Učenje i poučavanje geometrije

Topalović, Tihana

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Tihana Topalović

Učenje i poučavanje geometrije

Diplomski rad

Osijek, 2016.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Tihana Topalović

Učenje i poučavanje geometrije

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2016.

Sadržaj

Uvod

"Um koji stalno primjenjuje geometriju teško će učiniti pogrešku"

Ibn Khaldum

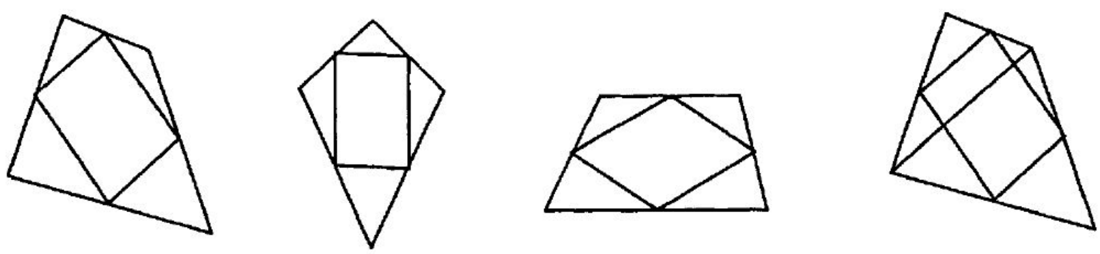
U prvom poglavlju reći ćemo nešto o tome zašto treba učiti geometriju. Navesti ćemo razloge za uključivanje geometrije u kurikulum matematike: proširivanje svijesti o prostoru, razvijanje vještine zaključivanja, njezino će nas proučavanje potaknuti, izazvati i informirati. Reći ćemo nešto o kurikulumima geometrije pojedinih zemalja i razlikama među njima kao što su povezanost geometrije sa stvarnim svijetom i važnost koja se pridaje dokazu.
Počeci učenja geometrije, prvi susreti učenika s njom ono su o čemu ćemo govoriti u drugom poglavlju. U ovom ćemo se poglavlju dotaknuti i prepoznavanja oblika i teškoćama koje se javljaju pri istome te kako ih riješiti, kako uvesti pojam kuta te kako pravilno koristiti kutomjer. Na kraju ovoga poglavlja reći ćemo nešto o popločavanju ravnine kao mediju za razvijanje prostornog zora i istraživanje svojstava oblika.
U trećem ćemo se poglavlju baviti osnom simetrijom te kako ju proučavati (primjeri zadataka iz učionice), svojstvima kuta i trokuta navodeći i svojstvo jednakokračnog trokuta i njegovu primjenu. Reći ćemo nešto i o svojstvima četverokuta te mnogokuta uz zanimljiv i poučan primjer s pravilnim dvanaesterokutom koji je moguće lako uklopiti u nastavni sat.
U posljednjem poglavlju bavit ćemo se važnošću i korisnošću konstrukcija te konstruiranjem trokuta. Nakon toga reći ćemo nešto o sukladnosti trokuta i njezinoj primjeni pri dokazivanju kroz zadatke povezane s praktičnim situacijama. Na kraju rada spomenut ćemo Van Schootenov poučak i dokaz pomoću sukladnosti trokuta.

1 Uloga geometrije

1.1 Zašto učiti geometriju

Geometrija posjeduje neposrednu intuitivnu privlačnost na jednostavnoj razini. Od rane dobi djeca se igraju oblicima opažajući njihova očigledna svojstva i promatrajući u kakvom su odnosu jedni prema drugima. Također promatraju veliku raznolikost i jednostavnih i složenih geometrijskih konfiguracija u vlastitom okruženju i stječu dio jezika povezanog s njima. Neformalno uče prepoznavati oblike kao što su krugovi, četverokuti i trokuti i počinju razumijevati riječi poput vodoravno, okomito i paralelno. Prvi koraci u učenju geometrije tiču se imenovanja, opisivanja, klasificiranja i stvaranja poveznica s mjerenjem, položajem i kretanjem. Opisivanje i klasificiranje nisu nužno trivijalni zadaci što postaje očito kada, na primjer, promatramo svojstva različitih četverokuta i poveznice između njih. Štoviše, oni vode k složenijim zahtjevima definiranja i zaključivanja. Mjerenje je očigledno od velike praktične važnosti i određuje učeničko razumijevanje koncepata duljine i kuta i povezane koncepte kao što su površina i volumen, ali je osnova geometrije i izvor njezine beskrajne privlačnosti način na koji zaključivanje igra ključnu ulogu u dokazivanju rezultata koji su često kako jednostavni tako i iznenađujući.

Odličan primjer iz učionice koji sadrži ovaj element iznenađenja prikazan je na Slici 1. Od učenika se tražilo da nacrtaju bilo kakav četverokut, označe polovišta stranica i tada spoje te četiri točke kako bi napravili još jedan četverokut. Uspoređivanje brojnih dobivenih primjera sugerira kako je rezultat uvijek paralelogram.



Slika 1: Zašto je to paralelogram?

Rezultat sam po sebi ima neposrednu privlačnost, ali dokaz koji objašnjava zašto je on istinit također sadrži vlastitu neposrednu privlačnost zbog svoje jednostavnosti. U dijagramu s desne strane na Slici 1 konstruirana je jedna od dijagonala početnog

četverokuta.
Teorem o središnjici govori nam kako je dijagonala paralelna s dvjema stranicama koje leže sa svake njezine strane te od njih i dvostruko dulja. Ovaj par suprotnih stranica je dakle i paralelan i jednake duljine, čime se dokazuje kako je četverokut dobiven spajanjem polovišta paralelogram. Ovaj rezultat poznat je i kao Varignonov teorem.

Razlozi za uključivanje geometrije u kurikulum matematike su usko povezani s razlozima zašto se matematika uči kao takva, ali je zanimljivo za primijetiti kako je geometrija, u obliku zatvorene studije u Euklidovim "Elementima", imala dominantno mjesto u kurikulumu u Ujedinjenom Kraljevstvu i bila je preduvjet za upis na sveučilište sve do kraja devetnaestog stoljeća. Tijekom dvadesetog stoljeća sve je više prepoznavano kako bi matematika trebala imati središnje mjesto u obrazovanju svih učenika i kako geometrija u nekom obliku ima ključnu ulogu i u širem matematičkom kurikulumu.

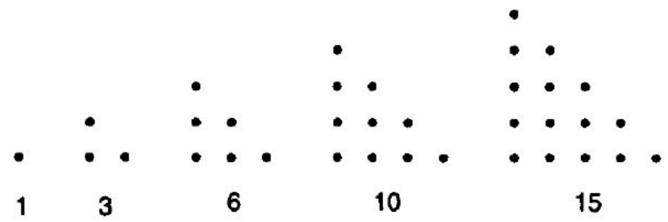
Tri šira razloga za uključivanje geometrije:

- proširiti svijest o prostoru
- razviti vještine zaključivanja
- potaknuti, izazvati i informirati.

Prostorna svijest je prilično nejasna, ali svakako važna ideja koja se tiče naše sposobnosti percipiranja i rada s geometrijskim tijelima. Prepoznajemo korisnu ulogu posjedovanja smisla za oblik i prostor u širokom rasponu situacija u jednostavnim svakodnevnim zadacima kao što su podizanje polica ili čitanje karte i u sofisticiranijim aktivnostima kao što su one jednog graditelja, arhitekta, navigatora ili grafičkog dizajnera.

Uz to, unutar same matematike geometrijski prikazi su važni alati za rad s numeričkim i algebarskim problemima. Trebamo samo pogledati u niz trokutastih brojeva, prikazan na Slici 2, kako bismo vidjeli da geometrijski prikaz može omogućiti kako razumijevanje tako i privlačnost.

Često se tvrdi kako su matematika, a posebno geometrija, vrijedne komponente školskog kurikuluma jer osiguravaju kontekst za razvoj učeničkih vještina zaključivanja.

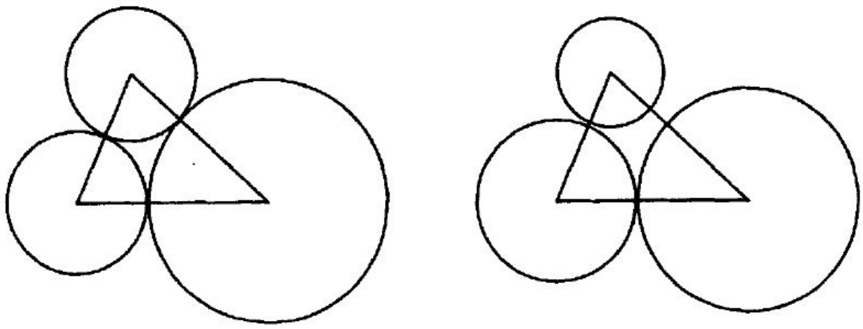


Slika 2: Trokutasti brojevi

Iako možda ima nešto istine u ovome, to ne pruža dovoljno opravdanje za dominantnu ulogu koja se daje matematici u školi jer se ove vještine u općenitom obliku mogu naučiti preko drugih predmeta. Ipak, ako se prihvati da je matematika važna iz drugih razloga povezanih s njezinim korištenjem i intelektualnim izazovom i poticajem koje može pružiti, tada se na geometriju može gledati kao na ono što nudi važan način uspostavljanja onoga na što se neki autori pozivaju kao na matematičke "navike uma". Ove "navike" povezane su s načinima razmišljanja koji postaju stvar navike za matematičara: stalna potreba da postavljaju i rješavaju problem, traže obrasce, opažaju poveznice i veze i iznad svega dokazuju pretpostavke. Geometrija, posebno u svom čistom ili sintetičkom obliku, prikladna je kao način razvijanja ovih kvaliteta jer je bogata problemima i teoremima koji imaju intuitivnu privlačnost i zahtijevaju razloge koji često mogu biti jednostavni, ali ne toliko rutinski ili proceduralni kao što je često slučaj s čisto algebarskim pristupom. Ovime se ne umanjuje važnost algebre jer ona ima važnu ulogu u geometriji i mnogo se može dobiti iz međusobnog djelovanja između različitih perspektiva gledanja na isti problem.

Treći od razloga za učenje geometrije je da ona može potaknuti, izazvati i informirati. Ovime se prihvaća ideja kako je geometrija istinski zanimljiva tema sama po sebi zbog čega se njome treba baviti radi njezine estetske i intelektualne privlačnosti i zato jer je dio razvitka osnove za toliko mnogo aspekata našeg svijeta: simetrije brojnih predmeta oko nas, sveprisutnosti i korisnosti kruga i drugih geometrijskih oblika, paraboličnog puta kojim putuje projektil, eliptične orbite planeta i tako dalje. Nadalje, postoje geometrijski rezultati, od kojih je najbolji primjer Pitagorin poučak, koji su od životne praktične važnosti, ali također i izvor velikog unutarnjeg zanimanja. Geometrijom se je vrijedno baviti jer je ugodna, ali to se uživanje često izgubi jer je ova tematika u školama često predstavljena kao činjenice koje se trebaju upamtiti i postupci koji se trebaju slijediti kako bi se riješili standardni problemi, umjesto kao nešto što treba istraživati i oko čega treba razmišljati u pokušaju razumijevanja i pronalaženja smisla njezinih bogatstava.

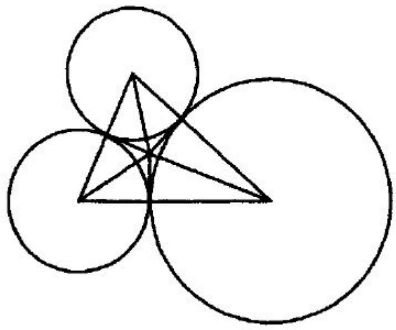
Zanimljiv primjer koji prikazuje mnoge od ključnih karakteristika geometrije je prikazan na Slici 3. Zadatak je konstruirati tri kružnice koje se međusobno dodiruju ako su zadana njihova središta. Konstrukcija koja se zahtijeva prikazana je na lijevom dijelu prikaza Slike 3 gdje se središta kružnica uzimaju kao vrhovi zadanog trokuta.



Slika 3: Konstruiranje tri kružnice koje se međusobno dodiruju

Prikaz s desne strane pokazuje neuspješan pokušaj crtanja takve konfiguracije metodom pokušaja i pogreške. Lako je konstruirati dvije kružnice koje se dodiruju: problem je pronaći pravo mjesto na kojem će se dodirivati tako da treća kružnica precizno dodiruje preostale dvije. Ovo se svakako može postići eksperimentiranjem za točno određeni trokut koristeći dinamičku geometriju, ali čim se pomakne jedno središte konstrukcija se ruši. Potrebno je analizirati problem kako bi se pronašla općenita metoda, a to omogućava dobru vježbu za geometrijsko razmišljanje.

Prvi korak je napraviti grubi prikaz rezultata kojeg želimo dobiti i istražiti njegove ključne karakteristike. One su prikazane dodatnim linijama na Slici 4. Zahtjev da se kružnice dodiruju znači da postoji zajednička tangenta dvaju kružnica na svakom dodirnom mjestu i tada možemo vidjeti kako bi određivanje njihovog sjecišta bio koristan korak. Spajanje te točke s vrhovima trokuta govori nam kako je mjesto gdje se tangente sijeku također mjesto gdje se sijeku i simetrale kuta. Ako razmišljamo o ovome na drugačiji način, vidimo kako je sjecište središte trokutu upisane kružnice i kako tri dodirne točke odgovaraju točkama na kojima ta kružnica dodiruje trokut.



