Unitarni operatori

Vilić, Ana

Undergraduate thesis / Završni rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:974704

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-24**

Repository / Repozitorij:

Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Ana Vilić

Unitarni operatori

Završni rad

Osijek, 2018.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Ana Vilić

Unitarni operatori

Završni rad

Voditelj: doc. dr. sc. Suzana Miodragović

Osijek, 2018.

Unitarni operatori

Sažetak

U ovom radu bavit ćemo se pojmom unitarnog prostora te navesti operatore koji djeluju na tom prostoru, a posebnu pažnju ćemo posvetiti unitarnim operatorima. Za početak ćemo definirati skalarni produkt, unitaran prostor te neke druge osnovne pojmove poput norme i ortonormirane baze potrebne za opisivanje operatora koji slijede. U trećem poglavlju definirat ćemo unitarne operatore, navesti njihova svojstva i dati njihovu karakterizaciju. Zatim ćemo navesti druge primjere operatora na unitarnom prostoru. Na kraju ćemo spomenuti i normalne operatore čime ćemo objediniti dotad spomenute operatore na unitarnom prostoru.

Ključne riječi: skalarni produkt, unitaran prostor, unitaran operator, hermitski adjungiran operator, normalan operator

Abstract

In this paper we will deal with the concept of unitary space and provide examples of operators in the unitary space, with special attention to unitary operators. Firstly, we will define the scalar product and the term unitary space. Some other basic concepts will be mentioned, (e.g. the norm and the orthonormal basis) needed to describe those operators. In the third chapter we will define unitary operators, specify their properties and give their characterization. Furthermore, we will list other examples of operators in the unitary space. Finally, we will define normal operators, which will unify the above-mentioned operators in the unitary space.

Key words: scalar product, unitary space, unitary operator, hermitian adjoint, normal operator

Sadržaj

1 Uvod

Kako bismo ispitivali metrička svojstva apstraktnog vektorskog prostora poput dužine vektora i okomitost vektora, u drugom poglavlju uvodimo pojam skalarnog produkta pomoću kojeg možemo rekonstruirati te pojmove. Nakon definiranja skalarnog produkta, pojam unitarnog prostora se sam nameće kao veza između skalarnog produkta i vektorskog prostora. Na unitarnom prostoru definiramo funkciju norma kojom računamo dužinu vektora, metriku kojom računamo udaljenost među vektorima i dajemo kriterij za okomitost vektora u apstraktnom vektorskom prostoru. Nadalje, definiramo ortonormiranu bazu za unitarne prostore koja se pokazuje kao vrlo korisna u računu, a pokazat ćemo i da svaki konačnodimenzionalan unitaran prostor ima ortonormiranu bazu. Kako uz svaku novu strukturu, tako i uz unitaran prostor vežemo nove pojmove, a to su, između ostalog, specifični operatori koji posjeduju dodatna korisna svojstva koja proizlaze iz strukture unitarnog prostora. U trećem poglavlju se bavimo tim operatorima. Za početak definiramo unitarne operatore i navodimo neke primjere unitarnih operatora. Pokazat ćemo poveznicu unitarnih operatora s pojmovima definiranim u drugom poglavlju, tj. s normom, metrikom, kutom među vektorima te ortonormiranom bazom. Dotaknut ćemo se i drugih svojstava unitarnog operatora poput linearnosti, injektivnosti i surjektivnosti. Zaključno ćemo iskazati i dokazati teorem o dijagonalizaciji unitarnog operatora. Osim unitarnih operatora, u ovom radu navodimo i kratak pregled drugih operatora na unitarnom prostoru. Za linearan operator definirat ćemo njemu hermitski adjungiran operator te ćemo pomoću njega dati još jednu karakterizaciju unitarnog operatora i definirati hermitski i antihermitski operator. Na kraju ćemo uvesti pojam normalnih operatora i vidjeti da su hermitski, antihermitski i unitaran operator specijalni slučajevi normalnih operatora.

2 Unitarni prostori

2.1 Skalarni produkt

Označimo s E^3 trodimenzionalan prostor koji shvaćamo kao skup točaka. Neka je u E^3 dan pravokutan koordinatni sustav s ishodištem u O. Svakoj točki $A \in E^3$ možemo pridružiti radijvektor $\overrightarrow{OA}$. Neka je sada $V^3(O)$ skup svih radijvektora s početnom točkom u O.
Za A, $B \in E^3$ uređen par (A, B) naziva se orijentirana dužina s početkom u točki A i završetkom u točki B, a tu orijentiranu dužinu uobičajeno označavamo s $\overrightarrow{AB}$. Na skupu svih orijentiranih dužina uvodimo relaciju $\sim$ na sljedeći način: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ ako i samo ako dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ imaju zajedničko polovište.

Teorem 2.1. *Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije na skupu svih orijentiranih dužina.*

Za dokaz vidi [1].
Skup klasa ekvivalencije orijentiranih dužina s obzirom na relaciju $\sim$ označava se s V^3. Klase orijentiranih dužina zovu se vektori, a označavamo ih simbolima $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$ ili $[\overrightarrow{AB}], [\overrightarrow{CD}], \ldots$ ako želimo navesti reprezentante. Modul vektora $\vec{a}$ definira se kao duljina dužine $\overline{AB}$ gdje je $\overrightarrow{AB}$ bilo koji reprezentant od $\vec{a}$.

Teorem 2.2. *V^3 je realan vektorski prostor.*

Dokaz se može pronaći u [1].
U prostoru V^3 je kut između netrivijalnih vektora $\vec{x} = [\overrightarrow{OA}]$ i $\vec{y} = [\overrightarrow{OB}]$ definiran kao neorijentiran kut $\measuredangle OAB$ koji pripada segmentu $[0, \pi]$. Taj kut označavamo simbolom $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$. Sada se, uz ovako uveden pojam kuta, u V^3 definira skalarni produkt

$$\cdot : V^3 \times V^3 \to \mathbb{R}$$

na sljedeći način:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{cases} |\vec{a}|\ |\vec{b}| \cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}), & \text{ako je } \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}, \\ 0, & \text{ako je } \vec{a} = \vec{0} \text{ ili } \vec{b} = \vec{0}. \end{cases}$$

Teorem 2.3. *Skalarno množenje na V^3 ima sljedeća svojstva:*

1. $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0, \qquad \forall \vec{x} \in V^3$;
2. $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$;
3. $(\alpha \vec{x}) \cdot \vec{y} = \alpha(\vec{x} \cdot \vec{y}), \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V^3$;
4. $(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}, \qquad \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V^3$;
5. $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}, \qquad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V^3$.

Dokaz. Sve tvrdnje, osim 4., su očite. Za dokaz tvrdnje 4. vidi [3].

□

Primjer 2.1. *Za jedinične vektore pravokutnog koordinatnog sustava dobivamo sljedeću tablicu skalarnih produkata:*

$\cdot$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

Korištenjem tablice iz Primjera 2.1 dobivamo:

Teorem 2.4. *Neka su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dani svojim zapisom u kanonskoj bazi prostora V^3*

$$\begin{aligned}\vec{a} &= a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k},\\ \vec{b} &= b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}.\end{aligned}$$

Tada je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Primjer 2.2. *Neka su dani vektori $\vec{x} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{y} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$. Izračunajmo njihov skalarni produkt $\vec{x} \cdot \vec{y}$, njihove duljine $|\vec{x}|, |\vec{y}|$ i kut φ među njima.*

$$\begin{aligned}\vec{x} \cdot \vec{y} &= (3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}) \cdot (5\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k})\\ &= 3 \cdot 5 - 4 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) = 5\\ |\vec{x}| &= \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{26}\\ |\vec{y}| &= \sqrt{5^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{33}\\ \cos\varphi &= \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|\,|\vec{y}|} = \frac{5}{\sqrt{26}\,\sqrt{33}}\\ \varphi &\approx 80^\circ.\end{aligned}$$

Kako u apstraktnom vektorskom prostoru nemamo pojam kuta i modula kao takvog, definiramo skalarni produkt na način da svojstva skalarnog produkta iz Teorema 2.3 u V^3 proglasimo definicijskim uvjetima.

