, d$  i  $e$ .  $\square$

Sada smo u situaciji da izračunamo Galoisovu grupu bilo kojeg (ireducibilnog) separabilnog polinoma  $f \in K[x]$  četvrtog stupnja. Budući da je Galoisova grupa  $G$  tranzitivna podgrupa od  $S_4$  čiji je red djeljiv s 4 (Teorem 1.2.),  $G$  je reda 24, 12, 8 ili 4. Provjerimo da su jedine tranzitivne podgrupe reda 24, 12 i 4 zapravo  $S_4, A_4, V(\cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$  i različite cikličke podgrupe reda 4 generirane s 4-ciklusom. Jedna tranzitivna podgrupa od  $S_4$  reda 8 je diedralna grupa  $D_4$  reda 8 dobivena pomoću (1234) i (24). Budući da  $D_4$  nije normalna u  $S_4$  i da je svaka podgrupa reda 8 Sylowljeva 2-podgrupa, iz drugog i trećeg Sylowljevog teorema slijedi da  $S_4$  ima 3 podgrupe reda 8, a svaka je izomorfna  $D_4$ .

**Propozicija 1.3.** Neka je  $K$  polje i  $f \in K[x]$  (ireducibilan) separabilan polinom četvrtog stupnja s Galoisovom grupom  $G$  (smatra se podgrupom od  $S_4$ ). Neka su  $\alpha, \beta, \gamma$  nultočke kubnog polinoma  $f$  u nekom polju cijepanja i neka je  $m = [K(\alpha, \beta, \gamma) : K]$ . Tada je:

(a)  $m=6 \Leftrightarrow G=S_4$ ;

(b)  $m=3 \Leftrightarrow G=A_4$ ;

(c)  $m=1 \Leftrightarrow G=V$ ;

(d)  $m=2 \Leftrightarrow G \cong D_4$  ili  $G \cong \mathbb{Z}_4$ ; u slučaju  $G \cong D_4$ ,  $f$  je ireducibilan nad  $K(\alpha, \beta, \gamma)$ , a  $G \cong \mathbb{Z}_4$  inače.