Slika 4: Pronalaženje dodirnih točaka kružnica

Sada imamo postupak za određivanje dodirnih točaka triju kružnica:

- konstruiranje simetrale dvaju kutova trokuta
- od njihovog sjecišta povući okomicu na jednu od stranica trokuta
- nacrtati dvije kružnice koje se dodiruju u toj točci
- konstruirati treću kružnicu.

Radeći na papiru uz pomoć ravnala i šestara, učenici mogu nacrtati nekoliko dijagrama koristeći različite trokute. Rješavanje problema zahtijeva pažljivo osmišljeni pristup koji očigledno ovisi o količini geometrijskog predznanja o svojstvima tangente.

Trebalo bi biti jasno kako geometrija ima važno mjesto u kurikulumu matematike jer sadrži brojne osobine koje mogu doprinijeti općenitom intelektualnom razvoju učenika kao i njihovom matematičkom razvoju. Uz to, omogućava praktične vještine i znanje koji imaju korisnu primjenu u svakodnevnim situacijama i u velikom broju zanimanja.

1.2 Kurikulum nastave geometrije

Iako postoji mnogo zajedničkih osnova između različitih zemalja, postoje mnogo veće razlike u sadržaju u kurikulumu geometrije nego što postoje u aritmetici ili algebri. Značajne razlike pronalazimo između Nizozemske gdje je geometrija jako povezana sa stvarnim svijetom, i Francuske, Japana i Singapura gdje je vrlo slab naglasak na stvarnom svijetu. Također su bitne razlike u tome koliko su proceduralni i formalni pristupi i razina na kojoj se daje važnost ideji dokaza. Postoje i razlike između zemalja po pitanju relativne važnosti koja se daje transformacijama, vektorima i koordinatnoj geometriji u usporedbi sa sintetičkom geometrijom u Euklidovom stilu. Razina do koje se potiče ili očekuje korištenje računala uvelike varira. Očito postoji velik interes i briga mnogih zemalja za kurikulum geometrije tako da je stanje daleko od statičnog.

U Engleskoj je kurikulum matematike određen Nacionalnim kurikulumom. Kao odgovor na rastuću zabrinutost trenutačna je verzija odredila na mnogo jasniji način od ranijih verzija točan geometrijski sadržaj koji se zahtijeva. Ključne odrednice navedene ispod ovoga pokazuju raspon tema koje se očekuju za učenike dobi između 11 i 16 godina: svojstva trokuta i drugih geometrijskih likova, svojstva kruga, određivanje transformacija, svojstva transformacija, koordinate, vektori, mjere, konstrukcije, mjerenja, krivulje.

Kurikulum jasno navodi određene definicije, teoreme i konstrukcije koje učenici trebaju znati. Na primjer, tri tipične detaljne izjave su kako slijedi:

> dosjeti se definicije posebnih četverokuta, uključujući kvadrat, pravokutnik, paralelogram, trapez i romb
>
> dokaži i iskoristi činjenice kako je obodni kut kružnice jednak polovini pripadajućeg središnjeg kuta, kut nad promjerom kružnice pravi kut, kako su obodni kutevi nad istom tetivom jednaki
>
> koristi ravnalo i šestar kako bi napravio standardne konstrukcije uključujući jednakostranični trokut sa zadanom stranicom, polovište i simetralu dužine, okomicu iz točke na pravac i simetralu kuta

Ako se okrenemo prema Sjedinjenim Američkim Državama, kurikulum geometrije je pod velikim utjecajem "Kurikuluma i standarda ocjenjivanja za školsku matematiku" i kasnije revidiranog dokumenta "Principi i standardi za školsku matematiku". Ovi dokumenti nisu tako propisujući kao Engleski Nacionalni Kurikulum, ali opseg tema i temeljnih ideja imaju mnogo sličnosti. Oni se svakako pozivaju na osobitu važnost geometrije kao sadržaja za razvoj geometrijskoga mišljenja dok Engleski

Nacionalni Kurikulum ne daje geometriji izričito posebno mjesto kao sredstvu za razvijanje mišljenja. No, izjave u Nacionalnom kurikulumu imaju za jasan cilj davanje većeg naglaska na dokazivanju unutar kurikuluma geometrije u usporedbi s ranijim verzijama kurikuluma.

Druga značajna razlika između Engleske i Sjedinjenih Država je veća važnost koju potonja daje u pristupanju geometriji preko sadržaja iz stvarnog svijeta. Vrlo je malo pokušaja u engleskim udžbenicima da se geometrija poveže sa stvarnim svijetom na bilo kakve druge osim trivijalnih načina, tako da se geometrija većim dijelom poučava na apstraktan način kao i u Francuskoj, Japanu i Singapuru. Ovo je dakako tema oko koje postoji slaba usuglašenost. Ne čini se da postoji bilo kakvo istraživanje o relativnim učincima na postignuće i stavove u predstavljanju geometrije kao konteksta iz stvarnog svijeta, u usporedbi sa njezinim apstraktnim predstavljanjem.

Povremeno bi se trebale praviti poveznice s primjenama u stvarnom svijetu, ali ne u lažnom uvjerenju kako je motivacija učenika obično ili jedino povećana pozivanjem na korisnost. Mnogo je toga zajedničkog između nastavnih planova i programa diljem svijeta po pitanju tema. Varijacije se pojavljuju po pitanju naglašavanja i vremenskog usklađivanja različitih elemenata i relativne važnosti usklađene s praktičnim pristupima, dokazivanjima i primjenama, što rezultira značajnim razlikama u formalnosti načina prezentacije koji se primjenjuje. Slično tome, postoje varijacije u relativnoj važnosti po pitanju sintetičke i analitičke geometrije i razine do koje su uključeni algebra i trigonometrija, i simetrija, transformacije, matrice i vektori.

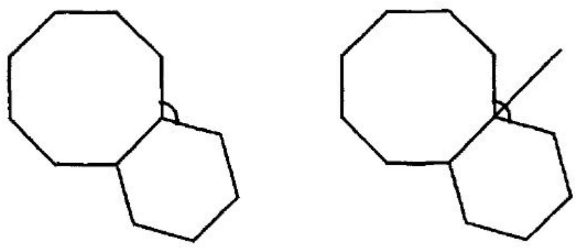
Mnogokuti i njihova svojstva te kružnice i njihova sastavni su dio mnogih kurikuluma nastave geometrije dok druge krivulje, kao što su parabola i elipsa, nisu.

Konačno imamo mjesto za razmišljanje i važnost koju treba pridati dokazu. Povezano s time postoje pitanja o tome što bi se trebalo prihvatiti kao "očigledno" i što je razumno za očekivati od učenika da će moći zaključiti i dokazati.
Potreba za dokazivanjem onoga što nam je sugerirala intuicija ili pokus je jedna od tipičnih aktivnosti matematičara. Pronalaženje dokaza nije samo stvar potvrđivanja kako je pretpostavka istinita, iako to svakako može biti snažna motivacija. Dokazivanje može uvelike pomoći našem shvaćanju teorema, čiju smo istinu već prihvatili, dajući dublje ili alternativno objašnjenje. Nadalje, proces pronalaska dokaza može

odvesti do otkrića novih matematičkih ideja.

1.3 Učenje i poučavanje geometrije

Brojni primjeri u školskoj geometriji obuhvaćaju izračunavanje kutova. Ovo su vrijedne vježbe matematičkog razmišljanja jer njihova rješenja zahtijevaju poznavanje svojstava oblika koji su u njih uključeni kao i sposobnost pronalaska i korištenja niza koraka u razmišljanju koja vas vode od onoga što znate do onoga što trebate pronaći. Slika 5 prikazuje dva pravilna mnogokuta, šesterokut i osmerokut, koji imaju jednu zajedničku stranicu.
Problemski zadatak je odrediti kut između dva mnogokuta, kako je pokazano s lijeve strane prikaza. Pitanje bi se moglo postaviti kao "pronađi kut" ili, drugačije rečeno, "pokaži kako je kut jednak 105°". Drugi način ima prednost u tome što naglasak na odgovoru učenika mora biti na objašnjenju umjesto na brojčanom rezultatu.



Slika 5: Koliko iznosi kut između mnogokuta?

Dvije su očite strategije za rješavanje zadatka. Jedan je oduzeti unutarnje kutove od 360°: $360° - (120° - 135°) = 105°$. Druga metoda, predložena na desnom prikazu, je zbrojiti dva vanjska kuta kako bi se direktno dobio traženi kut: $60° + 45° = 105°$.
Srž problema za učenika leži u shvaćanju kako se moraju izračunati ili vanjski ili unutarnji kutovi dvaju mnogokuta. Problem za učitelja je kako pomoći učeniku kojem manjka način razmišljanja o tome što se traži i onda pronalaska načina izračunavanja potrebnih kutova. Postoje dva pitanja koja se trebaju postaviti: "Što trebaš izračunati?" i onda "Što znaš o izračunavanju kutova mnogokuta?" Ovo zahtijeva prisjećanje ili ponovno otkrivanje uobičajenih metoda za izračunavanje takvih kutova.

Kako bi se uspješno učila geometrija potrebno je znanje činjenica, sposobnost logičkog razmišljanja i, manje lakša za objasniti, sposobnost uočavanja ključnih karakteristika objekata koje daju indikacije za rješavanje zadatka ili dokazivanje teorema.

Richard Skemp je identificirao dva šira tipa razumijevanja: instrumentalno i relacijsko. Instrumentalno razumijevanje znači znati kako izvesti postupke, a relacijsko razumijevanje obuhvaća znanje zašto postupak funkcionira, kao i kako ga izvesti. Izvješće RAND Panela za Učenje Matematike u Sjedinjenim Državama govori o "matematičkom umijeću" kao onome što je potrebno da bi se bilo uspješno u matematici. Prve dvije od pet sastavnica ovoga umijeća su "proceduralna tečnost" i "konceptualno razumijevanje" koje su u uskoj vezi sa Skemp-ovim dvama tipovima razumijevanja, ali uz dodatak imenovanja "strateške kompetencije" i "prilagodljivog shvaćanja". One obuhvaćaju sposobnost razmišljanja i načina kako tražiti načine za pristupanje problemu. Peta sastavnica je posjedovanje "produktivne predispozicije" koja se tiče motivacije, a koja pak dolazi kroz gledanje na matematiku kao na nešto vrijedno učenja, pouzdanje u vlastitu sposobnost pronalaženja smisla u sadržaju i želja za upornošću.

Naravno, relativno je lako tvrditi što je potrebno za uspješno učenje geometrije, ali je mnogo manje jasno kako ovo izvesti u praksi kada je učitelj suočen s razredom. Možda postoje neke indicije u konceptu matematičkog umijeća ako pogledamo u ovih pet sastavnica obrnutim redoslijedom i prvo prepoznamo kako se malo toga postiže ako učenici nemaju produktivnu predispoziciju prema geometriji, a to zahtijeva pažljivo promišljanje o predstavljanju geometrije na načine koji pridobivaju pažnju učenika. Strateška kompetencija i prilagodljivo shvaćanje ne mogu se razvijati neovisno o konceptualnom razumijevanju i proceduralnoj tečnosti, ali se čini kao uobičajena pretpostavka kako one trebaju biti polazište umjesto da se razvijaju paralelno s ključno važnim vještinama razmišljanja. Zapravo, kako RAND-ova studija predlaže, sve sastavnice trebaju biti međusobno isprepletene osnažujući tako jedna drugu.

Čini se kako jedna od tajni uspjeha leži u odabiranju dobrih problemskih zadataka koji osiguravaju unutarnju motivaciju i njihovo korištenje kao fokusa za nastavne jedinice gdje se razumijevanje, tečnost i vještine razmišljanja mogu zajedno razvijati.

2 Počeci: eksperimentalna geometrija

Prvi susreti učenika s geometrijom vezani su uz vizualizaciju te ispitivanje svojstava oblika i početke njihove klasifikacije. Dominantne aktivnosti, sve do otprilike jedanaeste godine starosti, će učenicima biti prepoznavanje oblika, stjecanje vokabulara te nazivi za oblike i riječi korištene u opisivanju njihovih svojstava, položaja i kretanja zajedno s učenjem mjerenja duljine i kuta. Kako se budu bavili otkrivanjem oblika na različite načine, osim učenja odgovarajućeg jezika i vještina također će poboljšavati prostorni zor i postavljati temelje za više analitički, deduktivni pristup geometriji.

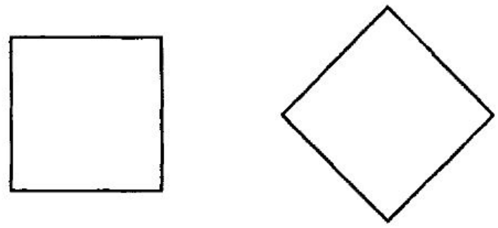
Mjerenje igra važnu ulogu u eksperimentiranju s geometrijom: mjerenje duljine se razvija prije prelaska na konceptualno zahtjevnije ideje kuta, površine i volumena. Jednostavno je usporediti dvije duljine njihovim postavljenjem jedne uz drugu bez korištenja ravnala: uspoređivanje dolazi prije mjerenja. Isto vrijedi i za kutove: dva kuta na slici mogu se usporediti njihovim postavljanjem jednog iznad drugog i to bi trebalo prethoditi mjerenjima kutomjerom. Uspoređivanja površine i volumena mogu se napraviti na jednostavnoj razini korištenjem likova napravljenih od kvadrata i tijela napravljenih od kocaka. Uspoređivanje na način spajanja ili postavljanja jednog iznad drugog je korak k razmišljanju i donošenju općenitih zaključaka dok mjerenje, iako od očite ogromne praktične važnosti, usmjerava pažnju na pojedine slučajeve umjesto da potiče potragu za općenitim.

