Nejednakosti za Gama i Beta funkcije

Bastijan, Tea

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Tea Bastijan

Nejednakosti za gama i beta funkcije

Završni rad

Osijek, 2018.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Tea Bastijan

Nejednakosti za gama i beta funkcije

Završni rad

Voditeljica: izv.prof.dr.sc. Mihaela Ribičić Penava

Osijek, 2018.

Sažetak U ovome radu ukratko ćemo obraditi definiciju i osnovna svojstva gama i beta funkcija. Navest ćemo nekoliko osnovnih nejednakosti, te iskazati Čebiševljevu, Hölderovu i Grüssovu nejednakost. Pokazat ćemo nejednakosti za gama i beta funkcije izvedene primjenom Čebiševljeve nejednakosti na funkcije iste odnosno različite monotonosti. Dokazat ćemo log - konveksnost gama i beta funkcija. Na kraju rada ćemo iz Grüssove nejednakosti izvesti nekoliko nejednakosti.

Ključne riječi : gama funkcija, beta funkcija, Čebiševljeva nejednakost, Hölderova nejednakost, Grüssova nejednakost

Inequalities for Gamma and Beta function

Abstract In this paper we will process definition and elementary properties of Gamma and Beta functions. We will present some basic inequalities. Then, we will state Chebychev's, Hölder's and Grüss' inequality. We will show inequalities for Gamma and Beta functions which can be derived from Chebychev's inequality for synchronous and asynchronous functions. We will prove that Gamma and Beta functions are logarithmically convex. In the last chapter of this paper we will prove some general inequalities derived from Grüss' inequality.

Key words : Gamma function, Beta function, Chebychev's inequality, Hölder's inequality, Grüss' inequality

Sadržaj

1 Uvod

U ovome radu bavit ćemo se nejednakostima koje vrijede za gama i beta funkcije. Uvest ćemo pojam gama i beta funkcija te navesti svojstva koja vrijede za njih, od kojih ćemo neka i dokazati. U trećem poglavlju navest ćemo Jensenovu nejednakost te definirati aritmetičku, kvadratnu i geometrijsku sredinu. Zatim ćemo navesti diskretne i integralne oblike Čebiševljeve, Hölderove i Grüssove nejednakosti. U zadnjem poglavlju ćemo iz navedenih nejednakosti izvesti nejednakosti koje vrijede za gama i beta funkcije. Prvo ćemo primjenom Čebiševljeve nejednakosti na funkcije iste odnosno različite monotonosti te primjenom svojstava gama i beta funkcija pokazati nejednakosti koje vrijede za umnoške beta funkcija, a isto tako i za umnoške gama funkcija. Pokazat ćemo uz koje uvjete vrijedi nejednakost između gama funkcije zbroja i umnoška dvije gama funkcije. Pomoću Hölderove nejednakosti dokazat ćemo kako su gama i beta funkcije log - konveksne. Zatim ćemo definirati digama funkciju i pokazati njezinu konkavnost. Na kraju rada ćemo pomoću Grüssove nejednakosti dokazati nekoliko nejednakosti za gama i beta funkcije.

2 Gama i beta funkcije

U ovom dijelu ćemo navesti definiciju i neka od svojstava za gama i beta funkcije te pokazati vezu između beta i gama funkcije.

2.1 Gama funkcija

Definicija 2.1. *Funkciju* $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *danu izrazom:*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \tag{1}$$

nazivamo gama funkcija.

Gama funkcija definirana je za pozitivne realne brojeve jer tada integral (1) uniformno konvergira te postoje njezina prva i druga derivacija :

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \log t dt, \quad x > 0, \tag{2}$$

$$\Gamma''(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \log^2 t dt, \quad x > 0.$$

Kako je izraz pod integralom (2) pozitivan na cijelom intervalu $(0, \infty)$ druga derivacija gama funkcije je pozitivna, te je funkcija konveksna na tom intervalu. Gama funkciju možemo zapisati i na drugačiji način. Ako u izraz (1) umjesto t uvrstimo u^2 dobivamo

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty u^{2x-2} e^{-u^2} 2u du = 2 \int_0^\infty u^{2x-1} e^{-u^2} du.$$

Dakle, formula za gama funkciju dana je izrazom

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^\infty u^{2x-1} e^{-u^2} du. \tag{3}$$

Kako računanje integrala može biti zahtjevno, navest ćemo dva teorema koji nam omogućuju eksplicitno računanje gama funkcije. Dokaze ovih teorema možete pronaći u [9] odnosno [3, str. 35].

Teorem 2.1. *Neka je x pozitivan realan broj. Tada vrijedi:*

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x). \tag{4}$$

Teorem 2.2. *(Bohr - Mollerupov teorem) Neka je $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ funkcija koja zadovoljava sljedeća svojstva:*

(1) $f(1) = 1$

(2) $f(x+1) = x f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

(3) $\log f$ *je konveksna funkcija na* $\mathbb{R}^+$.

Tada je $f(x) = \Gamma(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$.

