# Prosječna udaljenost vrhova u grafu

Šarengradac, Ana-Marija

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Ana-Marija Šarengradac

# Prosječna udaljenost vrhova u grafu

Završni rad

Osijek, 2017

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Ana-Marija Šarengradac

# Prosječna udaljenost vrhova u grafu

Završni rad

Mentorica: doc.dr.sc. Snježana Majstorović

Osijek, 2017

# Mean distance in a graph


## Sažetak

U ovome radu ćemo proučavati prosječnu udaljenost vrhova u nekom konačnom povezanom jednostavnom grafu. Navest ćemo definiciju Wienerova indeksa obzirom da je on sastavni dio formule za prosječnu udaljenost vrhova. Izvest ćemo formule za prosječnu udaljenost vrhova nekih specijalnih klasa grafova, a zatim dati granice koje ovise o nekim parametrima danog grafa. Proučavat ćemo i utjecaj uklanjanja vrha na prosječnu udaljenost vrhova u grafu.



**Ključne riječi** prosječna udaljenost, Wienerov indeks, dijametar, put-potpun graf



## Abstract

In this paper we will study the average distnace in finite connected simple graph. A definition of Wiener index of a graph will be given, since this is the main part of the formula for average distance. We will derive formulae for average distances of some special class of graphs, and also derive bounds that depend on some special graph parameters. At last, we will study the influence of vertex removal on the average distance of graph.



**Keywords** average distance, Wiener index, diameter, path-complete graph

# Sadržaj

# 1 Uvod

**Prosječna udaljenost** vrhova u grafu definira se kao očekivana udaljenost između nasumično odabranog para različitih vrhova. Da bismo nekom grafu izračunali prosječnu udaljenost vrhova, potrebno je najprije izračunati sumu udaljenosti svih parova vrhova u grafu, a onda dobivenu vrijednost podijeliti sa ukupnim brojem svih neuređenih parova vrhova u grafu.
Suma udaljenosti među svim parovima vrhova se u brojnoj literaturi, naročito kemijskoj, zove **Wienerov indeks** grafa pa je jasno da je ta veličina ključna u određivanju prosječne udaljenosti vrhova. Wienerov indeks je nazvan po znanstveniku Haroldu Wieneru koji je 1947. godine ustanovio korelaciju između točke vrelišta parafina i strukture molekula. Posebno, spomenuo je u svom radu [8] da vrelište $t_B$ može biti dosta dobro aproksimirano formulom

$$t_B = aw + bp + c,$$

gdje je $w$ Wienerov indeks, $p$ polarnost, tj. broj parova atoma ugljika koji su udaljeni za točno tri ugljik - ugljik kemijske veze, a $a, b$ i $c$ su konstante za danu izomernu grupu.

Od tada je Wienerov indeks postao najčešće korišten topološki indeks u kemiji, obzirom da se molekule mogu modelirati neusmjerenim grafovima, posebno stablima, i to tako da su atomi reprezentirani vrhovima, a kemijske veze između njih reprezentirane su bridovima. Primjerice, u proizvodnji droga, cilj je konstruirati kemijske spojeve sa određenim svojstvima koja ne ovise samo o kemijskoj formuli, nego i o molekularnoj strukturi. Tako npr. kemijska formula $C_{17}H_{21}NO_4$ ne daje dovoljno informacija o vrsti droge, jer je zajednička i za kokain i za skopolamin.

Wienerov indeks se intenzivno proučavao i u teorijskoj matematici. Prema nekim saznanjima, prvi matematički rad o njemu objavljen je 1976. godine u [3]. Od tada su dobiveni brojni rezultati koji povezuju Wienerov indeks sa raznim drugim grafovskim parametrima, a razvijeni su i brojni algoritmi za njegovo računanje.

Danas je prosječna udaljenost vrhova vrlo popularna u proučavanju kompleksnih mreža, naročito u pronalaženju "najvažnijih" vrhova u mreži za koje su odgovorni takozvani indeksi centralnosti. Nadalje, imamo mnogo problema u teoriji komunikacija, lokaciji objekata, kriptografiji, arhitekturi, itd. gdje je prosječna udaljenost odgovarajućeg grafa od velike važnosti. Jedan od problema je primjerice, pronaći razapinjujuće stablo s najmanjom prosječnom udaljenosti među vrhovima.

# 2 Osnovne definicije i pojmovi iz teorije grafova

Ovo poglavlje je posvećeno definicijama i objašnjenjima osnovnih pojmova iz teorije grafova koje ćemo koristiti u radu. Za sve dodatne pojmove upućujemo čitatelja na [1].

**Definicija 2.1** ***Graf*** *$G$ je uređena trojka $G = (V(G), E(G), \psi(G))$ koja se sastoji od nepraznog skupa $V$ čije elemente zovemo vrhovima, skupa $E$ disjunktnog s $V$ čije elemente zovemo bridovima i funkcije incidencije $\psi$ koja svakom bridu od $G$ pridružuje neuređeni par ne nužno različitih vrhova od $G$.*

Za graf $G$ kažemo da je *konačan* ako su mu skupovi $V$ i $E$ konačni.

Vrhove nekog grafa najčešće označavamo malim slovima $u, v, w$ itd., a bridove označavamo malim slovima $e, f, g$ itd. Ako je bridu $e$ pridružen par vrhova $\{u, v\}$, onda kažemo da su $u$ i $v$ *krajevi* brida $e$, odnosno da je vrh $u$ ($v$) *incidentan* bridu $e$, a brid u tom slučaju označavamo s $e = uv$ ili $e = vu$.

Ako za neki graf $G$ funkcija incidencije $\psi_G$ nije injekcija, tj. postoje najmanje dva brida $e$ i $f$ grafa $G$ takva da $\psi_G(e) = \psi_G(f) = uv$, onda kažemo da postoji *višestruki brid* između vrhova $u$ i $v$.

*Petlja* je brid koji spaja vrh sa samim sobom.

*Jednostavan graf* je graf koji ne sadrži petlje ni višestruke bridove.

Graf $H$ je *podgraf* od $G$, u oznaci $H \subseteq G$, ako je $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$, a $\psi_H = \psi_G|_{E(H)}$ (tj. $\psi_H$ je restrikcija od $\psi_G$ na $E(H)$). Podgraf grafa $G$ nastao uklanjanjem vrha $v$ iz $G$ označavamo s $G - v$.

Neka je $\emptyset \neq V' \subseteq V(G)$. Podgraf od $G$ čiji je skup vrhova $V'$ i koji sadrži najveći mogući broj bridova naslijeđen iz $G$ zove se podgraf induciran s $V'$ te označava s $G[V']$. Kažemo još da je $G[V']$ *inducirani podgraf* od $G$.