Ovaj početni rad zahtijeva širok raspon eksperimentalnih aktivnosti koje uključuju crtanje, promatranje dijagrama i slika, izrezivanje, presavijanje i međusobno usklađivanje. Većina matematičkih aktivnosti zajedno donosi mnogo različitih ideja istovremeno tako da zadaci neće uvijek biti čisto geometrijski, nego će uključivati druge ideje, poput prebrojavanja, izračunavanja i, u kasnijoj fazi, algebru. Usvajanje ovog bogatstva i stvaranje poveznica između različitih ideja ključno je ako želimo da učenici napreduju u matematici općenito, a posebice u geometriji. Iako je važno usko se usredotočiti na određene ideje s vremena na vrijeme, koncepti imaju mnogo više smisla ako su međusobno povezani i korišteni u brojnim zanimljivim kontekstima.

2.1 Prepoznavanje oblika

Slika 6 prikazuje kvadrat u dva različita položaja. Nije neuobičajeno doživjeti da mlađi učenici prepoznaju lijevi prikaz kao kvadrat, ali ne i drugi, za koji će često pretpostaviti kako je romb. Ovo je prikazano na sljedećem dijelu razgovora koji nije netipičan za vrstu razgovora koji se može dogoditi između učitelja i učenika.

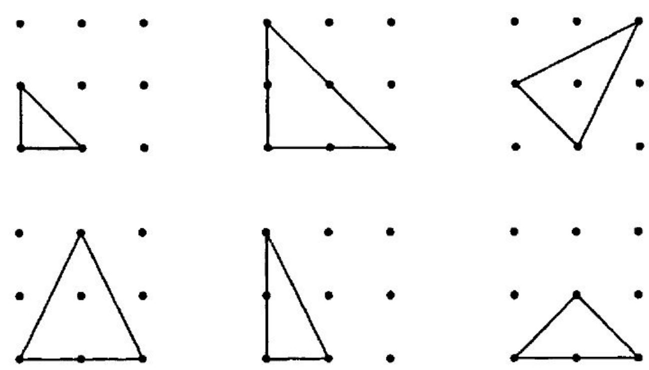
Učitelj: Koji je ovo oblik?
(pokazuje kvadrat s vodoravno položenom stranicom)
Učenik: Kvadrat.
Učitelj: Ako ga okreneš ovako, što je to?
(pokaže isti kvadrat okrenut za 45° tako da stoji na jednom vrhu.)
Učenik: Romb.
Učitelj: Ali ranije si rekao da je to kvadrat.
Učenik: Sada je romb.



Slika 6: Kvadrat ili romb?

Postoji stvaran problem u neprihvaćanju kako je fizički kvadrat i dalje kvadrat bez obzira na njegovu orijentaciju. Zadana slika kvadrata sadrži stranicu položenu horizontalno i ta je slika toliko ukorijenjena da se kvadrati ne prepoznaju nužno ako su postavljeni u drugačijem položaju. Ovo je bez sumnje povezano s činjenicom kako je oblik u drugačijem položaju poput romba u svom početnom obliku i zabludom kako jedan oblik ne može u isto vrijeme biti dvije stvari – i romb i kvadrat. Slične se teškoće javljaju kada se, na primjer, kaže kako je kvadrat poseban slučaj pravokutnika ili kako je pravokutnik poseban slučaj paralelograma. Ove se teškoće mogu premostiti kada se učenici bolje upoznaju s oblicima preko primjera u kojima mogu razgovarati o njihovim svojstvima. To im pomaže da koriste odgovarajući vokabular i vide veze između oblika tako da ih klasificiraju prema njihovim svojstvima. Samo navođenje primjera i davanje jednostavnih definicija nije dovoljno. Rad sa stvarnim oblicima i izmjena računalnih slika zajedno s promišljenom raspravom potrebni su za razvoj razumijevanja i smanjenje zbunjenosti. Kako se njihovo razmišljanje razvija, oni će početi cijeniti to da je definicija izjava koja daje minimalna potrebna objašnjenja za oblik, i kako se iz nje mogu izvesti druga svojstva.

Zahtjevan je problemski zadatak koji uključuje trokute prikazan na Slici 7, zadati učenicima da nacrtaju trokute tako da spoje vrhove na kvadratnoj mreži točaka veličine 3 sa 3 ili na panou ili direktno na papiru s kvadratnom mrežom. Početni zadatak je vidjeti koliko se različitih trokuta može pronaći.
Na Slici 7 je prikazano šest različitih trokuta: pred učenike treba postaviti izazov kako bi se vidjelo mogu li pronaći sve različite trokute (postoji ih više od šest prikazanih). To može rezultirati nekakvom raspravom o tome što se misli s riječi "različitih". Učenici mogu reći kako je isti trokut u drugačijem položaju drugačiji, ista stvar o kojoj se raspravljalo ranije s kvadratima. Izazovan je zadatak sa sigurnošću ustvrditi da su pronađene sve mogućnosti i kako se isti trokut ne ponavlja u drugačijem položaju. Niz trokuta daje mogućnost za identificiranje jednakokračnih trokuta i



Slika 7: Trokuti na kvadratnoj mreži 3 sa 3

pravokutnih trokuta i shvaćanje kako trokut može biti i jednakokračan i pravokutan. Učenici će često reći kako je trokut dolje lijevo jednakostraničan: to nudi mogućnost rasprave zašto to nije tako i pomoći da shvate kako mogu biti sigurni bez vršenja ikakvih mjerenja.
Drugi zadatak povezan s trokutima na ploči je odrediti u koliko se položaja može postaviti svaki trokut. Ovo je vježba prebrojavanja koja zahtijeva sustavan pristup, ali također uključuje i geometrijske vještine povezane s transformacijom. Simetrije, rotacija i translacija također se mogu prizvati kao način opisivanja relativnih položaja koje zauzima određeni trokut.
Na primjer, mali trokut gore lijevo može se postaviti na četiri različita načina u svaki kvadrat mreže čime se ukupno dobiva 16 mogućih položaja.

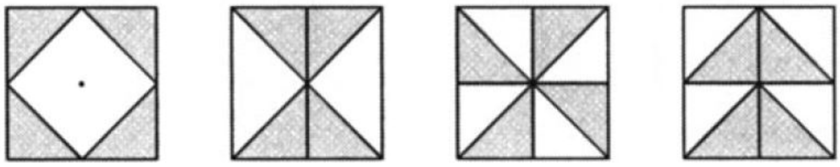
Zadatak s kvadratnom mrežom ima sve moguće dodatke: isto se pitanje može pitati i za četverokute ili druge mnogokute, a veća kvadratna mreža točaka nudi dodatne mogućnosti.

2.2 Simetrija

Svaki od prikaza na Slici 8 napravljen je postavljenjem malih pravokutnih jednakokračnih trokuta na mrežu veličine 3 sa 3. Postoje mnogi drugi mogući razmještaji za koje se od učenika može tražiti da ih pronađu. Prikazi poput ovih mogu se koristiti kako bi se poboljšala sposobnost učenika da opišu i oblikuju mentalne slike oblika i odluče koliko osi simetrije postoji.
Dolje prikazani razgovor, koji se odnosi na prikaz s lijeve strane, nudi neke od točaka koje učenici trebaju razmotriti:

Učitelj: Opišite mi ovaj oblik.
Učenik A: To je mali kvadrat u velikom kvadratu.
Učenik B: Postoje četiri trokuta na vrhovima.
Učitelj: Što možete reći o trokutima?
Učenik C: Svi su jednake veličine.
Učenik D: Svi imaju pravi kut.
Učitelj: Još nešto?
Učenik E: To su jednakokračni trokuti.
Učitelj: Koliki dio prikaza je zatamnjen?
Učenik F: Polovina.
Učitelj: Kako znate?
Učenik G: Jer četiri trokuta mogu stati u kvadrat u sredini.
Učitelj: Postoji li ovdje os simetrije?
Učenik H: Da, od sredine – ravno gore i dolje.
Učenik I: I ide od strane do strane, dakle postoje dvije.
Učitelj: Još neke ideje?
Učenik J: Mogli bismo ići od kuta do kuta.
Učenik K: I drugih kutova. Dakle, postoje četiri moguće osi simetrije.

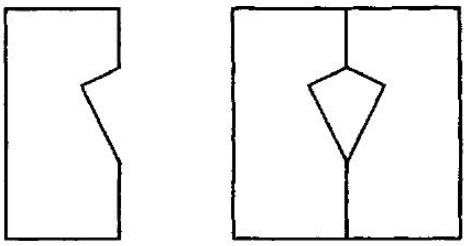
Treći prikaz ne posjeduje os simetrije što učenicima nije nužno očigledno. Moraju isprobavati rad s ovakvim razmještajem kako bi sami sebe uvjerili u to prije nego se ideja rotacije uvede na neformalan način. Naravno, važno je shvatiti kako neki razmještaji neće pokazivati ikakvu simetriju i kako mijenjanje boja komponenti crteža kao što su ovi mogu promijeniti simetriju. Slične rasprave mogu se dogoditi s



Slika 8: Promatranje osi simetrije

drugačijim razmještajima i učenike se može pitati da pronađu vlastite, ako je moguće osmišljene tako da ispunjavaju određene uvjete. Na primjer, može ih se tražiti da pronađu razmještaj u kojem postoji samo vodoravna osna simetrija ili onaj u kojem uopće nema simetrije, niti osne simetrije niti rotacije.

Savijanje i rezanje papira korisni su načini propitivanja simetrije jer možemo zadati učenicima da predvide što će se dogoditi vizualiziranjem mentalne slike i ispitivanja svojstava. Prikaz s lijeve strane na Slici 9 je list papira kvadratnog oblika presavijen popola. Rub s desne strane prikaza mjesto je savijanja i izrezan je trokut. Učenike se pita da predvide oblik koji će rupa zauzeti kada se papir rastvori.



Slika 9: Simetrija dobivena savijanjem papira

Učitelj: Presavio sam ovaj komad papira i izrezao trokut na mjestu savijanja.
Kojeg će oblika biti rupa kada je raširim?
Učenik A: Imat će četiri stranice.
Učitelj: Kako to znaš?
Učenik B: Jer se dvije stranice koje ste izrezali nalaze na obje strane papira.
Učitelj: Kako zovete oblik koji dobijete?

Učenik C: Kvadrat.
Učenik D: Ali stranice nisu jednake. To je pravokutnik.
Učitelj: Ima li netko tko se ne slaže s time?
Učenik E: Gornje dvije stranice su kraće, a donje su duže, tako da ne može biti pravokutnik.
Učenik F: To je deltoid.
Učitelj: Je li to točno?
(Otvara presavijeni papir kako bi otkrio deltoid kao na desnom prikazu.)

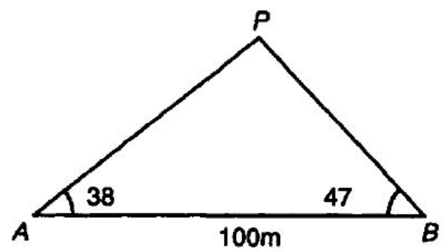
Ovo, također, nudi velik broj mogućnosti za eksperimentiranje i raspravu. Oblik koji se izreže može se izmijeniti i broj presavijanja može se povećati.

2.3 Kutovi

Pojam kuta je mnogo teži koncept od pojma duljine. Treba biti povezan s okretanjem od ranih početaka tako da se pravi kut poveže s okretom za četvrtinu kruga, a ispruženi kut s okretom za polovinu kruga. Oni se mogu povezati s uputama "okreni desno", "okreni lijevo" i "okreni oko sebe", ali je jezik ovdje mogući izvor poteškoća. Poveznica između okretanja desno i pravih kutova može sugerirati da postoji takvo nešto kao lijevi kut. Desno i lijevo kao smjerovi okretanja vežu se s okretanjem u smjeru kretanja kazaljke na satu i u suprotnom smjeru dok se desno, kao opis kuta, koristi nepoštivajući smjer okretanja koji često nije određen ili posebno važan.
Kutovi temeljeni na okretanju za četvrtinu kruga trebaju se istraživati s mlađim učenicima na način da ih se pita da naprave tjelesne kretnje i promatranjem brojnih primjera okretanja koje mogu vidjeti posvuda oko sebe – okretanje kvake na vratima ili upravljača automobila, otvaranje poklopca na posudici džema ili paste za zube, okretanje kazaljki na satu i tako dalje.

Jedna je od ključnih ideja je naglasiti kako je kut povezan s idejom okretanja ili rotacije. Način na koji se učenici uče služiti kutomjerom trebao bi se nadovezati i naglasiti ovu poveznicu s okretanjem. Ovdje su važne dvije teškoće s kojima se susrećemo pri korištenju kutomjera. Prvo, potrebno je ispravno poravnati središte i nultu liniju kutomjera. Ovo nije velik problem s kutomjerom od 360°, ali učenici često netočno postavljaju donji rub polukružnog kutomjera uzduž linije kuta kojeg mjere. Drugo, i mnogo važnije, je problem odlučivanja s koje skale na kutomjeru treba očitati broj stupnjeva. Udžbenici i učitelji razlikuju se u savjetima koje daju o ovome. Iskusni korisnici vide koja je vrijednost točna tako da nesvjesno osjećaju je li kut šiljast ili tup, ali ovo možda nije najbolji pristup s početnicima koji mogu zamijeniti ove dvije riječi. Ovo naglašava ideju kuta kao okretanja ako ih se ohrabri da počnu od nule i broje oko kutomjera kako bi dobili traženi kut, postupak koji postaje suvišan kako postaju sigurni u procjenjivanju veličine kuta kao smjernice u radu.