Korolar 2.1. *Neka je n prirodan broj. Tada vrijedi:*

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

Dokaz: Neka je n prirodan broj. Primjenjujući svojstvo (2) iz Bohr - Mollerupovog teorema dobivamo

$$\begin{aligned}\Gamma(n) &= (n-1)\cdot\Gamma(n-1) = (n-1)\cdot(n-2)\cdot\Gamma(n-2)\\ &= \cdots = (n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot\Gamma(1).\end{aligned}$$

Nakon što primjenimo svojstvo (1) iz prethodnog teorema slijedi

$$\Gamma(n) = (n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot 1 = (n-1)!.$$

□

Sada ćemo navesti nekoliko korisnih svojstava gama funkcije (dokazi ovih svojstava mogu se pronaći u [4, str. 63-65]):

$$\Gamma(x) = s^x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-st} dt, \quad x, s > 0;$$

$$\Gamma(x) = \int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} dt + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}, \quad x > 0;$$

$$\Gamma(x) = (\log b)^x \int_0^\infty t^{x-1} b^{-t} dt, \quad x > 0, b > 1;$$

$$[\Gamma'(x)]^2 \leq \Gamma(x)\Gamma''(x), \quad x > 0. \tag{5}$$

2.2 Beta funkcija

Definicija 2.2. *Funkciju* $\beta \colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *danu izrazom:*

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \tag{6}$$

nazivamo beta funkcija.

Beta funkciju možemo zapisati pomoću funkcija sinus i cosinus što možemo vidjeti u idućoj propoziciji [9].

Propozicija 2.1. *Neka su x i y pozitivni realni brojevi. Tada vrijedi:*

$$\beta(x, y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1} t \cos^{2y-1} t dt. \tag{7}$$

Dokaz: Uvodimo supstituciju $t = \sin^2\varphi$. Tada je $(1-t) = \cos^2\varphi$ i $dt = 2\sin\varphi\cos\varphi d\varphi$. Kada to primjenimo na (6) dobivamo

$$\begin{aligned}\beta(x, y) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2(x-1)}\varphi \cos^{2(y-1)}\varphi \cdot 2\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\varphi\cos^{2y-1}\varphi d\varphi.\end{aligned}$$

□

Propozicija 2.2. *Neka su x i y pozitivni realni brojevi. Tada vrijedi:*

$$\beta(y,x)=\beta(x,y).$$

Dokaz: Iz izraza (6) imamo

$$\beta(y,x)=\int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{x-1}dt.$$

Uvrstimo supstituciju $u=1-t$ i dobivamo

$$\beta(y,x)=-\int_1^0 (1-u)^{y-1}u^{x-1}du=\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}du=\beta(x,y).$$

□

Iako je ova funkcija dviju varijabli vrlo korisna, često je zanemarena jer se može izvesti koristeći gama funkciju. Vezu ove dvije funkcije daje nam sljedeći teorem [9].

Teorem 2.3. *Neka su x i y pozitivni realni brojevi. Gama i beta funkcija povezane su izrazom:*

$$\beta(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{8}$$

Dokaz: Iz formule (3) dobivamo

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y)&=2\int_0^\infty u^{2x-1}e^{-u^2}du\cdot 2\int_0^\infty v^{2y-1}e^{-v^2}dv\\&=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}u^{2x-1}v^{2y-1}dudv.\end{aligned}$$

Uvodimo polarne koordinate $u=r\cos\varphi$ i $v=r\sin\varphi$ pa vrijedi

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=4\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2}r^{2(x+y)-1}\cos^{2x-1}\varphi\sin^{2y-1}\varphi drd\varphi$$

što možemo rastaviti na dva integrala

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(x+y)-1}dr\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2x-1}\varphi\sin^{2y-1}\varphi d\varphi.$$

Očito je

$$2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(x+y)-1}dr=\Gamma(x+y).$$

Iz (7) vidimo da je

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2x-1}\varphi\sin^{2y-1}\varphi d\varphi=\beta(y,x)=\beta(x,y).$$

Prema tome imamo

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\Gamma(x+y)\beta(x,y)$$

te vrijedi

$$\beta(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

□

Sada ćemo navesti nekoliko korisnih svojstava beta funkcije (dokaze možete pronaći u [4, str. 68-70]):

$$\beta(x+1,y)+\beta(x,y+1)=\beta(x,y), \quad x,y>0;$$

$$\beta\left(\frac{1+p}{2},\frac{1-p}{2}\right)=\pi\sec\left(\frac{p\pi}{2}\right), \quad 0<p<1;$$

$$\beta(x,x)=2^{1-2x}\beta\left(x,\frac{1}{2}\right), \quad x>0.$$

3 Nejednakosti

Definicija 3.1. *Kažemo da je funkcija* $f : I \to \mathbb{R}$ *konveksna na* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ako za sve* $x_1, x_2 \in I$ *i svako* $\lambda \in [0,1]$ *vrijedi:*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Ako za sve $x_1, x_2 \in I$*,* $x_1 \neq x_2$ *i* $\lambda \in (0,1)$ *vrijedi:*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

kažemo da je funkcija f strogo konveksna.

Napomena 3.1. *Ako u prethodnoj definiciji vrijedi suprotna nejednakost kažemo da je funkcija f konkavna.*

Prvo ćemo navesti Jensenovu nejednakost iz koje su izvedene Čebiševljeva, Hölderova i Grüssova nejednakost.

Teorem 3.1. *Funkcija* $f : I \to \mathbb{R}$ *je konveksna na* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ako i samo ako za svaki* $n \in \mathbb{N}$*,* $n \geq 2$*,* $x_1, x_2, ..., x_n \in I$ *i* $\lambda_1, ..., \lambda_n \in [0,1]$ *takve da je* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ *vrijedi:*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i). \tag{9}$$

Dokaz ovoga teorema možete pronaći u [8].

Napomena 3.2. *Ako u* (9) *vrijedi suprotna nejednakost kažemo da je funkcija f konkavna na I.*

Može se dogoditi da je suma težina $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ različita od jedan pa ćemo navesti Jensenovu nejednakost i za taj slučaj. Neka je $p = (p_1, ..., p_n)$ n-torka nenegativnih realnih brojeva i sa P_n označimo $\sum_{i=1}^{n} p_i > 0$. Tada Jensenova nejednakost za konveksnu funkciju glasi:

$$f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leq \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i), \tag{10}$$

a za konkavnu funkciju u (10) vrijedi suprotna nejednakost.
Sada ćemo definirati aritmetičku, kvadratnu i geometrijsku sredinu [8] koje su važne za dokaz Grüssove nejednakosti.