Definicija 2.1. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. **Skalarni produkt** na V je preslikavanje*

$$(\cdot|\cdot) : V \times V \to \mathbb{F}$$

koje ima sljedeća svojstva:

1. $(x|x) \geq 0, \qquad \forall x \in V;$

2. $(x|x) = 0 \iff x = \Theta;$

3. $(x_1 + x_2|y) = (x_1|y) + (x_2|y), \qquad \forall x_1, x_2, y \in V;$

4. $(\alpha x|y) = \alpha(x|y), \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}, \quad \forall x, y \in V;$

5. $(x|y) = \overline{(y|x)}, \quad \forall x, y \in V.$

Druge oznake za skalarni produkt dvaju vektora x, y su $\langle x, y \rangle$ ili (x, y).
Svojstvo 1. zovemo pozitivnost, a svojstvo 2. definitnost. Svojstva 3. i 4. redom zovemo aditivnost i homogenost u prvom argumentu. U realnim prostorima se svojstvo 5. naziva simetričnost, a u kompleksnim hermitska simetričnost.
Iz svojstava 3. i 4. slijedi da je skalarni produkt linearan u prvom argumentu.
Skalarni produkt je antilinearan u drugom argumentu:

$$(x|\alpha y + \beta y) = \overline{\alpha}(x|y) + \overline{\beta}(x|y),$$

za $\forall x, y \in V$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$.
U slučaju da je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ imamo linearnost skalarnog produkta i u drugom argumentu.

Primjer 2.3. *U $\mathbb{R}^n$ skalarni produkt definiran je s*

$$((x_1, \dots, x_n)|(y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Pokazat ćemo da ovaj skalarni produkt zadovoljava svojstva iz definicije skalarnog produkta:
1. pozitivnost

$$\begin{aligned}((x_1, \dots, x_n)|(x_1, \dots, x_n)) &= \sum_{i=1}^{n} x_i x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 \geq 0, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

2. definitnost

$$((x_1, \dots, x_n)|(x_1, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 = 0 \iff (x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

3. aditivnost u prvom argumentu

$\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n), (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ je:

$$\begin{aligned}((x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)|(z_1, \dots, z_n)) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) z_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i z_i \\ &= (x|z) + (y|z).\end{aligned}$$

4. homogenost u prvom argumentu

$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ je:

$$\begin{aligned}(\alpha(x_1, \dots, x_n)|(y_1, \dots, y_n)) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha x_i y_i \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \alpha((x_1, \dots, x_n)|(y_1, \dots, y_n)).\end{aligned}$$

5. *simetričnost*

$$\forall (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \text{ je:}$$

$$\begin{aligned} ((x_1, \ldots, x_n)|(y_1, \ldots, y_n)) &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = ((y_1, \ldots, y_n)|(x_1, \ldots, x_n)). \end{aligned}$$

Primjer 2.4. 1. *U* $\mathbb{C}^n$ *skalarni produkt definiran je s*

$$((x_1, \ldots, x_n)|(y_1, \ldots, y_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

2. *Za* $A = [a_{ij}] \in M_{mn}(\mathbb{C})$ *definira se* ***hermitski adjungirana matrica*** $A^* = [b_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{C})$ *s* $b_{ij} = \overline{a}_{ji}, \forall i, j$, *(gdje je* $\overline{a}_{ji}$ *kompleksno konjugiran broj broju* a_{ji}*).*
   U $M_n(\mathbb{F})$ *je skalarni produkt definiran s*

$$(A|B) = tr(B^* A),$$

   pri čemu je matrica B^* *hermitski adjungirana.*

Lako se može pokazati da i ovi primjeri zadovoljavaju svojstva definicije skalarnog produkta.

2.2 Ortogonalnost

Definicija 2.2. *Vektorski prostor na kojem je definiran skalarni produkt zove se* ***unitaran prostor****.*

Primjer 2.5. $\mathbb{R}^n$ *uz skalarni produkt definiran u Primjeru 2.3,* $\mathbb{C}^n$ *uz skalarni produkt iz Primjera 2.4 1. i* $M_n(\mathbb{F})$ *uz skalarni produkt iz Primjera 2.4 2. su unitarni prostori.*

Dimenzija unitarnog prostora je po definiciji jednaka dimenziji pripadnog vektorskog prostora.
Ako je unitaran prostor V nad poljem $\mathbb{C}$, govorimo o **kompleksnom unitarnom prostoru**, a ako je taj prostor nad poljem $\mathbb{R}$, nazivamo ga **realni unitarni prostor**.

Teorem 2.5. (**Cauchy-Schwarzova nejednakost**) *Neka je* V *unitaran prostor. Tada je*

$$|(x|y)|^2 \leq (x|x)(y|y)$$

za sve x, y *iz* V*. Jednakost vrijedi ako i samo ako su vektori* x *i* y *linearno zavisni.*

Dokaz. U slučaju da je $x = \Theta$ ili $y = \Theta$, tvrdnja je očita.
Neka su x i $y \in V$ netrivijalni vektori i $\lambda \in \mathbb{F}$ proizvoljan. Vrijedi:

$$0 \leq (x - \lambda y | x - \lambda y) = (x|x) - \lambda (y|x) - \overline{\lambda}(x|y) + \lambda \overline{\lambda}(y|y).$$

Uvrstimo sada
$$\lambda = \frac{(x|y)}{(y|y)},$$
to smijemo jer je po pretpostavci $y \neq \Theta$, pa je i $(y|y) \neq 0$,
$$0 \leq (x|x) - \frac{(x|y)}{(y|y)}(y|x) - \frac{(y|x)}{(y|y)}(x|y) + \frac{(x|y)}{(y|y)}\frac{(y|x)}{(y|y)}(y|y).$$
Sredimo izraz i pomnožimo ga s (y|y), dobivamo :
$$0 \leq (x|y)(y|y) - (x|y)(y|x),$$
tj.
$$|(x|y)|^2 = (x|y)(y|x) \leq (x|x)(y|y).$$
Ako je $y = \alpha x$ za neki $\alpha \in \mathbb{F}$, dobiva se jednakost. Ako vrijedi jednakost onda gore provedeni račun pokazuje da je $y = \lambda x$.

□

Definicija 2.3. *Neka je V unitaran prostor.* ***Norma*** *na V je funkcija*
$$|| \cdot || : V \to \mathbb{R}$$
definirana s
$$||x|| = \sqrt{(x|x)}.$$

Propozicija 1. *Za svaki izbor $x, y \in V$ vrijedi*
$$|(x|y)| \leq ||x|| \, ||y||$$
s tim da jednakost nastupa ako i samo ako su vektori linearno zavisni.

To slijedi iz Cauchy-Schwarzove nejednakosti i definicije norme, vidi [2].
Neka su $x, y \in V$ bilo koji vektori različiti od nulvektora. Iz Propozicije 1. slijedi da je
$$\frac{|(x|y)|}{||x|| \, ||y||} \leq 1.$$
Ako je V realan prostor, onda je $(x|y) = \pm|(x|y)|$, tj.
$$-1 \leq \frac{(x|y)}{||x|| \, ||y||} \leq 1.$$
Postoji, dakle, jedinstven φ iz intervala $[0, \pi]$ takav da je
$$\cos\varphi = \frac{(x|y)}{||x|| \, ||y||}.$$
Po definiciji onda kažemo da je φ kut između vektora x i y, $\varphi = \measuredangle(a, b)$. Na kraju, iz definicije kuta slijedi relacija
$$(a|b) = ||a|| \, ||b|| \cos\varphi,$$
u kojoj prepoznajemo formulu za skalarni produkt.