*Razapinjujući podgraf* $H$ grafa $G$ je podgraf od $G$ s istim skupom vrhova kao i $G$. Pravi razapinjujući podgraf $H$ od $G$ je razapinjujući podgraf za koji vrijedi $H \neq G$.

*Stupanj vrha* $v$ grafa $G$ je broj $d_G(v)$ bridova u $G$ incidentnih s $v$. Ako je $d_G(v)= 0$, onda za vrh $v$ kažemo da je *izolirani vrh*.

*Niz stupnjeva* grafa $G$ je niz $(d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n))$, $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \cdots \geq d(v_n)$, gdje su $v_1, \ldots, v_n$ vrhovi grafa $G$. U takvom nizu, stupnjevi vrhova su obično poredani od najvećeg do najmanjeg.

U radu ćemo koristiti jednostavnu lemu koja je u brojnoj literaturi poznata kao lema o rukovanju.

**Lema 2.1** *U jednostavnom grafu $G$ vrijedi da je suma stupnjeva svih vrhova jednaka dvostrukom broju bridova.*

*Dokaz.* Za proizvoljan vrh $v$ jednostavnog grafa vrijedi da mu je stupanj $d(v)$ jednak broju svih bridova koji su s njim incidentni. Kada sumiramo stupnjeve svih vrhova, dobit ćemo dvostruki broj bridova jer smo svaki brid u toj sumi brojali dva puta. $\square$

*Šetnja* u grafu $G$ je netrivijalan konačan niz $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 ... e_k v_k$ čiji su članovi naizmjence vrhovi $v_i$ i bridovi $e_i$ tako da su krajevi od $e_i$ vrhovi $v_{i-1}$ i $v_i$ za svako $i$, $1 \leq i \leq k$. Šetnja je zatvorena ako je $v_0 = v_k$.

Šetnja u kojoj su svi bridovi međusobno različiti zove se *staza*.

Zatvorena šetnja u kojoj su svi vrhovi osim početnog i krajnjeg međusobno različiti zove se *ciklus*. Ciklus s $n$ vrhova označavamo s $C_n$.

*Put* je šetnja s međusobno različitim vrhovima. Put s $n$ vrhova označavamo s $P_n$.

*Stablo* je povezan jednostavan graf koji ne sadrži cikluse.

*Zvijezda* s $n$ vrhova je stablo u kome postoji vrh stupnja $n-1$. Oznaka je $S_n$.

*Udaljenost* $d(v, w)$ dvaju vrhova $v$ i $w$ je duljina najkraćeg puta između $v$ i $w$. Ako takav put ne postoji, onda vrijedi $d(v, w) = \infty$. Jasno je da je $d(v, w) = 1$ ako i samo ako su $v$ i $w$ susjedni vrhovi.

Graf $G$ je *povezan* ako $d_G(u, v) < \infty \ \forall u, v \in V(G)$. U suprotnom kažemo da je $G$ *nepovezan*, a maksimalne povezane podgrafove tog grafa zovemo *komponentama povezanosti* grafa $G$.

*Ekscentricitet* $e(v)$ vrha $v$ povezanog grafa $G$ je

$$\max_{u \in V(G)} d(v, u).$$

*Dijametar* $diam(G)$ grafa $G$ je

$$\max_{v \in V(G)} e(v).$$

*Radijus* $r(G)$ od $G$ je

$$\min_{v \in V(G)} e(v).$$

Vrh $v$ grafa $G$ za koji vrijedi $e(v) = diam(G)$ zovemo *perifernim vrhom* u $G$.

Vrh $v$ grafa $G$ za koji vrijedi $e(v) = r(G)$ zovemo *centralnim vrhom* u $G$.

**Definicija 2.2** ***Wienerov indeks*** *$W(G)$ grafa $G$ je suma udaljenosti među svim parovima vrhova, tj.*

$$W(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} d_G(u, v).$$

**Definicija 2.3** ***Prosječna udaljenost*** *$\mu(G)$ vrhova u povezanom grafu $G$ s $n$ vrhova je očekivana udaljenost između nasumično odabranog para različitih vrhova, tj.*

$$\mu(G) = \frac{W(G)}{\binom{n}{2}}.$$

U ovome radu ćemo se baviti isključivo s konačnim jednostavnim i povezanim grafovima. Pritom ćemo broj vrhova grafa označavati s $n$, a broj bridova s $m$.

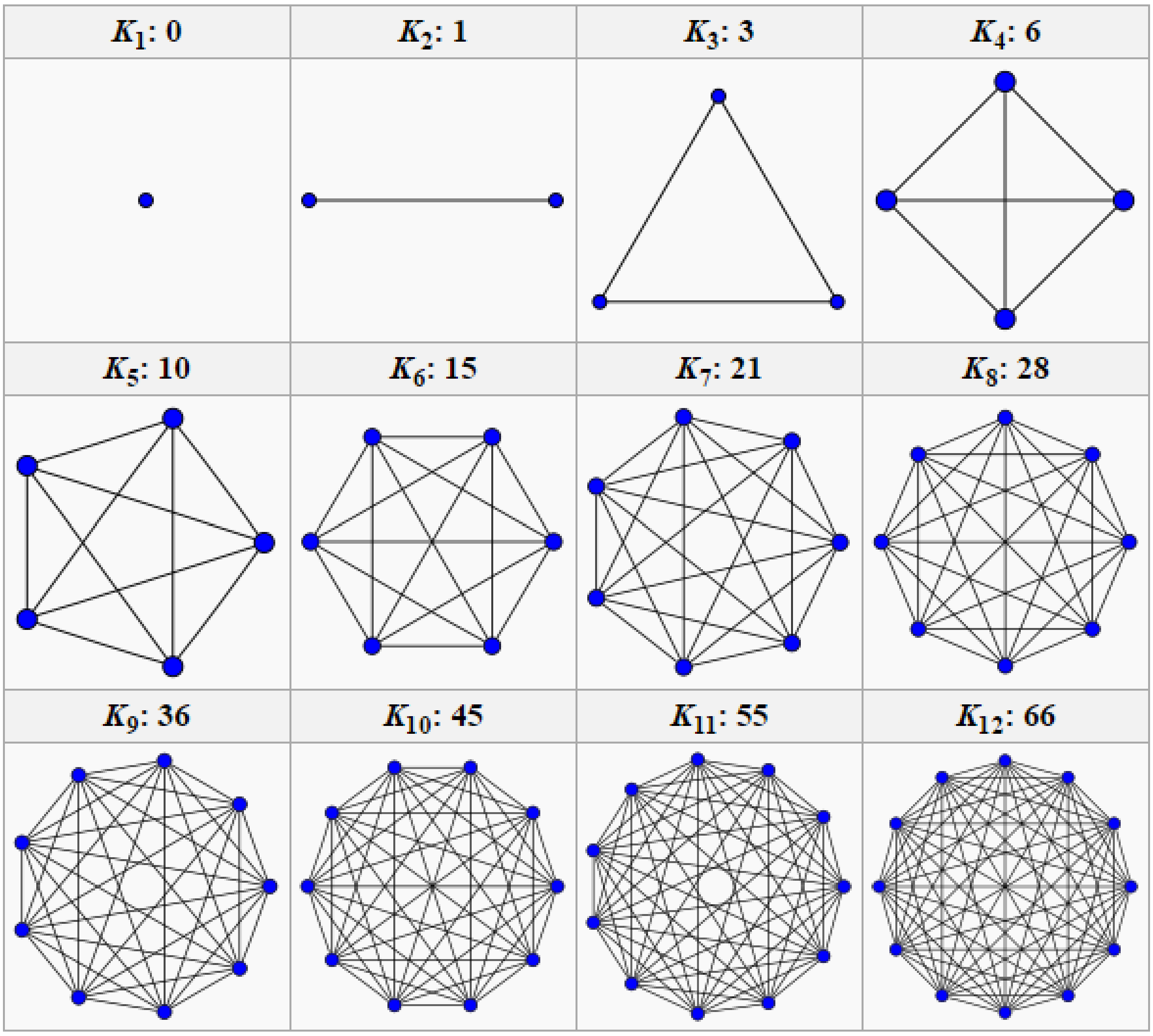
# 3 Prosječna udaljenost vrhova u nekim specijalnim grafovima