Definicija 3.2. *Neka su* $a = (a_1, ..., a_n)$ *i* $p = (p_1, ..., p_n)$ *n-torke pozitivnih realnih brojeva i* $P_n = \sum_{i=1}^{n} p_i$*,* $n \in \mathbb{N}$*,* $n \geq 2$*. Aritmetička sredina brojeva* $a_1, ..., a_n$ *s težinama* $p_1, ..., p_n$ *definirana je s*

$$A(a;p) = \frac{p_1 a_1 + ... + p_n a_n}{P_n},$$

kvadratna sredina s

$$K(a;p) = \sqrt{\frac{p_1 a_1^2 + ... + p_n a_n^2}{P_n}},$$

a geometrijska sredina s

$$G(a;p) = \left(a_1^{p_1} \cdots a_n^{p_n}\right)^{\frac{1}{P_n}}.$$

Sljedeći teorem nam daje odnose između prethodno definiranih sredina (za dokaz teorema pogledajte [8]).

Teorem 3.2. *Neka su* $a = (a_1, ..., a_n)$ *i* $p = (p_1, ..., p_n)$ *n-torke pozitivnih realnih brojeva i* $P_n = \sum_{i=1}^{n} p_i$. *Tada vrijedi:*

$$K(a;p) \geq A(a;p) \geq G(a;p) \tag{11}$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako su $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

3.1 Čebiševljeva nejednakost

Teorem 3.3. *(Diskretni oblik Čebiševljeve nejednakosti) Neka su* $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ *i* $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ *dvije n-torke pozitivnih realnih brojeva i* $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ *nenegativna n-torka realnih brojeva. Ako su n-torke iste monotonosti* [1], *onda vrijedi:*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i \geq \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \sum_{i=1}^{n} p_i b_i.$$

Ako su n-torke različite monotonosti, [2] *vrijedi suprotna nejednakost:*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i \leq \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \sum_{i=1}^{n} p_i b_i.$$

U oba slučaja jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = ... = a_n$ *ili* $b_1 = b_2 = ... = b_n$.

Dokaz ovog teorema može se pronaći u [5].
Navest ćemo i integralni oblik ove nejednakosti [1] jer će nam biti potreban u nastavku.

Teorem 3.4. *(Integralni oblik Čebiševljeve nejednakosti) Neka su* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrabilne funkcije na [a,b] koje su obje rastuće* [3] *ili obje padajuće* [4]. *Neka je* $p : [a, b] \to \mathbb{R}_0^+$ *integrabilna funkcija na [a,b]. Tada vrijedi:*

$$\int_a^b p(x)dx \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx \geq \int_a^b p(x)f(x)dx \int_a^b p(x)g(x)dx. \tag{12}$$

Ako je jedna od funkcija f ili g rastuća, a druga padajuća onda vrijedi:

$$\int_a^b p(x)dx \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx \leq \int_a^b p(x)f(x)dx \int_a^b p(x)g(x)dx. \tag{13}$$

---

[1] n-torke su iste monotonosti ako je $a_1 \leq ... \leq a_n$ i $b_1 \leq ... \leq b_n$ ili $a_1 \geq ... \geq a_n$ i $b_1 \geq ... \geq b_n$
[2] n-torke su različite monotonosti ako je $a_1 \leq ... \leq a_n$ i $b_1 \geq ... \geq b_n$ ili $a_1 \geq ... \geq a_n$ i $b_1 \leq ... \leq b_n$
[3] Funkcija f je rastuća na $[a, b]$ ako $\forall x \in [a, b]$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
[4] Funkcija f je padajuća na $[a, b]$ ako $\forall x \in [a, b]$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

3.2 Hölderova nejednakost

Sada ćemo navesti još jednu nejednakost [8] koja će nam biti potrebna.

Teorem 3.5. *(Diskretni oblik Hölderove nejednakosti) Neka su* $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ *i* $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ *dane n-torke pozitivnih realnih brojeva i* $p, q \in \mathbb{R}, p \neq 0, q \neq 0$ *takvi da je* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Tada za* $p > 1$ *vrijedi:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Za $p < 1$ *vrijedi suprotna nejednakost:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

U oba slučaja jednakost vrijedi ako i samo ako su a^p *i* b^q *proporcionalne n-torke.*

Sljedeći teorem nam daje integralni oblik Hölderove nejednakosti [1].

Teorem 3.6. *(Integralni oblik Hölderove nejednakosti) Neka je* $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ *interval realnih brojeva te* $p, q \in \mathbb{R}$ *takvi da je* $p > 1$ *i* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Neka su f i g funkcije takve da su integrali* $\int_a^b |f(s)|^p ds$ *i* $\int_a^b |g(s)|^q ds$ *konačni. Tada je funkcija* $f \cdot g$ *integrabilna na* $[a, b]$ *i vrijedi sljedeća nejednakost*

$$\left| \int_a^b f(s) g(s) ds \right| \leq \left(\int_a^b |f(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(s)|^q ds\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{14}$$

3.3 Grüssova nejednakost

Teorem 3.7. *(Diskretni oblik Grüssove nejednakosti) Neka je* $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ *n-torka pozitivnih realnih brojeva i neka su* $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ *i* $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ *dvije n-torke realnih brojeva takve da vrijedi* $\varphi \leq a_i \leq \phi$ *i* $\gamma \leq b_i \leq \Gamma, \forall i = 1, .., n$. *Tada vrijedi:*

$$\left| \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i - \frac{1}{P_n^2} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i\right) \left(\sum_{i=1}^{n} p_i b_i\right) \right| \leq \frac{1}{4} (\phi - \varphi)(\Gamma - \gamma),$$

gdje je $P_n = \sum_{i=1}^{n} p_i$.

