Trigonometrija u nastavi matematike i GeoGebra u motivaciji učenja trigonometrije

Valentić, Katarina

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Katarina Valentić

Trigonometrija u nastavi matematike i *GeoGebra* u motivaciji učenja trigonometrije

Diplomski rad

Osijek, 2018.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Katarina Valentić

Trigonometrija u nastavi matematike i *GeoGebra* u motivaciji učenja trigonometrije

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2018.

Sadržaj

Uvod

Pogledamo li bilo koji predmet oko nas možemo o njemu reći nešto s matematičke strane. Mnoštvo iskustva i znanja mnogih generacija naših predaka daje nam priliku izmjeriti dužinu između dvaju mjesta, dužinu sjene, razne kutove pod kojim vidimo stvari oko sebe i uočiti razne oblike i veličine u slovima, znakovima pa čak i narodnim šarama. Svo to znanje i iskustvo možemo staviti u jednu riječ - *matematika*. Tehnologija se brzo razvija, a za njen je razvoj bila potrebna i matematika. U ovom diplomskom radu ćemo povezati matematiku i tehnologiju, tj. *GeoGebru*.

Trigonometrija je grana matematike koja se bavi specifičnim funkcijama kutova i njihovom primjenom. Dužina, kut i njihovo povezivanje bitni su elementi trigonometrije pa ju možemo primijeniti na vrlo raznolika područja svakodnevnog života. Trigonometrija je ponos matematičara jer nas uči kako na divan način možemo mjeriti po nebu, zemlji i vodi, rekao je francuski matematičar Viète. Sam naziv *trigonometrija* dolazi od grčkih riječi *trigônom* što znači **trokut** i *métron* što znači **mjera**.

Početke trigonometrijskog računa nalazimo u starom Babilonu i Egiptu kao dopunu astronomiji. Tada, pri rješavanju raznih problema iz zemljomjerstva promatranjem nebeskog svoda i mjerenjem zbog navigacije, nastaje sferna trigonometrija i trigonometrijske tablice. Poznavajući Pitagorin poučak i koristeći ga za mjerenje polja nastala je ravninska trigonometrija s većom primjenom nego sferna. Riječ *seqt*, koju nalazimo na Rhindovom papirusu (oko 18. st. pr. Kr.), u pet problema (od 84), iz algebre, aritmetike i geometrije, predstavlja kosinus ili kontagens. Navedeno pokazuje da su Egipćani primjenjivali početke trigonometrije u projektiranju i izgradnji poznatih Egipatskih piramida te poznavali numeričke relacije u trokutu.

Grci su nastavili nadograđivati tada poznatu trigonometriju u 3. st. pr. Kr. Ističu se Aristarh (3. st. pr. Kr.), njegov učenik Hiparh (2. st. pr. Kr.), koji je napravio prve tablice duljina tetiva za različite središnje kutove. Nakon početka nove ere ističe se Menelaj (oko 70.-150. godine) koji po prvi put prikazuje trigonometriju kao posebnu znanost te u svojoj knjizi *"Sferika"* daje nove tablice. Ptolomej (2. st.) se ističe sa svojim djelom poznatim po arapskom nazivu *Almagest* koji je stoljećima bilo temelj za daljenje izučavanje trigonometrije.

Indijci trigonometriju naročito izučavaju u srednjem vijeku. Prve tablice nalik tablicama funkcije sinus sastavili su Indijci (5. st.) koje sadrže duljine polutetiva kruga za zadani središnji kut. Jednakost $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ i formulu za polovični kut poznaje $\tilde{A}$ryabhata. Bh$\tilde{a}$skara poznaje adicijske formule za sinus i kosinus dok Brahmagupta (7. st) poznaje sinusov poučak u obliku $a = 2Rsin\alpha$.

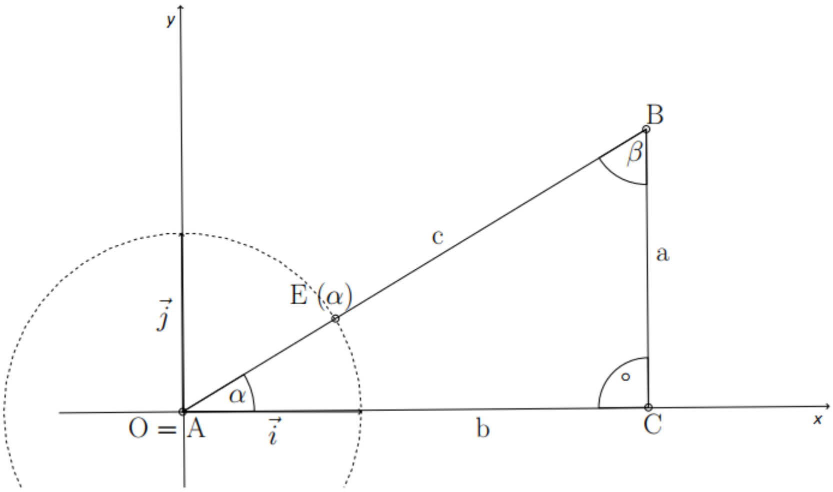
U 8. st. Arapi preuzimaju znanje trigonometrije (sinusa i kosinusa) od Inda te uvode tangens i kotanges. Poučak o sinusu prvi je dokazao $Ab\tilde{u}$ al-$W\hat{a}fa$. Trigonometrija je u Europu došla preko Arapa, ali ih sustavno obrađuje tek Regiomontan (15. st). On je preradio i nadopunio njihove tablice trigonometrijskih funkcija prevodeći ih s heksagezimalnog na dekadski sustav.

Geogebra je program koji je razvio Markus Hohenwarter na sveučilištu u Salzbugru, a prva verzija programa nastaje 2001. godine kao dio Hohenwarterovog diplomskog rada. *Geogebra* je besplatan program preveden na preko pedeset jezika svijeta, a jedan od njih je i hrvatski jezik. Dostupna je na mnogim uređajima: računalima, tabletima, pametnim telefonima. Danas međunarodni tim programera radi na neprekidnom razvoju programa *Geogebra*, a programski jezici u kojima je pisan su Java i HTML5.

Iako nastavnici sve više uvode *Geogebru* u sve predmete STEM područja njeni su počeci u školi bili na satima matematike zbog njenih raznih područja poput geometrije, algebre, statistike, crtanja grafova i analize. Učitelji diljem svijeta prepoznali su potencijal programa *GeoGebra* i jednostavno je mogu preuzeti i instalirati kao samostalnu aplikaciju ili je koristiti kao mrežnu aplikaciju. Sve je više *GeoGebra* apleta i *GeoGebra* e-udžbenika koje su izradili učitelji u svrhu lakšeg učenja raznih predmeta. U svoju su nastavu i udžbenike *GeoGebra* program integrirale mnoge zemlje svijeta, a više od desetljeća grupa hrvatskih nastavnika matematike volonterski radi na integraciji programa *GeoGebra* u hrvatsko obrazovanje.

1. Trigonometrija pravokutnog trokuta

U mnogim primjenama trigonometrije dovoljno je promatrati trigonometrijske funkcije samo za šiljaste kutove. Svaki šiljasti kut je kut nekog pravokutnog trokuta pa ćemo definirati te funkcije pomoću njega. Dan je pravokutni trokut $\triangle ABC$ s pravim kutom pri vrhu C smješten u koordinatni sustav kao na slici 1.



Slika 1: Prikaz trigonometrijskih funkcija šiljastog kuta α

Iz slike vidimo da je $\overrightarrow{AB} = c\overrightarrow{OE(\alpha)}$, pri čemu je $\overrightarrow{AB} = b\vec{i} + a\vec{j}$ i $\overrightarrow{OE(\alpha)} = \cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{j}$ izjednačavanjem desnih strana jednakosti dobit ćemo $b\vec{i}+a\vec{j} = c(\cos\alpha\vec{i}+\sin\alpha\vec{j})$. Izjednačimo li komponente uz jedinične vekore $\vec{i}$ i $\vec{j}$, dobivamo

$$b = c\cos\alpha, \quad a = c\sin\alpha,$$

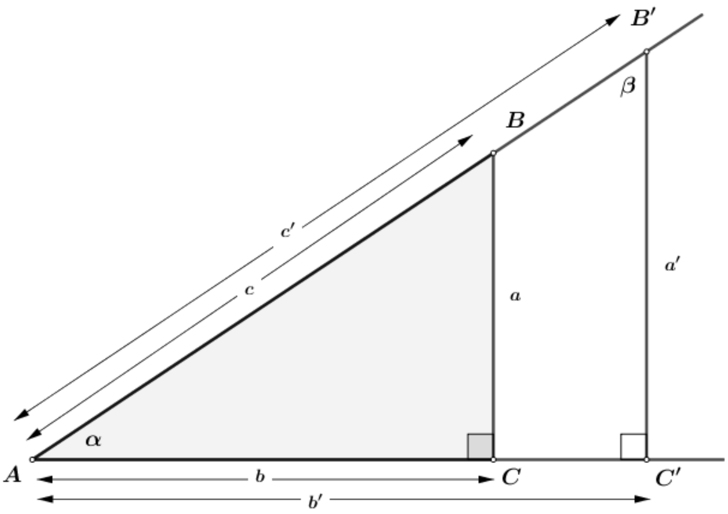
odnosno

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

U ovom poglavlju ćemo prikazati kako učenici upoznaju i definiraju osnovne trigonometrijske funkcije šiljastog kuta pomoću *GeoGebre*. Posebno izvode vrijednosti trigonometrijskih funkcija kutova od 30°, 45° i 60°, a nakon toga određuju vrijednosti trigonometrijskih funkcija šiljastih kutova. Dio ove cjeline je i rješavanje pravokutnog trokuta pomoću trigonometrijskih funkcija i primjena trigonometrije pravokutnog trokuta u planimetriji. Ujedno je to jedina cjelina udžbenika za drugi razred srednjih škola koja obrađuje trigonometriju, zato je zovemo "mala trigonometrija".

1.1 Definicija trigonometrijskih funkcija šiljastog kuta



Slika 2: Slični trokuti

Pravokutnom trokutu $\triangle ABC$ s pravim kutom pri vrhu C, označimo s a, b i c duljine stranica nasuprot vrhova A, B i C. Povučemo pravac $B'C'$ paralelan pravcu BC. Dobiven trokut $\triangle AB'C'$, sa stranicam a', b' i c' je sličan trokutu $\triangle ABC$. Učenike se pomoću sličnosti dva pravokutna trokuta (slični prema poučku $K-K-K$) čiji je jedan zajednički kut α podsjeća da su omjeri duljina odgovarajućih stranica jednaki i da vrijedi:

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}, \quad \frac{a}{c}=\frac{a'}{c'}, \quad \frac{b}{c}=\frac{b'}{c'}.$$

Zaključujemo da omjeri ne ovise o duljiinama stranica već, o veličini promatranog α, stoga su oni *funkcije kuta* α. Sada razlikujemo *nasuprotnu katetu a* i *priležeću katetu b* kuta α te izričemo definicije ("četiri pjesmice o trigonometrijskim funkcijama šiljastog kuta"):

- omjer $\frac{a}{c}$ nasuprotne katete kutu α i hipotenuze je **sinus kuta** α:

$$\sin\alpha=\frac{a}{c}=\frac{nasuprotna\ kateta}{hipotenuza},$$

- omjer $\frac{b}{c}$ priležeće katete kutu α i hipotenuze je **kosinus kuta** α:

$$\cos\alpha=\frac{b}{c}=\frac{prile\check{z}e\acute{c}a\ kateta}{hipotenuza},$$

- omjer $\frac{a}{b}$ nasuprotne i priležeće katete kutu α je **tangens kuta** α:

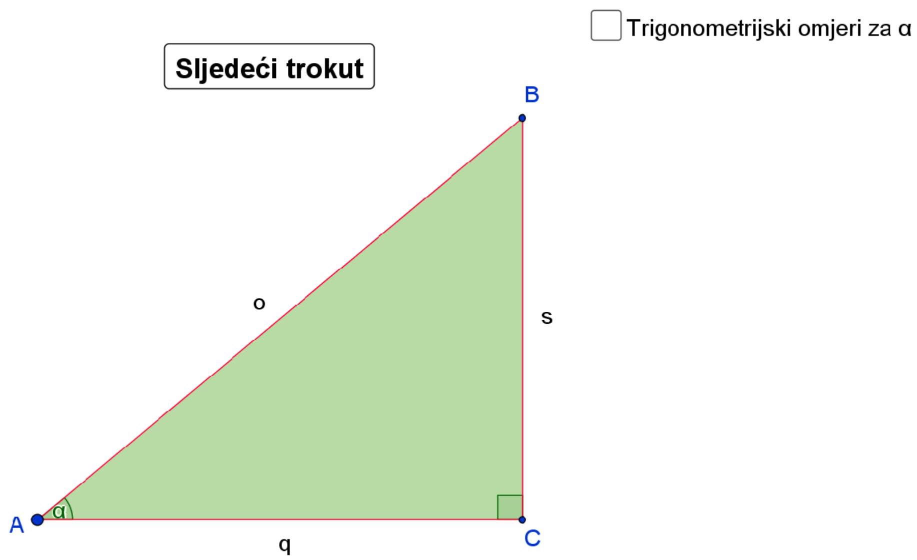
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{nasuprotna\ kateta}{priležeća\ kateta},$$

- omjer $\frac{b}{a}$ priležeće i nasuprotne katete kutu α je **kotangens kuta** α:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{priležeća\ kateta}{nasuprotna\ kateta}.$$

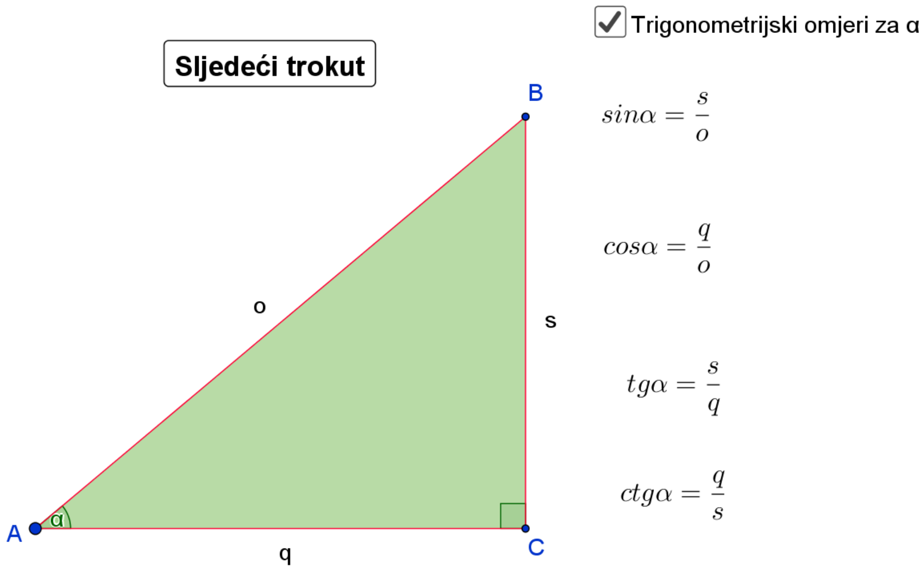
Sinus, kosinusu, tangens i kotangens nazivamo **trigonometrijskim funkcijama**.