U ovom odjeljku ćemo izvesti formule za prosječnu udaljenost vrhova u nekim specijalnim jednostavnim grafovima.

## 3.1 Potpuni grafovi

Potpun graf je tipičan, ujedno i jedinstven primjer najgušćeg jednostavnog grafa. Pritom pod "gustoćom" podrazumijevamo broj bridova u grafu. Što je graf gušći, to je stabilniji pa ga je teško rastaviti na više komponenata povezanosti. Slijedi definicija potpunog grafa.

**Definicija 3.1** ***Potpun graf*** *je jednostavan graf u kojemu je svaki par vrhova spojen bridom. Oznaka potpunog grafa s n vrhova je* $K_n$.




Slika 1: Neki primjeri potpunih grafova s istaknutim brojem bridova

Da bismo izračunali prosječnu udaljenost vrhova u potpunom grafu $K_n$, potrebno je naći udaljenosti između svih neuređenih parova njegovih vrhova. No, to je izuzetno lako obzirom da su svaka dva vrha spojena bridom, što znači da je udaljenost između svaka dva vrha jednaka jedan. Parova vrhova u $K_n$, baš kao i u svakom grafu s $n$ vrhova, ima ukupno $\binom{n}{2}$.

Zaključujemo da vrijedi

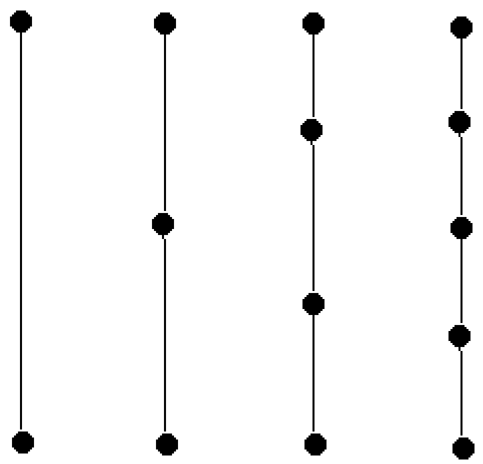
$$W(K_n) = \binom{n}{2}.$$

Obzirom da nema smisla promatrati $K_1$, jer je to trivijalan graf, tj. graf sa sa samo jednim vrhom i niti jednim bridom, zaključujemo da je za sve $n \geq 2$ prosječna udaljenost vrhova u potpunom grafu $K_n$ jednaka

$$\mu(K_n) = \frac{W(K_n)}{\binom{n}{2}} = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{2}} = 1.$$

## 3.2 Putovi

Put $P_n$ je jednostavan graf s najvećim mogućim dijametrom, odnosno vrijedi $diam(P_n) = n - 1$.
Put ne sadrži cikluse pa pripada klasi stabala.



Slika 2: Neki primjeri puteva

Da bismo odredili prosječnu udaljenost vrhova u putu, najprije ćemo mu odrediti Wienerov indeks.

**Propozicija 3.1** *Wienerov indeks puta je*

$$W(P_n) = \binom{n+1}{3}.$$

*Dokaz.* Označimo vrhove puta $P_n$ slijeva na desno s $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Iz

$$W(P_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} d(v_i, v_j)$$

dobivamo

$$\begin{aligned} W(P_n) &= (1 + 2 + \cdots + n - 1) + (1 + 2 + \cdots + n - 2) + \cdots + (1 + 2) + 1 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} j = \sum_{i=1}^{n} \binom{i}{2}. \end{aligned}$$

Preostaje još da metodom matematičke indukcije pokažemo kako za svaki prirodan broj $n$ vrijedi

$$\binom{1}{2} + \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}. \tag{3.1}$$

Za $n = 1$ imamo $\binom{1}{2} = \binom{2}{3} = 0$. Pretpostavimo da tvrdnja (3.1) vrijedi za $n = k$, tj.

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{i}{2} = \binom{k+1}{3}.$$

Dokažimo da tvrdnja vrijedi za $n = k + 1$. Koristeći induktivnu pretpostavku, imamo

$$\sum_{i=1}^{k+1} \binom{i}{2} = \sum_{i=1}^{k} \binom{i}{2} + \binom{k+1}{2} = \binom{k+1}{3} + \binom{k+1}{2} = \binom{k+2}{3} \tag{3.2}$$

pa je tvrdnja (3.1) dokazana. Posljednja jednakost u (3.2) proizlazi iz Pascalove formule koja glasi:

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}.$$

Dakle, imamo $W(P_n) = \binom{n+1}{3}$. □

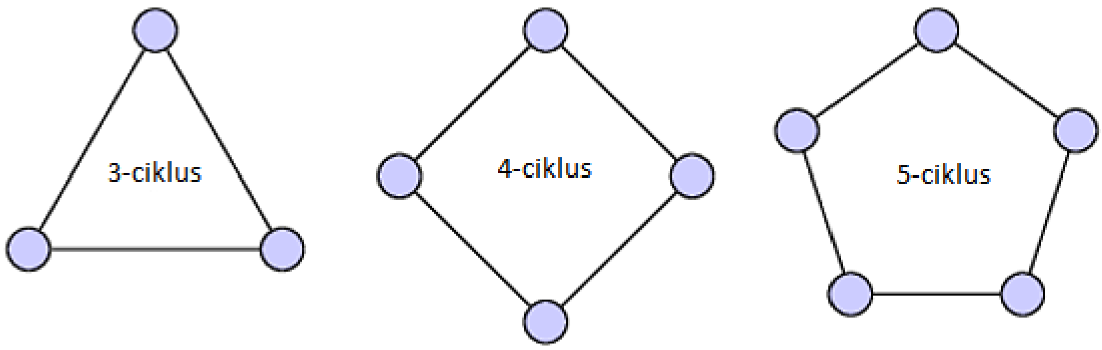
Sada možemo dobiti formulu za prosječnu udaljenost vrhova puta $P_n$:

$$\begin{aligned}
\mu(P_n) = \frac{1}{\binom{n}{2}} \cdot \binom{n+1}{3} &= \frac{2!(n-2)!}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{3!(n-2)!} \\
&= \frac{2!(n+1)!}{3!n!} \\
&= \frac{n+1}{3}.
\end{aligned}$$

Dakle, prosječna udaljenost vrhova u putu $P_n$ je $\binom{n+1}{3}$.

## 3.3 Ciklusi

Još smo u uvodnom dijelu rada definirali ciklus $C_n$. Ciklus je graf s najmanjim brojem bridova među svim jednostavnim povezanim grafovima koji sadrže cikluse. Primijetimo da je suma udaljenosti između proizvoljnog vrha $v \in V(C_n)$ i svih ostalih vrhova u $C_n$ konstantna. Stoga je dovoljno odrediti tu sumu za proizvoljan vrh, pomnožiti ju s brojem vrhova $n$ i podijeliti sa 2 jer smo u sumi put između svaka dva vrha brojali dva puta.




Slika 3: Neki primjeri ciklusa

**Propozicija 3.2** *Wienerov indeks ciklusa s $n$ vrhova je*

$$W(C_n) = \begin{cases} \dfrac{n^3}{8} & \text{ako je } n \text{ paran,} \\ \\ \dfrac{n(n^2-1)}{8} & \text{ako je } n \text{ neparan.} \end{cases}$$

*Dokaz.* Neka je $n$ paran, odnosno $n = 2a$, $a \geq 2$. Sa $t(v)$ označimo sumu udaljenosti vrha $v \in V(C_n)$ do svih ostalih vrhova u $C_n$. Vrijedi

$$\begin{aligned} t(v) &= 1 + 2 + \cdots + a + 1 + 2 + \cdots + a - 1 \\ &= \frac{a(a+1)}{2} + \frac{a(a-1)}{2} \\ &= a^2. \end{aligned}$$

Dobivamo

$$\begin{aligned} W(C_n) &= \frac{1}{2} \sum_{v \in V(C_n)} t(v) \\ &= \frac{1}{2} n a^2 \\ &= a^3 = \frac{n^3}{8}. \end{aligned}$$

Ukoliko je $n$ neparan broj, odnosno $n = 2a + 1$, $a \geq 1$, imamo

$$
\begin{aligned}
t(v) &= 1 + 2 + \cdots + a + 1 + 2 + \cdots + a \\
&= 2\frac{a(a+1)}{2} \\
&= a^2 + a.
\end{aligned}
$$

Slijedi

$$
\begin{aligned}
W(C_n) &= \frac{1}{2} \sum_{v \in V(C_n)} t(v) \\
&= \frac{1}{2} n(a^2 + a) \\
&= \frac{1}{2}(2a+1)(a^2+a) \\
&= \frac{n}{2} \cdot \frac{n^2-1}{4} \\
&= \frac{n(n^2-1)}{8}.
\end{aligned}
$$

□

Sada je lako izračunati prosječnu udaljenost vrhova u ciklusu. Za $n$ paran dobivamo

$$
\begin{aligned}
\mu(C_n) = \frac{1}{\binom{n}{2}} \cdot \frac{n^3}{8} &= \frac{2n^3(n-2)!}{8n!} \\
&= \frac{n^3(n-2!)}{4(n-2)!(n-1)n} \\
&= \frac{n^3}{4(n-1)n} \\
&= \frac{n^2}{4(n-1)},
\end{aligned}
$$

dok za $n$ neparan vrijedi

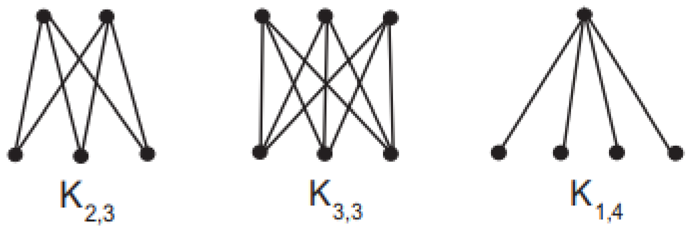
$$
\begin{aligned}
\mu(C_n) = \frac{1}{\binom{n}{2}} \cdot \frac{n(n^2-1)}{8} &= \frac{2n(n^2-1)(n-2)!}{8(n-2)!(n-1)n} \\
&= \frac{n^2-1}{4(n-1)} \\
&= \frac{(n-1)(n+1)}{4(n-1)} \\
&= \frac{n+1}{4}.
\end{aligned}
$$

Dakle, prosječna udaljenost vrhova u ciklusu $C_n$ je

$$\mu(C_n) = \begin{cases} \dfrac{n^2}{4(n-1)}, & n \text{ paran,} \\[2ex] \dfrac{n+1}{4}, & n \text{ neparan.} \end{cases}$$

## 3.4 Potpuni bipartitni grafovi

**Definicija 3.2** *Graf je* ***bipartitan*** *ako mu se skup vrhova može particionirati u dva skupa $X$ i $Y$ tako da svaki brid ima jedan kraj u $X$, a drugi u $Y$.* ***Potpun bipartitan graf*** *je jednostavan bipartitan graf s particijom $(X, Y)$ kod kojeg je svaki vrh iz $X$ spojen sa svakim vrhom iz $Y$. Oznaka je $K_{m,n}$, pri čemu je $m = |X|$, $n = |Y|$.*