Dokaz ovog teorema pomoću nejednakosti (11) možete pronaći u [7, str. 29].

Teorem 3.8. *(Integralni oblik Grüssove nejednakosti) Neka su f i g funkcije definirane i integrabilne na intervalu* $[a, b]$. *Neka* $\forall x \in [a, b]$ *vrijedi* $\varphi \leq f(x) \leq \phi$ *i* $\gamma \leq g(x) \leq \Gamma$, *gdje su* φ, ϕ, γ *i* Γ *dani realni brojevi. Tada vrijedi:*

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) g(x) dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \cdot \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx \right| \leq \frac{1}{4} (\phi - \varphi)(\Gamma - \gamma). \tag{15}$$

Dodatno, konstanta $\frac{1}{4}$ *je najbolja moguća.*

Ovaj teorem nećemo dokazivati, dokaz se može pronaći u [6, str. 295]. U nastavku će nam biti potreban i težinski oblik Grüssove nejednakosti koji navodimo u idućem teoremu [1].

Teorem 3.9. *Neka su f i g funkcije definirane i integrabilne na intervalu* $[a,b]$. *Neka* $\forall x \in [a,b]$ *vrijedi* $\varphi \leq f(x) \leq \phi$ *i* $\gamma \leq g(x) \leq \Gamma$, *gdje su* φ, ϕ, γ *i* Γ *dani realni brojevi. Neka je funkcija* $h : [a,b] \to [0,\infty)$ *takva da je* $\int_a^b h(x)dx > 0$. *Tada vrijedi:*

$$\left| \frac{1}{\int_a^b h(x)dx} \int_a^b f(x)g(x)h(x)dx - \frac{1}{\int_a^b h(x)dx} \int_a^b f(x)h(x)dx \cdot \frac{1}{\int_a^b h(x)dx} \int_a^b g(x)h(x)dx \right| \leq \frac{1}{4}(\phi - \varphi)(\Gamma - \gamma). \tag{16}$$

Dodatno, konstanta $\frac{1}{4}$ *je najbolja moguća.*

4 Nejednakosti za gama i beta funkcije

U nastavku ćemo izvesti neke od nejednakosti koje vrijede za gama i beta funkcije, za više informacija o ovoj temi pogledajte [2].

4.1 Nejednakosti izvedene iz Čebiševljeve nejednakosti

U ovome dijelu rada nejednakosti ćemo dokazivati pomoću integralnog oblika Čebiševljeve nejednakosti.

Teorem 4.1. *Neka su a, b, c, d pozitivni realni brojevi za koje vrijedi:*

$$(c-a)(d-b) \leq 0. \tag{17}$$

Tada vrijede sljedeće nejednakosti:

$$\beta(c,d)\beta(a,b) \geq \beta(c,b)\beta(a,d) \tag{18}$$

i

$$\Gamma(b+c)\Gamma(a+d) \geq \Gamma(c+d)\Gamma(a+b). \tag{19}$$

Dokaz: Definiramo funkcije $f, g, h : [0,1] \to [0,\infty)$ na sljedeći način:

$$f(x) = x^{c-a}, \quad g(x) = (1-x)^{d-b}, \quad h(x) = x^{a-1}(1-x)^{b-1}.$$

Deriviranjem funkcija f i g dobivamo

$$f'(x) = (c-a)x^{c-a-1}$$

i

$$g'(x) = (b-d)(1-x)^{d-b-1}, \quad x \in (0,1).$$

Zbog (17) funkcije f i g su iste monotonosti na $[0,1]$. Također, h je nenegativna funkcija na intervalu [0,1]. Koristeći Čebiševljevu nejednakost (12) za f,g i h dobivamo

$$\begin{aligned} &\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}x^{c-a}(1-x)^{d-b}dx \\ &\geq \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}x^{c-a}dx \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}(1-x)^{d-b}dx \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} &\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \int_0^1 x^{c-1}(1-x)^{d-1}dx \\ &\geq \int_0^1 x^{c-1}(1-x)^{b-1}dx \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{d-1}dx. \end{aligned}$$

Prema (6) iz prethodne nejednakosti dobivamo (18), a zbog svojstva (8) vrijedi i (19). □

Napomena 4.1. *Uz pretpostavku $(c-a)(d-b) \geq 0$ u* (18) *i* (19) *vrijede suprotne nejednakosti.*

Korolar 4.1. *Za svaka dva pozitivna realna broja a i c vrijede sljedeće nejednakosti:*

$$\beta(a,c) \geq [\beta(c,c)\beta(a,a)]^{\frac{1}{2}}$$

i

$$\Gamma(a+c) \geq [\Gamma(2a)\Gamma(2c)]^{\frac{1}{2}}.$$

Dokaz: Iskoristimo Teorem 4.1 uz $a = b$ i $c = d$. Tada je

$$(c-a)(d-b) = (c-a)^2 \geq 0$$

i

$$\beta(c,c)\beta(a,a) \leq \beta(c,a)\beta(a,c) = \beta^2(c,a)$$

pa vrijedi

$$\beta(a,c) \geq [\beta(c,c)\beta(a,a)]^{\frac{1}{2}}.$$

Nejednakost $\Gamma(a+c) \geq [\Gamma(2a)\Gamma(2c)]^{\frac{1}{2}}$ slijedi iz prethodno dokazanog. □