Za daljnje učenje trigonometrije potrebno je da učenici nauče omjere riječima poput: sinus je omjer nasuprotne katete i hipotenuze ili kosinus je omjer priležeće katete i hipotenuze. Zato moraju prepoznati pravi kut, šiljaste kutove te katete (priležeću i nasuprotnu) i hipotenuzu. Moguće je spriječiti pamćenje omjera (razlomaka) u oznakama a, b i c pomoću *GeoGebre*. Na slici 2 je prikazan trokut $\triangle ABC$ sa stranicama s, p i o, naznačenim pravim kutom i kutom α. Od učenika se traži da pomoću pjesmica o trigonometrijskim funkcijama šiljastog kuta napiše omjere u novim oznakama stranica pravokutnog trokuta.



Slika 3: Trigonometrijski omjeri kuta α u drugim oznakama.

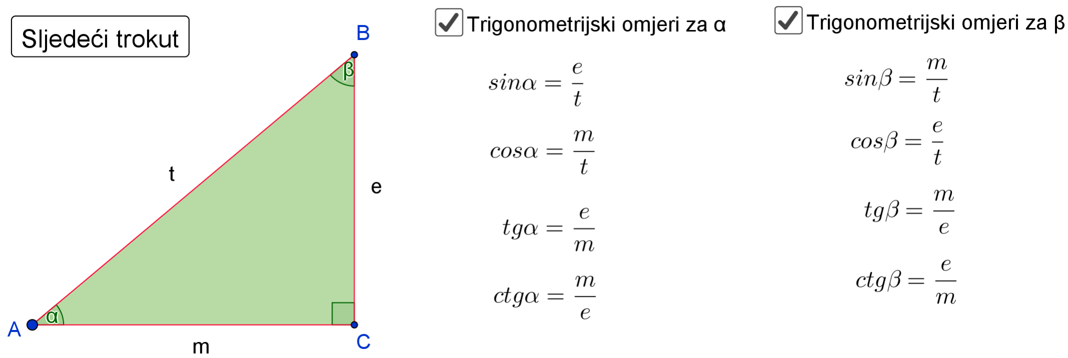
Nakon što učenici primjene definicije i napišu omjere u drugim oznakama, klikom na potvrdni okvir *"Trigonometrijski omjeri za α"* otkrivaju se točni omjeri te učenici provjeravaju točnost omjera koje su oni napisali.



Slika 4: Trigonometrijski omjeri kuta α u drugim oznakama.

Klikom na gumb *"Sljedeći trokut"* dobivamo drugi pravokutni trokut s drugim oznakama stranica. Učenici nakon toga ne poistovjećuju hipotenuzu s oznakom c, ni katete s oznakama a i b, uče kako prepoznavati hipotenuze i kateta (priležeće te nasuprotne) te ih primijenjuju u naučene definicije. Upotrebom *GeoGebra* apleta u ovom slučaju smanjuje se vrijeme crtanja novih pravokutnih trokuta, uspijeva odraditi više primjera i zainteresirati učenike.

Sljedeći im je zadatak primijeniti definicije trigonometrijskih funkcija na kut α i kut β na zadanom trokutu. Nakon što ispišu rješenja otvaramo rješenja i u *GeoGebri*.



Slika 5: Trigonometrijski omjeri kuta α i β.

Pomoću *GeoGebre* učenici će vizualno doći do zaključka da je:

$$\sin\alpha = \cos\beta, \quad \cos\alpha = \sin\beta, \quad \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$$

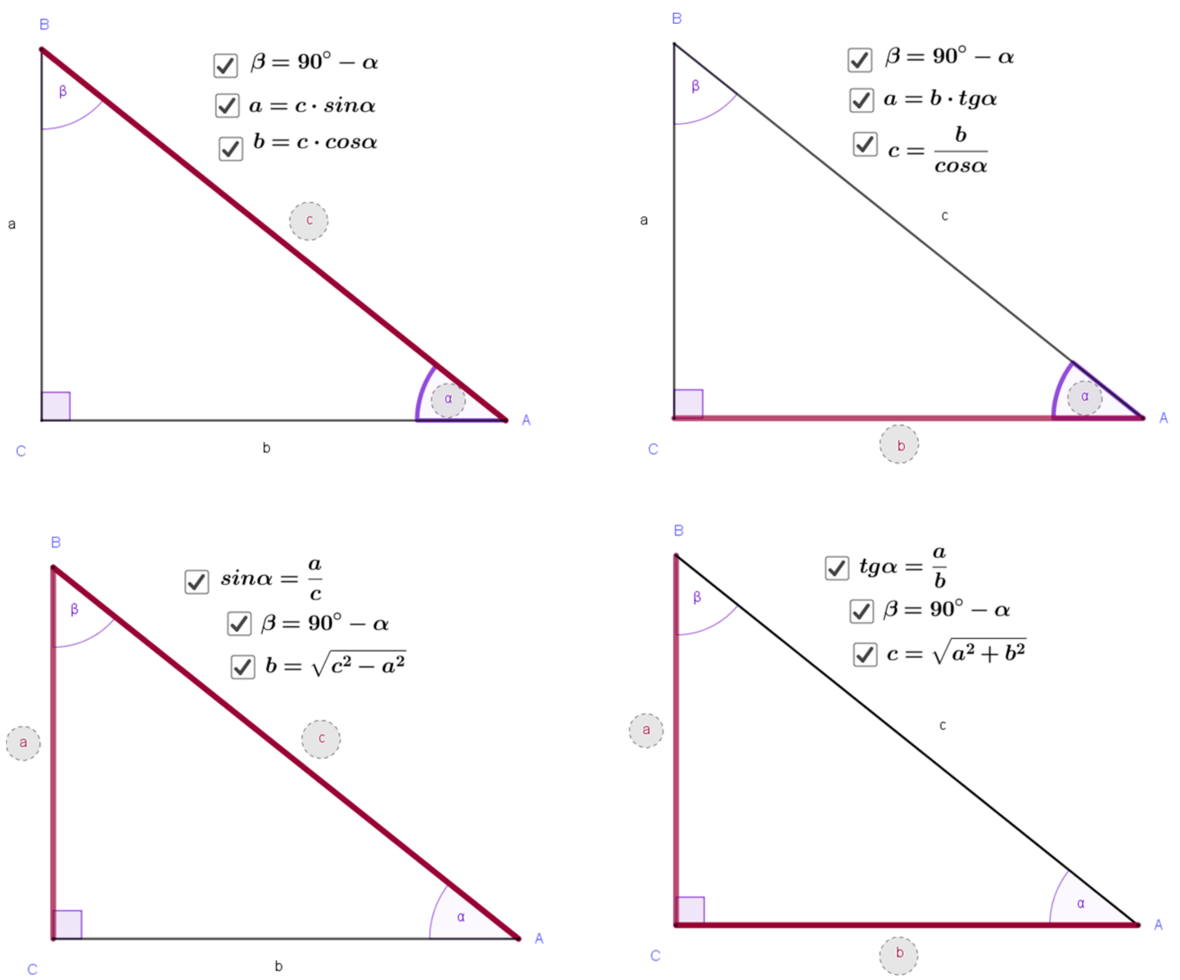
U pravokutnom trokutu šiljasti kutovi α i β su komplementarni, tj vrijedi $\alpha + \beta = 90°$. Tada možemo gornje jednakosti pretočiti u riječi: *sinus kuta jednak je kosinusu kuta koji mu je komplementaran* i obrnuto. Upravo zbog tog odnosa potječe naziv funkcije *kosinus*. Analogno vrijedi i za funkcije tangens i kotangens.

1.2 Primjene trigonometrije na pravokutni trokut

U ovom su poglavlju dana četiri slučaja kako "riješiti" pravokutni trokut. Pravokutan trokut je "riješen" kada odredimo sve njegove kutove i sve njegove stranice. Navedimo četiri načina kako može biti zadan pravokutan trokut koji treba riješiti, tj. zadano je:

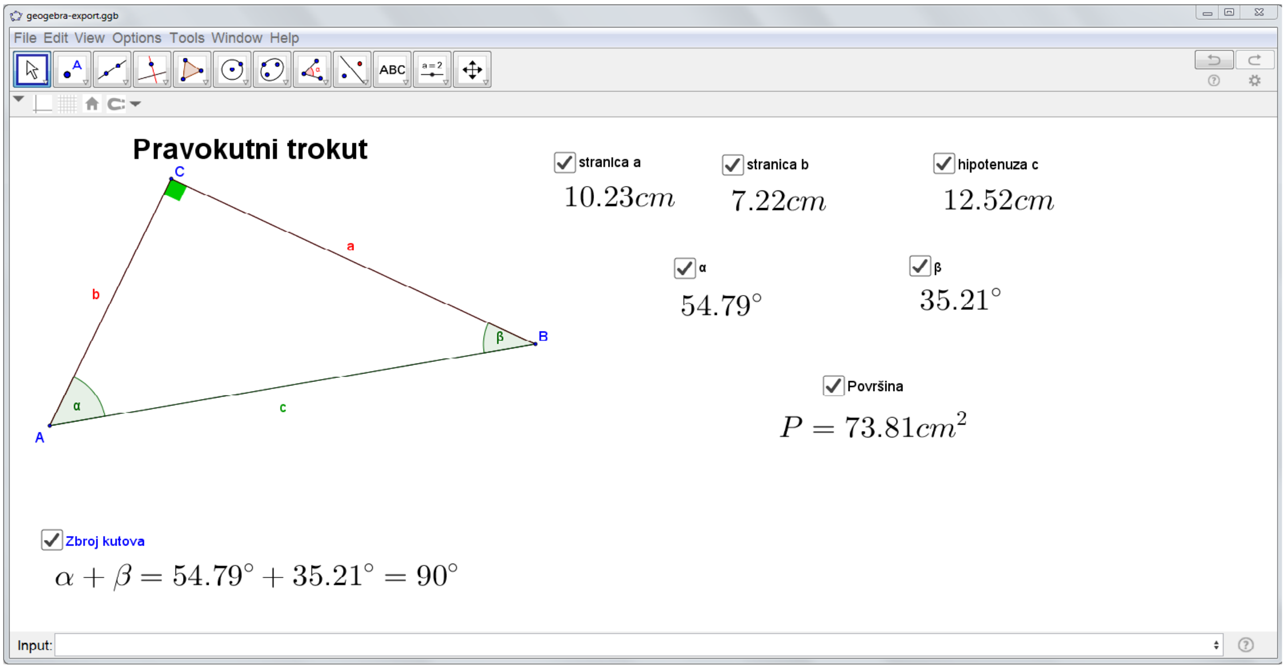
1. hipotenuza i jedan šiljasti kut,
2. kateta i jedan šiljasti kut,
3. hipotenuza i jedna kateta,
4. dvije katete.

Učenici znaju definicije trigonometrijskih funkcija te njihovom primjenom na dane elemente u trokutu dolaze do formula za preostale elemente. Pomoću *GeoGebre* prikažemo trokut i istaknemo na njemu elemente koji su zadani. *Potvrdni okvir* povežemo s tekstom rješenja i nakon što učenici dođu do zaključka, prikažemo rješenje. Na slici 6. prikazana su sva četiri slučaja i svi tekstovi rješenja.



Slika 6: Četiri načina zadavanja pravokutnog trokuta osnovnim elementima

Za vježbanje i utvrđivanje ovog dijela gradiva poslužit će *GeoGebra* aplet u kojem je naznačen pravokutan trokut kojemu se može mijenjati položaj te time i veličine svih njegovih elemenata. Naznačeni su *potvrdni okviri* za svaki element trokuta i ovisno o tome što je prikazano, učenici primjenjuju određeni slučaj. Slika 7. prikazuje riješen pravokutan trokut, prikazani su svi elementi i njihove veličine te površina i zbroj kutova.



Slika 7: Riješen pravokutan trokut

Nakon utvrđivanja ovog dijela gradiva učenici će primjenjivati trigonometriju pravokutnog trokuta u planimetriji, odnosno na:

- jednakokračni trokut,
- četverokute (paralelogram, pravokutnik, romb, trapez),
- kružnicu i krug,
- pravilne mnogokute.

Upravo je zbog ovog dijela gradiva važno prepoznati hipotenuzu i katete, a ne ih određivati po slovima. Na primjer, u jednakokračnom trokutu spuštanjem visine iz vrha A nastanu dva pravokutna trokuta gdje su katete v i $\frac{a}{2}$ a hipotenuza je b.

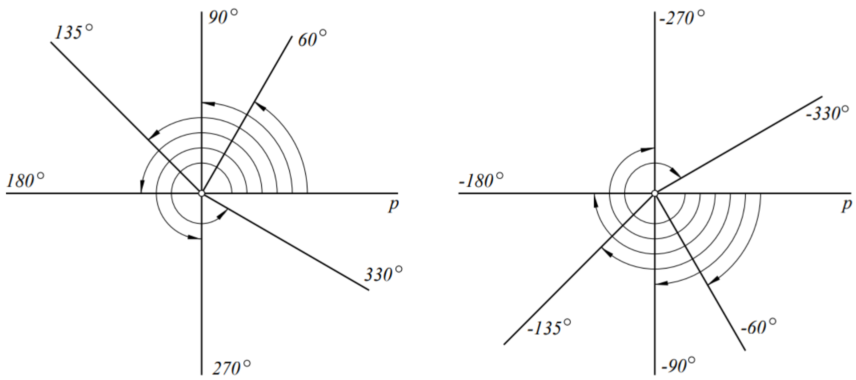
2. Trigonometrijske funkcije

2.1 Kut i mjera kuta

Prije definiranja trigonometrijskih funkcija učenici moraju ponoviti kutove i mjeru kuta te proširiti znanje sa *orijentiranim kutom*, *glavnom mjerom kuta* i *brojevnom kružnicom.* Nakon što prošire znanje vježbom, na *GeoGebra* apletu će savladati potrebno gradivo za daljnje učenje trigonometrije.

Definicija 2.1. ***Kut*** *je uređen par* (p, q) *dviju zraka koje imaju isti početak* V*. Označavamo ga s* $\sphericalangle pVq$*. Točku* V *nazivamo* ***vrh****, zraku* p *nazivamo* ***prvi krak*** *(ili početni krak) a zraku* q ***drugi krak*** *(ili završni krak) kuta* $\sphericalangle pVq$

U dosadašnjem su školovanju učenici kut definirali kao dio ravnine omeđen dvama polupravcima (zrakama ili krakovima) koji se sijeku, tj. imaju zajedničku točku. Definirali su i **mjeru kuta** kao pozitivan broj, između 0° i 360°. Ovisno o mjeri kuta naučili su koji su kutovi šiljasti, pravi, tupi, ispruženi, izbočeni i puni. Ukoliko iz početnog kraka p kuta $\sphericalangle pVq$ dolazimo do završnog kraka q vrtnjom u smjeru suprotnog od kretanja kazaljke na satu, tada kažemo da se krak vrti u *pozitivnom smjeru.* **Mjera kuta dobivenog vrtnjom u pozitivnom smjeru je *pozitivna*.** Ako se vrtnja odvija u smjeru kazaljke na satu, tj. *negativnom smjeru*, tada uzimamo da je **mjera kuta negativna**. Na slici 8. prikazane su mjere kutova s početnim krakom p, na lijevoj su slici prikazane pozitivne mjere, a na desnoj su slici prikazane negativne mjere nekih kutova.