Slika 4: Neki primjeri potpunih bipartitnih grafova

**Propozicija 3.3** *Wienerov indeks potpunog bipartitnog grafa $K_{m,n}$ je*

$$W(K_{m,n}) = m^2 + n^2 + mn - m - n.$$

*Dokaz.* Neka je $(X, Y)$ biparticija skupa vrhova potpunog bipartitnog grafa $K_{m,n}$. Da bismo izračunali Wienerov indeks tog grafa, treba primijetiti da je za svaki vrh $v \in X$ udaljenost do svakog vrha u $Y$ jednaka 1, a do svih preostalih vrhova iz iste particije 2. Slično zaključujemo za proizvoljan vrh $u \in Y$. Dobivamo

$$\begin{aligned} W(K_{m,n}) &= \frac{1}{2}(m(n + 2(m-1)) + n(m + 2(n-1))) \\ &= \frac{1}{2}(2mn + 2m^2 + 2n^2 - 2m - 2n) \\ &= m^2 + n^2 + mn - m - n. \end{aligned}$$

□

Budući da u $K_{m,n}$ imamo $m+n$ vrhova, slijedi da je prosječna udaljenost vrhova u tom grafu jednaka

$$\begin{aligned} \mu(K_{m,n}) &= \frac{1}{\binom{m+n}{2}} \cdot (m^2 + n^2 + mn - m - n) \\ &= \frac{2(m+n-2)!(m^2 + n^2 + mn - m - n)}{(m+n-2)!(m+n-1)(m+n)} \\ &= \frac{2m^2 + 2n^2 + 2mn - 2m - 2n}{(m+n)(m+n-1)}. \end{aligned}$$

## 3.5 Grafovi dijametra dva

U ovom pododjeljku ćemo izvesti formulu za prosječnu udaljenost vrhova u proizvoljnom grafu s $n$ vrhova, $m$ bridova i dijametra 2.

**Propozicija 3.4** *Neka je $G$ graf s $n$ vrhova i $m$ bridova i neka vrijedi $diam(G) = 2$. Wienerov indeks grafa $G$ je*

$$W(G) = n(n-1) - m.$$

*Dokaz.* Neka je $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ skup vrhova, a $(d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n))$ niz stupnjeva grafa $G$. Za vrh $v_i$ imamo $d(v_i)$ vrhova na udaljenosti jedan, a zbog uvjeta na dijametar, ostalo je još $n-1-d(v_i)$ vrhova koji su od $v_i$ udaljeni za dva, $i = 1, \ldots, n$.
Korištenjem leme 2.1 o rukovanju, dobivamo

$$\begin{aligned} W(G) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(d(v_i) + 2(n-1-d(v_i))) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(2(n-1) - d(v_i))) \\ &= n(n-1) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d(v_i) \\ &= n(n-1) - m. \end{aligned}$$

□

Zaključujemo da je prosječna udaljenost vrhova u proizvoljnom grafu $G$ s $n$ vrhova, $m$ bridova i dijametra 2 jednaka

$$\begin{aligned} \mu(G) &= \frac{1}{\binom{n}{2}} \cdot (n(n-1) - m) \\ &= \frac{2(n-2)!(n(n-1)-m)}{(n-2)!(n-1)n} \\ &= \frac{2n(n-1) - 2m}{n(n-1)} \\ &= 2 - \frac{2m}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

# 4 Granice za prosječnu udaljenost vrhova u grafu

U ovom ćemo poglavlju iskazati i dokazati granice za prosječnu udaljenost vrhova u grafu obzirom na neke grafovske parametre, kao što su, primjerice, broj vrhova, broj bridova, dijametar i slično.
Iako se čini da je moguće uspostaviti neku jasnu vezu između radijusa ili dijametra te prosječne udaljenosti vrhova u grafu, Plesník je još 1984. godine [6] pokazao da, pored očite veze $\mu(G) \leq diam(G)$, drugih veza nema. Štoviše, većina otvorenih problema o Wienerovom indeksu su otvoreni problemi i o prosječnoj udaljenosti vrhova. Takvih problema ima jako puno. Primjerice, još nitko nije uspio karakterizirati stabla s $n$ vrhova i dijametra $d$ koji maksimiziraju Wienerov indeks.

## 4.1 Podgrafovi

**Propozicija 4.1** *Neka je $G$ proizvoljan graf i neka je $e \in E(G)$ proizvoljan brid u $G$. Nadalje, neka je $G'$ podgraf od $G$ nastao uklanjanjem brida $e$ iz $G$. Tada vrijedi*

$$\mu(G) < \mu(G').$$

*Dokaz.* Neka je $e = uv$, $u, v \in V(G)$. Tada za svaki par vrhova $x$,$y$ koji sadrže $e$ na najkraćem $(x, y)$– putu vrijedi

$$d_G(x, y) \leq d_{G'}(x, y).$$

Obzirom da je $d_G(u, v) < d_{G'}(u, v)$, to je $W(G) < W(G')$ pa je onda i $\mu(G) < \mu(G')$. □

**Korolar 4.1** *Neka je $G$ proizvoljan graf i neka mu je $T$ razapinjujuće stablo. Tada vrijedi*

$$\mu(G) \leq \mu(T),$$

*pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $G = T$.*

*Dokaz.* Prema definiciji, razapinjujuće stablo nekog grafa $G$ je podgraf sa istim skupom vrhova $V(G)$ kao i graf $G$. Stoga je ovaj rezultat direktna posljedica propozicije 4.1 □

## 4.2 Grafovi s fiksnim brojem vrhova

**Teorem 4.1** ([Doyle-Graverova formula]) *Neka je $T$ stablo s $n$ vrhova. Vrijedi*

$$W(T) = \binom{n+1}{3} - \sum_{v \in V(T)} \sum_{1 \leq i < j < k \leq d_T(v)} |V(T_i)||V(T_j)||V(T_k)|,$$

*pri čemu su $T_i$, $T_j$ i $T_k$ podstabla nastala uklanjanjem vrha $v$ iz $T$, te $d(v) \geq 3$.*

*Dokaz.* Dokaz se nalazi u [2]. $\square$

**Teorem 4.2** *Za graf $G$ s $n$ vrhova vrijedi*

$$1 \leq \mu(G) \leq \frac{n+1}{3}.$$

*Donja granica je postignuta jedino u slučaju potpunog grafa, a gornja jedino u slučaju puta.*