Teorem 4.2. *Neka su a, b i c realni brojevi,* $a, b > 0$ *takvi da vrijedi* $b > c > -a$. *Ako je*

$$c(b-a-c) \leq 0 \tag{20}$$

onda vrijedi:

$$\Gamma(b)\Gamma(a) \leq \Gamma(b-c)\Gamma(a+c) \tag{21}$$

i

$$\beta(b,a) \leq \beta(b-c, a+c). \tag{22}$$

Dokaz: Neka su funkcije $f, g, h : [0,\infty) \to [0,\infty)$ zadane formulama

$$f(x) = x^{b-c-a}, \quad g(x) = x^c, \quad h(x) = x^{a-1}e^{-x}.$$

Zbog uvjeta (20) funkcije f i g su različite monotonosti na $(0,\infty)$ pa primjenom Čebiševljeve nejednakosti (13) na $[0,\infty)$ dobivamo

$$\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx \int_0^\infty x^{b-c-a}x^c x^{a-1}e^{-x}dx \leq \int_0^\infty x^{b-c-a}x^{a-1}e^{-x}dx \int_0^\infty x^c x^{a-1}e^{-x}dx.$$

Nakon što sredimo gornji izraz dobivamo

$$\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx \int_0^\infty x^{b-1}e^{-x}dx \leq \int_0^\infty x^{b-c-1}e^{-x}dx \int_0^\infty x^{c+a-1}e^{-x}dx.$$

Prema (1) prethodna nejednakost je jednaka

$$\Gamma(a)\Gamma(b) \leq \Gamma(b-c)\Gamma(c+a).$$

Zbog svojstva (8) vrijedi i sljedeća jednakost

$$\beta(b-c, a+c) = \frac{\Gamma(b-c)\Gamma(a+c)}{\Gamma(b+a)}.$$

Kada to primjenimo na (21) lako se pokaže da vrijedi i (22). □

Napomena 4.2. *Ako je* $c(b-a-c) \geq 0$*, onda u* (21) *i* (22) *vrijede suprotne nejednakosti.*

Kao posljedicu prethodnog teorema navodimo idući korolar.

Korolar 4.2. *Neka je* $b > 0$ *i* t *realan broj takav da je* $|t| < b$*. Tada vrijedi:*

$$\Gamma^2(b) \leq \Gamma(b-t)\Gamma(b+t)$$

i

$$\beta(b,b) \leq \beta(b-t, b+t). \tag{23}$$

Dokaz: Koristimo Teorem 4.2 uz $a = b$ i $c = t$. Tada imamo

$$c(b-a-c) = -t^2 \leq 0.$$

Iz nejednakosti

$$\Gamma(b)\Gamma(a) \leq \Gamma(b-c)\Gamma(a+c)$$

slijedi

$$\Gamma^2(b) \leq \Gamma(b-t)\Gamma(b+t).$$

Zbog svojstva (8) vrijedi i (23).

□

Teorem 4.3. *Neka su* $c, d > 0$ *takvi da vrijedi:*

$$(c-1)(d-1) \leq 0. \tag{24}$$

Tada je

$$\Gamma(c+d) \leq cd\Gamma(c)\Gamma(d) \tag{25}$$

i

$$\beta(c,d) \leq \frac{1}{cd}. \tag{26}$$

Dokaz: Neka su funkcije $f, g, h : [0,\infty) \to [0,\infty)$ definirane s

$$f(x) = x^{c-1}, \quad g(x) = x^{d-1}, \quad h(x) = xe^{-x}.$$

Zbog uvjeta (24) očito je da su funkcije f i g različite monotonosti na $[0,\infty)$ te primjenom Čebi-ševljeve nejednakosti (13) vrijedi

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx \int_0^\infty x^{c+d-1}e^{-x}dx \leq \int_0^\infty x^c e^{-x}dx \int_0^\infty x^d e^{-x}dx.$$

Prema (1) dobivamo

$$\Gamma(2)\Gamma(c+d) \leq \Gamma(c+1)\Gamma(d+1).$$

Zbog svojstva (4) vrijedi:

$$\Gamma(c+1) = c\Gamma(c)$$

i

$$\Gamma(d+1) = d\Gamma(d).$$

Kako je $\Gamma(2) = 1$ vrijedi:

$$\Gamma(c+d) \leq cd\Gamma(c)\Gamma(d).$$

Nejednakost (26) dobijemo iz prethodne pomoću svojstva (8). $\square$

Napomena 4.3. *Ako je* $(c-1)(d-1) \geq 0$ *u* (25) *i* (26) *vrijede suprotne nejednakosti.*

Korolar 4.3. *Za svaki prirodni broj m,* $m \geq 1$ *i* $c > 0$ *vrijedi:*

$$\Gamma(mc) \geq (m-1)!c^{2(m-1)}[\Gamma(c)]^m.$$

Dokaz: Ako koristimo nejednakost (25) uzastopno, dobivamo :

$$\Gamma(2c) \geq c^2\Gamma(c)\Gamma(c)$$

$$\Gamma(3c) \geq 2c^2\Gamma(2c)\Gamma(c)$$

$$\Gamma(4c) \geq 3c^2\Gamma(3c)\Gamma(c)$$

$$\dots$$

$$\Gamma(mc) \geq (m-1)c^2\Gamma[(m-1)c]\Gamma(c).$$

Kada prethodne nejednakosti pomnožimo, te dobivenu nejednakost podjelimo sa $\Gamma(2c)$, $\Gamma(3c), \dots, \Gamma((m-1)c)$ dobivamo nejednakost iz korolara. $\square$