Propozicija 2. *Norma na unitarnom prostoru V ima sljedeća svojstva:*

1. $||x|| \geq 0, \qquad \forall x \in V;$

2. $||x|| = 0 \iff x = \Theta;$

3. $||\alpha x|| = |\alpha| \, ||x||, \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}, \quad \forall x \in V;$

4. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||, \quad \forall x, y \in V.$

Dokaz. Trebamo pokazati da preslikavanje $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ zadovoljava gore navedena svojstva.
1. Kako je $(\cdot|\cdot)$ skalarni produkt, imamo da je $(x|x) \geq 0$, za sve $x \in V$, što znači da je $||x|| = \sqrt{(x|x)}$ dobro definirano i nenegativno.
2. Iz skalarnog produkta, posebno, imamo

$$||x|| = 0 \iff (x|x) = 0 \iff x = \Theta.$$

3. Neka je $\alpha \in \mathbb{F}$ i $x \in V$. Sada je

$$||\alpha x|| = \sqrt{(\alpha x|\alpha x)} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}(x|x)} = |\alpha| \, ||x||.$$

4. Ovo svojstvo zovemo nejednakost trokuta, i dokazat ćemo ga koristeći Teorem 2.5:

$$\begin{aligned} ||x + y||^2 &= (x + y|x + y) = (x|x) + (x|y) + (y|x) + (y|y) \\ &= (x|x) + (y|y) + 2\mathrm{Re}(x|y) \leq (x|x) + (y|y) + 2|(x|y)| \\ &\leq (x|x) + (y|y) + 2||x|| \, ||y|| = (||x|| + ||y||)^2. \end{aligned}$$

□

Kad god imamo normu $||\cdot||$ na vektorskom prostoru V, možemo definirati preslikavanje

$$d : V \times V \to \mathbb{R}$$

formulom

$$d(x, y) = ||x - y||.$$

Ovo preslikavanje ima smisla shvaćati kao razdaljinsku funkciju ili **metriku** na V, tj. kao funkciju koja mjeri udaljenost vektora. Vrijedi, naime

1. $d(x, y) \geq 0, \quad \forall x, y \in V;$

2. $d(x, y) = 0 \iff x = y;$

3. $d(x, y) = d(y, x), \qquad \forall x, y \in V;$

4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad \forall x, y, z \in V.$

Definicija 2.4. *Neka je V unitaran prostor. Kaže se da je vektor $x \in V$* ***normiran*** *ako je $||x|| = 1$.*

Normirani vektori su vektori jedinične duljine. Često umjesto normiran kažemo jedinični vektor. Svakom vektoru $x \neq \Theta$ možemo pridružiti jednoznačno određen vektor

$$x_0 = \frac{1}{||x||}x,$$

u tom slučaju kažemo da smo vektor x normirali.

Definicija 2.5. *Neka je V unitaran prostor. Kaže se da su vektori x, y iz V međusobno* ***okomiti*** *ili* ***ortogonalni*** *ako je*

$$(x|y) = 0.$$

Konačan skup vektora $\{e_1, \dots, e_k\}$ je ortogonalan ako je $(e_i|e_j) = 0, \forall i \neq j$. Skup $\{e_1, \dots, e_k\}$ je ortonormiran ako je ortogonalan i ako je $||e_i|| = 1, \forall i = 1, \dots, k$.

Definicija 2.6. *Ortonormiran skup $\{e_1, \dots, e_n\}$ u unitarnom prostoru V je* ***ortonormirana baza*** *ako je taj skup ujedno i baza za V.*

Primjer 2.6. *Vektori $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, 0, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ međusobno su okomiti te je $||e_i|| = 1, \forall i = 1, \dots, n$, stoga je skup $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ortonormiran skup, a taj je skup ujedno i baza za $\mathbb{R}^n$ pa je to ortonormirana baza za $\mathbb{R}^n$.*

Propozicija 3. *Neka je $e = \{e_1, \dots, e_n\} \subset V$ ortonormirana baza, a $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $b = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ vektori iz V, dani svojim koordinatama u toj bazi. Onda je njihov skalarni produkt dan formulom*

$$(a|b) = \alpha_1\overline{\beta_1} + \dots \alpha_n\overline{\beta_n}.$$

Dokaz. Kako je $a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ i $b = \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k$, imamo

$$\begin{aligned}(a|b) &= (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i | \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_k}(e_i|e_k) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_k}\delta_{ik} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i},\end{aligned}$$

i tvrdnja je dokazana.

□

Teorem 2.6. (**Gram-Schmidt**) *Neka je $S = \{x_1, \dots, x_m\}, m \in \mathbb{N}$, uređeni linearno nezavisan skup vektora iz unitarnog prostora V. Taj se skup može ortonormirati, tj. zamijeniti novim skupom $T = \{e_1, \dots, e_m\} \subset V$ tako da vrijedi*

1. *T je ortonormirani skup, i*

2. *$[\{e_1, \dots, e_j\}] = [\{x_1, \dots, x_j\}], \quad \forall j = 1, \dots m$.*

Dokaz. Konstrukciju skupa $T = \{e_1, \dots, e_m\}$ provodimo induktivno.
Za bazu indukcije uzmemo:

$$e_1 = \frac{1}{||x_1||} x_1,$$

što je dobro definirano jer je $x_1 \neq \Theta$. Vektori x_1 i e_1 su kolinearni pa razapinju isti potprostor, time smo ispunili 1. i 2.
Pretpostavimo sada je da nađen ortonormiran skup $\{e_1, \dots, e_k\}$ takav da vrijedi

$$[\{e_1, \dots, e_k\}] = [\{x_1, \dots, x_k\}].$$

Sada ćemo konstruirati e_{k+1}. Uvedimo pomoćni vektor

$$b_{k+1} = x_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} (x_{k+1}|e_j) e_j. \tag{1}$$

Po pretpostavci indukcije imamo

$$x_{k+1} \notin [\{x_1, \dots, x_k\}] = [\{e_1, \dots, e_k\}],$$

pa je $\{x_{k+1}, e_1, \dots, e_k\}$ linearno nezavisan skup. Odatle slijedi da je $b_{k+1} \neq \Theta$ pa ga možemo normirati. Definiramo

$$e_{k+1} = \frac{b_{k+1}}{||b_{k+1}||}. \tag{2}$$

Tvrdimo da skup vektora

$$\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}\}$$

ima svojstva 1. i 2. Pokažimo da je taj skup ortonormiran. Skup vektora $\{e_1, \dots, e_k\}$ je već ortonormiran po pretpostavci indukcije, a vektor e_{k+1} smo normirali pa je $||e_{k+1}|| = 1$. Treba još pokazati da vrijedi

$$(e_{k+1}|e_i) = 0,$$

za svaki $i = 1, \dots, k$. Zbog (1) i (2) imamo:

$$\begin{aligned}
(e_{k+1}|e_i) &= \frac{1}{||b_{k+1}||}(b_{k+1}|e_i) = \frac{1}{||b_{k+1}||}(x_{k+1} - \sum_{j=1}^{k}(x_{k+1}|e_j)e_j|e_i) \\
&= \frac{1}{||b_{k+1}||}((x_{k+1}|e_i) - \sum_{j=1}^{k}(x_{k+1}|e_j)(e_j|e_i)) \\
&= \frac{1}{||b_{k+1}||}((x_{k+1}|e_i) - (x_{k+1}|e_i)) = 0,
\end{aligned}$$

i tvrdnja je dokazana. Nadalje, zbog pretpostavke indukcije i (1) i (2) je

$$e_1, \dots, e_k, e_{k+1} \in [\{x_1, \dots, x_k, x_{k+1}\}],$$

a jer su ti vektori i linearno nezavisni, tj. čine ortonormiran skup, to jest

$$[\{e_1, \dots, e_{k+1}\}] = [\{x_1, \dots, x_{k+1}\}],$$

kako se i tvrdilo. Indukcija završava s $k = m$ i teorem je dokazan.

$\square$

Korolar 1. *Svaki konačnodimenzionalan unitaran prostor ima ortonormiranu bazu.*

Dokaz. Uzmimo bazu $\{b_1, \ldots, b_n\}$ prostora V i primijenimo Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije. Kako dobiveni ortonormirani skup $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uz ostalo zadovoljava i

$$[\{e_1, \ldots, e_n\}] = [\{b_1, \ldots, b_n\}]$$

taj je skup i sustav izvodnica za V.