*Dokaz.* Kao što smo spomenuli u pododjeljku 3.1, potpun graf $K_n$ ima najveći mogući broj bridova među svim jednostavnim grafovima s $n$ vrhova jer su u njemu svaka dva vrha spojena bridom. Iz toga proizlazi da se svaki jednostavan graf $G$ s $n$ vrhova može smatrati podgrafom potpunog grafa, a prema propoziciji 4.1 znamo da vrijedi $1 = \mu(K_n) \leq \mu(G)$, pri čemu se jednakost postiže za potpune grafove.
Za dokaz gornje granice prosječne udaljenosti vrhova, potrebno je pozvati se na teorem 4.1 i korolar 4.1. Naime, prema pododjeljku 3.2, znamo da je Wienerov indeks puta jednak $W(P_n) = \binom{n+1}{3}$ pa je onda iz formule teorema 4.1 jasno da među svim stablima s $n$ vrhova, put ima najveći Wienerov indeks pa time i najveću prosječnu udaljenost vrhova. Prema korolaru 4.1 prosječna udaljenost proizvoljnog grafa $G$ s $n$ vrhova manja je od prosječne udaljenosti nekog svog razapinjujućeg stabla $T$. Dakle, imamo

$$\mu(G) \leq \mu(T) \leq \mu(P_n)$$

pa je time dokazana i gornja granica jer je $\mu(P_n) = \frac{n+1}{3}$. $\square$

## 4.3 Grafovi s fiksnim brojem vrhova i bridova

**Teorem 4.3** *Ako je $G$ povezan graf s $n$ vrhova i $m$ bridova, tada vrijedi*

$$\mu(G) \geq 2 - \frac{2m}{n(n-1)}.$$

*Jednakost vrijedi ako i samo ako je diam$(G) = 2$.*

*Dokaz.* Primijetimo da u grafu $G$ s $m$ bridova postoji točno $m$ parova vrhova na udaljenosti jedan, a za ostalih $\binom{n}{2} - m$ parova vrhova jedino znamo da im je udaljenost najmanje 2. Stoga vrijedi

$$\begin{aligned} W(G) &\geq m + 2\left(\binom{n}{2} - m\right) \\ &= \frac{2n!}{2!(n-2)!} - m \\ &= \frac{(n-2)!(n-1)n}{(n-2)!} - m \\ &= n(n-1) - m. \end{aligned}$$

Dijeljenjem gornje nejednakosti s $\binom{n}{2}$ dobivamo

$$\begin{aligned} \mu(G) = \frac{W(G)}{\binom{n}{2}} &\geq (n(n-1) - m) : \frac{n!}{2(n-2)!} \\ &\geq (n(n-1) - m) \cdot \frac{2(n-2)!}{(n-2)!(n-1)n} \\ &\geq 2 - \frac{2m}{n(n-1)}, \end{aligned}$$

pa je jasno da se jednakost postiže za grafove dijametra 2. □

Teorem 4.3 može se upotrijebiti za dobivanje donje granice za prosječnu udaljenost vrhova u proizvoljnom stablu s $n$ vrhova.

**Korolar 4.2** *Neka je $T$ stablo s $n$ vrhova. Vrijedi*

$$\mu(T) \geq \frac{2(n-1)}{n}.$$

*Jednakost vrijedi ako i samo ako je $T = S_n$.*

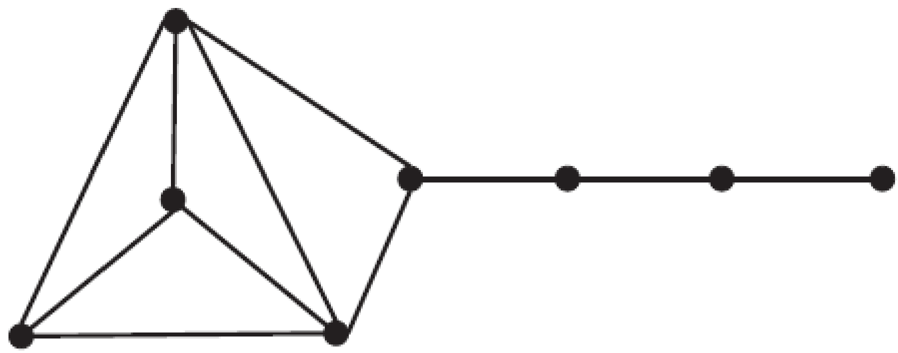
*Dokaz.* U zvijezdi s $n$ vrhova vrijedi $W(S_n) = (n-1+(n-1)(1+2(n-2)))/2 = (n-1)^2$ pa je $\mu(S_n) = \frac{2(n-1)}{n}$. Treba primijetiti da je zvijezda $S_n$ graf s najmanjim brojem bridova među svim grafovima s $n$ vrhova i dijametra 2 jer vrijedi $|E(S_n)| = n - 1$. (Stablo s $n$ vrhova ima $n - 1$ bridova, vidi [1].) Kombiniranjem ove tvrdnje i tvrdnje teorema 4.3 dobivamo donju granicu za $\mu(T)$. □

Pronalaženje gornje granice za prosječnu udaljenost vrhova u grafu s fiksnim brojem vrhova i bridova mnogo je složeniji posao od pronalaženja donje granice. Tu će nam pomoći put-potpuni grafovi.

### 4.3.1 Put-potpuni grafovi

**Definicija 4.1** ***Put-potpun*** *graf je jednostavan graf dobiven od puta i potpunog grafa tako da je vrh puta stupnja jedan spojen bridom sa najmanje jednim vrhom potpunog grafa.*

Za zadane $n$ i $m$, put-potpun graf je jedinstven i označavamo ga s $PK_{n,m}$. Više o takvim grafovima piše u [5].



Slika 5: Put-potpun graf $PK_{8,11}$

**Lema 4.1** *Neka je $G$ povezan graf s $n \geq 2$ vrhova i $m$ bridova. Tada je*

$$diam(G) \leq diam(PK_{n,m}).$$

*Dokaz.* Obzirom da je $G$ povezan graf, vrijedi $n-1 \leq m \leq \binom{n}{2}$ (pogledati [1]). Ako vrijedi $m = n-1+\binom{p}{2}$ za neki prirodan broj $p$, tada najveći dijametar ima onaj graf s $n$ vrhova i $m$ bridova u kome je što više bridova iskorišteno za konstrukciju potpunog podgrafa $K_p$, a preostali vrhovi i bridovi čine jedan put. Ako, pak, vrijedi $m \neq n-1+\binom{p}{2}$ ni za jedan $p$, tada podgraf koji sadrži što više bridova nije potpun, no, preostali vrhovi i bridovi i dalje čine put koji završava s jednim od vrhova "nepotpunog" podgrafa. Formalniji dokaz može se pronaći u [5]. □

Valja napomenuti da put-potpun graf $PK_{n,m}$ za većinu brojeva $n$ i $m$ nije jedinstven graf s najvećim dijametrom, no, zbog jednostavne konstrukcije, često se koristi kao primjer grafa s tim svojstvom.

Nastavljamo s pripremama za glavni rezultat o prosječnoj udaljenosti vrhova.