Slika 8: Pozitivne i negativne mjere kutova sa početnim krakom p

U mnogim će trigonometrijskih problemima učenici morati rješavati probleme u kojima je kut negativan, ima mjeru veću od 90° pa čak i gdje je mjera kuta veća od 360°. U tom slučaju moraju naučiti što je to glavna mjera kuta. Kad se krakovi podudaraju naučili su da je to kut od 0° ili 360°, ovisno koji dio ravnine označimo. Kada završni krak "pređe" početni nastaju kutovi mjere veće od 360°, ako "pređe" još jednom nastaju kutovi mjere veće od 720°, itd. Neka nam je α neka mjera kuta $\sphericalangle pVq$. Tada istom kutu odgovara i mjera od $\alpha + 360°$ ili $\alpha + 720°$, općenito $\alpha + k \cdot 360°$ za neki prirodan broj k. Također vrijedi da mjere kuta $\alpha - 360°$, $\alpha - 720°$ odgovaraju kutu α, općenito $\alpha - k \cdot 360°$ za neki prirodan broj k. Možemo zapsati da je mjera kuta $\sphericalangle pVq$ neki broj iz skupa

$$\{\alpha + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}\}.$$

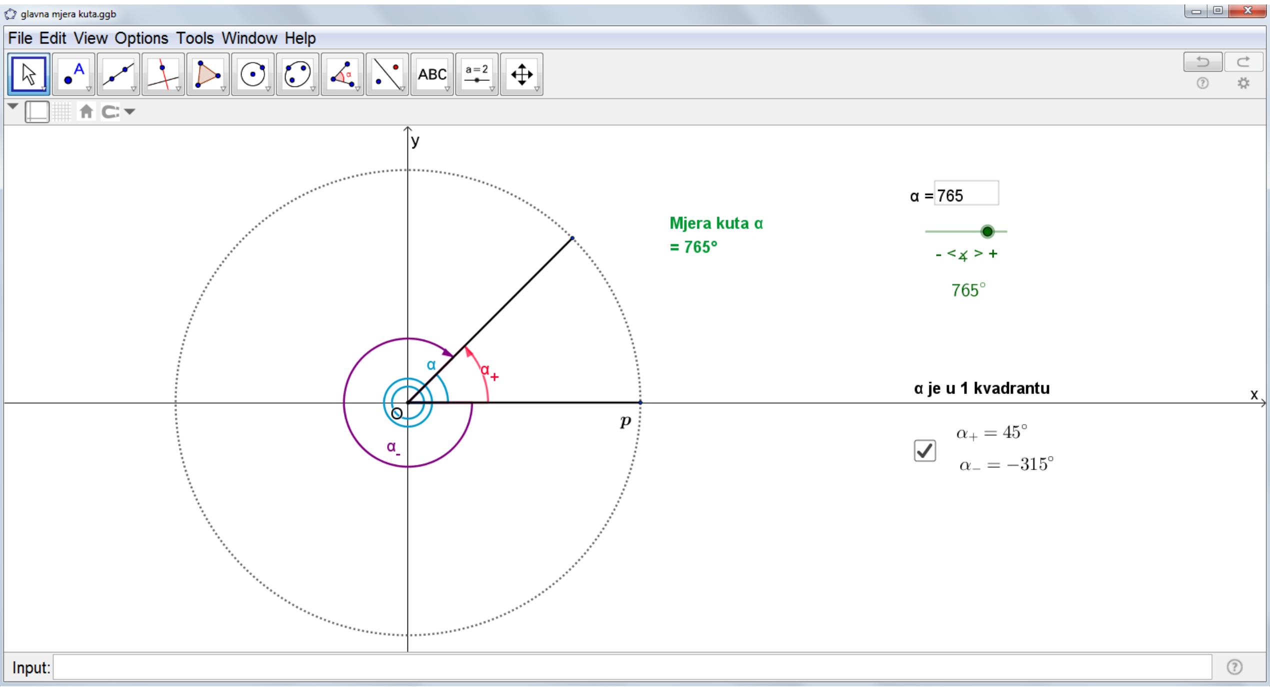
Bilo kakvu početnu mjeru α odabrali, u ovom će se skupu naći mjera α' za koju vrijedi $0^\circ \leqslant \alpha' \leqslant 360^\circ$. *Tu mjeru nazivamo* ***glavna mjera kuta*** $\sphericalangle pVq$. Formulu za računanje glavne mjere kuta iskazat ćemo u definiciji koristeći funkciju *pod* (eng. floor) ili *najveće cijelo*. Funkcija, *pod*, $\lfloor\ \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ realnom broju x pridružuje najveći cijeli broj koji nije veći od x.

Definicija 2.2. *Glavna mjera α' kuta α određuje se formulom*

$$\alpha' = \alpha - k \cdot 360^\circ,$$

gdje je $k = \left\lfloor \frac{\alpha}{360} \right\rfloor$.

Na slici 9. je *GeoGebra* aplet pomoću kojeg učenici vježbaju glavnu mjeru kuta. U sklopu apleta naznačeni su položaj kuta α, kut α i njegov negativan kut, a kako naznačen potvrdni okvir otkriva njihove vrijednosti tako učenici vježbaju i taj dio gradiva. Također su implementirani *klizač* i *tekstualno polje* koji učenicima daju odabir kako će unijeti zadani kut. Tekstualno polje i klizač su postavljeni na 8 krugova, 4 pozitivna kruga (do 1440°) i 4 negativna (do -1440°).



Slika 9: Glavna mjera kuta

2.2 Radijanska mjera kuta

Osim u stupnjevima mjeru kutova možemo izražavati i u **radijanima**. Općenito, radijanska mjera kuta određuje se kao omjer duljine luka prema polumjeru luka. $\alpha\, rad = \frac{l}{r}$. *Ako je duljina kružnog luka l jednaka polumjeru r, tada središnji kut ima mjeru 1 radijan, tj. njegova mjera je približno* 57°. Označavamo ga $\alpha = 1\, rad$ ili kratko, $\alpha = 1$. Ukoliko je mjera kuta α izražena u radijanima, tada možemo izračunati duljinu pripadnog luka l na kružnici polumjera r formulom $l = \alpha \cdot r$. U tom slučaju površina kružnog isječka je $P = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}\alpha r^2$. Najvažnije je u ovom dijelu gradiva je pretvaranje stupnjeva u radijane i obratno.

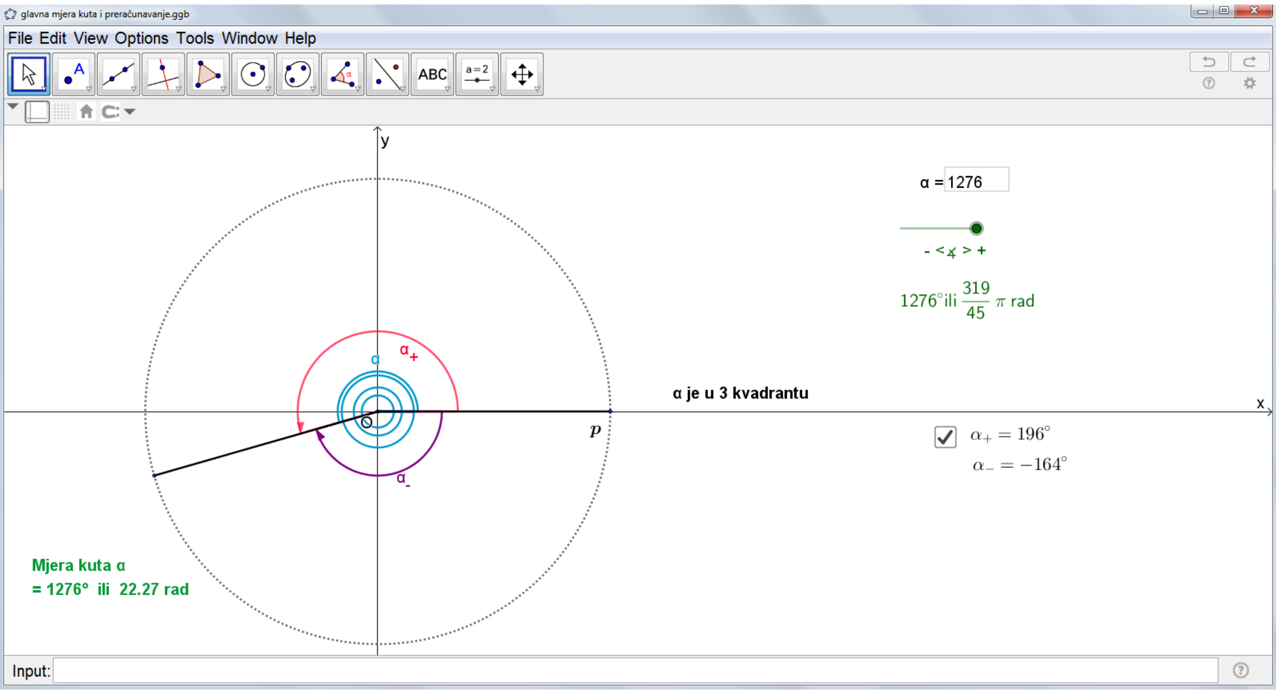
Ako je zadana mjera kuta u stupnjevima, tada se mjera u radijanima računa formulom:

$$\alpha\, rad = \frac{\alpha^\circ}{180} \cdot \pi.$$

Ako je zadana mjera kuta u radijanima, tada se mjera u stupnjevima računa formulom:

$$\alpha^\circ = \frac{\alpha\, rad}{\pi} \cdot 180^\circ.$$

Na slici 10. je proširen *Geogebra* aplet sa slike 9., kod klizača je dodano preračunavanje u radijane.

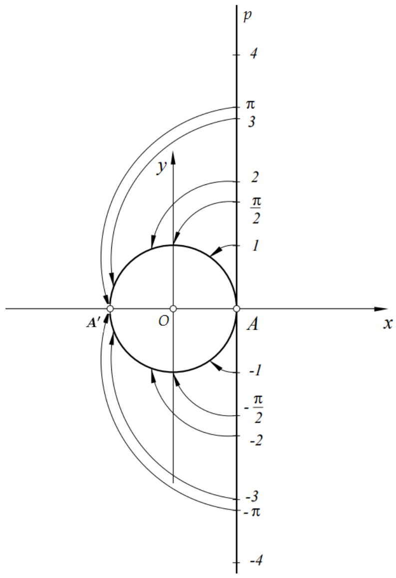


Slika 10: Glavna mjera kuta i preračunavanje

2.3 Brojevna kružnica

Neka je kružnica k u pravokutnom (Kartezijevu) sustavu $(O; x, y)$ čije je središte u ishodištu sustava, a polumjer joj iznosi 1. Točka $A = (1, 0)$ je sjecište kružnice k i osi apscise. Prislonimo brojevni pravac uz kružnicu k tako da svojim ishodištem dira kružnicu u točki A. Zamislimo da se taj pravac (bez rastezanja i klizanja) namata oko kružnice. Pri tome polupravac na kojemu su smješteni pozitivni brojevi namatamo na kružnicu suprotno gibanja kazaljke na satu, a polupravac na kojemu su smješteni negativni brojevi namatamo na kružnicu u smjeru gibanja kazaljke na satu. Tada će se njegov interval $[0,2\pi\rangle$, kao i interval $[-2\pi, 0\rangle$, preslikati na čitavu kružnicu. Svaki drugi interval duljine 2π će se također preslikati na kružnicu. Kružnicu možemo zamisliti kao neki kotač koji se više puta okreće oko svoje osi i u pozitivnom i u negativnom smjeru. Svaki $t \in \mathbb{R}$ brojevnog pravca preslika se u jednu točku $E(t)$ na kružnici k. Namatanje brojevnog pravca na kružnicu definirano preslikavanjem $E\colon \mathbb{R} \to k$ pridružuje točke kružnice realnim brojevima, $t \mapsto E(t) = T$ i nazivamo *eksponencijalno preslikavanje.* Kružnicu na koju se namata brojevni pravac zovemo *brojevna kružnica.*

Definicija 2.3. *Svakom broju t brojevnog pravca pridružena je točka T na brojevnoj kružnici. Time je definirano preslikavanje E između realnih brojeva i točaka brojevne kružnice koje nazivamo* ***eksponencijalno preslikavanje.*** *Pišemo* $E(t) = T$.



Slika 11: Eksponencijalno preslikavanje

Opseg jedinične kružnice je 2π. Preslikavanje E broju 0 pridružuje točku A, broju π točku A', broju 2π ponovo točku A, broju 3π ponovo točku $A' \ldots$ Pogledamo li negativne kutove E broju $-\pi$ pridružuje točku A', broju -2π točku $A \ldots$ Općenito, vrijedi

$$E(t) = E(t + 2k\pi), \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Funkcija $E\colon \mathbb{R} \to k$ je surjekcija i original svake točke s kružnice je skup ekvidistantnih točaka na pravcu s razmakom 2π među susjednim točkama. Općenito, ako je $T \in k$ i $E(t) = T$ za neki $t \in \mathbb{R}$, tada je $E^{-1}(T) = t + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Drugim riječima, sve točke $t + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ pri eksponencijalnom preslikavanju padaju u istu točku T i jedino one padaju u tu točku.

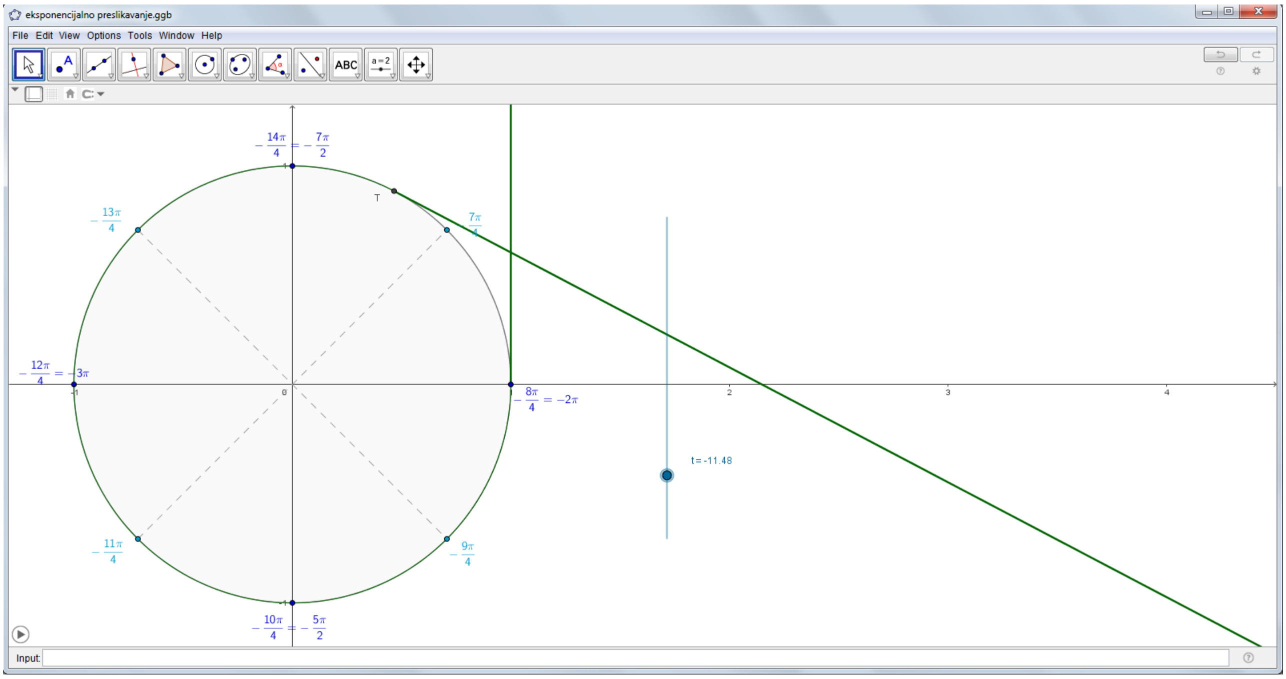
Svakom realnom broju odgovara samo jedna točka na brojevnoj kružnici, dok jednoj točki T na brojevnoj kružnici odgovara beskonačno mnogo brojeva na pravcu. Na primjer, svi brojevi iz skupa

$$\left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k = 0 \pm 1 \pm 2 \ldots\right\}$$

se preslikavaju u istu točku na brojevnoj kružnici.