$\square$

Primjer 2.7. *Ortonormirat ćemo bazu* $\{(1,1,1),(2,0,2),(2,0,0)\}$ *za* $\mathbb{R}^3$*:*

$$\begin{aligned}
e_1' &= (1,1,1), \quad e_1 = \frac{e_1'}{||e_1'||} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}.\\
e_2' &= (2,0,2) - ((2,0,2)|e_1)e_1\\
&= (2,0,2) - ((2,0,2)|\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}) \cdot \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}\\
&= \frac{2}{3}(1,-2,1),\\
e_2 &= \frac{e_2'}{||e_2'||} = \frac{\frac{2}{3}(1,-2,1)}{\frac{2}{3}\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1).\\
e_3' &= (2,0,0) - ((2,0,0)|\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}) \cdot \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} - ((2,0,0)|\frac{(1,-2,1)}{\sqrt{6}}) \cdot \frac{(1,-2,1)}{\sqrt{6}}\\
&= (1,0,-1),\\
e_3 &= \frac{e_3'}{||e_3'||} = \frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Sada je skup $\{e_1, e_2, e_3\}$ *ortonormirana baza za* $\mathbb{R}^3$*.*

Definicija 2.7. *Neka je V unitaran prostor i M potprostor od V.* ***Ortogonalni komplement*** *potprostora M je*

$$M^{\perp} = \{x \in V : (x|v) = 0, \forall v \in M\}.$$

Propozicija 4. *Neka je V unitaran prostor i M potprostor od V. Ortogonalni komplement potprostora M je također potprostor od V.*

Dokaz. Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ i $x, y \in M^{\perp}$ i neka je $v \in M$ proizvoljan, imamo

$$(\alpha x + \beta y|v) = \alpha(x|v) + \beta(y|v) = 0,$$

dakle, $\alpha x + \beta y \in M^{\perp}$.

$\square$

Teorem 2.7. *Neka je $M \leq V$ bilo koji potprostor. Onda se prostor V može prikazati kao direktna suma potprostora M i njegovog ortogonalnog komplementa $M^{\perp}$*

$$V = M \oplus M^{\perp}.$$

Za dokaz vidi [2].

Primjer 2.8. *Odredit ćemo ortogonalnu bazu za $M^{\perp}$ u $\mathbb{R}^3$ ako je M razapet s $u = (1,1,1)$. Znamo da vrijedi* $\dim M + \dim M^{\perp} = \dim \mathbb{R}^3$*. Iz tog slijedi da je $M^{\perp}$ razapet s dva vektora, $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ i $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$. Postavljamo uvjet na v_1:*

$$(u|v_1) = 0,$$

iz ovog slijedi

$$x_1 + y_1 + z_1 = 0 \tag{3}$$

pa je

$$x_1 = -y_1 - z_1.$$

Za $y_1 = -1$ i $z_1 = 0$ dobivamo da je vektor $v_1 = (1, -1, 0)$. Izračunajmo v_2:

$$\begin{aligned} (u|v_2) &= 0 \\ (v_1|v_2) &= 0, \end{aligned}$$

iz ovog dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} x_2 + y_2 + z_2 &= 0 \\ x_2 - y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Za $x_2 = y_2 = 1$ dobivamo da je $z_2 = -2$ pa je $v_2 = (1, 1, -2)$. Konačno, ortogonalna baza za $M^{\perp}$ je skup $\{v_1, v_2\}$, tj. $\{(1, -1, 0), (1, 1, -2)\}$.

3 Operatori na unitarnom prostoru

Sada kad smo definirali pojmove skalarni produkt, norma, unitaran prostor, ortonormirana baza i ortogonalan komplement, možemo opisati operatore na unitarnom prostoru i dokazati neka njihova svojstva.

3.1 Unitarni operatori

Definicija 3.1. *Neka su V i W unitarni prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Neka je*

$$U : V \to W$$

linearni operator sa svojstvom da čuva skalarni produkt, tj. da vrijedi

$$(U(a)|U(b)) = (a|b)$$

za svaki a, $b \in V$. Onda kažemo da je U ***unitarni operator*** *iz prostora V u prostor W.*

Primjer 3.1. *Ako je $V \leq W$ potprostor, onda je inkluzija $I : V \to W$ unitarni operator. Specijalno, jedinični operator, identiteta, je unitarni operator.*

Primjer 3.2. *Neki primjeri unitarnih operatora u ravnini $\mathbb{R}^2$ su :*

- ***centralna simetrija****, tj. operator*

$$(x, y) \mapsto (-x, -y)$$

- ***zrcaljenje***
  - *na osi x:*

$$(x, y) \mapsto (x, -y)$$

  - *na osi y:*

$$(x, y) \mapsto (-x, y)$$

  - *na simetrali $x = y$:*

$$(x, y) \mapsto (y, x)$$

- ***rotacija za dani kut*** *φ, tj. operator*

$$(x, y) \mapsto (x \cos \varphi - y \sin \varphi, x \sin \varphi + y \cos \varphi)$$

To se lako generalizira na prostor $\mathbb{R}^n$.

Općenito, ako je V unitaran prostor, operator $C : V \to V$ dan s $C(a) = -a$ zovemo **centralna simetrija** te je C unitaran operator:

$$(C(a)|C(b)) = (-a| - b) = (a|b).$$

Primjer 3.3. *Neka je V n-dimenzionalan kompleksni unitarni prostor, a $\{e_1, \ldots, e_n\}$ jedna ortonormirana baza za V. Neka je*

$$U : \mathbb{C}^n \to V$$

operator dan s

$$U(a) = U(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n,$$

za svaki $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$. Onda je U, uz standardni skalarni produkt na $\mathbb{C}^n$, unitaran operator jer je očito $(U(a)|U(b)) = (a|b)$, $\forall a, b \in \mathbb{C}^n$.

3.1.1 Svojstva unitarnog operatora

U prethodnom odlomku definirali smo pojam unitarnog operatora. Sada ćemo navesti i dokazati osnovna svojstva unitarnih operatora. Za početak, prisjetimo se, u Definiciji 3.1 izrekom se zahtijeva da unitaran operator bude linearan. Međutim, pokazuje se da je uvjet čuvanja skalarnog produkta toliko jak, da povlači linearnost pa se taj zahtjev može u definiciji izostaviti. Sljedeći teorem govori o tome.

Teorem 3.1. *Neka je $F : V \to W$ operator sa svojstvom da je*

$$(F(a)|F(b)) = (a|b),$$

za sve $a, b \in V$. Onda je operator F nužno linearan, dakle i unitaran.

Dokaz. Neka su $a, b \in V$ bilo koji vektori, a $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ skalari. Treba pokazati da vrijedi

$$F(\alpha a + \beta b) = \alpha F(a) + \beta F(b). \tag{4}$$

Definiramo vektor $c \in W$ s

$$c = F(\alpha a + \beta b) - \alpha F(a) - \beta F(b).$$

Pokazat ćemo da je $c = \Theta_W$, čime će jednakost (4) biti dokazana. Neka je $L = [\text{Im } F] < W$ potprostor od V razapet slikom Im F. Očito je $c \in L$.
Neka je $L^\perp = [\text{Im } F]^\perp$ ortogonalni komplement od L. Pokažimo da je također $c \in L^\perp$.
Neka je $y \in \text{Im } F$ bilo koji vektor. Onda postoji $x \in V$ takav da je $F(x) = y$. Sada redom, uzimajući u obzir da F čuva skalarni produkt, imamo

$$\begin{aligned}
(c|y) &= (F(\alpha a + \beta b) - \alpha F(a) - \beta F(b)|F(x)) \\
&= (F(\alpha a + \beta b)|F(x)) - \alpha(F(a)|F(x)) - \beta(F(b)|F(x)) \\
&= (\alpha a + \beta b|x) - \alpha(a|x) - \beta(b|x) \\
&= \alpha(a|x) + \beta(b|x) - \alpha(a|x) - \beta(b|x) = 0.
\end{aligned}$$

Iz ovoga slijedi da je $[\{c\}]$ ortogonalan na skup Im F, pa onda očito i na potprostor $L = [\text{Im } F]$, koji je njime generiran. Dakle, zaista je $c \in L^\perp$. Kako je, međutim $L \cap L^\perp = \{\Theta_W\}$ (vidi Tm. 2.7), imamo zaključak da je $c = \Theta_W$ i tvrdnja je dokazana. $\square$

Propozicija 5. *Kompozicija unitarnih operatora je unitaran operator. Naprotiv, zbroj unitarnih operatora i produkt takvog operatora sa skalarom ne mora biti unitaran operator.*

Dokaz. Neka su $T : V \to W$ i $U : Y \to V$ unitarni operatori. Onda imamo

$$((T \circ U)(a)|(T \circ U)(b)) = (T(U(a))|T(U(b))) = (U(a)|U(b)) = (a|b),$$

za svaki $a, b \in Y$, pa kompozicija $T \circ U$ čuva skalarni pordukt, odakle slijedi da je to unitarni operator po Tm. 3.1.