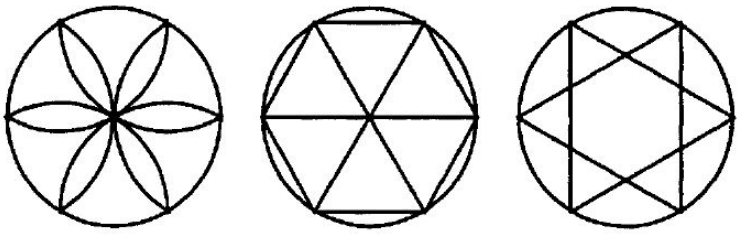
Nije teško zadati zanimljive zadatke koji razvijaju vještine mjerenja. Nakon nekoliko početnih primjera za vježbu s mjerenjem i konstruiranjem kutova, ove se vještine mogu povezati s praktičnim situacijama i koristiti za razvijanje daljih geometrijskih ideja. Nacrti u mjerilu mogu se koristiti za rješavanje jednostavnih problemskih zadataka. Na primjer, korištenje dvaju kutova izmjerenih s dva položaja kako bi se odredila udaljenost dalekog objekta. Slika 10 prikazuje kako se kutovi koji iznose 38° i 47° od dviju točaka A i B, međusobno udaljenih 100 metara linijom istok-zapad, prema udaljenom objektu P, mogu koristiti kako bi se napravio nacrt u mjerilu iz kojeg se može odrediti udaljenost objekta. Može se raspravljati o nejasnoći po pitanju onoga što se misli pod udaljenošću objekta – mislimo li na dužine $\overline{AP}$ i $\overline{BP}$ ili okomitoj udaljenosti od P do $\overline{AB}$? Osim učenja mjerenja duljina i kutova, učenici



Slika 10: Određivanje položaja udaljenog objekta

bi također trebali naučiti kako koristiti šestar kako bi označili dužine tijekom crtanja preciznih crteža. Tada mogu naučiti crtati konstrukcije ravnalom i šestarom koji su tako zanimljivo sredstvo u učenju geometrije.

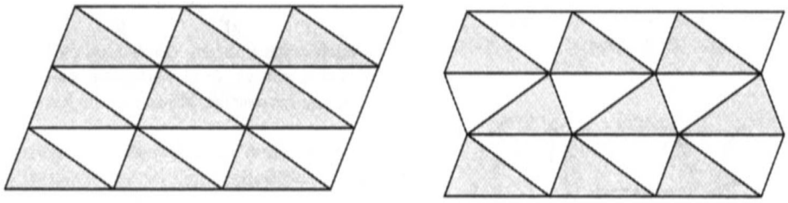
Slika 11 prikazuje tradicionalan uzorak "cvijeta" s kojim se učenici susreću kao s ranom vježbom korištenja šestara. Činjenica da je jednostavno konstruirati šest jednako udaljenih točaka na kružnici olakšava crtanje šesterokuta upisanoga u krug. Druga dva prikaza povezuju ovo s jednakostraničnim trokutima. Desni prikaz potiče zanimljiva pitanja poput određivanja koliko iznosi dio površine šesterokuta u sredini od površine šesterokrake zvijezde u većem šesterokutu koji je opisuje. Također povlači i ideju crtanja još jedne šesterokrake zvijezde u manjem šesterokutu, a onda i još jedne manje od te i tako dalje – uvod u čuda beskonačno malenog!



Slika 11: Konstrukcije nastale korištenjem šest točaka na krugu

2.4 Popločavanja ravnine i transformacije

Popločavanje nudi još jedan zanimljiv medij za razvijanje prostornoga zora i istraživanja svojstava oblika. Slika 12 pokazuje dva oblika popločavanja napravljena od trokuta. Stvaranje ovakvih uzoraka bilo s pojedinačnim kartonskim ili plastičnim trokutima ili crtanjem je vrijedna vježba sama po sebi. Promatranje i opisivanje onoga što je opaženo kod popločavanja proširuje razumijevanje oblika i korištenje jezika. Zanimljivo je pronaći druge oblike u popločavanjima: u oba slučaja lako je pronaći redove paralelograma: u jednom su slučaju svi okrenuti u istom smjeru, a u drugom su okrenuti u drugom smjeru u naizmjeničnim redovima. U gornjem primjeru također postoje i nizovi paralelograma koji se nižu dijagonalno dok se u drugom slučaju mogu vidjeti dva reda deltoida koji idu vodoravno u suprotnim smjerovima. Modificiranjem trokuta tako da koristimo jednakostranične, jednakokračne ili pravokutne dobit ćemo druge mogućnosti i, naravno, postoji i čitav niz mogućnosti korištenjem drugih mnogokuta.



Slika 12: Popločavanje ravnine trokutima

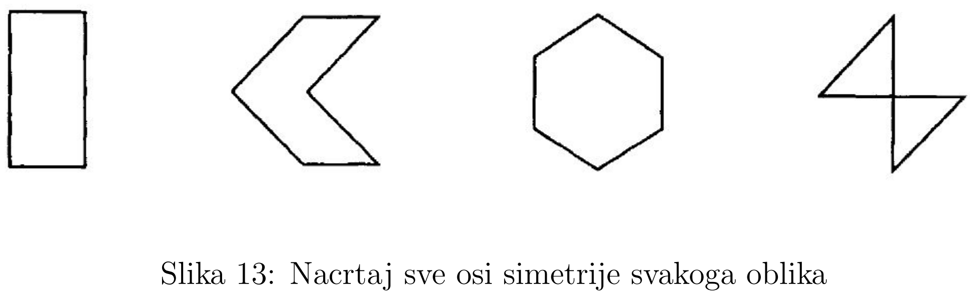
Tri su važne transformacije: simetrija, rotacija i translacija s kojima bi se učenici trebali sresti na neformalan način u ranoj fazi kao načinima opisivanje svojstava oblika i njihovog istraživanja. Ranije razmatrana popločavanja su bazirana na translaciji. Istraživanjem zrcalnog učinka, kako na svakodnevnim tako i na geometrijskih oblicima, počinju se razvijati svojstva simetrija na neformalan način.

3 Mnogokuti: simetrija i svojstva kuta

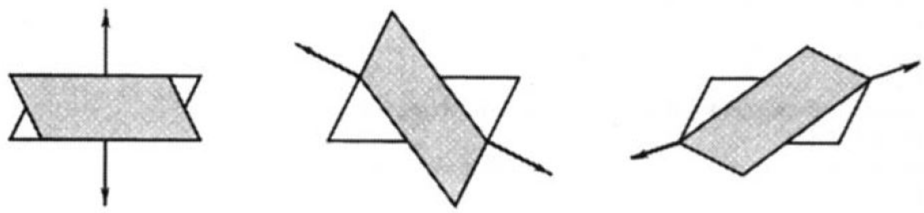
3.1 Simetrija: zrcaljenje i rotacija

Simetrija je neposredna i sveprisutna karakteristika širokog spektra geometrijskih oblika i možemo pronaći mnoštvo primjera simetrije, kako u prirodi (cvijeće, pahuljice, ljudsko lice), tako i izvan nje (loga, artefakti, simboli).

Osna simetrija, usko povezana s idejom zrcaljenja, jednostavnija je i dostupnija od rotacije. Veliki broj primjera nudi vrijedan izvor na koji se može pozvati kako bi se prepoznala važna svojstva osne simetrije, kao i primijetilo kako postoje oblici koji pokazuju neku drugu simetriju ili nepostojanje iste. Ključna karakteristika osne simetrije prisutnost je jedne ili više osi simetrije od kojih svaka dijeli oblik na dvije identične ali preokrenute polovice. Na jednostavnoj razini os simetrije je linija duž koje se oblik može presaviti tako da se obje polovice idealno podudaraju, odnosno možemo reći da je ona zrcalna linija koja nam daje dvije polovice oblika koje su zrcalni odraz jedna druge.
U proučavanju osne simetrije učenici se trebaju uključiti u sveobuhvatno istraživanje koje uključuje presavijanje, rad sa zrcalima i drugim praktičnim zadacima koji uključuju ključne probleme određivanja položaja i broja linija simetrije pokazanih nizom različitih oblika. Slika 13 pokazuje tipičan problemski zadatak iz učionice namijenjen ovakvoj vrsti istraživanja.
Primjeri koji ne pokazuju simetriju važan su izvor razumijevanja: učenicima nije uvijek jasno kako veliko slovo N ili paralelogram ne pokazuju simetriju jer je intuitivni osjećaj kako su simetrični na neki način vrlo snažan. Vježba presavijanja papirnatog paralelograma na pola na različite načine, kao što je prikazano na Slici 14, pomaže učenicima da uoče kako ne postoji os simetrije.



Slika 13: Nacrtaj sve osi simetrije svakoga oblika



Slika 14: Presavijanje paralelograma: ne postoji linija simetrije

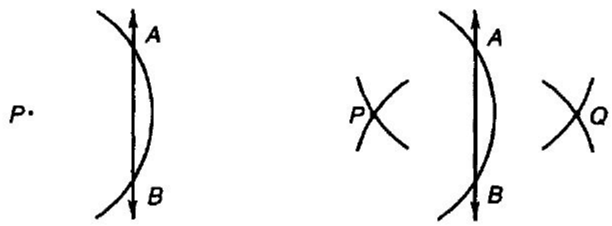
U pravilu, zrcaljenje vodoravnim ili okomitim linijama simetrije nije problematično: učenici mogu vidjeti takve linije na slici i, ako im je zadan predmet ili polovina slike, nemaju problema s crtanjem odraza. Poteškoće se javljaju kada je linija simetrije u nagibu.

Zadatak koji koristi ove ideje bio bi konstruirati sliku jednostavnog oblika na zadanoj zrcalnoj liniji ili dovršiti sliku kada je zadan dio na jednoj strani osi simetrije. Ovo se može izvesti ili kao vježba korištenjem olovke i papira ili korištenjem softvera dinamičke geometrije. Korištenje softvera dinamičke geometrije mnogo je zornije jer se i objekt i zrcalna linija mogu pomicati kako bi se promatrao učinak toga na sliku. Odabir načina na koji konstruiramo sliku objekta korisna je vježba geometrijskog razmišljanja jer osigurava dobar fokus za raspravu u razredu ili maloj skupini. Učenici trebaju razviti analitički pristup temeljen na razumijevanju svojstava zrcaljenja kako bi se oduprli tendenciji da donose netočne intuitivne zaključke kod rješavanja takvih zadataka dovršavanja.

Sljedeći razgovor povezan sa Slikom 15 napravljenom korištenjem softvera dinamičke geometrije, ali potrebna je samo manja prilagodba ako se koristi ploča ili projektor kao način prikaza s učenicima koji rješavaju zadatke na papiru ravnalom i šestarom.

Učitelj: Kako možemo pronaći sliku slova P u zrcalu?
Učenik A: Mora biti na jednakoj udaljenosti s druge strane.
Učitelj: Kako ju možemo postaviti na pravo mjesto?
Učenik B: Nacrtat ćemo liniju okomitu na zrcalo.
Učitelj: Kako?
Učenik C: Nacrtat ćemo kružnicu sa središtem u točki P i vidjeti gdje siječe zrcalo.
Učitelj: Zašto to treba napraviti?

Učenik A: Dvije točke na zrcalu, A i B, na jednakoj su udaljenosti od točke P.
Učitelj: Što je sljedeće?
Učenik B: Još dvije kružnice iz tih točaka s istim polumjerom kao ranije.
Učitelj: Što sada?
Učenik C: Slika slova Q je na mjestu gdje se te kružnice sijeku.
Učitelj: Zašto je to tako?
Učenik A: Zato što je na jednakoj udaljenosti od točaka u zrcalu.



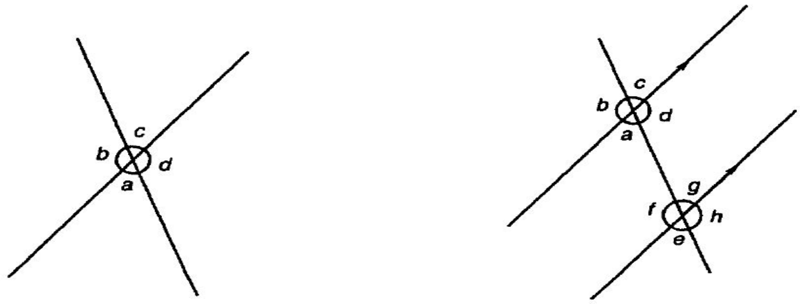
Slika 15: Konstruiranje slike dobivene zrcaljenjem

Koristeći dinamičku geometriju možemo promatrati učinak pomicanja točke P i raspravljati zašto konstrukcija osigurava da je slovo Q slika slova P. Činjenica da su trokuti ABP i ABQ sukladni jednakokračni trokuti, jer su im odgovarajuće stranice jednake, objašnjava zašto su P i Q zrcalne slike. Kada je prikaz dovršen, linije nastale konstruiranjem mogu se sakriti i tada se mogu konstruirati dodatne točke i njihove slike kako bi se efekt pomicanja cijelog oblika poput trokuta mogao prikazati i pojasniti.

O rotaciji se može raspravljati na sličan način, no tada postoji dodatna komplikacija mjerenja kutova ili konstruiranja kutova jednake veličine. Za raspravu je važno uključiti učenike u objašnjavanje povezano s konstrukcijom umjesto davanja niza uputa kako bi se dobio krajnji rezultat.