Korolar 4.4. *Za svaki prirodni broj* $c > 0$ *vrijedi:*

$$\Gamma(c) \leq \frac{2^{2c-1}}{\sqrt{\pi}c^2}\Gamma\left(c+\frac{1}{2}\right).$$

Dokaz: Koristimo činjenicu da je $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ i imamo:

$$2^{2c-1}\Gamma(c)\Gamma\left(c+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2c), \quad c > 0.$$

Kako je $\Gamma(2c) \geq c^2\Gamma^2(c)$ vrijedi:

$$2^{2c-1}\Gamma(c)\Gamma\left(c+\frac{1}{2}\right) \geq \sqrt{\pi}c^2\Gamma^2(c),$$

pa je korolar dokazan. $\square$

4.2 Nejednakosti izvedene iz Hölderove nejednakosti

U nastavku ćemo pokazati log - konveksnost [5] gama i beta funkcija te definirati digama funkciju.

Teorem 4.4. *Neka su* $c, d \geq 0$ *takvi da je* $c + d = 1$ *i* $x_1, x_2 > 0$. *Tada vrijedi:*

$$\Gamma(cx_1 + dx_2) \leq (\Gamma(x_1))^c (\Gamma(x_2))^d,$$

tj. gama funkcija je log - konveksna na $(0, \infty)$.

Dokaz: Dokaz provodimo koristeći Hölderovu nejednakost (14) uz supstituciju

$$f(s) = s^{c(x_1-1)}, \quad g(s) = s^{d(x_2-1)}, \quad h(s) = e^{-s}, \quad s \in (0, \infty)$$

i

$$p = \frac{1}{c}, \quad q = \frac{1}{d}.$$

Tada vrijedi:

$$\int_0^\infty s^{c(x_1-1)} s^{d(x_2-1)} e^{-s} ds \leq \left(\int_0^\infty s^{c(x_1-1)\cdot\frac{1}{c}} e^{-s} ds \right)^c \left(\int_0^\infty s^{d(x_2-1)\cdot\frac{1}{d}} e^{-s} ds \right)^d$$

što je ekvivalento

$$\int_0^\infty s^{cx_1+dx_2-1} e^{-s} ds \leq \left(\int_0^\infty s^{x_1-1} e^{-s} ds \right)^c \left(\int_0^\infty s^{x_2-1} e^{-s} ds \right)^d.$$

Za $h(x) = \ln \Gamma(x)$, $x \in (0, \infty)$ imamo

$$h'(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

i

$$h''(x) = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - (\Gamma(x))^2}{\Gamma^2(x)}, \quad x \in (0, \infty).$$

Zbog nejednakosti (5) zaključujemo da je $h''(x) \geq 0, \forall x \in (0, \infty)$ što pokazuje da je gama funkcija log - konveksna na $(0, \infty)$ te je teorem dokazan. □

Za beta funkciju vrijedi slična nejednakost koju ćemo dokazati u idućem teoremu.

Teorem 4.5. *Beta funkcija je log - konveksna na* $(0, \infty) \times (0, \infty)$.

Dokaz: Neka su $c, d \geq 0$ takvi da je $c + d = 1$ i $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$.
Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} \beta\left[c(x_1, x_2) + d(y_1, y_2)\right] &= \beta(cx_1 + dy_1, cx_2 + dy_2) \\ &= \int_0^1 s^{cx_1+dy_1-1}(1-s)^{cx_2+dy_2-1} ds \\ &= \int_0^1 s^{c(x_1-1)+d(y_1-1)}(1-s)^{c(x_2-1)+d(y_2-1)} ds \\ &= \int_0^1 \left(s^{x_1-1}(1-s)^{x_2-1}\right)^c \cdot \left(s^{y_1-1}(1-s)^{y_2-1}\right)^d ds. \end{aligned}$$

[5] Funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ je log - konveksna (konkavna) na $[a, b]$ ako je $\ln(f)$ konveksna (konkavna) na $[a, b]$.

Sada definiramo funkcije

$$f(s) = \left(s^{x_1-1}(1-s)^{x_2-1}\right)^c, \quad s \in (0,1),$$
$$g(s) = \left(s^{y_1-1}(1-s)^{y_2-1}\right)^d, \quad s \in (0,1)$$

i stavimo $p = \frac{1}{c}, q = \frac{1}{d}$.
Prethodno navedene funkcije zadovoljavaju uvjete Teorema 3.7 pa možemo primjeniti Hölderovu nejednakost (14) te dobivamo sljedeću nejednakost

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(s^{x_1-1}(1-s)^{x_2-1}\right)^c \left(s^{y_1-1}(1-s)^{y_2-1}\right)^d ds &\le \left(\int_0^1 s^{x_1-1}(1-s)^{x_2-1} ds\right)^c \cdot \left(\int_0^1 s^{y_1-1}(1-s)^{y_2-1} ds\right)^d \\ &= [\beta(x_1,x_2)]^c [\beta(y_1,y_2)]^d\end{aligned}$$

koja pokazuje log - konveksnost funkcije beta na $(0,\infty)$. □

Definicija 4.1. *Digama funkcija je derivacija prirodnog logaritma gama funkcije, tj.*

$$\Psi(x) = \frac{d}{dx} ln\Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}, \quad x > 0.$$

Teorem 4.6. *Digama funkcija je monotono rastuća i konkavna na intervalu* $(0,\infty)$.