□

Primjer 3.4. *Neka su dana dva unitarna operatora, operator centralne simetrije*

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x, y) = (-x, -y),$$

i operator zrcaljenja na simetrali $x = y$,

$$U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad U(x, y) = (y, x).$$

- *kompozicija unitarnih operatora:*
  Pokažimo da je njihova kompozicija $X = T \circ U$ unitaran operator.
  Za $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ definiramo:

  $$X(x, y) = (T \circ U)(x, y) = T(U(x, y)) = T(y, x) = (-y, -x).$$

  Sada je

  $$\begin{aligned}(X(x_1, y_1)|X(x_2, y_2)) &= ((-y_1, -x_1)|(-y_2, -x_2)) \\ &= y_1 y_2 + x_1 x_2 = ((x_1, y_1)|(x_2, y_2)),\end{aligned}$$

  $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, *slijedi da je X unitaran.*

- *zbroj unitarnih operatora:*
  Pokažimo da njihov zbroj nije unitaran operator. Za $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

  $$\begin{aligned}Y(x, y) = (T + U)(x, y) &= T(x, y) + U(x, y) \\ &= (-x, -y) + (y, x) \\ &= (-x + y, -y + x).\end{aligned}$$

  Za proizvoljne $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, računamo:

  $$\begin{aligned}(Y(x_1, y_1)|Y(x_2, y_2)) &= ((-x_1 + y_1, -y_1 + x_1)|(-x_2 + y_2, -y_2 + x_2)) \\ &= (-x_1 + y_1)(-x_2 + y_2) + (-y_1 + x_1)(-y_2 + x_2) \\ &= 2x_1 x_2 + 2y_1 y_2 - 2x_1 y_2 - 2y_1 x_2 \\ &\neq y_1 y_2 + x_1 x_2 = ((x_1, y_1)|(x_2, y_2)).\end{aligned}$$

- *produkt unitarnog operatora sa skalarom*
  Pokažimo da produkt skalara s unitarnim operatorom zrcaljenja nije unitaran operator. Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ i $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, definiramo
  $$Z(x, y) = \alpha \cdot U(x, y) = \alpha(y, x).$$
  Provjerimo vrijedi li uvjet definicije unitarnog operatora $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$:
  $$\begin{aligned}(Z(x_1, y_1)|Z(x_2, y_2)) &= (\alpha(y_1, x_1)|\alpha(y_2, x_2)) \\ &= \alpha^2((y_1, x_1)|(y_2, x_2)) \neq ((x_1, y_1)|(x_2, y_2)).\end{aligned}$$

Pokazali smo protuprimjerima da zbroj unitarnih operatora i produkt unitarnog operatora sa skalarom ne moraju biti unitarni operatori.

Propozicija 6. *Unitarni operator čuva normu, tj. ako je operator $U : V \to W$ unitaran, onda vrijedi*
$$||U(a)|| = ||a||,$$
za svaki $a \in V$. Posebno, dakle, unitarni operator čuva udaljenost vektora, a u slučaju realnih prostora i kut između vektora.

Dokaz. Za $a \in V$ je
$$||U(a)|| = \sqrt{(U(a)|U(a))} = \sqrt{(a|a)} = ||a||$$
pa je prvi dio tvrdnje dokazan. Nadalje, za $a, b \in V$ je
$$d(U(a), U(b)) = ||U(a) - U(b)|| = ||U(a - b)|| = ||a - b|| = d(a, b).$$
Konačno,
$$\cos(U(a), U(b)) = \frac{(U(a)|U(b))}{||U(a)||\ ||U(b)||} = \frac{(a|b)}{||a||\ ||b||} = \cos(a, b),$$
pa je $\measuredangle(U(a), U(b)) = \measuredangle(a, b)$.

□

Propozicija 7. *Unitarni operator je uvijek injektivan.*

Dokaz. Neka je $U : V \to W$ unitarni operator, a $J = \text{Ker } U$ njegova jezgra. Neka je $a \in J$ bilo koji vektor. Kako je $U(a) = \Theta_W$, zbog Prop. 6 imamo
$$||a|| = ||U(a)|| = ||\Theta_W|| = 0,$$
dakle, $a = \Theta_V$, tj. Ker $U = \{\Theta_V\}$, pa je U injekcija.

□

Primjer 3.5. *Neka je dan operator*
$$A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \quad A(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y, x - y)$$

Pokažimo da je on unitaran. Neka su $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{C}^2$*, tada je:*

$$\begin{aligned}
(A(x_1,y_1)|A(x_2,y_2)) &= (\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+y_1, x_1-y_2)|\frac{1}{\sqrt{2}}(x_2+y_2, x_2-y_2)) \\
&= \frac{1}{2}(x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2 + x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + y_1y_2) \\
&= x_1x_2 + y_1y_2 = ((x_1,y_1)|(x_2,y_2)).
\end{aligned}$$

Provjerimo je li injektivan:

$$\begin{aligned}
A(x,y) &= x \cdot A(1,0) + y \cdot A(0,1) \\
&= x(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) + y(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \\
&= (\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y, \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y) = (0,0).
\end{aligned}$$

Pa računamo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y = 0 \\
\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y = 0.
\end{aligned}$$

Iz čega slijedi da je $x = y = 0$*, tj.* $\mathrm{Ker}\ A = \{(0,0)\}$*, operator* A *je injektivan.*

Neka je $U : V \to W$ unitarni operator, koji je surjektivan, dakle bijektivan zbog Prop. 7. Onda kažemo da je U **izomorfizam unitarnih prostora**. Za unitarne prostore V i W nad istim poljem kažemo da su **unitarno izomorfni**, i pišemo

$$V \underset{U}{\cong} W$$

ako postoji bar jedan izomorfizam unitarnih prostora s V u W. Lako se vidi da je $\underset{U}{\cong}$ relacija ekvivalencije, koja, dakle, vrši klasifikaciju unitarnih prostora nad istim poljem. Pojedine klase su karakterizirane dimenzijom prostora, jer vrijedi

Teorem 3.2. *Unitarni prostori* V *i* W *nad istim poljem* $\mathbb{F}$ *su unitarno izomorfni ako i samo ako imaju istu dimenziju, tj.*

$$\dim V = \dim W.$$

Dokaz. Ako je $V \underset{U}{\cong} W$, prostori V i W su izomorfni i kao linearni prostori, imaju istu dimenziju. Obratno, pretpostavimo da je dim V= dim W= n, i neka su $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $f = \{f_1, \ldots, f_n\}$ ortonormirane baze za prostore V i W redom. Definirajmo preslikvanje

$$U : V \to W$$

na način da je $U(e_i) = f_i$, za svaki $i = 1, \ldots, n$ i proširujući linearno. Sada je U izomorfizam linearnih prostora. Treba samo provjeriti da čuva skalarni produkt. Neka su $a, b \in V$ bilo koji vektori,

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \quad b = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i,$$

Onda je,

$$U(a) = U(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i U(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i,$$

i slično

$$U(b) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i,$$

pa je zbog Prop. 3,

$$(U(a)|U(b)) = \alpha_1 \overline{\beta_1} + \cdots + \alpha_n \overline{\beta_n} = (a|b)$$

i teorem je dokazan.