**Dokaz:**

Budući da je  $K(\alpha, \beta, \gamma)$  polje cijepanja kubnog polinoma nad  $K$ , jedine mogućnosti za  $m$  su 1, 2, 3 i 6. S obzirom na to i argument koji prethodi teoremu, dovoljno je dokazati samo implikacije  $\Leftarrow$  u svakom od slučajeva. Koristimo činjenicu da je  $m = [K(\alpha, \beta, \gamma) : K] = |G/G \cap V|$  prema Lemi 1.1. Ako je  $G = A_4$ , onda je  $G \cap V = V$  i  $m = |G/V| = |G|/|V| = 3$ . Slično, ako je  $G = S_4$ , onda je  $m = 6$ . Ako je  $G = V$ , onda je  $G \cap V = G$  i  $m = |G/G| = 1$ . Ako je  $G \cong D_4$ , onda je  $G \cap V = V$  budući da je  $V$  sadržan u svakoj Sylowljevoj 2-podgrupi od  $S_4$  i  $m = |G/V| = |G|/|V| = 2$ . Ako je  $G$  ciklička grupa reda 4, onda je  $G$  generirana s 4-ciklusom čiji kvadrat mora biti u  $V$  tako da  $|G \cap V| = 2$  i  $m = |G/G \cap V| = |G|/|G \cap V| = 2$ . Budući da je  $f$  ireducibilan ili reducibilan i  $D_4 \not\cong \mathbb{Z}_4$ , dovoljno je dokazati da posljednja tvrdnja ne vrijedi. Neka su  $u_1, u_2, u_3, u_4$  nultočke od  $f$  u nekom polju cijepanja  $F$  i pretpostavimo  $G \cong D_4$ , tako da  $G \cap V = V$ . Budući da je  $V$  tranzitivna podgrupa i  $G \cap V = \text{Aut}_{K(\alpha, \beta, \gamma)} F$  (Lema 1.1.), postoji za svaki par  $i \neq j$  ( $1 \leq i, j \leq 4$ ), a  $\sigma \in G \cap V$  što inducira izomorfizam  $K(\alpha, \beta, \gamma)(u_i) \cong K(\alpha, \beta, \gamma)(u_j)$  tako da  $\sigma(u_i) = u_j$  i  $\sigma|_{K(\alpha, \beta, \gamma)}$  je identiteta. Prema tome, za svaki  $i \neq j$ ,  $u_i$  i  $u_j$  su nultočke istog ireducibilnog polinoma nad  $K(\alpha, \beta, \gamma)$ . Slijedi da je  $f$  ireducibilan nad  $K(\alpha, \beta, \gamma)$ . S druge strane, ako je  $G \cong \mathbb{Z}_4$ , onda je  $G \cap V = \text{Aut}_{K(\alpha, \beta, \gamma)} F$  reda 2 i nije tranzitivna. Stoga za neke  $i \neq j$  ne postoji  $\sigma \in G \cap V$  tako da je  $\sigma(u_i) = u_j$ . Budući da je  $F$  polje cijepanja nad  $K(\alpha, \beta, \gamma)(u_i)$  i  $K(\alpha, \beta, \gamma)(u_j)$ , ako postoji izomorfizam  $K(\alpha, \beta, \gamma)(u_i) \cong K(\alpha, \beta, \gamma)(u_j)$ , koji je identiteta na  $K(\alpha, \beta, \gamma)$  i šalje  $u_i$  u  $u_j$ , to bi bila restrikcija nekih  $\sigma \in \text{Aut}_K(\alpha, \beta, \gamma)F = G \cap V$ . Dakle, ne postoji takav izomorfizam, odakle slijedi  $u_i$  i  $u_j$  ne mogu biti nultočke istog ireducibilnog polinoma nad  $K(\alpha, \beta, \gamma)$ . Prema tome,  $f$  mora biti reducibilan nad  $K(\alpha, \beta, \gamma)$ .  $\square$

**Primjer 1.3.** Polinom  $f = x^4 + 4x^2 + 2 \in \mathbb{Q}[x]$  je ireducibilan prema Eisensteineovom kriteriju;  $f$  je separabilan budući da je  $\mathbb{Q}$  karakteristike nula. Koristeći Lemu 1.2. dobivamo da je rastav polinoma trećeg stupnja  $x^3 - 4x^2 - 8x + 32 = (x - 4)(x^2 - 8)$  tako da je  $\alpha = 4$ ,  $\beta = \sqrt{8}$ ,  $\gamma = -\sqrt{8}$  i  $\mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbb{Q}(\sqrt{8}) = \mathbb{Q}(2\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  je proširenje od  $\mathbb{Q}$  stupnja 2. Dakle Galoisova grupa je (izomorfna)  $D_4$  ili  $\mathbb{Z}_4$ . Supstitucija  $z = x^2$  reducira  $f$  do  $z^2 + 4z + 2$ , lako vidimo da su rješenja  $z = -2 \pm \sqrt{2}$ ; tako da su rješenja od  $f$   $x = \pm\sqrt{z} = \pm\sqrt{-2 \pm \sqrt{2}}$ . Dakle  $f = (x - \sqrt{-2 + \sqrt{2}})(x + \sqrt{-2 + \sqrt{2}})(x - \sqrt{-2 - \sqrt{2}})(x + \sqrt{-2 - \sqrt{2}}) = (x^2 - (-2 + \sqrt{2}))(x^2 - (-2 - \sqrt{2})) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$ . Dakle  $f$  je reducibilan nad  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  i stoga je Galoisova grupa ciklička reda 4 prema Propoziciji 1.3.(d).