Dokaz: Kako je gama funkcija log - konveksna na $(0,\infty)$, derivacija od $ln\Gamma$, što je digama funkcija, je monotono rastuća na $(0,\infty)$.
Kako bi dokazali konkavnost digama funkcije koristit ćemo zapis

$$\Psi(x) = \int_0^1 \frac{1-t^{x-1}}{1-t} dt - \gamma, \quad x > 0$$

gdje je

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - log n\right] = 0.577215...$$

Neka su $a_1, a_2 > 0$ i $c, d \ge 0$ takvi da je $c + d = 1$. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}\Psi(ca_1 + da_2) + \gamma &= \int_0^1 \frac{1-t^{ca_1+da_2-1}}{1-t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1-t^{c(a_1-1)+d(a_2-1)}}{1-t} dt.\end{aligned}$$

Kako je funkcija koja realnom broju a_1 pridružuje $c^{a_1} \in (0,\infty)$ konveksna na $(0,1)$ vrijedi:

$$t^{c(a_1-1)+d(a_2-1)} \le ct^{a_1-1} + dt^{a_2-1}, \quad \forall t \in (0,1), a_1, a_2 > 0.$$

Zbog prethodne nejednakosti vrijedi

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1-t^{ca_1+da_2-1}}{1-t} dt &\ge \int_0^1 \frac{1-(ct^{a_1-1}+dt^{a_2-1})}{1-t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{c(1-t^{a_1-1})+d(1-t^{a_2-1})}{1-t} dt \\ &= c\int_0^1 \frac{1-t^{a_1-1}}{1-t} dt + d\int_0^1 \frac{1-t^{a_2-1}}{1-t} dt \\ &= c(\Psi(a_1)+\gamma) + d(\Psi(a_2)+\gamma) = c\Psi(a_1) + d\Psi(a_2) + \gamma.\end{aligned}$$

Sada iz prethodno dokazanog slijedi

$$\Psi(ca_1 + da_2) \geq c\Psi(a_1) + d\Psi(a_2),$$

tj. funkcija digama je konkavna na intervalu $(0,\infty)$. □

4.3 Nejednakosti izvedene iz Grüssove nejednakosti

Teorem 4.7. *Neka su a,b,c i d pozitivni realni brojevi. Tada je*

$$\left| \beta(a+c+1, b+d+1) - \beta(a+1, b+1)\beta(c+1, d+1) \right| \leq \frac{1}{4} \frac{c^c d^d}{(c+d)^{c+d}} \cdot \frac{a^a b^b}{(a+b)^{a+b}}.$$

Dokaz: Neka su dane funkcije $f(x) = x^a(1-x)^b$ i $g(x) = x^c(1-x)^d$, $x \in [0,1]$. Da bi mogli primjeniti Grüssovu nejednakost moramo pronaći minimum i maksimum funkcije $h(x) = x^k(1-x)^l$ za $k, l > 0$. Imamo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}h(x) &= kx^{k-1}(1-x)^l - lx^k(1-x)^{l-1} \\
&= x^{k-1}(1-x)^{l-1}[k(1-x) - lx] \\
&= x^{k-1}(1-x)^{l-1}[k - (k+l)x].
\end{aligned}$$

Kako je $x_0 = \frac{k}{k+l}$ jedinstveno rješenje jednadžbe $h'(x) = 0$ na $[0,1]$ te $h'(x) > 0$ na $[0, x_0)$ i $h'(x) < 0$ na $(x_0, 1]$ zaključujemo da je x_0 maksimum funkcije h. Slijedi da je

$$m_{k,l} = \inf_{x\in[0,1]} h(x) = 0$$

i

$$M_{k,l} = \sup_{x\in[0,1]} h(x) = h\left(\frac{k}{k+l}\right) = \frac{k^k l^l}{(k+l)^{k+l}}.$$

Sada možemo primjeniti Grüssovu nejednakost (15) na funkcije f i g te dobivamo

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^1 f(x)g(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx \right| \\
&\leq \frac{1}{4}(M_{a,b} - m_{a,b})(M_{c,d} - m_{c,d}),
\end{aligned}$$

što je ekvivalentno

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^1 f(x)g(x)dx - \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx \right| \\
&\leq \frac{1}{4} \frac{a^a b^b}{(a+b)^{a+b}} \cdot \frac{c^c d^d}{(c+d)^{c+d}}
\end{aligned}$$

te je nejednakost dokazana.

□

Sada ćemo pokazati nešto jednostavniju nejednakost.

Teorem 4.8. *Neka su $c, d \in \mathbb{R}$,$c, d > 0$. Tada vrijedi nejednakost*

$$\left| \beta(c+1, d+1) - \frac{1}{(c+1)(d+1)} \right| \leq \frac{1}{4}$$

koja je ekvivalentna nejednakosti

$$\max\left\{0, \frac{3-cd-c-d}{4(c+1)(d+1)}\right\} \leq \beta(c+1, d+1) \leq \frac{5+cd+c+d}{4(c+1)(d+1)}.$$

Dokaz: Neka su dane funkcije $f(x) = x^c$, $g(x) = (1-x)^d$, $x \in [0,1]$, $c, d > 0$. Tada je

$$\inf_{x\in[0,1]} f(x) = \inf_{x\in[0,1]} g(x) = 0$$

i

$$\sup_{x\in[0,1]} f(x) = \sup_{x\in[0,1]} g(x) = 1.$$

Primjenom nejednakosti (15) slijedi

$$\left| \int_0^1 x^c (1-x)^d dx - \int_0^1 x^c dx \cdot \int_0^1 (1-x)^d dx \right| \leq \frac{1}{4}.$$

Kako je

$$\int_0^1 x^c dx = \frac{1}{c+1}$$

i

$$\int_0^1 (1-x)^d dx = \frac{1}{d+1}$$

slijedi tvrdnja teorema. □

Težinski oblik Grüssove nejednakosti i prethodna dva teorema nam daju sljedeće dvije propozicije.