□

3.1.2 Karakterizacije unitarnog operatora

Iskazat ćemo i dokazati nekoliko nužnih i dovoljnih uvjeta za prepoznavanje unitarnih operatora. Pri tome ćemo koristiti neke tvrdnje koje smo dosad naveli. Svaka od sljedećih tvrdnji može poslužiti kao (alternativna) definicija unitarnog operatora.

Teorem 3.3. *Linearni operator $F : V \to W$ je unitaran ako i samo ako čuva normu.*

Dokaz. Nužnost smo dokazali u Prop.6. Trebamo pokazati dovoljnost. Pretpostavimo da je $||F(x)|| = ||x||$, za svaki $x \in V$. Treba pokazati da za bilo koje $a, b \in V$ vrijedi $(F(a)|F(b)) = (a|b)$.
Za vektor $a + \lambda b$ imamo

$$||F(a + \lambda b)|| = ||a + \lambda b||,$$

kvadriranjem slijedi,

$$(F(a + \lambda b)|F(a + \lambda b)) = (a + \lambda b|a + \lambda b),$$

a zbog linearnosti od F je

$$(F(a) + \lambda F(b)|F(a) + \lambda F(b)) = (a + \lambda b|a + \lambda b),$$

i odatle množenjem,

$$(F(a)|F(a)) + \lambda(F(b)|F(a)) + \overline{\lambda}(F(a)|F(b)) + \lambda\overline{\lambda}(F(b)|F(b)) = \\ (a|a) + \lambda(b|a) + \overline{\lambda}(a|b) + \lambda\overline{\lambda}(b|b).$$

Budući da F čuva normu, ta se relacija reducira na

$$\overline{\lambda}(F(a)|F(b)) + \lambda\overline{(F(a)|F(b))} = \overline{\lambda}(a|b) + \lambda\overline{(a|b)}. \tag{5}$$

Za $\lambda = 1$ iz (5) slijedi

$$(F(a)|F(b)) + \overline{(F(a)|F(b))} = (a|b) + \overline{(a|b)},$$

dakle

$$\mathrm{Re}[(F(a)|F(b))] = \mathrm{Re}[(a|b)], \tag{6}$$

gdje je sa Re z označen realni dio kompelsknog broja z. S druge strane, ako uzmemo da je $\lambda = i$, iz (5) imamo

$$-i(F(a)|F(b)) + i\overline{(F(a)|F(b))} = -i(a|b) + i\overline{(a|b)},$$

odnosno

$$(F(a)|F(b)) - \overline{(F(a)|F(b))} = (a|b) - \overline{(a|b)},$$

odakle slijedi da je

$$\mathrm{Im}[(F(a)|F(b))] = \mathrm{Im}[(a|b)], \tag{7}$$

gdje je sa Im z označen realni dio kompelsknog broja z. Iz (6) i (7) zaključujemo da je

$$(F(a)|F(b)) = (a|b),$$

i tvrdnja je dokazana.

□

Teorem 3.4. *Linearni operator $F : V \to W$ je unitaran ako i samo ako svaki jedinični vektor iz V preslikava u jedinični vektor iz W.*

Dokaz. Ako je F unitaran, prema Tm. 3.1 čuva normu, prema tome jedinični vektor prevodi u jedinični, pa je nužnost očigledna.
Trebamo dokazati dovoljnost. Neka je $a \in V$ bilo koji vektor. Ako je $a = \Theta_V$, imamo i $F(a) = \Theta_W$, pa je $||F(a)|| = 0 = ||a||$. Za $a \neq \Theta_V$ možemo pisati $a = ||a||a_0$, gdje je a_0 jedinični vektor, dakle $||a_0|| = 1$. No, po pretpostavci je onda $||F(a_0)|| = 1$, pa imamo redom

$$||F(a)|| = ||F(||a||a_0)|| = ||a||\,||F(a_0)|| = ||a||.$$

Operator F, dakle, čuva normu, pa je unitaran po Tm. 3.1.

□

Teorem 3.5. *Linearni operator $F : V \to W$ je unitaran ako i samo ako bar jednu ortonormiranu bazu prostora V preslikava u ortonormirani skup vektora iz prostora W.*

Dokaz. Nužnost je trivijalna: Unitarni operator svaki ortonormirani skup vektora preslikava u ortonormirani skup (jer čuva skalarni produkt). Dokažimo dovoljnost. Neka je $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormirana baza za V, sa svojstvom da je

$$\{F(e_1), \dots, F(e_n)\}$$

ortonormirani skup u W. To znači da vrijedi

$$(F(e_i)|F(e_k)) = \delta_{ik} = (e_i|e_k).$$

Neka su $a, b \in V$ bilo koji vektori,

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \qquad b = \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k.$$

Onda redom imamo, koristeći Propoziciju 3.

$$
\begin{aligned}
(F(a)|F(b)) &= (F(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i)|F(\sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k)) \\
&= (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i F(e_i)| \sum_{k=1}^{n} \beta_k F(e_k)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_k} (F(e_i)|F(e_k)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_k} \delta_{ik} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_k} = (a|b),
\end{aligned}
$$

pa zaključujemo da je F unitaran.

□

Napomena 1. *Iz Teorema 3.5. vidimo da je rang unitarnog operatora jednak dimenziji polaznog prostora V, pa je zbog tog njegova jezgra trivijalna* ($\dim V = r + d$)*, tj. unitarni operator je injektivan kako smo već ranije pokazali. Specijalno, ako je* $\dim V = \dim W$*, unitarni je operator nužno bijektivan, odnosno regularan, dakle izomorfizam unitarnih prostora.*

Primjer 3.6. *Operator koji prevodi bazu $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ prostora V^3 u bazu $\{\vec{i}, \vec{j}, -\vec{k}\}$ dan je s*

$$A : V^3 \to V^3, \quad A(x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}) = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} - x_3\vec{k},$$

iz Teorema 3.5. slijedi da je taj operator unitaran.

Definicija 3.2. *Kaže se da je kompleksna kvadratna matrica A unitarna ako vrijedi $AA^* = A^*A = I$. Realna kvadratna matrica A je ortogonalna ako vrijedi $AA^T = A^TA = I$.*

Teorem 3.6. *Linearni operator $F : V \to V$ je unitaran ako i samo ako je u svakoj ortonormiranoj bazi prostora V reprezentiran unitarnom matricom.*

Za dokaz vidi [2].

Primjer 3.7. *Matrični prikaz unitarnog operatora iz Primjera 3.5*

$$A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \quad A(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y, x - y)$$

u kanonskoj bazi unitarna je matrica:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

3.1.3 Dijagonalizacija unitarnog operatora

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $A \in L(V)$. Kažemo da je potprostor $W \leq V$ **invarijantan** s obzirom na operator A ili A-**invarijantan** ako

$$\forall w \in W \implies Aw \in W,$$

odnosno, ako je $AW \subseteq W$. Tada, restrikcija $A_0 = A|_W$ definira linearan operator na W, tj. $A_0 \in L(W)$.
V i $\{\Theta\}$ su uvijek invarijantni potprostori za $A \in L(V)$. Još jedan primjer dobivamo ako uzmemo svojstvenu vrijednost $\lambda \in \sigma_A$. Tada je svojstveni potprostor

$$V_\lambda = \{v \in V : Av = \lambda v\} \tag{8}$$

A-invarijantan i $A|_{V_\lambda}$ je skalarni operator, λI, gdje je $I = I_{V_\lambda}$ identiteta na V_λ.

Lema 1. *Neka je U unitaran operator na V. Ako je W invarijantan za U, onda je i $W^\perp$ invarijantan za U. Nadalje, inducirani operator $U|_W : W \to W$ je unitaran operator na W.*

Dokaz. Unitaran operator koji preslikava unitaran prostor u samog sebe je regularan operator (vidi Napomenu 1.), pa dim UW = dim W i $UW \subseteq W$ povlači $UW = W$. Onda $x \perp W$ i unitarnost od U povlači $Ux \perp UW = W$.
Inducirani operator je unitaran jer je $(Ux|Uy) = (x|y)$ za $x, y \in W$.