3.2 Svojstva kuta i trokuti

Zadaci sa susjednim kutovima prvi su primjeri gdje se nepoznati kutovi mogu pronaći razmišljanjem umjesto mjerenjem. Oni pak vode vršnim kutovima i kutovima uz presječnicu usporednih pravaca. Zaključci o jednakosti vršnih kutova te odgovarajućih kutova uz presječnicu usporednih pravaca mogu se utvrditi načinom

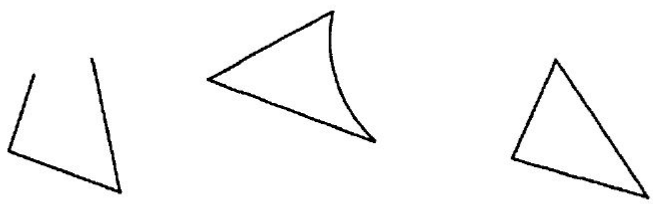


(a) $\left.\begin{array}{l} a+b=180 \\ b+c=180 \end{array}\right\} \Rightarrow a=c$ (b) $\left.\begin{array}{l} a=e \\ e=g \end{array}\right\} \Rightarrow a=g$

Slika 16: Svojstva kuta

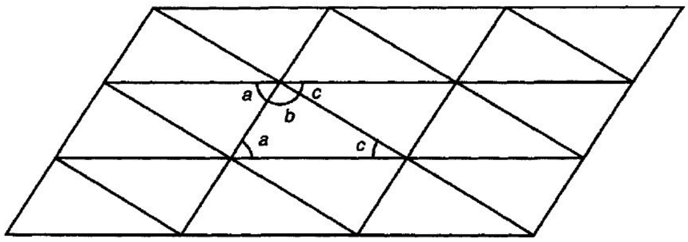
razmišljanja prikazanim na dvama primjerima Slike 16. U oba slučaja algebarski argument imat će više smisla učenicima ako se prije njega isti argument primijeni na mnoštvo brojčanih primjera.

Uzmimo u obzir neka od osnovnih svojstava trokuta. Korisno je prvo upitati učenike kako bi definirali trokut, a onda im pomoći da preoblikuju svoju definiciju. Uobičajeno, rasprava bi mogla uključiti izjave učenika na koje učitelj odgovara prikazima kao na Slici 17. Ovo vodi progresivnom usavršavanju ideja o tome što definira trokut, a što s vremenom vodi do sljedeće izjave: "trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine koje imaju zajedničke krajnje točke."



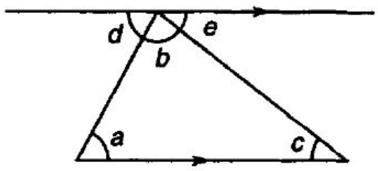
Slika 17: Što je trokut?
Ima tri stranice. Moraju biti spojene. Moraju biti ravne.

Tri vrste trokuta – jednakostranični, jednakokračni i raznostranični – i njihova neposredna svojstva učenicima mogu predstavljati poteškoće, a posljednja dva nude mogućnost razlikovanja šiljastih, pravokutnih i tupokutnih trokuta. Popločavanje ravnine trokutima različitih vrsta koristan je polazni zadatak sa zanimljivim krajnjim rezultatom. Popločavanja ravnine, poput onoga na Slici 18, mogu poslužiti za usmjeravanje pažnje na svojstva kuta. Kutovi označeni slovima sugeriraju kako je zbroj kutova trokuta 180° i vode korak prema dokazu.



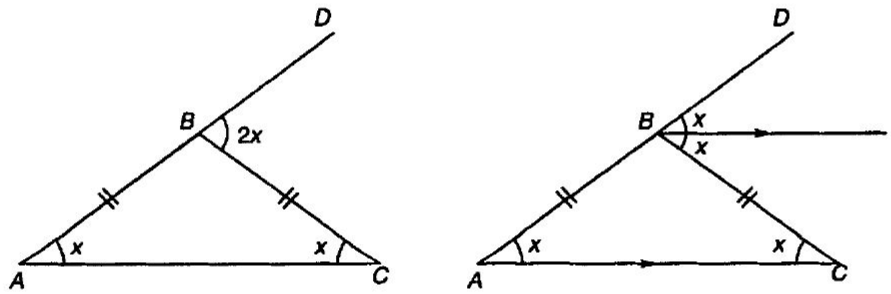
Slika 18: Popločavanja ravnine trokutima

Dokazivanje da je zbroj kutova trokuta jednak 180° obično je prvi susret koji učenici imaju s tvrdnjom na koju se gleda kao na dokaz, iako to ne bi trebao biti prvi put da su se susreli s jednostavnim nizom zaključaka, bilo kako bi utvrdili novu činjenicu, bilo riješili jednostavan problemski zadatak. Trebaju uvidjeti kako mjerenje nikad ne može dati precizan rezultat: kako znamo da zbroj zapravo nije 179° ili 179.873° ili neki sličan neobičan broj? Na Slici 19 pravac paralelan s osnovicom trokuta konstruiran je kako bi prolazio gornjim vrhom. Ovo rezultira s dva para kutova formiranih uz presječnicu usporednih pravaca koji su jednaki, $a = d$ i $c = e$. Svojstvo zbroja kutova tada slijedi direktno iz činjenice kako kutovi d, b i e čine ispruženi kut, $d + b + e = 180° \Rightarrow a + b + c = 180°$. Korištenje softvera dinamičke geometrije kako bi se napravio prikaz omogućava izmjenjivanje trokuta te se time može naglasiti da se zaključak može primijeniti na svaki trokut i nije ograničen na određeni trokut prikazan statičnim prikazom.



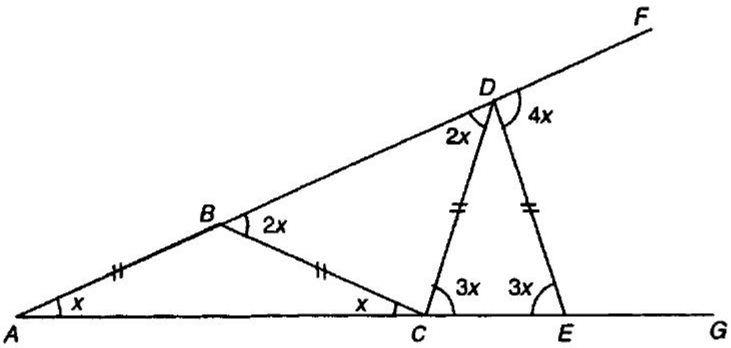
Slika 19: Zbroj kutova u trokutu

Slika 20 prikazuje jednostavno, ali važno svojstvo jednakokračnog trokuta, odnosno to da vanjski kut nasuprot dvaju jednakih kutova iznosi dvostruko više od jednog takvog kuta. Ovo je neposredna posljedica zbroja kutova trokuta i poseban slučaj činjenice kako je u bilo kojem trokutu vanjski kut jednak zbroju dvaju suprotnih unutarnjih kutova. Budući da se jednakokračni trokuti javljaju često, posebno u vezi s kružnicama, korisno je biti svjestan jednostavnog rezultata poput ovoga. Izravna je vježba potvrditi ovo korištenjem numeričkih vrijednosti za kutove na osnovici trokuta, a konstrukcija pravca kroz B paralelnog s AC, kao na prikazu s desne strane, daje jednostavan dokaz.



Slika 20: Vanjski kut jednakokračnog trokuta

Slika 21 prikazuje prikladan problemski zadatak koji uključuje jednakokračne trokute. Prikaz se sastoji od dva polupravca AF i AG s tri jednakokračna trokuta konstruirana između njih. Zadatak je odrediti vezu kuta između dvaju početnih linija i drugih kutova. Zanimljiv rezultat je kako su navedeni kutovi umnošci početnog kuta označenog slovom x na dijagramu.
Za učenike je korisno početi s postavljanjem zadatka s danom mjerom kuta BAC i zadati im da odrede sve druge kutove na prikazu. Ponavljanje izračuna s drugim vrijednostima brzo će dovesti učenike do zaključka kako su kutovi DCE i EDF tri, odnosno četiri puta veći od početnog kuta. Zaključak se tada može potvrditi označavanjem kuta BAC sa x i izražavanjem drugih kutova u odnosu prema x. Ovo se može napraviti na jednostavan način primjenom činjenice kako je vanjski kut trokuta jednak zbroju dva unutarnja kuta koji mu nisu susjedni za svaki od trokuta ABC, BCD i CDE.

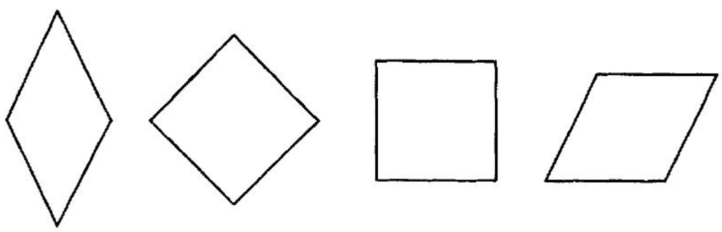


Slika 21: Zadatak s jednakokračnim trokutima

Svojstva trokuta povezana sa susjednim kutovima, kutovima uz presječnicu i trokutima, posebno jednakokračnim trokutima, mogu se koristiti za rješavanje velikog broja jednostavnih zadataka i dokazivanje jednostavnih svojstava čime se algebra može koristiti na smislen način.

3.3 Svojstva četverokuta

Neki četverokuti poznati su učenicima od rane dobi, pogotovo kvadrat, pravokutnik, romb i deltoid. Romb je dobra polazišna točka za promatranje svojstava četverokuta jer u usporedbi s kvadratima i pravokutnicima nije niti previše poznat niti previše poseban. Ključna karakteristika za definiranje romba jest da je to četverokut, oblik s četiri stranice koje su sve jednake duljine. Učenici često imaju teškoća s prepoznavanjem istog oblika u drugačijim položajima i prihvaćanjem kako pojedini oblik može biti poseban slučaj oblika s općenitijim svojstvima. Rombovi prikazani na Slici 22 dobar su primjer ovoga jer pokazuju kako je kvadrat poseban oblik romba s pravim kutovima i kako je romb paralelogram s jednakim stranicama.



Slika 22: Varijacije romba

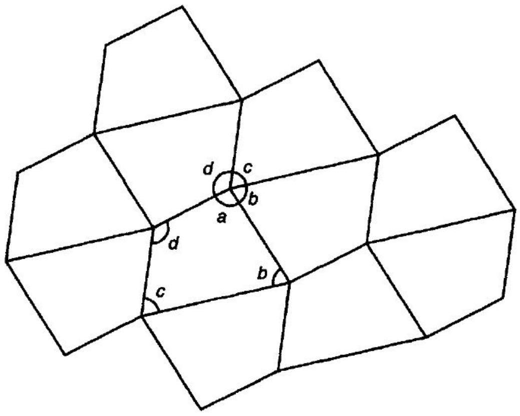
Detaljan pogled na romb otkriti će sljedeća svojstva:

- četiri stranice jednake duljine
- dvije osi simetrije
- oba para nasuprotnih stranica su paralelna
- oba para nasuprotnih kutova su jednaka
- zbroj susjednih kutova iznosi 180° što neposredno proizlazi iz činjenice kako zbroj kutova bilo kojeg četverokuta iznosi 360°
- dijagonale se međusobno sijeku pod pravim kutom, što za posljedicu ima četiri sukladna trokuta dobivena unutar romba presjecanjem dijagonala.

Učenicima je potrebno eksperimentiranje s konstruiranjem oblika, njihovim varijacijama, pomicanjem i međusobnim uspoređivanjem, korištenjem niza različitih medija: prikaza na papiru, ploči, zaslonu projektora, kartonskih ili plastičnih oblika s kojima mogu raditi, modela koji se mogu mijenjati na isti način kao rombovi na Slici 22. O primjerima treba raspravljati kako bi se dobila definirajuća svojstva i poveznice između različitih četverokuta.
Kao dodatnu ilustraciju ovoga navesti ćemo usporedbu svojstava paralelograma i deltoida.

Paralelogram	Deltoid
dva para nasuprotnih stranica su jednaka	dva para susjednih stranica su jednaka
nema osi simetrije	jedna os simetrije
dijagonale nisu jednake duljine	dijagonale nisu jednake duljine
dijagonale nisu okomite	dijagonale su okomite
dijagonale se raspolavljaju	jedna dijagonala se raspolavlja
dijagonale ne raspolavljaju kutove	jedna dijagonala raspolavlja kutove

Popločavanja ravnine četverokutima privlačna su i poučna. Zanimljiva je činjenica da svi četverokuti omogućavaju popločavanja jer im zbroj kutova iznosi 360°. Slika 23 pokazuje takvo popločavanje: označavanje kutova slovima ili bojama olakšava međusobno usklađivanje niza podudarajućih četverokuta i privlači pažnju na svojstvo zbroja kutova. Popločavanja ravnine kvadratima i pravokutnicima jednostavna su i poznata. Popločavanja rombovima i paralelogramima jasno pokazuju kako susjedni parovi kutova imaju zbroj koji iznosi 180°.



Slika 23: Popločavanja ravnine četverokutima

3.4 Mnogokuti

Pravilne mnogokute, kao i one koji nisu takvi, učenici susreću rano jer su dobri primjeri koji pokazuju simetriju i imaju jednostavna, ali važna svojstva kuta. Zbroj kutova konveksnog mnogokuta s n stranica može se odrediti dijeljenjem mnogokuta na trokute bilo crtanjem svih dijagonala iz jednog vrha, čime se dobiva n–2 trokuta, bilo spajanjem točke unutar mnogokuta sa svakim vrhom, čime se dobiva n trokuta. Svaki trokut daje 180° zbroju kutova mnogokuta, ali u drugom slučaju dodatnih 360° dobivenih oko unutarnje točke mora biti oduzeto. Ova dva pristupa daju dva jednaka rezultata, zbroj veličina unutarnjih kutova konveksnog mnogokuta iznosi: $180(n-2) = 180n - 360$.