Definicija 2.4. *Svakoj točki T brojevne kružnice odgovara točno jedan broj α iz intervala $[0, 2\pi\rangle$ na brojevnom pravcu. Taj se broj α naziva **glavna mjera kuta** $\sphericalangle AOT$. Skup svih mjera tog kuta je $\{\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.*

Sljedećim *GeoGebra* apletom prikazano je eksponencijalno preslikavanje pravca na kružnicu. Klikom na gumb za pokretanje animacije namata se pravac, u pozitivnom i negativnom smjeru. Dok se klizač pomiče gore i dolje pokazuje duljinu dijela pravca koji smo namotali. Tim apletom učenici dobivaju vizualni prikaz namatanja i lakše razumiju skupove poput $\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.



Slika 12: Eksponencijalno preslikavanje pravca na kružnicu

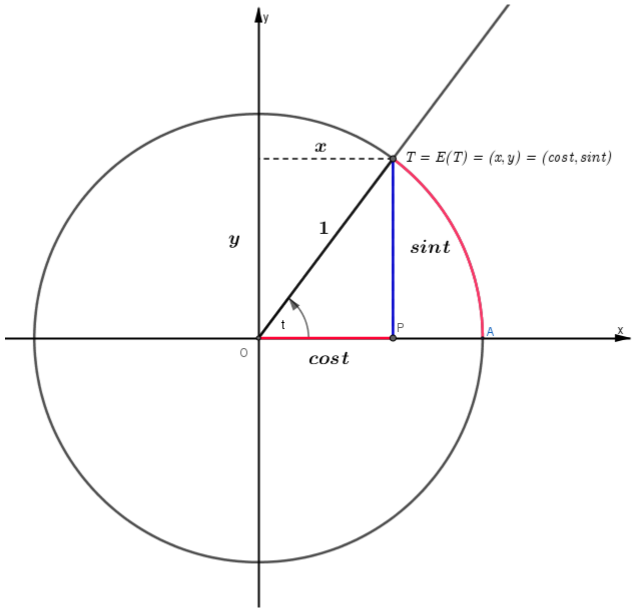
2.4 Definicije trigonometrijskih funkcija

Svakom $t \in \mathbb{R}$ pridružena je točka $T = E(t)$ brojevne kružnice k. Točki $E(t)$ pridružen je uređeni par realnih brojeva (x, y). Primjenom definicija trigonometrijskih funkcija šiljastog kuta u pravokutnom trokutu $\triangle OPT$ dobivamo:

$$\cos t = \frac{x}{1} = x \qquad i \qquad \sin t = \frac{y}{1} = y.$$

Iz toga zaključujemo da točka T ima koordinate $T = (\cos t, \sin t)$, kako je prikazano na slici 13.

Definicija 2.5. *Neka je t po volji odabaran realni broj, $T = E(t)$ njemu odgovarajuća točka na brojevnoj kružnici. Tada je vrijednost funkcije **kosinus apscisa** točke T, a vrijednost funkcije **sinus ordinata** točke T, tj. $T = (x, y) = (\cos t, \sin t)$.*



Slika 13: Definicija trigonometrijskih funkcija sinusa i kosinusa

Povučemo li tangentu p na brojevnu kružnicu u točki $A = (0,1)$ dobijemo vertikalni pravac koji dira brojevnu kružnicu u točki A kao na slici 14 (lijevo). Neka je t po volji odabran realni broj i $T = E(t)$ pripadna točka na brojevnoj kružnici. Povucimo pravac OT. Ako je $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, taj pravac siječe tangentu p u nekoj točki P s koordinatama $(1, y)$. Primjenom definicije trigonometrijskih funkcija šiljastog kuta u pravokutnom trokutu $\triangle OAP$ dobijemo

$$\text{tg } t = \frac{y}{1} = y.$$

Iz toga zaključujemo da je $\operatorname{tg} t$ ordinata točke P, pa točka P ima koordinate $(1, \operatorname{tg} t)$.

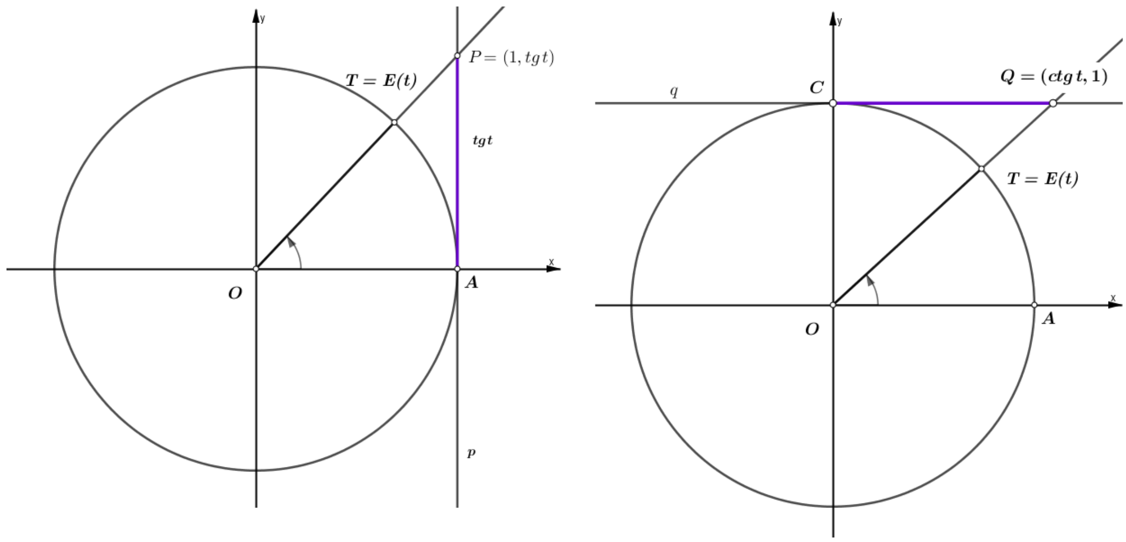
Definicija 2.6. *Neka je t po volji odabran realan broj, $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $T = E(t)$ njemu odgovarajuća točka na brojevnoj kružnici i P presjek pravca OT s tangentom p. Tada je $P = (1, \operatorname{tg} t)$. Dakle, vrijednost funkcije tangens: tg t je* ***ordinata*** *točke Pu kojoj pravac OT siječe tangentu p.*

Povučemo li tangentu q na brojevnu kružnicu u točki $C = (1,0)$ dobijemo horizontalni pravac koji dira brojevnu kružnicu u točki C kao na slici 13 (desno). Neka je t po volji odabran realni broj i $T = E(t)$ pripadna točka na brojevnoj kružnici. Povucimo pravac OT, ako je $t \neq k\pi$, taj pravac siječe tangentu q u nekoj točki Q s koordinatama $(x, 1)$. Primjenom definicije trigonometrijskih funkcija šiljastog kuta u pravokutnom trokutu $\triangle OCQ$ dobijemo

$$\operatorname{ctg} t = \frac{x}{1} = x.$$

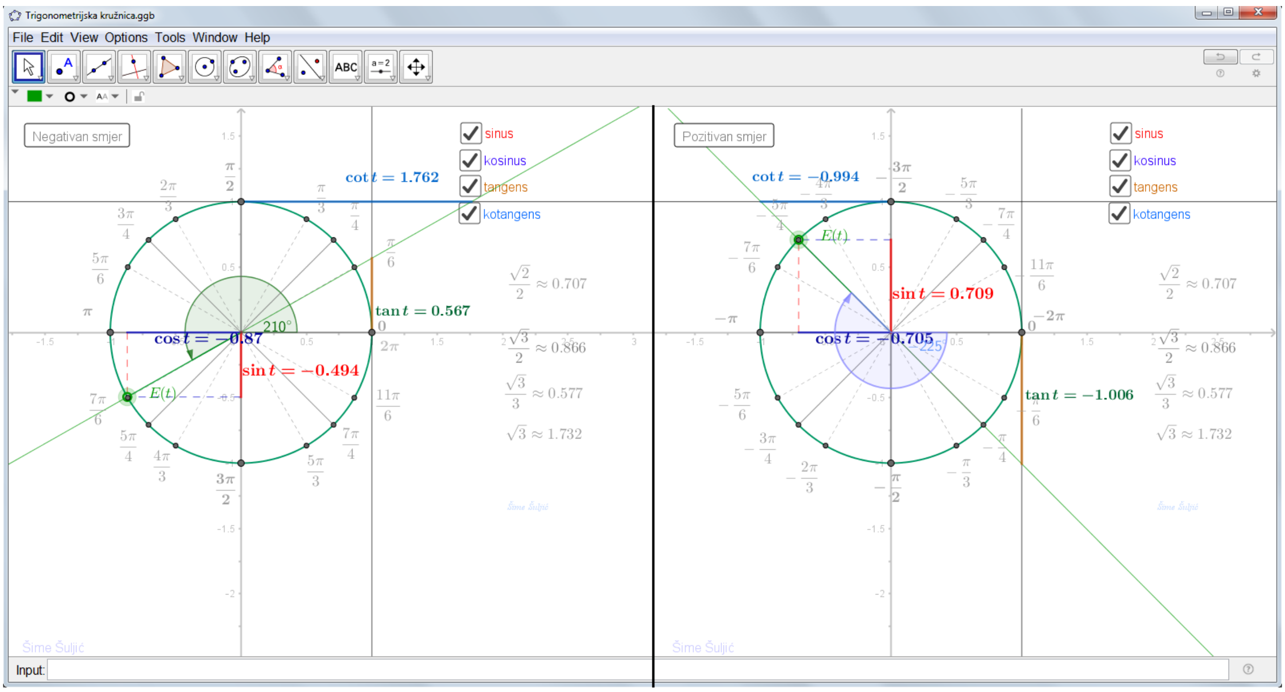
Iz toga zaključujemo da je $\operatorname{ctg} t$ ordinata točke Q, pa točka Q ima koordinate $(\operatorname{ctg} t, 1)$.

Definicija 2.7. *Neka je t po volji odabran realan broj, $t \neq k\pi$, $T = E(t)$ njemu odgovarajuća točka na brojevnoj kružnici i Q presjek pravca OT s tangentom q. Tada je $Q = (\operatorname{ctg} t, 1)$. Dakle, vrijednost funkcije kotangens je* ***apscisa*** *točke Q u kojoj pravac OT siječe tangentu q.*



Slika 14: Definicija trigonometrijskih funkcija tangensa i kotangesa

U drugom razredu učenici su naučili vrijednosti trigonometrijskih funkcija određenih kutova, a sada će naučiti računati vrijednost trigonometrijskih kutova svih mjera. U tome nam pomaže *GeoGebra* aplet koji računa vrijednosti svih trigonometrijskih funkcija pozitivnih i negativnih kutova, gdje će učenici vidjeti da je vrijednost kuta te njemu pripadnoga negativnog kuta ista. Nastavnik može odabrati koju od trigonometrijskih funkcija želi pokazati, "otvarati" ih jednu za drugom ili ih može pokazati sve (kao na slici 15.). Sa strane su također napisani razlomci i njihove vrijednosti u decimalnom zapisu s tri decimalna mjesta, za trigonometrijske funkcije kutova koje su naučili u drugom razredu.



Slika 15: Vrijednosti trigonometrijskih funkcija

Također, ovaj aplet omogućava učenicima da nauče predznake trigonometrijskih funkcija. Svaka trigonometrijska funkcija je označena drugom bojom te oznaka i vrijednost prati riješenje. Tada učenici uočavaju da promjenom svakog ili svakog drugog kvadranta trigonometrijske funkcije mijenjaju predznak. Tako saznaju da je sinus pozitivan u prvom i drugom kvadrantu, a negativan u trećem i četvrtom dok je kosinus pozitivan u prvom i četvrtom, a negativan u drugom i trećem. Tangens i kotangens imaju iste predznake po kvadrantima, prvi i treći su pozitivni dok su drugi i četvrti negativni.

	I.	II.	III.	IV.
$\sin t$	+	+	-	-
$\cos t$	+	-	-	+
$\text{tg}\, t$	+	-	+	-
$\text{ctg}\, t$	+	-	+	-

Slika 16: Tablica vrijednosti trigonometrijskih funkcija

Vrtimo li točku $E(t)$ po brojevnoj kružnici učenici mogu primijetiti da se oznake tangens i kotangens gube na slici dok su sinus i kosinus uvijek unutar brojevne kružnice. Ovim apletom učenici uče otkrivanjem te tako uočavaju da vrijednost sinusa i kosinusa nikada nije manja od -1 ni veća od 1, dok funkcije tangensa i kotangensa poprimaju vrijednost od $-\infty$ do $+\infty$.

Definicija 2.8. ***Omeđenost sinusa i kosinusa:*** *Za svaki realni broj t vrijedi:*

$$|\sin t| \leqslant 1, \quad |\cos t| \leqslant 1.$$

Kažemo da su funkcije sinus i kosinus omeđene.