□

Teorem 3.7. *Neka je U unitaran operator na kompleksnom konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru V. Tada postoji ortonormirana baza od V koja se sastoji od svojstvenih vektora od U. Svojstvene vrijednosti od U su kompleksni brojevi apsolutne vrijednosti 1. Drugim riječima, postoji ortonormirana baza e od V u kojoj je matrica $U(e)$ dijagonalna s elementima na dijagonali oblika $e^{i\varphi}, \varphi \in \mathbb{R}$.*

Dokaz. Teorem dokazujemo indukcijom po dimenziji prostora. Budući da je V kompleksan, postoji svojstveni vektor x takav da je $Ux = \lambda x$. Sada je

$$(x|x) = (Ux|Ux) = (\lambda x|\lambda x) = \lambda\overline{\lambda}(x,x) = |\lambda|^2(x|x),$$

a $(x|x) \neq 0$, slijedi $|\lambda|^2 = 1$. Stavimo

$$\lambda_1 = \lambda, \quad x_1 = \frac{x}{||x||}, \quad L = [x_1],$$

Sada je L U-invarijantan potprostor od U (vidi (8)). Neka je $M = L^\perp$, očito je
dim M = dim $V - 1$, M je U-invarijantan, a inducirani operator $U|_M$ je unitaran (Lema 1).
Po pretpostavci indukcije za $U|_M$ postoji ortonormirana baza svojstvenih vekotra

$$U|_M f_j = Uf_j = \lambda_j f_j, \quad j = 2, \ldots, n.$$

□

Propozicija 8. *Svojstveni vektori unitarnog operatora koji odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima međusobno su ortogonalni.*

Dokaz. Neka je U unitaran operator i neka su λ i μ međusobno različite svojstvene vrijednosti tog operatora, neka su $a, b \in V, a, b \neq \Theta$, pripadni svojstveni vektori.
Iz $U(a) = \lambda a, U(b) = \mu b$ slijedi:

$$(a|b) = (U(a)|U(b)) = (\lambda a|\mu b) = \lambda\overline{\mu}(a|b).$$

Kad bi bilo $(a|b) \neq 0$, slijedilo bi da je $\lambda\overline{\mu} = 1$, a iz tog je $\lambda(\overline{\mu}\mu) = \lambda|\mu|^2 = \mu$, odnosno $\lambda = \mu$ jer su svojstvene vrijednosti unitarnog operatora po apsolutnoj vrijednosti jednake 1, te smo došli do kontradikcije s pretpostavkom.

□

Primjer 3.8. *Dijagonalizirat ćemo unitaran operator $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, dan matričnim prikazom u kanonskoj bazi:*

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pronađimo svojstvene vrijednosti operatora A.

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda \end{vmatrix} = \cdots = \lambda^2 - 1$$

Iz ovog su svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 1$. Za svojstveni vektor svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = -1$ računamo:

$$(A - \lambda_1 I)v_1 = \Theta$$
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Iz toga je:

$$v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} + 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}(-\sqrt{2} + 1, 1)$$

Svojstveni vektor svojstvene vrijednosti $\lambda_2 = 1$ je $v_2 = (\sqrt{2} + 1, 1)$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}(\sqrt{2} + 1, 1)$ Sada stavimo da je $S = [f_1, f_2]$, tj. S je matrica čiji su stupci ortonormirani svojstveni vektori operatora A. Konačno je

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.2 Adjungirani, hermitski i antihermitski operatori

Lema 2. *Neka su $F, G : V \to V$ linearni operatori sa svojstvom da je*

1. $(F(a)|b) = (G(a)|b)$ *ili*
2. $(a|F(b)) = (a|G(b))$,

za svaki izbor $a, b \in V$. Onda je $F = G$.

Dokaz. Dokazat ćemo 1. Iz pretpostavke imamo

$$(F(a)|b) - (G(a)|b) = (F(a) - G(a)|b) = ((F - G)(a)|b) = 0,$$

za sve $a, b \in V$. Iz te relacije slijedi

$$F(a) - G(a) \perp b,$$

za svaki $b \in V$, pa je $F(a) - G(a) = \Theta$ iz tog slijedi $F(a) = G(a)$, za svaki $a \in V$. Odatle slijedi da je $F = G$.

□

Za linearni operator $F : V \to V$ definiramo operator $G : V \to V$ zahtijevajući:

$$(G(a)|b) = (a|F(b)), \tag{9}$$

za sve $a, b \in V$. Definicijski uvjet (9) možemo pisati i kao

$$(G(b)|a) = (b|F(a)),$$

odakle odmah slijedi i

$$(a|G(b)) = (F(a)|b), \tag{10}$$

za svaki izbor $a, b \in V$ pa smo mogli G alternativno definirati i relacijom (10).

Propozicija 9. *Ako operator G iz* (9) *i* (10) *postoji, on je linearan.*

Dokaz. Iz (9) imamo redom

$$\begin{aligned}(G(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)|b) &= (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2|F(b)) \\ &= \alpha_1(a_1|F(b)) + \alpha_2(a_2|F(b)) \\ &= \alpha_1(G(a_1)|b) + \alpha_2(G(a_2)|b) \\ &= (\alpha_1 G(a_1) + \alpha_2 G(a_2)|b).\end{aligned}$$

Kako je to istina za svaki $b \in V$, imamo

$$G(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) = \alpha_1 G(a_1) + \alpha_2 G(a_2),$$

tj. operator G je linearan.

□

Propozicija 10. *Za svaki linearni operator $F : V \to V$ uvijek postoji jednoznačno određen operator $G : V \to V$ sa svojstvom (9).*

Za dokaz vidjeti [2].
Jedinstveni linearni operator G pridružen operatoru F na opisani način, nazivamo **hermitski konjugiran, hermitski adjungiran** ili **adjungiranim operatorom** od F i označavamo ga standardno s

$$G = F^*$$

Ako je V realni prostor, F^* se često naziva i **transponirani** operator od F.

Teorem 3.8. *Neka je A matrica linearnog operatora F u nekoj ortonormiranoj bazi. Onda njemu adjungirani operator F^* ima u toj istoj bazi matricu A^* koja je adjunigrana matrici A.*

Za dokaz vidi [2].

Primjer 3.9. *Za zadane operatore odredit ćemo njihove adjungirane operatore:*
1. $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) = (x + 2y - 2z, 2x - y, 3z)$
Matrični prikaz operatora F u kanonskoj bazi je:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Hermitski adjungiranu matricu F^* matrice F dobivamo transponirajući matricu F :

$$F^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

iz te matrice čitamo adjungirani operator $F^* : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ operatora F:

$$F^*(x, y, z) = (x + 2y, 2x - y, -2x + 3z).$$

2. $G : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, \quad G(x, y, z) = (2x + (-1 + 2i)y, 2y - (2 + i)z, 4ix - 3y + 2iz)$
Slično, kao i u prethodnom primjeru, gledamo matrični prikaz operatora G u kanonskoj bazi:

$$G = \begin{bmatrix} 2 & -1 + 2i & 0 \\ 0 & 2 & -2 - i \\ 4i & -3 & 2i \end{bmatrix}.$$

Sada je adjungirana matrica G^* jednaka

$$G^* = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4i \\ -1 - 2i & 2 & -3 \\ 0 & -2 + i & -2i \end{bmatrix},$$

iz toga slijedi da je adjungirani operator $G^* : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ operatora G:

$$G^*(x, y, z) = (2x - 4iz, (-1 - 2i)x + 2y - 3z, (-2 + i)y - 2iz).$$

Navest ćemo svojstva adjungiranog operatora u sljedećem teoremu:

Teorem 3.9. *Neka su $F, G : V \to V$ bilo koji linearni operatori. Onda je*

1. $F^* = G^*$ *ako i samo ako je* $F = G$;
2. $(F^*)^* = F$;
3. $(F + G)^* = F^* + G^*$;
4. $(\alpha F)^* = \overline{\alpha} F^*$;
5. $(F \circ G) = G^* \circ F^*$.