Za graf $G$ i prirodan broj $k$, neka je $S_k(G)$ skup svih neuređenih parova nesusjednih vrhova u $G$ čija je udaljenost najviše $k$. Odmah je jasno da vrijedi $S_1(G) = \emptyset$.
Sljedeća lema daje donju granicu za broj elemenata skupa $S_k(G)$ obzirom na broj vrhova i dijametar grafa $G$.

**Lema 4.2** *Neka je $G$ povezan graf s $n \geq 2$ vrhova i s dijametrom $d \geq 3$. Tada za proizvoljan prirodan broj $k$, $2 \leq k \leq d-1$ vrijedi*

$$|S_k(G)| \geq \sum_{i=2}^{k}(n-i) = (k-1)n - \frac{k(k+1)}{2} + 1. \tag{4.1}$$

*Jednakost se postiže ako je $G$ put-potpun graf.*

*Dokaz.* Neka je $G_0$ najkraći put u $G$ koji spaja dva vrha na udaljenosti $d$. Tada možemo vrhove koji ne leže u $G_0$ označiti s $v_1, v_2, \ldots, v_{n-d-1}$, i to tako da grafovi

$$G_j := G[V(G_0) \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_j\})$$

budu povezani za sve $j \leq n - d - 1$.
Neka je $k$ fiksan prirodan broj, $2 \leq k \leq d-1$. Odmah je vidljivo da jednakost u (4.1) vrijedi ako je $G = G_0$. Primijetimo da $S_k(G_j)$ sadrži $S_k(G_{j-1})$ za sve $1 \leq j \leq n - d - 1$. Stoga, lema je dokazana ako pokažemo da skup $S_k(G_j) - S_k(G_{j-1})$ ima najmanje $k - 1$ elemenata.
Promotrit ćemo dva slučaja:

• Slučaj 1. Neka je $e_{G_j}(v_j) \geq k$. Tada za najmanje $k - 1$ vrhova $z$ u $G_{j-1}$ vrijedi $2 \leq d_{G_j}(v_j, z) \leq k$.

• Slučaj 2. Neka je $e_{G_j}(v_j) < k$. Vrh $v_j$ je susjed s najviše 3 vrha iz $G_0$. Zaključujemo da imamo najmanje $d - 2$ vrhova $z$ takvih da je $\{v_j, z\} \in S_k(G_j)$. Očito vrijedi, $d - 2 \geq k - 1$.
Direktnom provjerom se ustanovljuje da se jednakost u (4.1) postiže za put-potpun graf dijametra najmanje 3. □

Sada možemo iskazati glavni teorem.

**Teorem 4.4** *Među svim grafovima s $n$ vrhova i $m$ bridova, najveću prosječnu udaljenost vrhova ima put-potpun graf.*

*Dokaz.* Dokazat ćemo da među svim grafovima s $n$ vrhova i $m$ bridova, najveći Wienerov indeks ima put-potpun graf. Iz toga će slijediti tvrdnja teorema.
Stavimo oznake $D := diam(PK_{n,m})$ i $d := diam(G)$.
Ako je $d \leq 2$, tada prema teoremu 4.3 vrijedi $W(G) = n(n-1) - m \leq W(PK_{n,m})$, odnosno $\mu(G) \leq \mu(PK_{n,m})$.
Pretpostavimo da je $d \geq 3$. Neka je $s_i$ broj neuređenih parova vrhova u $G$ na udaljenosti $i$, gdje $i \geq 0$. Imamo

$$s_1 = m \quad \text{i} \quad s_1 + s_2 + \ldots + s_d = m + |S_d(G)| = \binom{n}{2}.$$

Računanjem dobivamo

$$\begin{aligned} W(G) = \sum_{i=1}^{d} i s_i &= s_1 + |S_d(G)| + \sum_{i=1}^{d-1} (|S_d(G)| - |S_i(G)|) \\ &= \binom{n}{2} + \sum_{i=1}^{d-1} \left( \binom{n}{2} - m - |S_i(G)| \right). \end{aligned}$$

Iz leme 4.1 dobivamo $D \geq d$, a iz leme 4.2 slijedi nejednakost

$$W(G) \leq \binom{n}{2} + \sum_{i=1}^{D-1} \left( \binom{n}{2} - m - |S_i(PK_{n,m})| \right) = W(PK_{n,m}),$$

odnosno

$$\mu(G) \leq \mu(PK_{n,m}).$$

$\square$

**Primjedba 4.1** *Iz teorema 4.4 je moguće dobiti eksplicitnu formulu za prosječnu udaljenost vrhova u put-potpunom grafu* $PK_{n,m}$*. Mi ju ovdje nećemo izvesti jer je račun dosta zahtjevan.*

# 5 Uklanjanje vrha

Sada ćemo vidjeti na koji način uklanjanje vrha iz grafa utječe na prosječnu udaljenost. Rezultati će se odnositi na Wienerov indeks iz čega se mogu dobiti rezultati i o prosječnoj udaljenosti vrhova.

Neka je $f$ realna funkcija dvije prirodne varijable. Definirajmo realnu funkciju $F_f$ takvu da za povezan graf $G$ i za vrh $v$ za koji je graf $G - v$ povezan imamo

$$F_f(G, v) := f(W(G - v), W(G)).$$

Razmatrat ćemo sljedeća svojstva monotonosti funkcije $f$:
(Pj): funkcija $f(i, j)$ pada u ovisnosti o $j$
(Ri): funkcija $f(i, j)$ raste u ovisnosti o $i$
(Rh): funkcija $g(h) := f(h, h + t)$ raste za bilo koji fiksan prirodan broj $t$.

Sa $w + PK_{n,m}$ ćemo označiti graf dobiven od put-potpunog grafa $PK_{n,m}$ tako da spojimo novi vrh $w$ sa svakim vrhom u $PK_{n,m}$. Zanimat će nas ekstremne vrijednosti funkcije $F_f$.