Funkcije tangens i kotangens vezane su međusobno s funkcijama sinus i kosinus. Na slici 17.(a) vidimo pravokutan trokut $\triangle OBT$ i $\triangle OAP$. Iz sličnosti trokuta $\triangle OBT$ i $\triangle OAP$ vidimo da je

$$\frac{|AP|}{|OA|} = \frac{|BT|}{|OB|}$$

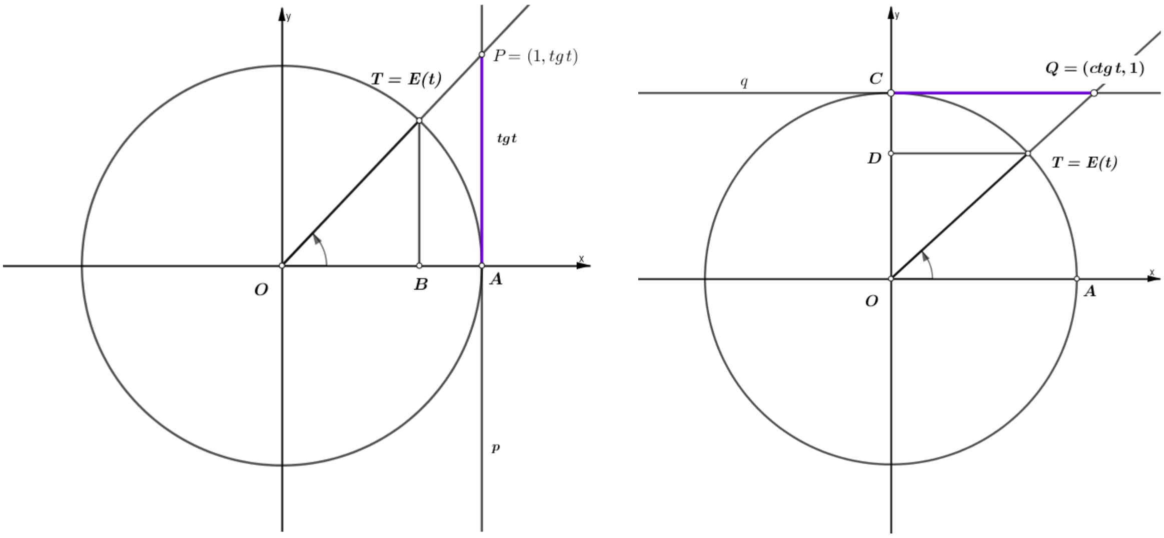
i odavde, jer je $|OA| = 1$, $|OB| = \cos t$, $|BT| = \sin t$, slijedi

$$\text{tg}\, t = \frac{\sin t}{\cos t}.$$

Iz slike 17.(b) i na potpuno isti način možemo prokazati da za funkciju kotangens vrijedi

$$\text{ctg}\, t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

Vidimo da vrijedi $\operatorname{ctg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t}$ za sve t za koje su obje funkcije definirane.



(a) Tangens (b) Kotangens

Slika 17: Veze trigonometrijskih funkcija

3. Svojstva trigonometrijskih funkcija

3.1 Domene i kodomene trigonometrijskih funkcija

Funkcije sinus i kosinus definirane su na čitavom skupu $\mathbb{R}$ pa im je domena $\mathcal{D}(\sin) = \mathcal{D}(\cos) = \mathbb{R}$, trigonometrijske funkcije kutova sinus i kosinus, definirani su za sve kutove (pozitivne, negativne i nul-kut). S druge strane kod funkcija *tangens* i *kotangens* imamo probleme. Za funkciju tangens područje definicije su svi oni $t \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi $\cos t \neq 0$ zbog toga što je tangens definiran s $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$. Za $t = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ vrijednost kosinusa je nula pa slijedi da je:

$$\mathcal{D}(\operatorname{tg}) = \left\{t \in \mathbb{R} : t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Slično je s funkcijom *kotangens*, njena domena je skup svih $t \in \mathbb{R}$ za koje je $\sin t \neq 0$ jer je kotangens definiran s $\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}$. Za $t = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ vrijednost sinusa je nula pa slijedi da je:

$$\mathcal{D}(\operatorname{ctg}) = \{t \in \mathbb{R} : t \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

3.2 Parnost i neparnost trigonometrijskih funkcija

Prije nego pokažemo koje su trigonometrijske funkcije parne, a koje neparne, definirati ćemo općenito parnu i neparnu funkciju.

Definicija 3.1. *Kažemo da je funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$, **parna** ako*

1. $x \in D \Rightarrow -x \in D$,
2. $f(-x) = f(x), \forall x \in D$.

Definicija 3.2. *Kažemo da je funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$, **neparna** ako*

1. $x \in D \Rightarrow -x \in D$,
2. $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$.

Primjetimo da je graf Γ parne funkcije $f(x)$ simetričan obzirom na y os dok graf Γ neparne funkcije $f(x)$ prolazi ishodištem i centralno je simetričan s obzirom na ishodište.

Slijedi propozicija koja govori o tome kakve su trigonometrijske funkcije s obzirom na parnost i neparnost.

Propozicija 3.1. *Funkcija cos je parna, a sin, tg i ctg su neparne funkcije, odnosno*

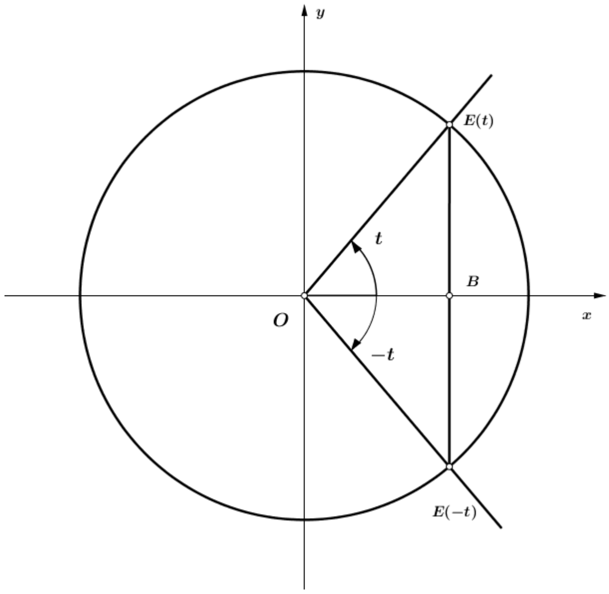
$$\cos(-t) = \cos t$$

$$\sin(-t) = -\sin t$$

$$\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t$$

$$\operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t.$$

Dokaz: Za broj $t \in \mathbb{R}$ apscisa točke $E(t)$ je $\cos t$, a ordinata $\sin t$.



Slika 18: Parnost i neparnost trigonometrijskih funkcija

Kako je $\triangle OBE(t) \cong \triangle OBE(-t)$ (S-K-S) (slika 18.) slijedi da su apscisa od $E(t)$ i $E(-t)$ jednake, tj. $\cos(-t) = \cos t$, a ordinate su suprotne, tj. $\sin(-t) = -\sin t$. Za tangens možemo pokazati slikom ili dokazati na ovaj način:

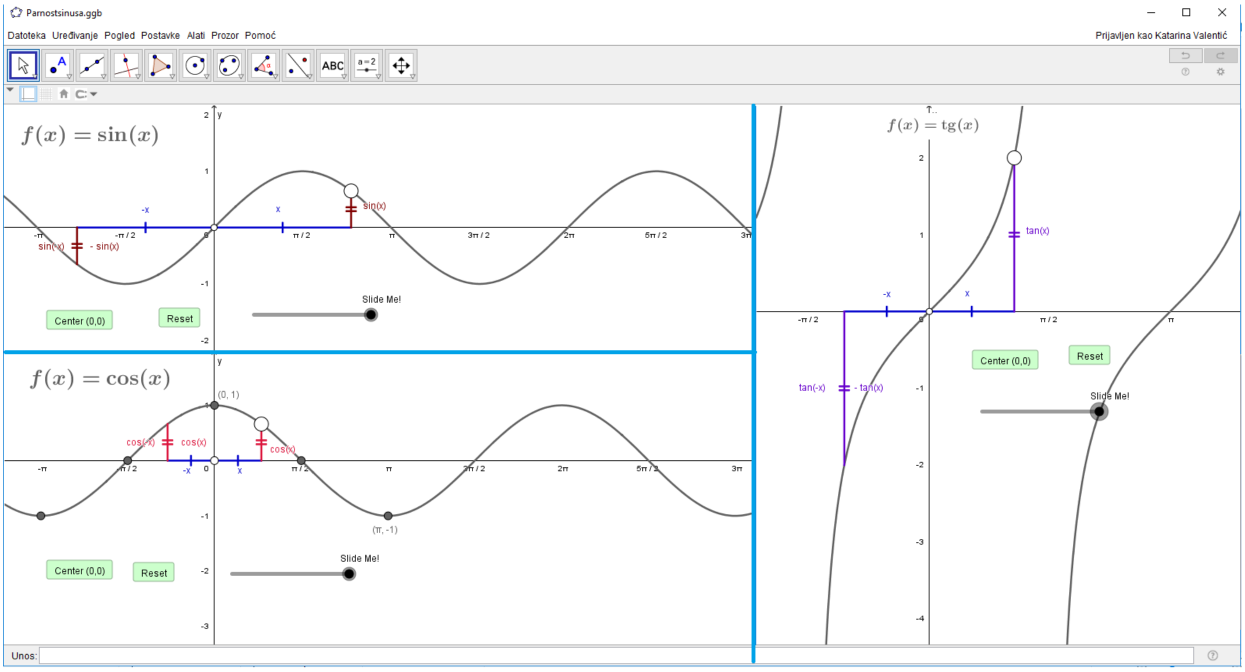
$$\operatorname{tg}(-t) = \frac{\sin(-t)}{\cos(-t)} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t,$$

Slično slijedi za kotangens:

$$\operatorname{ctg}(-t) = \frac{\cos(-t)}{\sin(-t)} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctg} t.$$

□

Za lakše razumijevanje parnosti i neparnosti trigonometrijskih funkcija učenicima pokazujemo *GeoGebra* aplet (slika 19.) u kojem se jasno vidi parnost i neparnost trigonometrijskih funkcija sinus i kosinus, tj. vizualiziran je prethodno iskazan dokaz.



Slika 19: Parnost i neparnost trigonometrijskih funkcija

3.3 Periodičnost trigonometrijskih funkcija

Definicija 3.3. *(Periodičnost) Kažemo da je funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$ periodična ako postoji pozitivan broj $\tau \in \mathbb{R}$, takav da je i $x + \tau \in D$ te vrijedi*

$$f(x+\tau) = f(x) \quad \text{za svaki } x \in D.$$

*Broj τ se zove **period** funkcije f. Najmanji takav pozitivan broj zove se **temeljni period** funkcije f.*

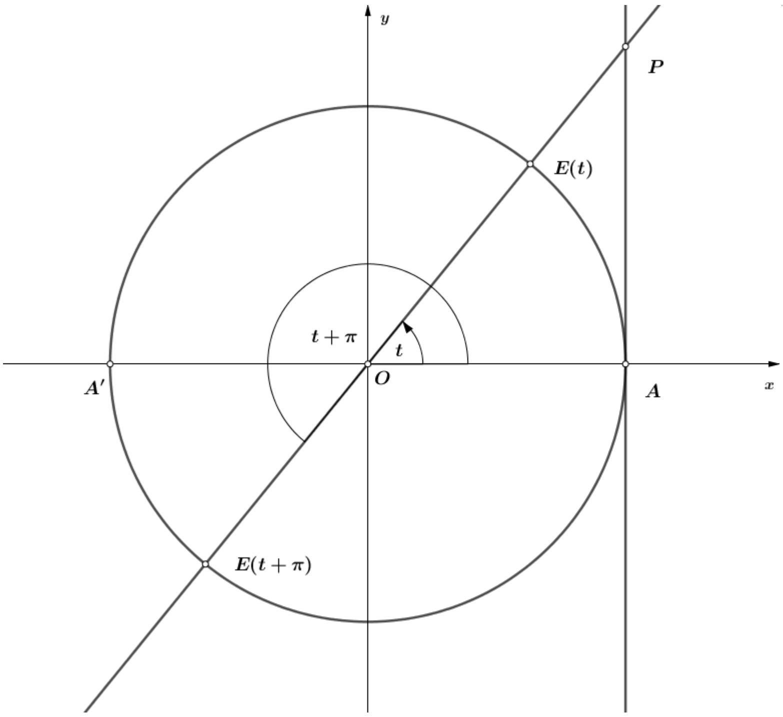
Graf periodične funkcije dobivamo tako da dio grafa nad $[0, \tau]$ translatiramo, po x osi, nad drugi segment $[k\tau, (k+1)\tau], k \in \mathbb{Z}$. Upravo zato pridajemo važnost periodičnosti funkcije te ju je dovoljno promatrati na segmentu duljine temeljnog perioda. Nakon iskazane definicije periodične funkcije slijedi teorem koji govori jesu li trigonometrijske funkcije periodične i koji im je temeljni period.

Teorem 3.1. *Trigonometrijske funkcije su periodične funkcije. Temeljni period funkcjia sinus i kosinus je 2π, a funkcija tangens i kotangens je π.*

Dokaz: Znamo da je $E(t + 2k\pi) = E(t), \forall t \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$. Stoga točke $E(t + 2k\pi)$ i $E(t)$ imaju iste koordinate. Dakle, ako t pripada domeni neke trigonometrijske funkcije, onda joj pripada i $t + 2k\pi$ i vrijednosti su im u tim točkama jednake. Prema tome, 2π (pa stoga i $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$) je period svake od trigonometrijskih funkcija.

Dokažimo da je 2π temeljni period za cos i sin. Neka je $\tau > 0$ temeljni period kosinusa, tj. $\cos(t + \tau) = \cos t, \forall t \in \mathbb{R}$. Za $t = 0$ dobivamo $\cos\tau = \cos 0 = 1$. Zbog svojstva eksponencijalnog preslikavanja slijedi da $\tau \in \{0, \pm 2, \pm, 4, \dots\}$. Najmanji pozitivan broj ovog skupa je upravo 2π, koji je period kosinusa, pa je $\tau = 2\pi$ i njegov temeljni period. Za sinus postupamo analogno. $\sin(t+\tau) = \sin t$, pa za $t = \frac{\pi}{2}$ dobivamo $\sin(\tau + \frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, odakle je opet zbog svojstva vlakna $\tau = 2k\pi$, za neki $k \in \mathbb{Z}$. Najmanji pozitivan period je opet $\tau = 2\pi$.

Sada dokažimo da je π temeljn period za tangens. Pretpostavimo da je $\operatorname{tg}(t+\tau) = \operatorname{tg} t$ za sve dopustive t. Prvo, $\tau = \pi$ je period. Točke $E(t)$ i $E(t+\pi)$ su dijametralne, pa pravci $OE(t)$ i $OE(t+\pi)$ sijeku os tangensa u istoj točki P (slika 20.) i stoga su ordinate jednake, tj $\operatorname{tg}(t+\pi) = \operatorname{tg} t$. Stavimo li u $\operatorname{tg}(t+\pi) = \operatorname{tg} t, t = 0$ dobivamo $\operatorname{tg} \tau = 0$ pa dužina AP degenerira u točku, odnosno, P se podudara s A. Stoga su jedina dva moguća položaja točke $E(\tau)$ točke A i A'. Ali najmanji pozitvan broj τ za koji je $|PA| = 0$ jest $\tau = \pi$. Dokaz za kotangens je analogan.



Slika 20: Periodičnost trigonometrijske funkcije *tangens*

□

4. Trigonometrijski identiteti

4.1 Osnovni trigonometrijski identiteti

Osnovni trigonometrijski identitet je osnovna veza između trigonometrijskih funkcija sinus i kosinus koja je dana sljedećom propozicijom.

Propozicija 4.1. *Za svaki $t \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Dokaz: Pogledajmo sliku 13. Kako je točka $E(t)$ na jediničnoj kružnici sa koordinatama $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ iz Pitagorinog poučka slijedi navedeni identitet.