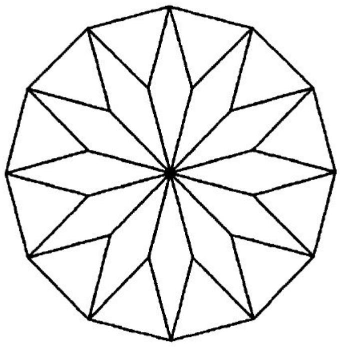
Nakon određivanja zbroja veličina kutova jednostavno je izračunati unutarnji kut pravilnog mnogokuta dijeljenjem s brojem stranica kako bismo dobili: $180 - \frac{360}{n}$.

Zbroj vanjskih kutova bilo kojeg mnogokuta iznosi 360°, što u učionici možemo demonstrirati govoreći učeniku da hoda s jednom ispruženom rukom oko mnogokuta nacrtanog na podu. Jasno je kako se ispružena ruka okrenula za puni krug kada se okrenula oko svakog od vanjskih kutova.

3.4.1 Primjer s pravilnim dvanaesterokutom

Pravilni dvanaesterokut može se rastaviti na 12 jednakostraničnih trokuta i 12 rombova kako je prikazano na Slici 24. Ovo dijeljenje nudi brojne zanimljive

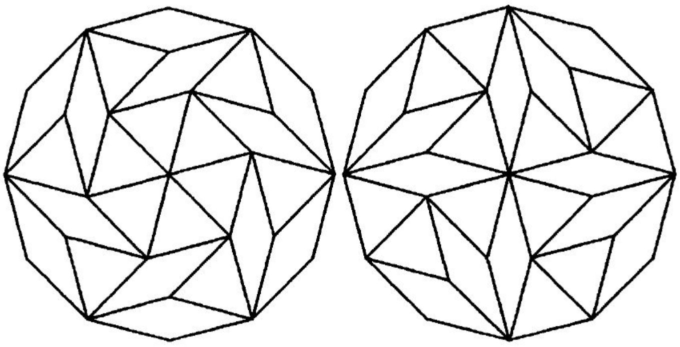
mogućnosti u razredu. Ono na privlačan način priziva i osnažuje osnovne geometrijske ideje povezane s kutovima, oblicima i simetrijom. Svi rubovi rombova i trokuta koji čine dvanaesterokut iste su duljine. Kako središnji kut iznosi $\frac{1}{12}$ od $360°$, svaki romb ima dva kuta od $30°$ i dva od $150°$. Kao alternativan pristup možemo izračunati tupi kut romba kao $\frac{1}{2}(360° - 60°) = 150°$ označavanjem kutova na svakoj od vanjskih točaka gdje se dotiču jednakostraničan trokut i dva romba.
Iz toga proizlazi kako je svaki unutarnji kut dvanaesterokuta jednak $60° + 30° + 60° = 150°$.



Slika 24: Dijeljenje pravilnog dvanaesterokuta

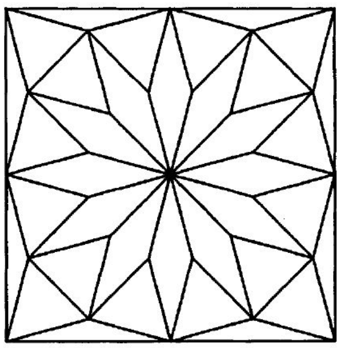
Crtanje razdiobe na papiru ili dinamičkom geometrijom nudi niz izazova. Korištenjem ravnala i šestara nije teško konstruirati kut od $30°$ dijeljenjem kuta od $60°$ jednakostraničnog trokuta. Prikaz se zatim može razraditi konstruiranjem kutova oko središta.
Jedna je od najupečatljivijih karakteristika ovog dijeljenja da se 12 trokuta i 12 rombova može presložiti na više načina kako bi se dobili dvanaesterokuti koji pokazuju različita svojstva simetrije. Na primjer, Slika 24 ima 12 osi simetrije i rotacijsku simetriju. Nijedan od dva prikaza sa Slike 25 nema osnu simetriju, ali oba imaju rotacijsku simetriju. Korisno je vidjeti kako male izmjene mogu promijeniti simetriju uvođenjem jedne ili više osi simetrije ili cjelokupnim uništavanjem simetrije. Učenici mogu istraživati i opisivati simetrije različitih razdjeljivanja dvanaesterokuta korištenjem seta prikladno obojanih kartica ili plastičnih oblika.

Još jedna zanimljiva karakteristika razdjeljivanja je da pruža jednostavan način izračunavanja površine pravilnog dvanaesterokuta. Slika 26 prikazuje kako se doda-



Slika 25: Simetrija dvanaesterokuta

vanjem pojedinih jednakostraničnih trokuta i pojedinih trokuta dobivenih izrezivanjem istih rombova duž njihove duže dijagonale dobiva kvadrat koji sadrži dvanaesterokut. Uspoređivanjem broja trokuta i rombova u kvadratu i dvanaesterokutu jednostavno je vidjeti kako dvanaesterokut zauzima $\frac{3}{4}$ površine kvadrata. Ako r označava polumjer kruga koji opisuje dvanaesterokut, tada je površina kvadrata jednaka $4r^2$, a s obzirom na to površina pravilnog dvanaesterokuta iznosi $3r^2$, malo manje od πr^2 površine kruga koji ga opisuje.



Slika 26: Koliko iznosi površina dvanaesterokuta?

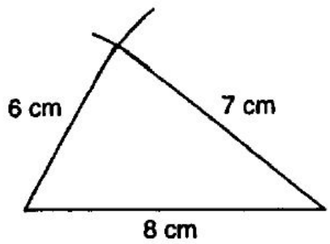
4 Konstrukcije i sukladnost

4.1 Konstruiranje trokuta i sukladnost

Tri transformacije: translacija, simetrija i rotacija zadržavaju oblik i njegovu veličinu, ali mu mijenjaju položaj i, u slučaju osne simetrije, orijentaciju. Usko su povezane s idejom sukladnosti koja se koristi za opisivanje oblika koji su identični u svim pogledima osim položaja i orijentacije. U nižim razredima učenici počinju razvijati osjećaj za sukladnost dok istražuju svojstva transformacija preklapanjem jednog oblika drugim. Ovo se može eksperimentalno potvrditi sa stvarnim oblicima, papirom za precrtavanje i savijanjem papira u slučaju zrcaljenja.

Prva pomisao na sukladnost temelji se na našoj intuiciji preklapaju li se dva oblika savršeno položimo li jedan na drugi. Nakon toga prelazimo na mjerenje kao provjeru naše intuicije. I konačno, shvaćajući kako mjerenje nije sasvim precizno te kako je korisno donositi općenite zaključke prelazimo na dokaze temeljene na rasuđivanju kako bismo dokazali da su dva oblika sukladna.
Biti sposoban precizno konstruirati geometrijske konfiguracije korisna je vještina sama po sebi bez obzira na to radi li se na papiru, korištenjem ravnala i šestara, ili na zaslonu računala s odgovarajućim softverskim paketom. Temeljni su principi slični kakvo god bilo sredstvo. Jedan se ključni problem javlja čim se učenicima zada da nacrtaju trokut s tri zadane stranice: nakon što se nacrta jedna stranica, kako pronaći položaj trećeg vrha? Korištenje šestara kako bi se dobili lukovi koji se sijeku ili softvera dinamičke geometrije kako bi se napravile dvije kružnice koje se sijeku jednostavan su, ali temeljan postupak o kojem bismo trebali raspraviti i argumentirati ga umjesto da ga jednostavno predstavimo kao postupak koji treba upamtiti. Sljedeći razgovor, povezan sa Slikom 27, ilustrira ideje koje bi učitelj mogao izvući od učenika.

Učitelj: Kako možemo precizno nacrtati trokut sa stranicama duljine 6 cm, 7 cm i 8 cm?
Učenik A: Prvo nacrtamo jednu stranicu.
(Nacrta stranicu duljine 8 cm.)
Učitelj: Kako ćemo nacrtati preostale stranice?
Učenik B: Korištenjem ravnala. Nacrtamo liniju duljine 7 cm.
(Nacrta liniju duljine 7 cm iz jednog vrha.)



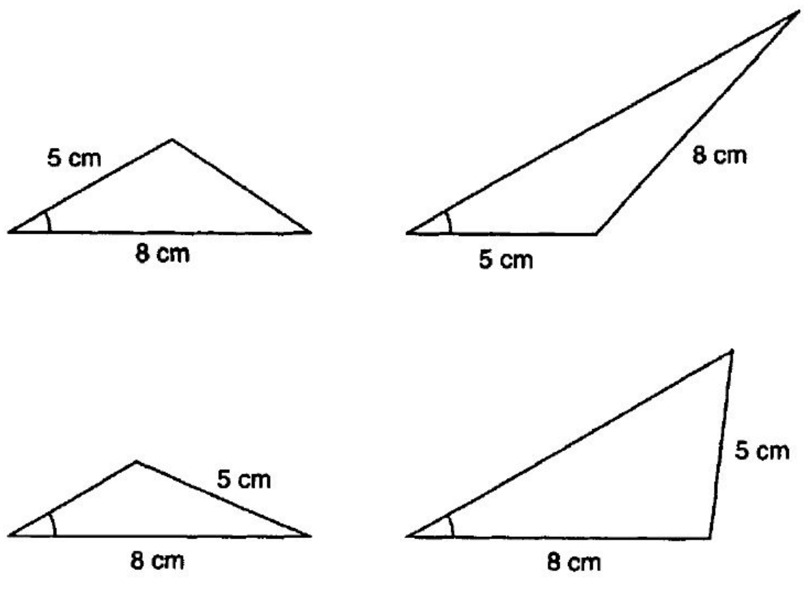
Slika 27: Crtanje trokuta sa stranicama 6 cm, 7 cm i 8 cm

Učitelj: Što je sljedeće?
Učenik C: Spojiti i dobiti treću stranicu.
Učitelj: Je li to točno?
Učenik D: Da. Ne, možda nije duljine 6 cm.
(Mjeri i shvaća da je duljina veća od 6 cm.)
Učitelj: Kako to možemo točno napraviti?
Učenik A: Koristeći šestar. Nacrtamo dio kružnice iz jednog vrha – polumjera 7 cm. Zatim dio druge polumjera 6 cm iz drugog vrha.
Učitelj: Što je sljedeće?
Učenik B: Spojimo vrhove ondje gdje se kružnice (lukovi) sijeku sa svakim završetkom prve stranice.
(Linije su povučene kako bi se dovršio trokut.)
Učitelj: Kako znate da je treća točka na pravom mjestu?
Učenik C: Sve su točke na ovoj kružnici (luku) (pokazuje kojem) udaljene 7 cm od te točke. A sve točke na drugoj su udaljene 6 cm od drugog kraja. Dakle, ta je točka 7 cm od jednog kraja i 6 cm od drugog.
Učitelj: Je li to jedini način da se to napravi?
Učenik D: Možemo napraviti duljinu od 7 cm na drugom kraju.
Učitelj: Bi li to činilo razliku?

Shvaćanje kako su svi trokuti nacrtani na ovaj način sukladni, iako ponekad postavljeni i orijentirani drugačije, ključna je ideja povezana s razumijevanjem slučaja sukladnosti kada se trokuti podudaraju u sve tri stranice (SSS).

Ovo je intuitivno očito većini učenika i može se potvrditi ukoliko od nekoliko njih zatražimo da nacrtaju trokut sa zadanim stranicama, izrežu ih i zaključe kako se svi oni mogu preklopiti. Manje je očigledno kako neke od kombinacija triju duljina neće dati trokut. Učenicima treba zadati da pokušaju nacrtati trokute sa stranicama 8 cm, 6 cm i 2 cm ili 8 cm, 6 cm i 1 cm kako bismo im pomogli da shvate ograničenja.

Situacija je manje jasna kada početni podaci uključuju stranice i kuteve. Zanimljiv je izazov zadati učenicima da nacrtaju trokute kada su im zadane dvije stranice i kut bez početnog određivanja položaja kuta. Slika 28 prikazuje četiri različita trokuta koji se mogu konstruirati korištenjem takvih podataka. Dolazak do toga potaknut će raspravu i dovesti do slučaja sukladnosti koji uključuje dvije stranice i kut između njih (SKS). Drugi položaji kuta zahtijevaju promišljanje o metodi konstruiranja sljedeće zadane stranice i mogućnosti da mogu postojati dva položaja za tu stranicu ili kako bi moglo biti nemoguće konstruirati trokut s određenom specifikacijom. Širina do koje ćemo razmatrati ove osjetljive teme ovisit će o razini koju su učenici dosegli i ciljevima određene nastavne jednice. Slični problemi koji se tiču eksperimenta, razmišljanja i rasprave pojavit će se i u trećem slučaju sukladnosti: podudaranje u jednoj stranici i dva kuta uz nju (KSK).