**Teorem 5.1** *Neka je $v$ vrh grafa $G$ s $n \geq 2$ vrhova i $m \geq 2n - 3$ bridova, i pritom su $G$ i $G - v$ povezani. Ako funkcija $f(i, j)$ zadovoljava svojstva (Pj) i (Ri), tada vrijedi*

$$F_f(G, v) \leq F_f(w + PK_{n-1,m-n+1}, w).$$

*Dokaz.* Obzirom da je $w + PK_{n-1,m-n+1}$ graf s $n$ vrhova, $m$ bridova i dijametra dva, to prema teoremu 4.3 imamo $W(G) \geq n(n-1) - m = W(w + PK_{n-1,m-n+1})$.
Nadalje, za graf $G - v$ s $n - 1$ vrhova i $m'$ bridova, pri čemu je $m - (n - 1) \leq m' \leq m$, iz teorema 4.4 slijedi $W(G - v) \leq W(PK_{n-1,m-n-1})$.
Korištenjem svojstava (Pj) i (Ri), tvrdnja teorema je dokazana. □

**Teorem 5.2** *Neka je $G$ povezan graf s $n \geq 2$ vrhova i neka je za $v \in V(G)$ graf $G - v$ također povezan. Ako funkcija $f(i, j)$ zadovoljava svojstva (Pj) i (Ri), tada vrijedi*

$$F_f(G, v) \leq \max_{2n-3 \leq m \leq n(n-1)/2} F_f(w + PK_{n-1,m-n+1}, w).$$

*Dokaz.* Ako grafu $G$ dodamo brid incidentan s vrhom $v$, tada se vrijednost funkcije $F_f$ povećava. Zato se možemo ograničiti na grafove s najmanje $2n - 3$ bridova. Ostalo slijedi iz teorema 5.1. □

Neka je $T_{n,t}$ skup svih povezanih grafova s $n$ vrhova koji sadrže vrh $v$ tako da

$$\sum_{w \in V(G)} d_G(v, w) = t.$$

Sljedeća lema pokazuje da put-potpun graf ima najveći Wienerov indeks među svim grafovima skupa $T_{n,t}$.

**Lema 5.1** *Neka su $n$ i $t$ prirodni brojevi takvi da $n \geq 2$ i $n-1 \leq t \leq \binom{n}{2}$. Tada za bilo koji graf $G' \in T_{n,t}$ imamo $W(G') \geq W(PK_{n,m})$, gdje je $m = (n+2)(n-1)/2 - t$. Štoviše, jednakost se postiže ako i samo ako je $G = PK_{n,m}$.*

*Dokaz.* Dokaz ove leme može se pogledati u [7]. □

**Teorem 5.3** *Neka je $v$ vrh grafa $G$ s $n \geq 2$ vrhova i neka su $G$ i $G - v$ povezani. Ako funkcija $f(i,j)$ zadovoljava (Pj) i (Rh), tada vrijedi*

$$\min_{n-1 \leq m \leq \binom{n}{2}-(n-2)} F_f(PK_{n,m}, u_{n,m}) \leq F_f(G, v),$$

*gdje je $u_{n,m}$ vrh stupnja jedan u $PK_{n,m}$.*

*Dokaz.* Svojstvo (Pj) kaže da ako iz $G$ izostavimo brid incidentan s $v$, vrijednost funkcije $F_f$ se smanjuje. Stoga se možemo ograničiti na slučaj kada je $v$ vrh stupnja jedan u $G$. Označimo $\sum_{w \in V(G)} d_G(v,w) =: \sigma(v)$. Dobivamo

$$2n - 3 \leq \sigma(v) \leq \binom{n}{2}. \tag{5.1}$$

Štoviše, imamo

$$W(G) = \sigma(v) + W(G - v)$$

pa je

$$F_f(G, v) = f(W(G - v), \sigma(v) + W(G - v)). \tag{5.2}$$

Ako stavimo $t' = \sigma(v)$, tada prema lemi 5.1, jednakosti (5.2) i svojstvu (Rh) imamo da je $F_f(PK_{n,m}, u_{n,m}) \leq F_f(G, v)$, gdje je $\sigma(u_{n,m}) = t'$ i tada je $m = (n+2)(n-1)/2 - t'$. Nadalje, nejednakosti (5.1) daju $n - 1 \leq m \leq \binom{n}{2} - (n-2)$. Time je tvrdnja teorema dokazana. □

Uzmimo u obzir neki specijalan izbor funkcije $f$. Primijetimo da funkcija $f(i,j) = i/j$ zadovoljava svojstva (Pj), (Ri) i (Rh) pa možemo primjeniti teoreme 5.1, 5.2 i 5.3 na omjer $W(G - v)/W(G)$.

Kako je

$$\frac{\mu(G - v)}{\mu(G)} = \left(1 + \frac{2}{n-2}\right) \frac{W(G - v)}{W(G)},$$

to je iz odnosa Wienerovih indeksa grafova $G$ i $G - v$ moguće izvesti zaključak i o odnosu između prosječnih udaljenosti vrhova u $G$ i $G - v$.

# 6 Zaključak

Prosječna udaljenost vrhova u nekom grafu od velikog je značaja u svim znanstvenim disciplinama u kojima se određeni objekti i veze između njih mogu modelirati povezanim grafom. Prosječna udaljenost vrhova usko je povezana s Wienerovim indeksom, grafovskom invarijantom koja se intenzivno proučavala, a i dalje se proučava, kako u teorijskoj, tako i u primijenjenoj matematici. Pojavila se u kemiji, a danas je vrlo popularna u teoriji kompleksnih mreža. Za povezane grafove sa izrazito velikim brojem vrhova, računanje prosječne udaljenosti vrhova nije jednostavan posao. Treba naći udaljenosti među svim parovima vrhova, sumirati ih i tako dobiveni broj podijeliti s brojem svih neuređenih parova vrhova u grafu. Ipak, za neke specijalne klase grafova pronađene su egzaktne formule ili su, pak, nađene ocjene te veličine.
Iako se prosječna udaljenost vrhova u grafu počela proučavati prije polovice 20. stoljeća, i danas postoje razni otvoreni problemi koji su s njom usko povezani.

# Literatura


[1] R. Diestel. *Graph Theory.* Electronic edition 2000, Springer-Verlag, New York, 2000.

[2] J.K. Doyle, J.E Graver. *Mean distance in a graph.* Discrete Mathematics 17, 147–154, 1977.

[3] R.C. Entringer, D.E Jackson, D.A. Snyder. *Distance in graphs.* Czechoslovak Math. J. 26, 283–296, 1976.

[4] W. Goddard, O.R. Oellermann. *Distance in Graphs.* Chapter in Structural Analysis of Complex Networks, 49–72, 2010.

[5] F. Harary. *The maximum connectivity of a graph.* Proceedings of the National Academy of Sciences, USA, 48, 1142–1146, 1962.

[6] J. Plesník. *On the sum of all distances in graph or digraph.* Journal of Graph Theory, Vol. 8, 1–24, 1984.

[7] L. Šoltes. *Transmission in graphs: A bound and vertex removing.* Mathematica Slovaca, Vol. 41, No. 1, 11–16, 1991.

[8] H. Wiener. *Structural determination of paraffin boiling points.* Journal of American Chemical Society, 69, 17–20, 1947.