Za dokaz vidjeti [2].

Korolar 2. *Operacija adjungiranja operatora je simetrična, tj.* $F^* = G$ *ako i samo ako je* $G^* = F$.

Dokaz. Iz Teorema 3.9 vidimo da $F^* = G$ povlači $G^* = (F^*)^* = F$.

□

Teorem 3.10. *Linearni operator $F : V \to V$ je unitaran ako i samo ako vrijedi*

$$F \circ F^* = F^* \circ F = E,$$

gdje je $E : V \to V$ jedinični operator.

Dokaz. Ako je F unitaran, imamo

$$(a|b) = (F(a)|F(b)) = (a|(F^* \circ F)(b)),$$

za sve $a, b \in V$, pa je po Lemi 2, $F^* \circ F = E$. Slično je i $F \circ F^* = E$.
Obratno, ako za F vrijedi $F \circ F^* = F^* \circ F = E$, zaključujemo da je

$$(F(a)|F(b)) = (a|(F^* \circ F)(b)) = (a|E(b)) = (a|b),$$

tj. F je unitaran po definiciji.

□

Primjer 3.10. *Pomoću gore navedene karakterizacije provjerit ćemo je li operator rotacije za dani kut φ,*

$$U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad U(x, y) = (x \cos\varphi - y \sin\varphi, x \sin\varphi + y \cos\varphi)$$

unitaran operator. Matrični prikazi operatora U i U^* u kanonskoj bazi su:

$$U = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix},$$

$$U^* = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Sada je

$$U \circ U^* = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi + \sin^2\varphi & \cos\varphi\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi \\ \sin\varphi\cos\varphi - \cos\varphi\sin\varphi & \cos^2\varphi + \sin^2\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Slično i za $U^* \circ U$ pa smo pokazali da je operator rotacije unitaran.

Definicija 3.3. *Neka je V unitaran prostor i $H : V \to V$. Kažemo da je operator H* ***hermitski*** *ako vrijedi*

$$H^* = H.$$

Za operator $K : V \to V$ kažemo da je ***antihermitski*** *ako vrijedi*

$$K^* = -K.$$

Definicija 3.4. *Kaže se da je kvadratna matrica $A \in M_n$ hermitska ako vrijedi $A^* = A$, za kvadratnu matricu $B \in M_n$ kažemo da je anithermitska ako vrijedi $B^* = -B$.*

Propozicija 11. *Linearni operator $F : V \to V$ je hermitski (antihermitski) ako i samo ako je njegov matrični zapis u ortonormiranoj bazi hermitska (antihermitska) matrica.*

Za dokaz vidi [2].

Primjer 3.11.

1. *Jedinični i nuloperator su hermitski operatori.*
2. *Linearan operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ zadan svojim prikazom u kanonskoj bazi*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

   je hermitski operator.
3. *Linearan operator $B \in L(\mathbb{C}^2)$ zadan svojim prikazom u kanonskoj bazi*

$$B = \begin{bmatrix} i & -1-i \\ 1-i & 0 \end{bmatrix}$$

   je antihermitski operator.

Ako je prostor V realan, za hermitski operator kažemo da je **simetričan**, a za antihermitski **antisimetričan**. Primjetimo, hermitski operator će biti unitaran onda i samo onda kada je **involutoran**, $H^2 = E$. Hermitski operator karakteriziran je svojstvom

$$(H(a)|b) = (a|H(b)),$$

a antihermitski s

$$(K(a)|b) = -(a|K(b)),$$

za sve $a, b \in V$, i ta svojstva često služe za definiciju.

Propozicija 12. *Svojstvene vrijednosti hermitskog operatora su uvijek realni brojevi. Svojstvene vrijednosti antihermitskog operatora su čisto imaginarni brojevi (uključujući i* 0*).*

Dokaz. Neka je λ svojstvena vrijednost hermitskog operatora $F, F(a) = \lambda a, a \neq \Theta$. Onda je

$$(F(a)|a) = (\lambda a|a) = \lambda(a|a),$$

a u drugu ruku

$$(a|F(a)) = (a|\lambda a) = \overline{\lambda}(a|a)$$

pa zbog $(a|a) \neq 0$, slijedi $\overline{\lambda} = \lambda$, tj. λ je realan broj. Analogno bi u slučaju antihermitskog operatora zaključili da je $\overline{\lambda} = -\lambda$, tj. da je λ čisto imaginaran broj.

□

Primjer 3.12. *Izračunajmo svojstvene vrijednosti operatora $B \in L(\mathbb{C}^2)$ iz Primjera 3.11.3.*

$$\begin{aligned} k_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) &= \begin{vmatrix} i\text{–}\lambda & \text{-}1\text{–}i \\ 1\text{–}i & \text{-}\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-\lambda(i - \lambda)) - (1 - i)(-1 - i) \\ &= \lambda^2 - \lambda i + 2. \end{aligned}$$

Iz karakterističnog polinoma operatora B dobivamo da su svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 2i$ i $\lambda_2 = -i$.

3.3 Normalni operatori

Definicija 3.5. *Neka je V unitaran prostor i $F : V \to V$ linearan operator. Kažemo da je taj operator* ***normalan*** *ako komutira sa svojim adjungiranim operatorom, tj. ako vrijedi*

$$F \circ F^* = F^* \circ F.$$

Kako je unitarni operator karakteriziran svojstvom da je $F \circ F^* = F^* \circ F = E$, (Teorem 3.10), a hermitski i antihermitski operator definirani relacijama $F^* = F$ i $F^* = -F$, vidimo da su ti operatori specijalni slučajevi normalnih operatora.
Jedno od osnovnih svojstava normalnih operatora je:

Propozicija 13. *Linearni operator $F : V \to V$ je normalan ako i samo ako je*

$$(F^*(a)|F^*(b)) = (F(a)|F(b)), \tag{11}$$

za sve $a, b \in V$.

Dokaz. Ako je F normalan, imamo

$$(F^*(a)|F^*(b)) = ((F \circ F^*)(a)|b) = ((F^* \circ F)(a)|b) = (F(a)|F(b)).$$

Obratno, ako vrijedi (11) imamo

$$(a|(F \circ F^*)(b)) = (F^*(a)|F^*(b)) = (F(a)|F(b)) = (a|(F^* \circ F)(b)),$$

pa je prema Lemi 2, $F \circ F^* = F^* \circ F$, tj. operator je normalan.

□

Primjer 3.13. *Kao jednostavan primjer može se uzeti bilo koji hermitski operator $H : V \to V$ jer za njega vrijedi $H^* = H$ pa je očito i $(H^*(a)|H^*(b)) = (H(a)|H(b)), \forall a, b \in V$.*

Pokazali smo da se unitarni operatori mogu dijagonalizirati na konačnodimenzionalnom kompleksnom unitarnom prostoru, no dijagonalizirati se može i šira klasa operatora na unitarnom prostoru - normalni operatori. O tom nam govori sljedeći teorem:

Teorem 3.11. *Neka je V konačnodimenzionalan kompleksan unitaran prostor i neka je $A \in L(V)$. Sljedeća dva svojstva su ekvivalentna:*

1. *Operator A je normalan.*
2. *Postoji ortonormirana baza e takva da je matrica $A(e)$ dijagonalna.*

Dokaz je sličan dokazu dijagonalizacije unitarnog operatora, (vidi [5]).

Literatura

[1] K. Horvatić, Linearna algebra, Golden marketing, 2004.

[2] K. Horvatić, Linearna Algebra, III. dio, Matematički odjel PMF-a, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1996.

[3] D. Bakić, Linearna Algebra, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[4] N. Truhar, Numerička linearna algebra, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2010.

[5] H. Kraljević, Vektorski prostori, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2008.

[6] G. Muić, M. Primc, Vektorski prostori, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~gmuic/predavanja/vp.pdf`