**Primjer 1.4.** Da bi našli Galoisovu grupu polinoma  $f = x^4 - 10x^2 + 4 \in \mathbb{Q}[x]$  prvo moramo provjeriti da je  $f$  ireducibilan (i stoga i separabilan). Sada  $f$  nema nultočka u  $\mathbb{Q}$  i tako nema ni linearnih ili kubičnih faktora. Provjerom pokažimo da  $f$  nema kvadratnih faktora u  $\mathbb{Z}[x]$ . Lako je provjeriti da ne postoje brojevi  $a, b, c, d$  takvi da je  $f = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ . Tako da je  $f$  ireducibilan u  $\mathbb{Q}[x]$ . Rastav polinoma trećeg stupnja  $f$  je  $x^3 + 10x^2 - 16x - 160 = (x + 10)(x + 4)(x - 4)$ , od kojeg su sva rješenja u  $\mathbb{Q}$ . Stoga,  $m = [\mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma) : \mathbb{Q}] = 1$  i Galoisova grupa od  $f$  je  $V(\cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$  prema Propoziciji 1.3.

**Primjer 1.5.** Polinom  $x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$  je ireducibilan (i separabilan) prema Eisensteineovom kriteriju. Rastav polinoma trećeg stupnja  $x^3 + 8x = x(x + 2\sqrt{2}i)(x - 2\sqrt{2}i)$  i  $\mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}i)$  je proširenje od  $\mathbb{Q}$  stupnja 2. Provjerimo da je  $x^4 - 2$  ireducibilan nad  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}i)$  (jer  $\sqrt{2}$  i  $\sqrt[4]{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2}i)$ ). Stoga je Galoisova grupa izomorfna diedralnoj grupi  $D_4$  prema Propoziciji 1.3.

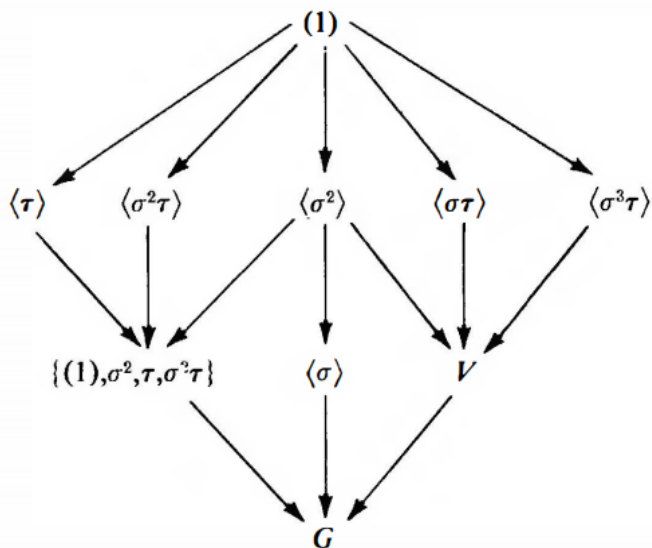
**Primjer 1.6.** Promatramo polinom  $f = x^4 - 5x^2 + 6 \in \mathbb{Q}[x]$ . Polinom  $f$  je reducibilan nad  $\mathbb{Q}$ , to jest  $f = (x^2 - 2)(x^2 - 3)$ . Dakle, Propozicija 1.3. ovdje nije primjenjiva. Jasno je da je  $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  polje cijepanja polinoma  $f$  nad poljem  $\mathbb{Q}$  i pošto je  $f$  reducibilan nad  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ,  $[F : \mathbb{Q}] = [F : \mathbb{Q}(\sqrt{2})][\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 2 = 4$ . Dakle  $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}F$ , Galoisova grupa polinoma  $f$  je reda 4 prema Fundamentalnom teoremu. Iz dokaza Teorema 1.2. i Korolara 1.1. slijedi da se  $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  sastoji od dva elementa: neutralni element 1 i  $\sigma$  kao  $\sigma(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ . 1 i  $\sigma$  se protežu na  $\mathbb{Q}$ -automorfizam od  $F$  na dva različita načina (ovisno o tome  $\sqrt{3} \mapsto \sqrt{3}$  ili  $\sqrt{3} \mapsto -\sqrt{3}$ ). To nam daje četiri različita elementa  $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}F$  (određena pomoću četiri moguće kombinacije:  $\sqrt{2} \mapsto \pm\sqrt{2}$  i  $\sqrt{3} \mapsto \pm\sqrt{3}$ ). Budući da je  $|\text{Aut}_{\mathbb{Q}}F| = 4$  i svaki od tih automorfizama je reda 2, Galoisova grupa  $f$  mora biti izomorfna grupi  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ . Određivanje međupolja i odgovarajućih podgrupa Galoisove grupe separabilnog polinoma četvrtog stupnja složenije je nego raditi isto to za separabilni polinom trećeg stupnja. Između ostalog može vrijediti  $K(u_i) = K(u_j)$ , iako je  $u_i \neq u_j$  (pogledati prethodni primjer). Ne postoji lagan način za određivanje Galoisove grupe polinoma četvrtog stupnja.