□

Drugi trigonometrijski identitet je veza između funkcije tangens i kotangens koji slijedi direktno iz njihovih definicija

$$\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1.$$

Neke od važnih trigonometrijskih identiteta možemo dobiti primjenom Pitagorinog poučka i trigonometrije pravokutnog trokuta. Promatrimo pravokutni trokut na slici 1. Prisjetimo se *Pitagorina poučka*:

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{1}$$

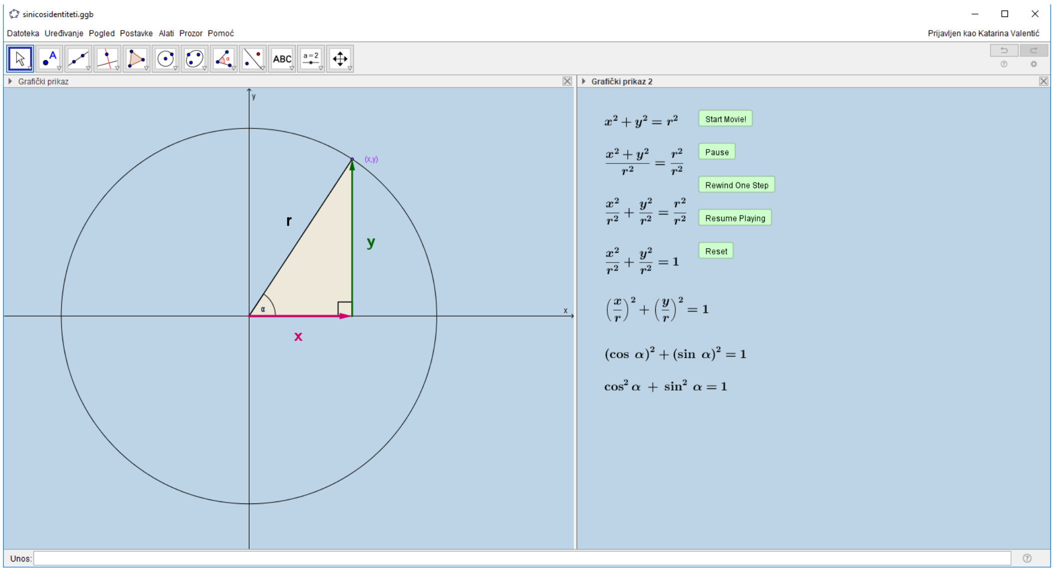
Podijelimo li (1) s c^2, za koji znamo da je različit od 0, dobijemo

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

Trigonometrijske funkcije sinus i kosinus pravokutnog trokuta smo definirali sa $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ i $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ i tada slijedi jednakost

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Učenicima pokažemo *GeoGebra* aplet (slika 21.) pomoću kojega će sami doći do osnovnog tigonometrijskog identiteta. Zadamo im zadatak da napišu Pitagorin poučak za prikazan trokut. Klikom na gumb *"Start movie"* pokazuju se koraci i prvi korak je upravo Pitagorin poučak kojeg su učenici napisali. Klikom na gumb *"Pause"* možemo pauzirati prikazivanje koraka i objasniti da primjenjujemo trigonometriju pravokutnog trokuta na šiljasti kut α te se prisjetimo "pjesmica". Napomenemo koja je kateta nasuprotna, a koja priležeća, napišemo kako glase trigonometrijske funkcije u tim oznakama i klikom na gumb *"Resume Playing"* nastavimo prikazivati korake. Kada se prikaže korak $(\frac{x}{r})^2 + (\frac{y}{r})^2 = 1$, zaustavimo prikazivanje koraka i posjetimo učenike s čime se mogu zamijeniti razlomci. Nakon što otkrijemo zadnji korak i dobiveni rezultat nazovemo *osnovni trigonometrijski identitet.*



Slika 21: Osnovni trigonometrijski identitet

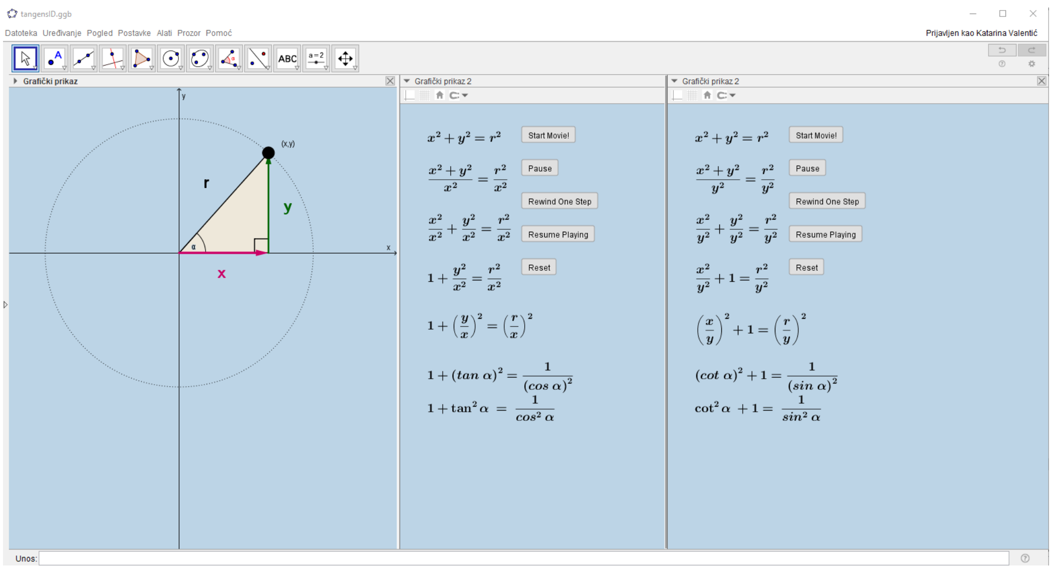
Dijeljenjem (1) sa preostala dva elementa jednakosti, a^2 i b^2, redom dobivamo

$$1+\left(\frac{b}{a}\right)^2=\left(\frac{c}{a}\right)^2 \quad \text{i} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2+1=\left(\frac{c}{b}\right)^2.$$

Rezultate možemo zapisati u obliku:

$$1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha} \quad \text{i} \quad \mathrm{tg}^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}. \tag{2}$$

Učenicima govorimo da probaju podijeliti Pitagorin poučak s preostala dva elementa te pokrećemo *GeoGebra* aplete za svakog od njih. Nastaje problem kod razlomka u kojem je hipotenuza u brojniku, ali ih upozoravamo na dvojne razlomke. Nakon toga učenici s lakoćom dolaze do rezultata (2). Slikom 22. prikazan je trigonometrijski identitet funkcije tangens i kotangens.



Slika 22: Trigonometrijski identitet funkcije tangens i kotangens

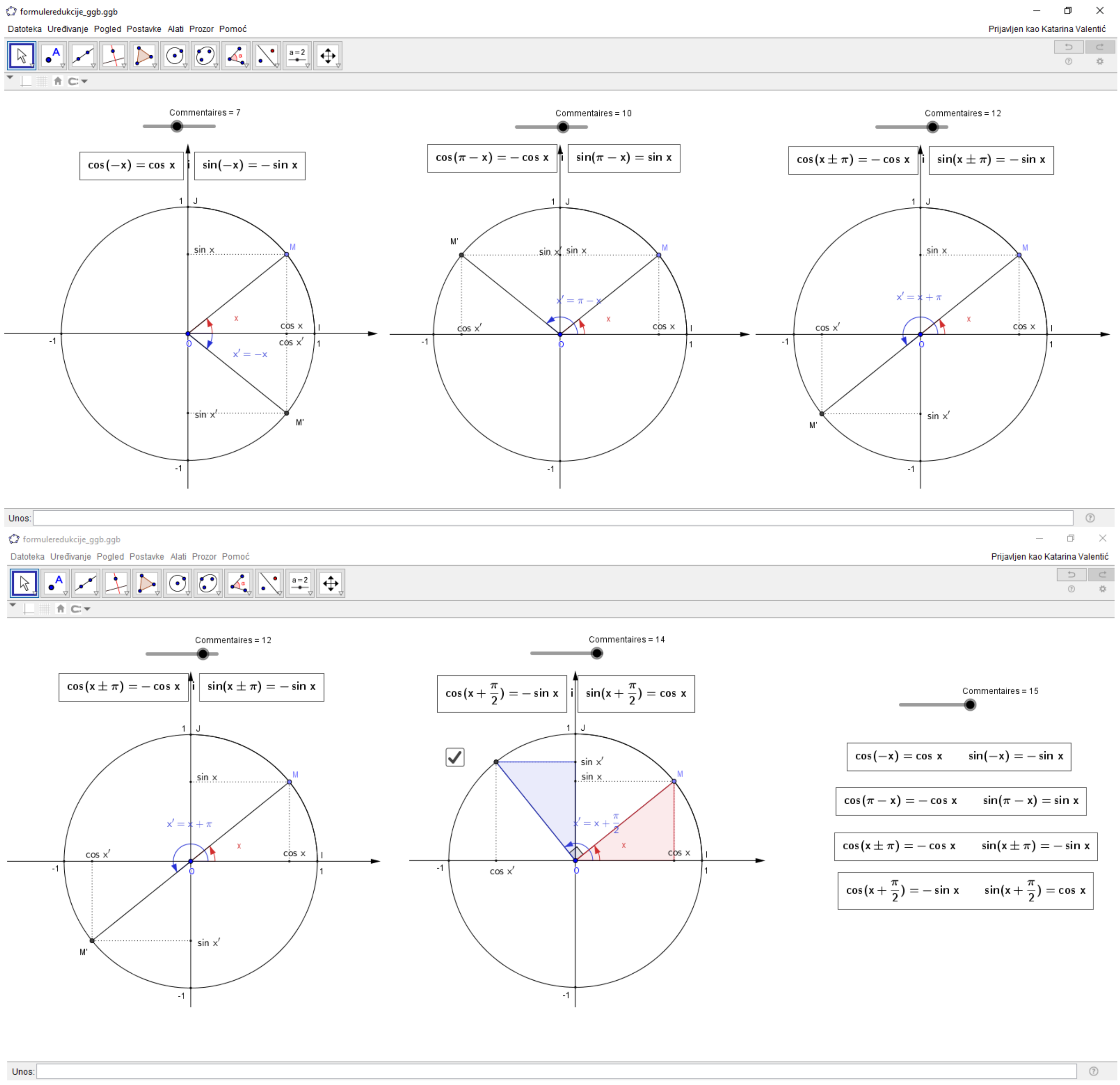
Pomoću trigonometrijskih identitete možemo odrediti vrijednosti trigonometrijskih funkcija nekog kuta ako je zadana vrijednost samo jedne trigonometrijske funkcije tog kuta. Sljedećom tablicom prikazane su pretvorbe trigonometrijskih funkcija.

	$\sin t$	$\cos t$	$\operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg} t$
$\sin t$	-	$\pm\sqrt{1-\cos^2 t}$	$\pm\frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 t}}$
$\cos t$	$\pm\sqrt{1-\sin^2 t}$	-	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}$	$\pm\frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}$
$\operatorname{tg} t$	$\pm\frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2 t}}{\cos t}$	-	$\frac{1}{\operatorname{ctg} t}$
$\operatorname{ctg} t$	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}$	$\pm\frac{\cos t}{\sqrt{1-\cos^2 t}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg} t}$	-

Tablica 1: Pretvorbe trigonometrijskih funkcija

4.2 Formule redukcije

Formule redukcije izražavaju trigonometrijske formule argumenata $-t$, $\frac{\pi}{2}\pm t$, $\pi\pm t$, $\frac{3\pi}{2}\pm t$, $2\pi\pm t$ pomoću trigonometrijskih argumenata t. Formule redukcije važno je pokazati geometrijski kako bi se formule rabile s razumijevanjem i ne bi učile napamet. Na slici 23. prikazan je *GeoGebra* aplet u kojem su pomoću klizača, korak po korak, objašnjene neke od formula redukcije.



Slika 23: Formule redukcije u *GeoGebri*

U sljedećoj tablici prikazane su sve formule redukcije svih trigonometrijskih funkcija.

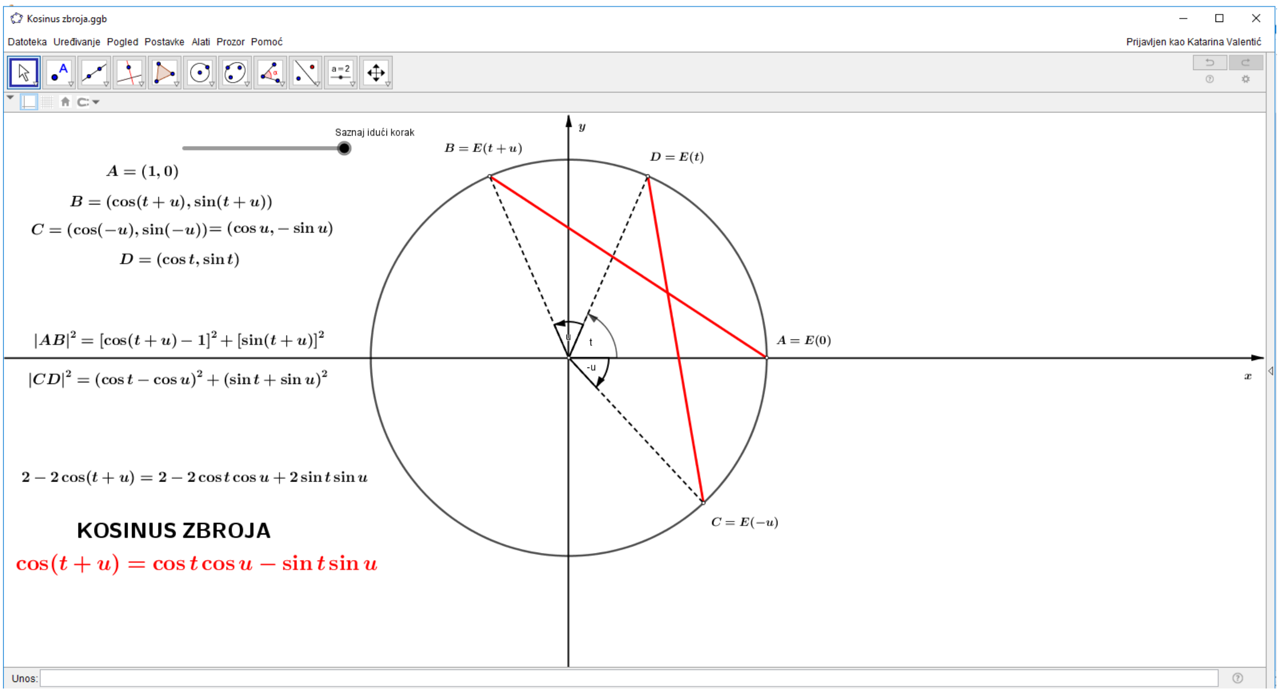
	$\frac{\pi}{2}-t$	$\frac{\pi}{2}+t$	$\pi-t$	$\pi+t$	$\frac{3\pi}{2}-t$	$\frac{3\pi}{2}+t$	$2\pi-t$	$2\pi+t$
sin	$\cos t$	$\cos t$	$\sin t$	$-\sin t$	$-\cos t$	$-\cos t$	$-\sin t$	$\sin t$
cos	$\sin t$	$-\sin t$	$-\cos t$	$-\cos t$	$-\sin t$	$\sin t$	$\cos t$	$\cos t$
tg	$\operatorname{ctg} t$	$-\operatorname{ctg} t$	$-\operatorname{tg} t$	$\operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg} t$	$-\operatorname{ctg} t$	$-\operatorname{tg} t$	$\operatorname{tg} t$
ctg	$\operatorname{tg} t$	$-\operatorname{tg} t$	$-\operatorname{ctg} t$	$\operatorname{ctg} t$	$\operatorname{tg} t$	$-\operatorname{tg} t$	$-\operatorname{ctg} t$	$\operatorname{ctg} t$

Tablica 2: Formule redukcije trigonometrijskih funkcija

4.3 Adicijske formule

Pokazali smo da trigonometrijske funkcije zadovoljavaju neke zanimljive identitete, a sada ćemo pokazati da zadovoljavaju i *adicijske formule*. Formule kojima se izražavaju vrijednosti trigonometrijskih funkcija zbroja pomoću vrijednosti tih funkcija na pribrojnicima zvou se **adicijske formule za trigonometrijske funkcije**.