Slika 28: Trokuti sa stranicama 5 cm i 8 cm te kutom od 30°

Ubrzo nam postaje jasno da su potrebna tri podatka kako bi se konstruirao trokut. Četverokuti pružaju zanimljivu suprotnost: učenici će vjerojatno najprije pomisliti kako se od zadanih duljina četiri stranice može konstruirati samo jedan četverokut. Eksperimentiranjem korištenjem četiri krute kartonske ili plastične trake koje su povezane na krajevima kako bi se dobio četverokut ili četiri segmenta slično povezana korištenjem softvera za dinamičku geometriju postaje jasno kako četiri zadane stranice ne daju potpuno određen četverokut. Poveznica između četiri segmenta nije stroga, a redoslijed kojim su postavljena četiri dijela je važan, tako da je situacija mnogo složenija. Ako su četiri stranice zadane određenim redoslijedom, potreban je i kut između pojedinog para: pet je podataka zapravo dovoljno. Naravno, druge kombinacije ovih pet podataka mogu se istraživati, a pitanje koliko je mnogo podataka potrebno proteže se i na mnogokute s više stranica.

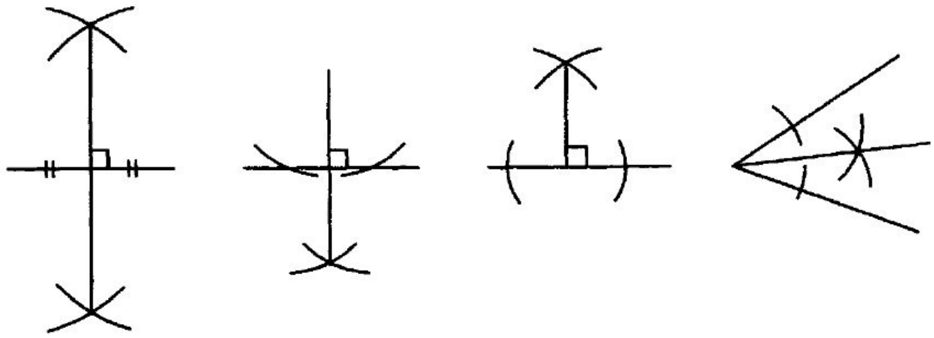
4.2 Konstrukcije ravnalom i šestarom

Umjetnost konstruiranja geometrijskih likova korištenjem ravnala i šestara te njezina moderna pojava u softverima dinamičke geometrije do nas je došla preko Grka putem Euklidovih poučaka. Konstruiranje trokuta pomoću zadanih mjera uvodi nas u ulogu kružnica i šestara u crtanju zadanih duljina. Određene standardne konstrukcije koristan su alat koji treba imati na raspolaganju u istraživanju geometrijskih svojstava. Kao i s konstruiranjem trokuta učenicima treba postaviti izazov da osmisle vlastite metode o kojima se može raspravljati i koje se mogu razrađivati umjesto da im se odmah ponudi postupak koji treba upamtiti.

Engleski Nacionalni kurikulum navodi četiri konstrukcije, prikazane na Slici 29, s kojima bi se učenici trebali upoznati:

- konstrukcija simetrale stranice
- konstrukcija okomice iz točke kroz pravac
- konstrukcija okomice iz točke na pravac
- konstrukcija simetrale kuta

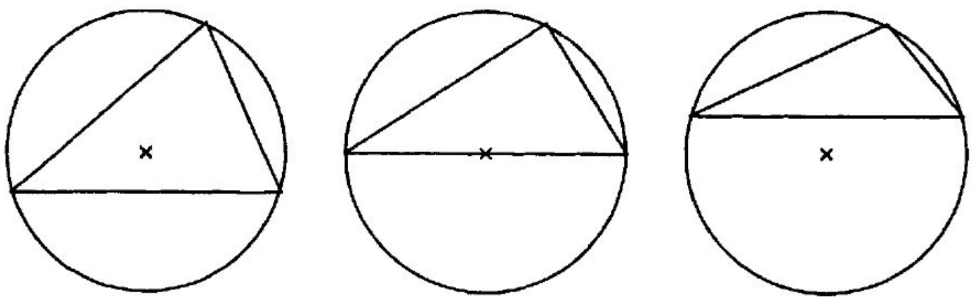
Ove se konstrukcije mogu uklopiti u mnoštvo zanimljivih problemskih zadataka. Konstruiranje trokutu opisane kružnice dobar je primjer izazova za učenike kojim bi samostalno riješili problem. Prednost je zadatka korištenje konstrukcija kako bi se dobio važan rezultat koji možemo provjeriti korištenjem središta da bi se nacrtala kružnica ili njegovim korištenjem kao centra rotacije trokuta. Kako možemo postići da učenici na ispravan način razmišljaju o ovome? Dobra strategija rješavanja problema promotriti je jednostavniji zadatak. U ovom slučaju je očita polazna točka



Slika 29: Četiri osnovne geometrijske konstrukcije

određivanje kružnice koja prolazi kroz dvije zadane točke. Ovo vodi činjenici da sve kružnice koje prolaze dvjema točkama imaju središte na simetrali dužine kojoj su to krajnje točke. Iz drugačije perspektive na njoj se nalaze točke jednako udaljene od dviju zadanih točaka. Tada je jednostavno uvidjeti kako sjecište simetrala dvaju stranica trokuta daje središte opisane kružnice. Kako bi bili potpuno sigurni, možemo konstruirati i simetralu treće stranice te vidjeti kako doista prolazi istim središtem.

Jedna od velikih prednosti korištenja softvera dinamičke geometrije s primjerom poput ovog je, ne samo to da se opisana kružnica može konstruirati kao provjera, nego da se početni trokut može mijenjati povlačenjem jednog ili više vrhova trokuta kako je prikazano na Slici 30. Ovo potiče i dodatna pitanja kao što je ono o značaju položaja središta unutar ili izvan ili na jednoj od stranica trokuta.



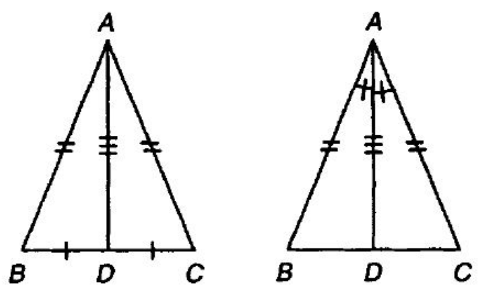
Slika 30: Mijenjanje položaja središta trokutu opisane kružnice

Učenicima je potrebno mnogo vježbe s tehnikama konstruiranja. One će biti učinkovitije i više će motivirati učenike ako se pojavljuju u kontekstu gdje se točni prikazi (konstrukcije) crtaju sa svrhom, bilo da se istražuju nizovi podataka potrebni za crtanje trokuta i drugih mnogokuta, crtaju prikazi u mjerilu, karte i planovi, istražuju svojstva oblika ili proizvode mreže za trodimenzionalne modele poput poliedara.

4.3 Sukladnost i dokaz

Opravdavanje konstrukcija korištenjem ravnala i šestara zahtjeva pozivanje na sukladnost trokuta. I ne samo to, usko je vezano uz donošenje zaključaka o svojstvima trokuta i četverokuta i svojstvima simetrije i rotacije. Općenito rečeno, identificiranje sukladnih trokuta važan je dio dokazivanja cijelog niza geometrijskih svojstava različitih razina složenosti.

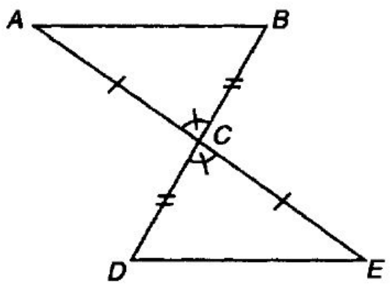
Na najjednostavnoj razini možemo promatrati jednakokračan trokut kojeg definira par jednakih stranica iz čega slijedi kako je jednak i par kutova uz osnovicu. Ovo se svojstvo može dokazati na dva načina od kojih svaki koristi drugačiji slučaj sukladnosti kako je i prikazano sa Slici 31. Oba se dokaza temelje na pokazivanju kako su trokuti ABD i ACD sukladni. U prvom je trokutu točka D polovište stranice BC čime se dobiva slučaj SSS, u drugom stranica AD raspolavlja kut BAC čime se dobiva slučaj SKS. Činjenica kako je svojstvo očigledno čini upitnim je li to razumna polazišna točka za primjenu ideje sukladnih trokuta. Učenici u ranoj fazi trebaju vidjeti primjere sukladnosti koji se koriste za izvođenje manje očitih istina.

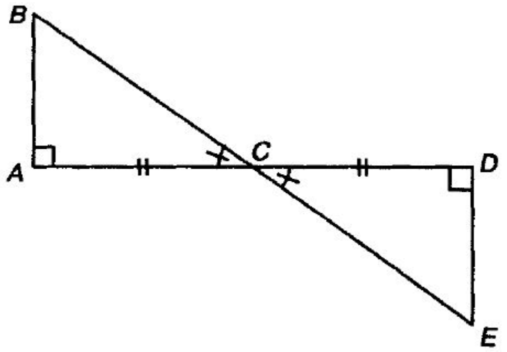


Slika 31: Dokazivanje da su kutovi uz osnovicu jednakokračnog trokuta jednaki

O svojstvima paralelograma i deltoida raspravljalo se u prethodnom poglavlju, ali se nije pokušala napraviti razlika između svojstava korištenih u definiciji lika i izvedenih svojstava. Postoji izbor koja će se smatrati definirajućima i promišljanje koje vodi odgovarajućim svojstvima ovisi o tom izboru. Na primjer, paralelogram se može definirati kao četverokut s parom jednakih i paralelnih nasuprotnih stranica ili to može biti četverokut kojemu su oba para nasuprotnih stranica paralelna ili četverokut kojemu su oba para nasuprotnih stranica jednaka. Kao što je slučaj i s primjerom jednakokračnih trokuta, druga će svojstva proizlaziti kroz pokazivanje kako su dva trokuta dobivena uključivanjem dijagonale sukladna te nakon toga promišljanjem o trokutima koji će nastati uključivanjem druge dijagonale. Ista se pitanja javljaju i s deltoidom iako tu postoji manje fleksibilnosti oko početne definicije.

Navedeni primjeri koji uključuju svojstva likova prilično su apstraktni i mnogim učenicima neprirodni, tako da se mora voditi briga o tome da se ne ostavi dojam kako se sukladni trokuti koriste samo za dokazivanje stvari koje su već sasvim jasne. Dva zanimljiva primjera prikazana su na Slici 32. Oni su povezani s jednostavnim praktičnim situacijama i mogu se koristiti za procjenu nekih stvarnih udaljenosti.



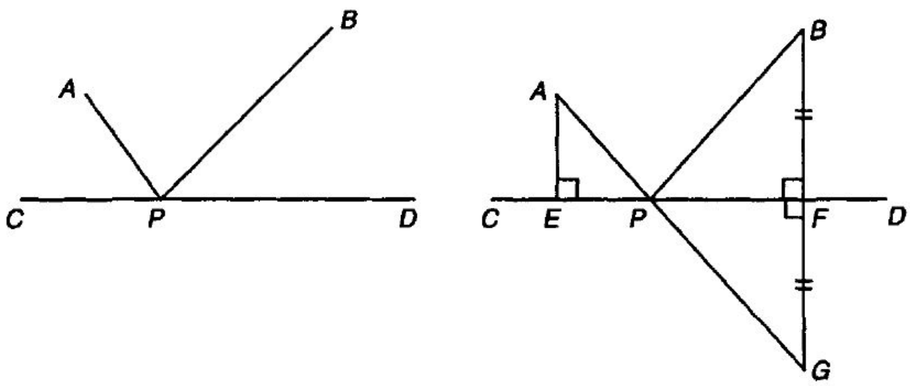


Slika 32: Procjena širine jezera i rijeke

U prikazu s lijeve strane na Slici 32 stranica AB je širina jezera koja se treba procijeniti. Odabiremo točku C dostupnu s oba kraja jezera, mjerimo udaljenost stranice AC i tada produžimo stranicu AC do E tako da je AC jednake duljine kao CE. Slično tome, mjerimo udaljenost BC i tada produžimo stranicu BC do D tako da je BC jednake duljine kao CD. Dužina DE je tada jednake duljine kao AB i možemo ju izmjeriti kako bi dobili širinu jezera. Ovo se može objasniti promatranjem trokuta ABC i EDC gdje nam je zadano da je AC jednaka CE, BC jednaka je CD i kutovi ACB i BCD jednaki su jer su vršni kutovi. Trokuti su sukladni jer se podudaraju u dvije stranice i kutu između njih (SKS).

Na desnom prikazu Slike 32 stranica AB je širina rijeke koju treba procijeniti. A i B su točke na suprotnim obalama rijeke. Točka C odabrana je na obali rijeke tako da je kut BAC pravi. Udaljenost AC izmjerena je te je stranica AC produžena do D tako da su AC i CD jednake duljine. Zatim je pronađena točka E na okomici na CD iz točke D tako da se vrhovi B, C i E nalaze na istom pravcu. Dužine $\overline{DE}$ i $\overline{AB}$ tada su jednake duljine što slijedi iz sukladnosti trokuta ABC i DEC. Stranice AC i CD jednake su, kutovi BAC i EDC pravi su, a kutovi ACE i ECD vršni su kutevi. Trokuti su sukladni jer se podudaraju u jednoj stranici i kutovima uz nju (KSK).

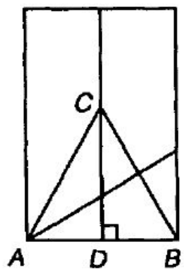
Primjer koji traži domišljato rješenje uključuje pronalaženje najmanje udaljenosti između dviju točaka. Priča kaže da su A i B dva broda usidrena u luci te je CD zid luke. Problemski zadatak, prikazan na lijevom prikazu na Slici 33, otploviti je od A do točke P gdje treba pokupiti nekoga i odvesti ga do B tako da je prijeđena udaljenost najmanja moguća. Drugim riječima, tražimo položaj točke P na CD tako da ukupna udaljenost $AP + PB$ bude minimalna.