**Primjer 1.7.** Neka je  $F \subset \mathbb{C}$  polje cijepanja polinoma  $f = x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$  nad  $\mathbb{Q}$ . Ako je  $u$  pozitivan realni četvrti korijen od 2, onda su nultočke od  $f$ :  $u, -u, ui, -ui$ . Da bismo razmatrali Galoisovu grupu  $G = \text{Aut}_{\mathbb{Q}}F$  od  $f$  kao podgrupu  $S_4$ , moramo odabrati redosljed nultočki, recimo  $u_1 = u, u_2 = -u, u_3 = ui, u_4 = -ui$ . Znamo iz Primjera 1.5. da je  $G$  jedna od tri podgrupe reda 8 u  $S_4$ , od kojih je svaka izomorfna diedralnoj grupi  $D_4$ . Uočimo da je kompleksno konjugiranje  $R$ -automorfizam od  $\mathbb{C}$  koji preslikava  $u \mapsto u, -u \mapsto -u, ui \mapsto -ui$  i  $-ui \mapsto ui$ . Prema tome, kompleksno konjugiranje inducira  $\mathbb{Q}$ -automorfizam  $\tau$  od  $F = \mathbb{Q}(u, ui)$ . Jedan element od  $S_4$  je  $\tau = (34)$ . Svaka podgrupa reda 8 u  $S_4$  je konjugirana s  $D_4$  (Drugi Sylowljev teorem) i jednostavan račun pokazuje da je jedina koja sadrži  $(34)$ , podgrupa  $D$  generirana s  $\sigma = (1324)$  i  $\tau = (34)$ . Lako je vidjeti da vrijedi  $F = \mathbb{Q}(u, ui) = \mathbb{Q}(u, i)$ , tako da je svaki  $\mathbb{Q}$ -automorfizam od  $F$  potpuno određen svojim djelovanjem na  $u$  i na  $i$ . Tako se elementi od  $D$  mogu opisati ili terminima  $\sigma$  i  $\tau$  ili njihovim djelovanjem na  $u$  i na  $i$ . Te informacije su sažete u tablici.