GeoGebra apletom izvodimo kosinus zbroja, slika 24. Implementiran je klizač koji prikazuje element po element. Nakon što se prikažu kutovi, točke i dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ zaustavlja se animacija i raspravlja sa učenicima o duljinama dužina. Nakon što zaključe da su dužina $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ jednake duljine ispisuju koordinate točaka u terminima trigonometrijskih funkcija. Ranije upoznati sa formulom za izračunavanje međusobne udaljenosti točaka učenici izračunavaju udaljenosti točaka A i B te točaka C i D s koordinatama koje su si zapisali. Nakon sređivanja rezultata i sa zaključkom da su dužina jednake duljine izjednačavaju dobivene rezultate. Za kraj im preostaje srediti izraz i dolaze do formule za kosinus zbroja u čemu im pomaže nastavnik.



Slika 24: Kosinus zbroja

Kosinus razlike se izvodi pomoći formule za kosinus zbroja. U formulu kosinus zbroja ćemo umjesto u staviti $-u$. Za preostale trigonometrijske funkcije koristimo adicijske formule za kosinus i formule komplementiranja.

Sljedećim teoremom iskazane su sve adicijske formule.

Teorem 4.1. ***Adicijske formule:*** *Vrijedi*

$$\begin{aligned}
\cos(t \pm u) &= \cos t \cos u \mp \sin t \sin u, \quad \textit{za sve } t, u \in \mathbb{R} \\
\sin(t \pm u) &= \sin t \cos u \pm \cos t \sin u, \quad \textit{za sve } t, u \in \mathbb{R} \\
\operatorname{tg}(t \pm u) &= \frac{\operatorname{tg} t \pm \operatorname{tg} u}{1 \mp \operatorname{tg} t \operatorname{tg} u}, \quad \textit{za sve dopustive } t \textit{ i } u \\
\operatorname{ctg}(t \pm u) &= \frac{\operatorname{ctg} t \operatorname{ctg} u \mp 1}{\operatorname{ctg} t \pm \operatorname{ctg} u}, \quad \textit{za sve dopustive } t \textit{ i } u.
\end{aligned}$$

Za dio dokaza potrebne su nam formule komplementiranja koje ćemo sljedećom propozicijom samo iskazati.

Propozicija 4.2. *Za svaki $t \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t.$$

Isto tako je

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{ctg} t, \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{tg} t$$

za sve dopustive t.

Možemo primjetiti da su formule komplementiranja upravo formule redukcije s argumentom $\frac{\pi}{2} - t$.

Dokaz: Teorema 4.1.

Dokažimo prvo adicijsku formulu za kosinus, tj $\cos(t \pm u) = \cos t \cos u \mp \sin t \sin u$. Uzmimo $0 \leq t, u \leq 2\pi$. Promotrimo točke $A = (\cos t, \sin t)$, $B = (\cos u, \sin u)$ na trigonometrijskoj kružnici. Računat ćemo $|AB|$ u sustavu Oxy i zarotiranom sustavu $Ox'y'$. Slika 24. pokazuje sustav Oxy i imamo

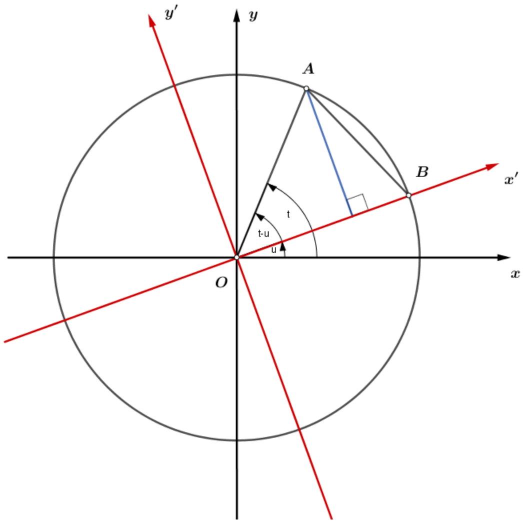
$$\begin{aligned}
|AB|^2 &= (\cos t - \cos u)^2 + (\sin t - \sin u)^2 \\
&= 2(1 - \cos t \cos u - \sin t \sin u).
\end{aligned}$$

A u sustavu $Ox'y'$ imamo da je $A = (\cos(t-u), \sin(t-u))$, $B = (1, 0)$ pa je

$$\begin{aligned}
|AB|^2 &= [\cos(t-u) - 1]^2 + \sin^2(t-u) \\
&= \cos^2(t-u) - 2\cos(t-u) + 1 + \sin^2(t-u)^2 \\
&= 2[1 - \cos(t-u)].
\end{aligned}$$

Udaljenost se rotacijom ne mijenja, tada izjednačavanjem slijedi

$$\cos(t-u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u.$$



Slika 25: Prikaz točaka A i B u sustavima Oxy i $Ox'y'$

Ova formula ne vrijedi samo za $0 \leq t, u \leq 2\pi$, nego $\forall t, u \in \mathbb{R}$, jer uvijek postoje $k, l \in \mathbb{Z}$ takvi da je $2k\pi \leq t \leq 2\pi(k+1)$, $2l\pi \leq u \leq 2\pi(l+1)$, tj. $0 \leq t - 2k\pi \leq 2\pi$, $0 \leq u - 2l\pi \leq 2\pi$.

Formula za kosinus zbroja dokazujemo na sljedeći način te u dokazu koristimo parnost i neparnost funkcija sinus i kosinus.

$$\begin{aligned} \cos(t+u) = &= \cos(t - (-u)) \\ &= \cos t \cos(-u) + \sin t \sin(t - (-u)) \\ &= \cos t \cos u - \sin t \sin u. \end{aligned}$$

Formulu za sinus zbroja dokazujemo pomoću formule komplementiranja

$$\begin{aligned} \sin(t+u) = &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (t+u)\right] \\ &= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - t\right) - u\right] \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\cos u + \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\sin u \\ &= \sin t \cos u + \cos t \sin u. \end{aligned}$$

Dokaz sinusa razlike provodimo analogno, umjesto u stavimo $-u$. Dokazat ćemo formulu za tangens zbroja.

$$\operatorname{tg}(t+u) = \frac{\sin(t+u)}{\cos(t+u)} = \frac{\sin t \cos u + \cos t \sin u}{\cos t \cos u - \sin t \sin u} = \frac{\frac{\sin t \cos u}{\cos t \cos u} + \frac{\cos t \sin u}{\cos t \cos u}}{\frac{\cos t \cos u}{\cos t \cos u} - \frac{\sin t \sin u}{\cos t \cos u}} = \frac{\operatorname{tg} t + \operatorname{tg} u}{1 - \operatorname{tg} t \operatorname{tg} u}.$$

Slično se dokazuje adicijska formula za kotangens zbroja, a formule za tangens i kotangens razlike se dokažu tako da se u formulu za tangens i kotangens zbroja uvrsti $-u$ umjesto u.

$\square$

5. Grafovi trigonometrijskih funkcija

Slijedeća dva teorema govore nam o intervalima monotonosti i neprekidnosti grafova trigonometrijskih funkcija. Nakon toga slijediprikaz konstrukcije grafova trigonometrijskih funkcija.

Teorem 5.1. *Restrikcija funkcije sinus na segment* $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *strogo je monotono rastuća funkcija, a restrikcija kosinusa na segment* $[0, \pi]$ *strogo je monotono padajuća funkcija. Nadalje,* $\mathrm{tg}\,|_{\langle\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle}$ *strogo je monotono rastuća, a* $\mathrm{ctg}\,|_{\langle 0,\pi\rangle}$ *je strogo monotono padajuća funkcija.*

Stoga su $\sin|_{[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\colon [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, $\cos|_{[0,\pi]}\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$, $\mathrm{tg}\,|_{\langle\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle}\colon \langle\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle \to \mathbb{R}$ *i*

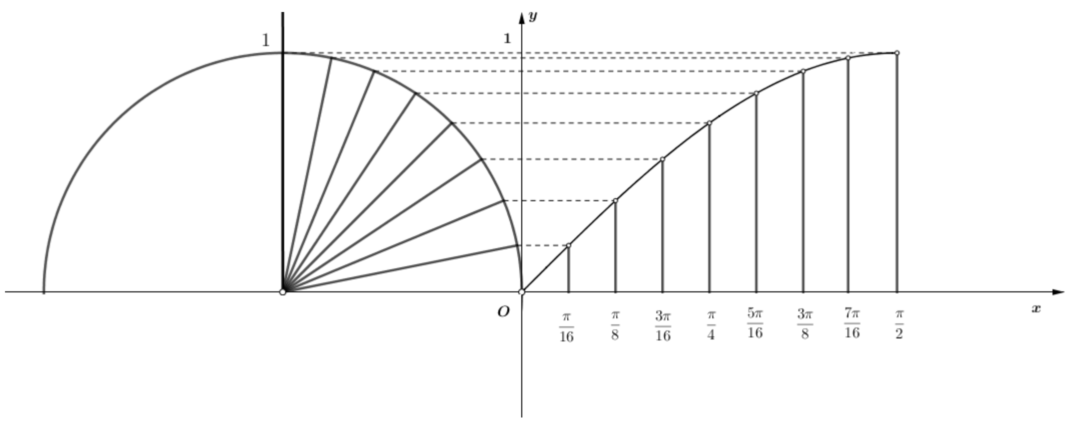
$\mathrm{ctg}\,|_{\langle 0,\pi\rangle}\colon \langle 0, \pi\rangle \to \mathbb{R}$ *bijekcije.*

Teorem 5.2. *Neka je* $I \subseteq \mathbb{R}$ *otvoreni interval, a* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *monotona funkcija, tako da je slika* $I' = f(I) \subseteq \mathbb{R}$ *također otvoreni interval. Tada je* f *neprekidna funkcija.*

Iz prethodnog teorema slijedi da su funkcije $\sin|_{\langle\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle}$ i $\cos|_{\langle 0,\pi\rangle}$ neprekidne funkcije. A iz navedenog teorema i formula redukcije lako se da zaključiti da su $\sin, \cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije. Kako je kvocijent neprekidnih funkcija opet neprekidna funkcija, zaključujemo da su funkcije tangens i kotangens neprekidne na svom području definicije.

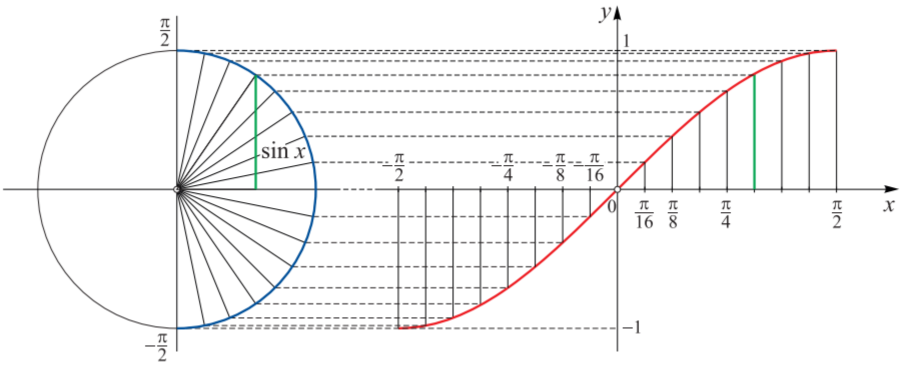
Detaljno ćemo pokazati kako konstruirati graf funkcije sinus, tj. $t \mapsto \sin t$. Nakon toga ćemo vidjeti koja je razlika između grafa funkcije sin i cos. Na kraju ćemo vidjeti kako izgledaju grafovi preostalih trigonometrijskih funkcija.

Graf funkcije sinus nazivamo *sinusoida.* Da bi konstruirali sinusoidu (ali i sve ostale grafove trigonometrijskih funkcija), dovoljno je konstruirati graf na nekom segmentu duljine temeljnog perioda te ga periodički produžiti. Promotrimo $\sin|_{[0,\frac{\pi}{2}]}$, na tom intervalu vrijednost funkcije sinus raste od 0 do 1. Da bi što točnije nacrtali prvu četvrtinu sinusoide, prvu četvrtinu brojevne kružnice (prvi kvadrant) dijelimo na $m = 2^n, n \in \mathbb{N}$ dijelova i kroz točke $1, 2, \ldots, m$ povlačimo paralele s x osi. Također segment $[0, \frac{\pi}{2}]$ podijelimo na m jednakih dijelova $1, 2, \ldots, m$ i u tim točkama povlačimo okomice na x os. Sjecišta okomica i paralela daju točke grafa, spajanjem točaka glatkom krivuljom dobivamo sinusoidu na prvom kvadrantu.