Propozicija 4.1. *Neka su $c, d, k, l > 0$ i $a, b > -1$. Tada vrijedi:*

$$\begin{aligned} &\left| \beta(a+1, b+1)\beta(c+k+a+1, d+l+b+1) - \beta(c+a+1, d+b+1)\beta(k+a+1, l+b+1) \right| \\ &\leq \frac{1}{4} \frac{c^c d^d}{(c+d)^{c+d}} \cdot \frac{k^k l^l}{(k+l)^{k+l}} \beta^2(a+1, b+1). \end{aligned}$$

Propozicija 4.2. *Neka su $c, d > 0$ i $a, b > -1$. Tada vrijedi:*

$$\begin{aligned} &\left| \beta(a+1, b+1)\beta(c+a+1, d+b+1) - \beta(c+a+1, b+1)\beta(a+1, d+b+1) \right| \\ &\leq \frac{1}{4}\beta^2(a+1, b+1). \end{aligned}$$

Težinski oblik Grüssove nejednakosti nam omogućuje dokaz idućeg teorema.

Teorem 4.9. *Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a, b, c > 0$. Tada vrijedi:*

$$\left| \frac{1}{3^{a+b+c+1}} \Gamma(a+b+c+1)\Gamma(c+1) - \frac{1}{2^{a+b+2c+2}} \Gamma(a+c+1)\Gamma(b+c+1) \right| \leq \frac{1}{4} \frac{a^a}{e^a} \cdot \frac{b^b}{e^b} \Gamma^2(c+1). \quad (27)$$

Dokaz: Pretpostavimo da je funkcija $g_a(s) = s^a e^{-s}$ definirana na $(0,\infty)$. Tada je

$$g_a'(s) = as^{a-1}e^{-s} - s^a e^{-s} = e^{-s}s^{a-1}(a-s)$$

iz čega zaključujemo da je funkcija g_a rastuća na $(0,a)$, a padajuća na (a,∞) i maksimum joj je $g_a(a) = \frac{a^a}{e^a}$. Iz nejednakosti (16) slijedi

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^x g_a(s)g_b(s)g_c(s)ds \int_0^x g_c(s)ds - \int_0^x g_a(s)g_c(s)ds \int_0^x g_b(s)g_c(s)ds \right| \\
&\le \frac{1}{4}\left(\max_{s\in[0,x]} g_a(s) - \min_{s\in[0,x]} g_a(s)\right)\left(\max_{s\in[0,x]} g_b(s) - \min_{s\in[0,x]} g_b(s)\right)\left(\int_0^x g_c(s)ds\right)^2, \quad \forall x>0
\end{aligned}$$

što je ekvivalentno

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^x s^{a+b+c}e^{-3s}ds \int_0^x s^c e^{-s}ds - \int_0^x s^{a+c}e^{-2s}ds \int_0^x s^{b+c}e^{-2s}ds \right| \\
&\le \frac{1}{4}\frac{a^a}{e^a}\cdot\frac{b^b}{e^b}\left(\int_0^x s^c e^{-s}ds\right)^2, \quad \forall x>0.
\end{aligned}$$

Kako su dani integrali konvergentni na $[0,\infty)$ dobivamo

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^\infty s^{a+b+c}e^{-3s}ds \int_0^\infty s^c e^{-s}ds - \int_0^\infty s^{a+c}e^{-2s}ds \int_0^\infty s^{b+c}e^{-2s}ds \right| \\
&\le \frac{1}{4}\frac{a^a}{e^a}\cdot\frac{b^b}{e^b}\left(\int_0^\infty s^c e^{-s}ds\right)^2.
\end{aligned}$$

Uvodimo supstituciju $u = 3s$ i imamo

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty s^{a+b+c}e^{-3s}ds &= \frac{1}{3}\int_0^\infty \left(\frac{u}{3}\right)^{a+b+c} e^{-u}du \\
&= \frac{1}{3^{a+b+c+1}}\Gamma(a+b+c+1).
\end{aligned}$$

Slično se dobije i

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty s^{a+c}e^{-2s}ds &= \frac{1}{2^{a+c+1}}\Gamma(a+c+1), \\
\int_0^\infty s^{b+c}e^{-2s}ds &= \frac{1}{2^{b+c+1}}\Gamma(b+c+1)
\end{aligned}$$

pa slijedi tvrdnja (27). □

Literatura

[1] R.P. Agarwal, N.S. Barnett, S.S. Dragomir, Inequalities for Beta and Gamma function via some classical and new integral inequalities, J. Inequal. Appl. **5** (2000), 103-165.

[2] R.P. Agarwal, N. Elezović, J. Pečarić, On some inequalities for Beta and Gamma function via some classical inequalities, J. Inequal. Appl. **5** (2005), 593-613.

[3] L.C. Andrews, Special Functions for Engineers and Applied Mathematicians, MacMillan Publishing Company, New York, 1985.

[4] G.E. Andrews, R. Askey, R. Roy, Special functions, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[5] I.Ilišević, Čebiševljeva nejednakost, Osječki matematički list **4** (2004), 65-75.

[6] D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić, A.M. Fink, Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic, Dordrecht, 1993.

[7] J.E. Pečarić, Nejednakosti, Element, Zagreb, 1996.

[8] M. Ribičić Penava, K.Bošnjak, Jensenova nejednakost i nejednakosti izvedene iz nje, Osječki matematički list **16** (2016), 15-25.

[9] M. Ribičić Penava, D. Škrobar, Gama i beta funkcije, Osječki matematički list **15** (2015), 93-111.