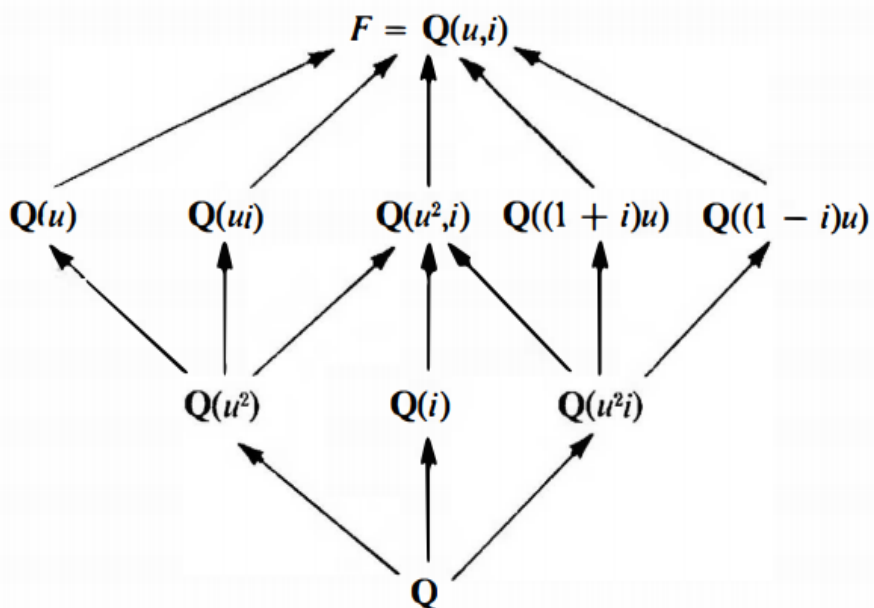
	(1)	(34)	(1324)	(12)(34)	(1423)	(13)(24)	(12)	(14)(23)
		$\tau$	$\sigma$	$\sigma^2$	$\sigma^3$	$\sigma\tau$	$\sigma^2\tau$	$\sigma^3\tau$
$u \mapsto$	$u$	$u$	$ui$	$-u$	$-ui$	$ui$	$-u$	$-ui$
$i \mapsto$	$i$	$-i$	$i$	$i$	$i$	$-i$	$-i$	$-i$

Može se vidjeti da je odnos podgrupa od  $D$  i odnos međupolja dan idućim prikazima, pri čemu je:

Podgrupa rešetke ( $H \rightarrow K$  znači  $H < K$ ):



Rešetka međupolja ( $M \rightarrow N$  znači  $M \subset N$ ):



Posebne tehnike za računanje Galoisove grupe polinoma stupnja većeg od 4 nad proizvoljnim poljima su prilično rijetke.

**Teorem 1.3.** *Ako je  $p$  prost broj i  $f$  ireducibilan polinom stupnja  $p$  nad poljem racionalnih brojeva koji ima dvije ne čisto realne nultočke u polju kompleksnih brojeva, onda je Galoisova grupa polinoma  $f$  (izomorfna)  $S_p$ .*

**Dokaz:**

Promatramo Galoisovu grupu  $G$  polinoma  $f$  kao podgrupu od  $S_p$ . Budući da  $p \mid |G|$  (Teorem 1.2.),  $G$  sadrži element  $\sigma$  reda  $p$  prema Cauchyjevom teoremu. Kompleksno konjugiranje ( $a + bi \mapsto a - bi$ ) je  $\mathbb{R}$ -automorfizam od  $\mathbb{C}$  koji fiksira sve realne brojeve. To znači da  $G$  sadrži transpoziciju  $\tau = (ab)$ . Budući da  $\sigma$  možemo zapisati u obliku  $\sigma = (aj_2 \cdots j_p)$ , neki  $\sigma$  su oblika  $\sigma^k = (abi_3 \cdots i_p) \in G$ . Promjenom notacije, možemo pretpostaviti  $\tau = (12)$  i  $\sigma^k = (123 \cdots p)$ . Ova dva elementa generiraju  $S_p$ . Stoga  $G \equiv S_p$ .  $\square$

**Primjer 1.8.** *Iz grafa polinoma  $f = x^5 - 4x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$  može se vidjeti da taj polinom ima samo tri realne nultočke. Polinom  $f$  je ireducibilan prema Eisensteineovom kriteriju i njegova Galoisova grupa je  $S_5$ .*

Još uvijek je otvoreno pitanje postoji li ili ne, Galoisovo proširenje polja  $\mathbb{Q}$  s Galoisovom grupom  $G$ , za svaku konačnu grupu  $G$ . Ako je  $G = S_n$ , odgovor je potvrđan.

## Literatura

- [1] THOMAS W. HUNGERFORD, *Algebra*, Springer-Verlag New York, 1974.
- [2] HRVOJE KRALJEVIĆ, *Algebra*, Odjel za matematiku, 2007.