Slika 33: Pronalaženje najmanje udaljenosti

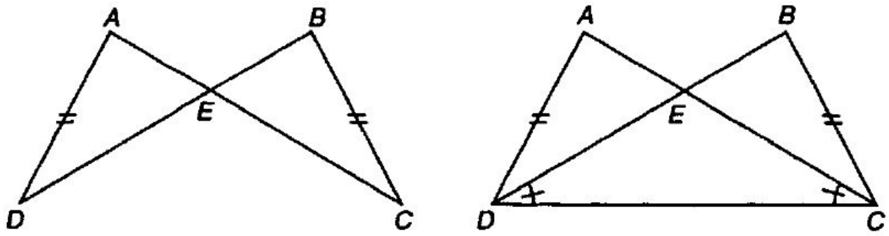
Zadatak se rješava zrcaljenjem točke B obzirom na zid luke i spajanjem njezine slike G s A. AG, koja je jednaka $AP + PG$, najkraća je udaljenost od A do G i P je točka gdje AG siječe CD. Kako su trokuti PFB i PFG sukladni jer se podudaraju u dvije stranice i kutu između njih slijedi kako su PB i PG jednake duljine te je $AP + PB$ najmanja udaljenost.

Slika 34 prikazuje kako se papirnati pravokutnik može presaviti da bi se dobio jednakostraničan trokut koji leži na osnovici pravokutnika. Prvi je korak presaviti papir na pola vertikalno čime se dobiva simetrala kroz polovište D osnovice AB. Tada se radi drugo presavijanje kroz točku A tako da točka B pada na okomicu kroz D. Ta je točka na prikazu označena s C. Trokut ABC je tada jednakostraničan. Jasno je kako su stranice AB i AC jednake duljine iz načina na koji je papir presavijan, ali moramo još objasniti zašto su AC i BC jednake. Dva su trokuta ACD i BCD sukladni jer im je stranica CD zajednička, AD jednake duljine BD jer je D polovište stranice AB i kutovi ADC i BDC su pravi. Stoga su dvije stranice i kut između njih jednaki u svakom trokutu (SKS).



Slika 34: Jednakostraničan trokut nastao presavijanjem papira

Zanimljiv zadatak dobiven je spajanjem dviju plastičnih traka jedne duljine dvama trakama druge duljine da bi se dobio paralelogram te njegovim presavijanjem kako bi se dobio modificirani četverokut što je prikazano na lijevom prikazu Slike 35. Dvije dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ jednake su kao i označene stranice AD i BC. Zadatak je objasniti zašto su dužine $\overline{CE}$ i $\overline{DE}$ jednake izbjegavajući nejasne poveznice sa simetrijom. Na prvi pogled može se činiti da je očit način pokazati da su trokuti AED i BEC sukladni, ali direktno je moguće pokazati samo da je jedan par stranica jednake duljine i jedan par kutova jednake veličine. Trebamo tri činjenice. Važno je napraviti krive korake kod gledanja u problemski zadatak s učenicima, bilo da se oni dobiju iz prijedloga koje učenici imaju ili da ih stvori učitelj, jer učenici trebaju vidjeti kako rješenja nisu uvijek odmah očita i kako se moraju isprobati alternative dok se ne pronađe pravi put do rješenja. Tajna rješavanja geometrijskih zadataka često leži u povlačenju jedne ili više dodatnih dužina danom liku. Pronalaženje prave dužine koju treba dodati često je najkreativniji dio rješenja i nije uvijek očit. U ovom slučaju nije preteško uvidjeti kako spajanjem C s D dobivamo dva sukladna trokuta ADC i BCD. CD je zajednička za oba trokuta, AC jednake duljine BD i AD jednake duljine BC po početnim uvjetima zadatka. Tada slijedi kako su kutovi BDC i ACD jednaki iz čega slijedi da je trokut CDE jednakokračan te je CE jednake duljine kao DE što je trebalo pokazati.



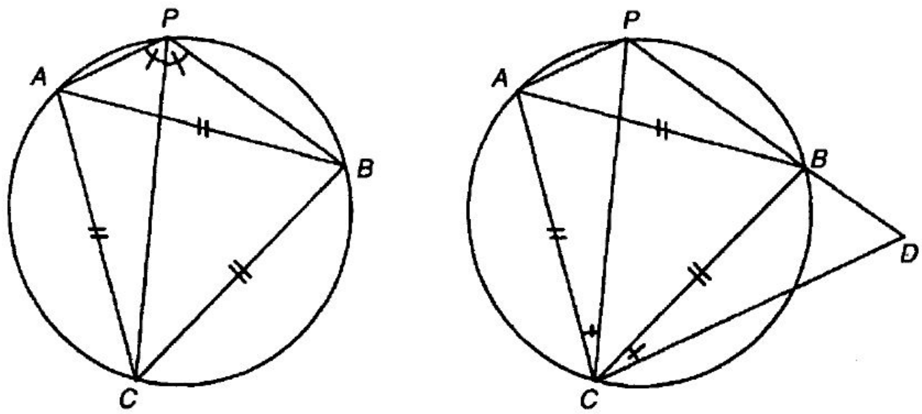
Slika 35: Jednakostraničan trokut nastao presavijanjem papira

Navedenih pet problemskih zadataka pokazuju raznovrsnost primjera gdje se postupak objašnjava povlačenjem poveznica sa sukladnim trokutima. Činjenica da se odnose na situacije koje su predstavljene kao problemi koje treba riješiti ili postupci za dobivanje nekog jasnog cilja daje veće značenje i smisao kako ideji dokaza tako i preko nje korištenju sukladnih trokuta.

4.3.1 Van Schootenov poučak

Dokazivanje Van Schootenovog poučka dobar je primjer zahtjevnijeg problemskog zadatka gdje sukladni trokuti daju rješenje koje je očigledno i jednostavno jednom kada se istakne, ali ga je teško samostalno vidjeti. Na lijevom prikazu Slike 36 jednakostraničan trokut ABC upisan je u kružnicu i P je proizvoljna točka na manjem luku AB. Poučak iznosi neočekivanu, ali ipak jednostavnu činjenicu kako je $AP + PB = CP$.

Ključno je uočiti da kutovi APC i BPC iznose $60°$ jer su obodni kutovi nad istim tetivama kao i kutevi ABC i BAC jednakostraničnog trokuta. Tajna brojnih geometrijskih dokaza često leži u tome da se prikazu dodaju jedna ili dvije dužine kako bi se dobio par sukladnih ili sličnih trokuta. Na desnom prikazu Slike 36 produljena je dužina $\overline{PB}$ i povučen je pravac iz točke C koji ju siječe u točki D tako



Slika 36: Van Schootenov poučak

da kut DCP iznosi 60°. Trokut DCP je tada jednakostraničan. Ako se ovaj prikaz konstruira pomoću softvera dinamičke geometrije točka P može se pomaknuti i može se vidjeti trokut DCP koji nastaje rotacijom i uvećavanjem izvornog jednakostraničnog trokuta ABC.

Svrha konstrukcije napraviti je dva trokuta ACP i BCD za koje se može pokazati da su sukladni. Dužine AC i BC jednake su duljine jer su stranice početnog jednakostraničnog trokuta. Oba kuta APC i BDC iznose 60° i kutovi ACP i BCD oba iznose 60° minus zajednički kut BCP. Slijedi kako su dužine $\overline{AP}$ i $\overline{BD}$ jednake duljine tako da $AP + PB = DP$, stoga $AP + PB = CP$ jer je DP jednake duljine kao CP.

Naravno, postoje i drugi načini dokazivanja poučka koji mogu biti kraći, poput korištenja kosinusova teorema, ali postoji određena privlačnost u dokazu kojeg možemo izravno vidjeti na slici jednom kada su dodane određene dužine. Iako ga može biti pomalo nespretno pretočiti u riječi, dokaz je vrlo jasan i elegantan.

Zaključak

Početne faze učenja geometrije trebaju osigurati učenicima sposobnost prepoznavanja oblika i istraživanje njihovih jednostavnijih svojstva uz učenje vokabulara te naziva za oblike i riječi korištenih za opisivanje svojstava oblika. Vizualna privlačnost i praktična istraživanja koja su uključena u to čine ovu temu motivirajućom. Dok učenici istražuju oblike i njihova svojstva, susrest će se s odgovarajućim jezikom i steć znanje o istima te postupcima za primjenu stečenog znanja u rješavanju problemskih zadataka. Iako će neki očiti odnosi biti prihvaćeni kao očigledni, u srži je geometrije da se rezultati dobiju razmišljanjem i zato je važno koristiti eksperimentalni rad kao metodu kojom dolazimo do rezultata. Geomtrijski se zadaci često čine zahtjevnima, ponekad nerješivima, kada se ne vidi očita ideja ili se nameće jednostavna ideja rješenja koju je teško izvesti. Važno je raspravljati o problemima i pomoći učenicima da vide različite načine na koje se pojavljuju strategije rješavanja i kako se otkrivaju netočni dijelovi dokaza. Uspjeh dolazi iz kombinacije uvida razvijenog iskustvom i temeljitim znanjem potrebnih činjenica i postupaka. Najviše od svega, uspješno učenje ovisi, kao što je slučaj i sa svakim drugim dijelom matematike, o razvijanju shvaćanja kako je objašnjavanje i dokazivanje nečega važno i kako je to poticajni dio učenja matematike. Cilj je poučavanja geometrije razvijanje učeničkih vještina: razmišljanja, pamćenja važnih činjenica i postupaka što čini nužan, ali ne i dostatan dio jer uspjeh u rješavanju problemskih zadataka i ispravnog dokazivanja rezultata ovisi o volji i sposobnostima pojedinog učenika. Ovo od učenika zahtijeva da samostalno razmišljaju i uvide da se uspješno usvajanje matematike ne temelji na pamćenju činjenica i postupaka. Razumijevanje i primjena geometrijskih postupaka odlično je sredstvo za ovakav pristup, jer geometrijske konfiguracije posjeduju intrigantno i privlačno svojstvo koje potiče znatiželju i ohrabruje učenike da sudjeluju na nastavnom satu. U konačnici bi geometrija kod učenika trebala razviti sposobnost deduktivnog razmišljanja kao i moć vizualizacije i geometrijske intuicije.

Literatura

[1] D. French, *Teaching and learning geometry*, Continuum international publishing group, 2004.

Sažetak

Geometrija služi kao izvrstan medij za razvijanje matematičkog mišljenja kroz rješavanje problema i učenje o važnosti i izvođenju dokaza, uz to prikladna je i za kreativan i istraživački rad. Područje je neizmjerno bogato teoremima i zanimljivim problemima uz što još i posjeduje vizualnu privlačnost. Sve ovo čini geometriju atraktivnim i izazovnim područjem za učenje i poučavanje.

Cilj je ovoga rada kroz razne aktivnosti pod općim naslovima kao što su prepoznavanje oblika, simetrija, kutovi, konstrukcije, popločavanja ravnine i sukladnost pokazati kako svaki od njih daje mogućnosti za učenje važnih riječi, razvijanje ključnih ideja i poduzimanje koraka kako bi učenici bili sposobni obrazlagati i objašnjavati umjesto pogađati i pretpostavljati.

Učenici trebaju iskusiti raznolikosti pristupa i uvidjeti različite načine rješavanja geometrijskih problema (zadataka). Uspješnost ovisi o stjecanju intuitivnog osjećaja za geometrijske oblike kroz odgovarajuće praktične zadatke kako bi suštinska deduktivna priroda geometrije mogla proizaći iz sličnosti s jednostavnim svojstvima i relacijama.

Ključne riječi: kurikulum nastave geometrije, učenje, poučavanje, simetrija, kutovi, popločavanja ravnine, konstrukcije, sukladnost

Summary

Geometry serves as an excellent medium for developing mathematical thinking through problem solving and studying about the importance and the derivation of proofs, and is also suitable for creative and research work. The field is infinitely rich with theorems and interesting problems and, in addition, possesses visual appeal. All of this makes geometry an attractive and challenging field for studying and teaching.

The aim of this paper is to, through various activities under general headlines such as the recognition of shapes, symmetry, angles, constructions, tessellations and congruency, show how each one of them offers possibilities for learning important words, developing key ideas and taking steps in order for the students to be able to argue and explain instead of guess and assume.

The students have to experience the diversity of approaches and recognize different ways of dealing with geometrical problems (tasks). The success depends on acquiring intuitive sense of geometrical shapes through suitable practical tasks in order for the essential deductive nature of geometry to arise from resemblance to simple properties and correlations.

Key words: geometry curriculum, learning, teaching, symmetry, angles, tessellations, constructions, congruence

Životopis

Zovem se Tihana Topalović. Rođena sam 3. srpnja 1988. godine u Vinkovcima. Od 1995. do 2003. godine pohađala sam Osnovnu školu "Vladimir Nazor" u Komletincima. Tijekom osnovnoškolskog obrazovanja sudjelovala sam na natjecanjima iz matematike te ostvarila zapažen rezultat. Nakon završetka osnovne škole upisala sam Gimnaziju Matije Antuna Reljkovića u Vinkovcima, opći smjer, koju sam završila s odličnim uspjehom 2007. godine. Iste sam godine upisala Preddiplomski studij na Odjelu za matematiku u Osijeku, a 2011. godine prebacujem se na Nastavnički studij matematike i informatike.