Slika 26: Prva četvrtina sinusoide

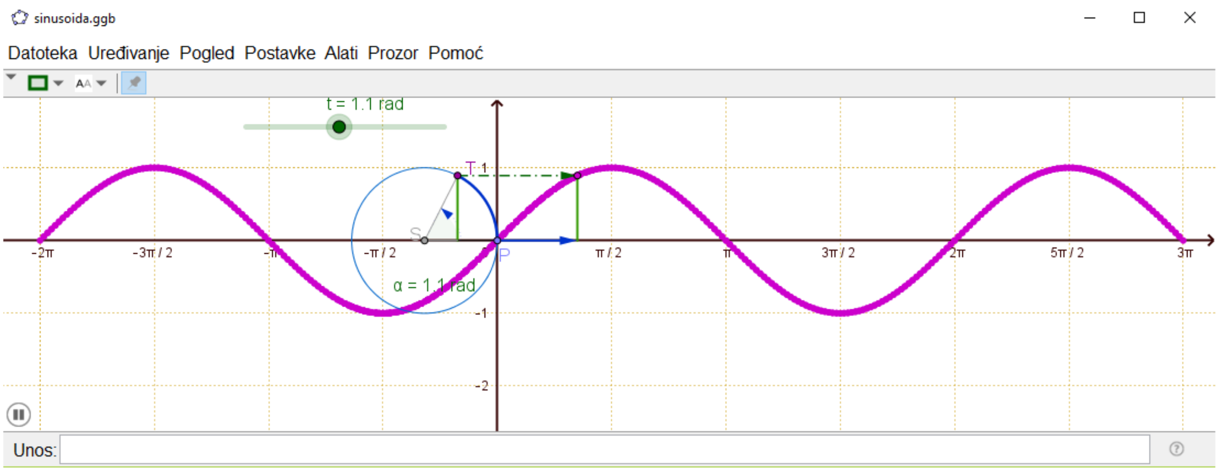
Iz neparnosti funkcije sinus slijedi da je sinusoida simetrična obzirom na ishodište, pa je u $\frac{-\pi}{2}$ vrijednost -1. Slika 27. pokazuje graf funkcije sinus na $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



Slika 27: Sinusoida na $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

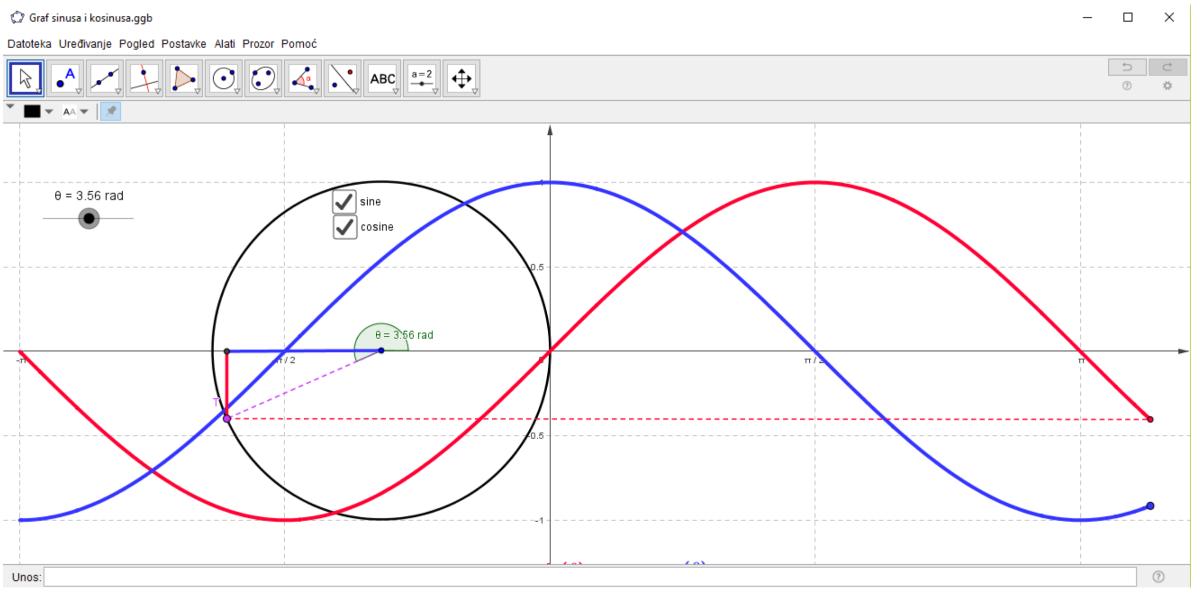
Za drugi kvadrant brojevne kružnice koristimo formulu $\sin(\pi - t) = \sin t$ pa je graf sinusa na $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ simetričan grafu na $[0, \frac{\pi}{2}]$ obzirom na pravac $x = \frac{\pi}{2}$. Na taj smo način opisali sinusoidu na $[-\pi, \pi]$ te ju dalje periodički produžimo.

Da bi točno vidjeli kako sinusoida izgleda na svom temeljnom periodu, $[0, 2\pi]$ i kako je periodički produžujemo, poslužit će nam *GeoGebra* aplet (slika 28.). U aplet je implementirana animacija te klikom na pokretanje animacije nastaje sinusoida. Razmak na x osi je $\frac{\pi}{2}$ da bi učenici uočili nultočke, maksimalne i minimalne vrijednosti.



Slika 28: Sinusoida

Graf funkcije kosinus je *kosinusoida*. Graf funkcije kosinus možemo nacrtati koristeći isti postupak kao i za funkciju sinus, pazeći da za svaki realni broj t vrijedi $\cos t = \sin(t + \frac{\pi}{2})$. Slika 29. prikazuje *Geogebra* aplet u kojem je graf funkcije sinus i funkcije kosinus, iz prikazanog vidimo da je kosinusoida upravo sinusoida translatirana za $\frac{\pi}{2}$ ulijevo. Sinus je crvene boje a kosinus plave boje. Učenici primjećuju da su nultočke, minimalne i maksimalne vrijednosti, kod sinusoide i kosinusoide udaljene za $\frac{\pi}{2}$.

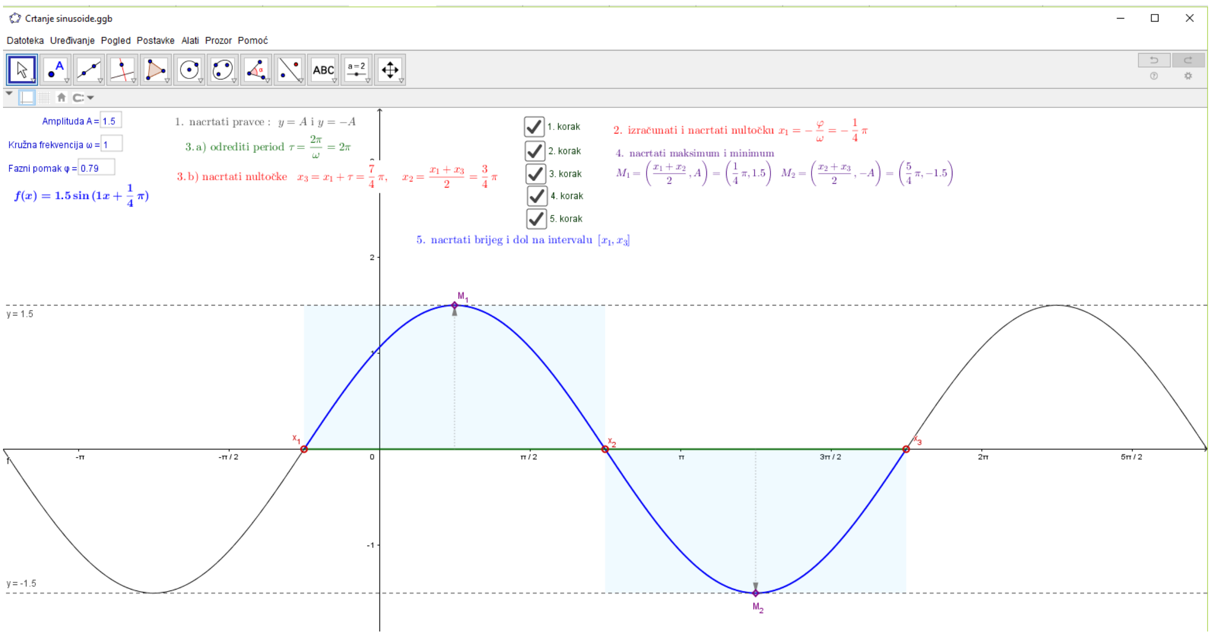


Slika 29: Sinusoida i kosinusoida

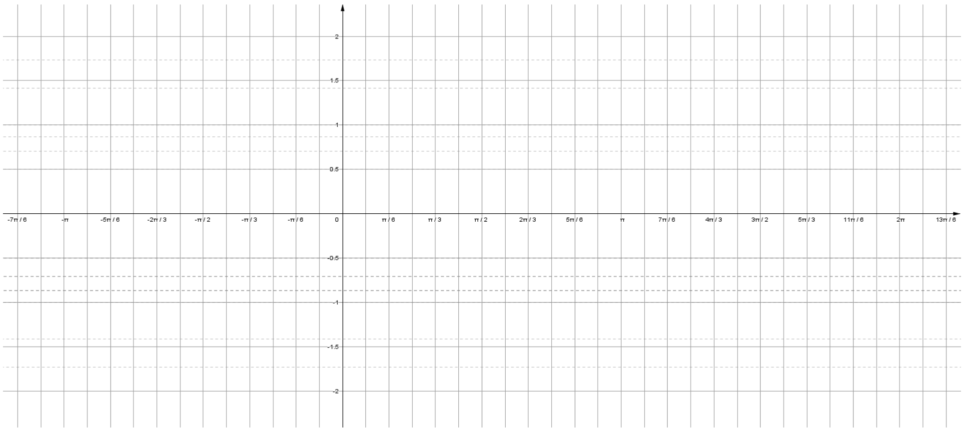
Učenici se u ovom dijelu gradiva najviše bave crtanjem grafa funkcije sinus, tj. crtanjem sinusoide. **Harmonijska funkcija** ima najvažniju ulogu u primjeni trigonometrijske funkcije sinus. Ona je oblika:

$$f(x) = A\sin(\omega x + \varphi).$$

U ovom se izrazu pozitivna konstanta $A > 0$ naziva **amplituda**, $\omega \neq 0$ se naziva **kružna frekvencija**, a φ **fazni pomak**. Harmonijska funkcija je također periodična, njezin temeljni period je $\tau = \frac{2\pi}{|\omega|}$. U pomoć nam dolazi *GeoGeba* aplet na kojem po koracima crtamo graf harmonijske funkcije. Na slici 30. nacrtan je graf harmonijske funkcije u *GeoGebra* apletu s amplitudom $A = 1.5$, kružnom frekvencijom $\omega = 1$ i faznim pomakom $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Koraci se otvaraju jedan po jedan te tako učenici crtaju svoje grafove na papir na kojem je iscrtan koordinatni sustav s razmakom $\frac{\pi}{6}$ za lakše crtanje, koji daje nastavnik (slika 31.).

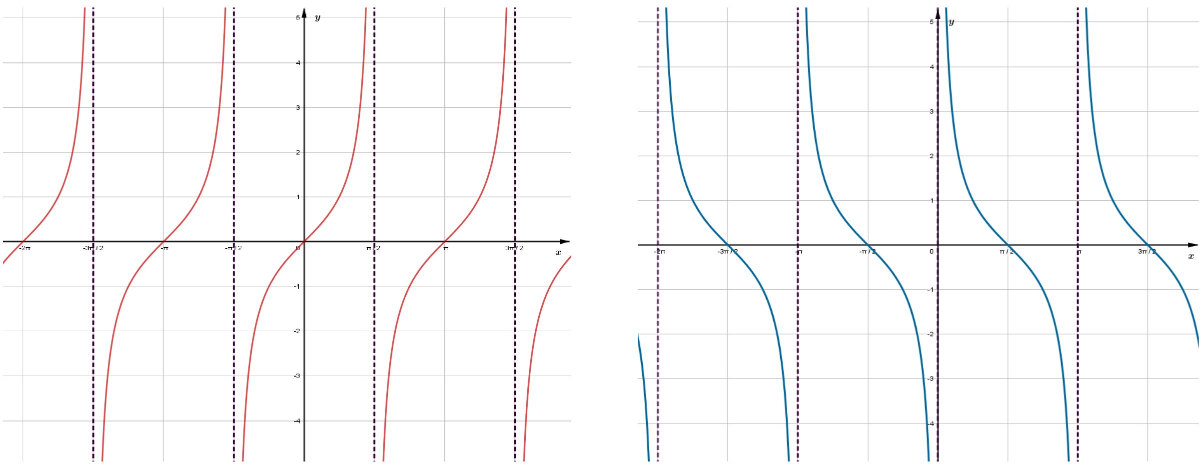


Slika 30: Crtanje sinusoide



Slika 31: Mreža za crtanje sinusoide

Graf funkcije tangens dovoljno je nacrtati na intervalu $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ jer je njezin period π. Tangens nije definiran u $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ pa su pravci $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$ **vertikalne asimptote**. Funkcija kotangens nije definirana u $k\pi, k \in \mathbb{Z}$ pa su pravci $x = k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$ njene vertikalne asimptote. Na slici 32. možemo vidjeti kako izgledaju grafovi funkcije tangens i kotangens.



(a) Graf funkcije tangens (b) Graf funkcije kotangens

Slika 32: Grafovi ostalih trigonometrijskih funkcija

6. Trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe

Za razliku od algebarskih, kvadratnih i linearnih, trigonometrijske se jednadžbe mogu pojavljivati u nebrojenim različitim oblicima. Zato nije moguće propisati postupak za rješavanje svake od njih. Koliko god složena trigonometrijska jednadžba bila primjenom trigonometrijskih identiteta svodi na ekvivalentnu, jednostavniju jednadžbu i konačno na rješavanje neke od osnovnih jednadžbi koje su oblika

$$\sin x = a, \ \ \cos x = b, \ \ \operatorname{tg} x = c, \ \ \operatorname{ctg} x = d.$$

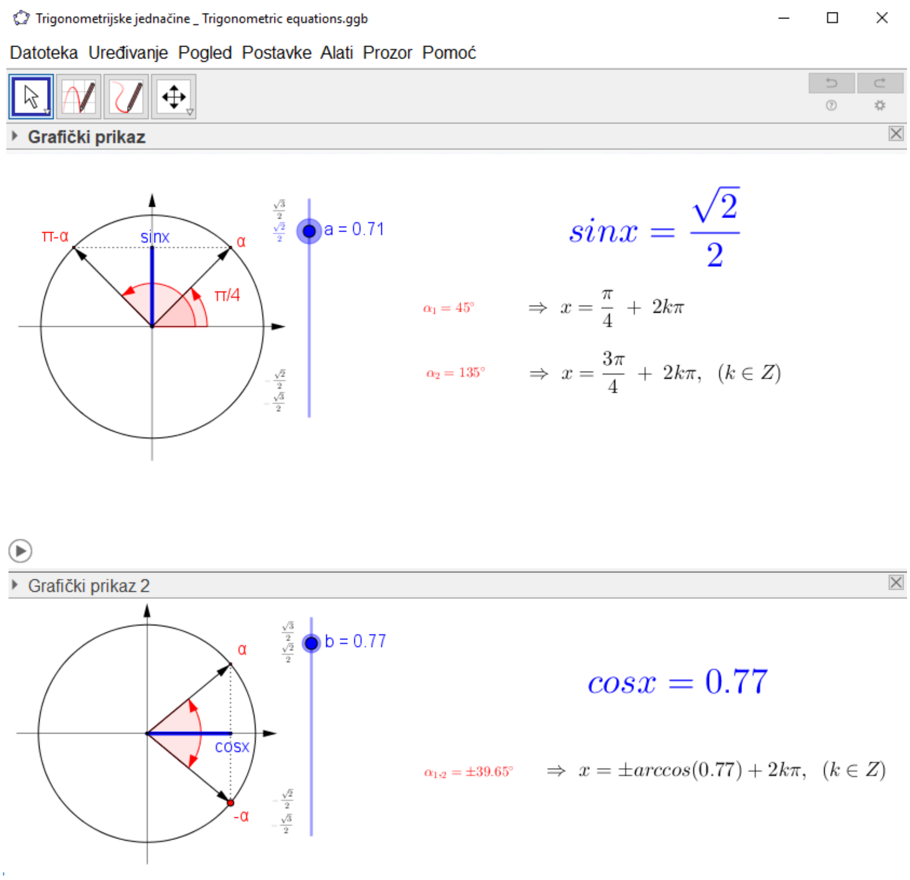
Pritom su a, b, c i d realni brojevi, dodatno zbog omeđenosti funkcija sinus i kosinus, $|a| \leqslant 1$ i $|b| \leqslant 1$.

Trigonometrijske nejednadžbe su oblika $f(x) \leqslant$ ili $f(x) < 0$, gdje je f neka od trigonometrijskih funkcija. Kod njih se bitno koristi periodičnost trigonometrijskih funkcija i rješavaju se primjenom trigonometrijskih identiteta i algebarskih postupaka nejednadžbe svođenjem na osnovni oblik, primjerice $\sin x > a$ ili $\cos < a$.

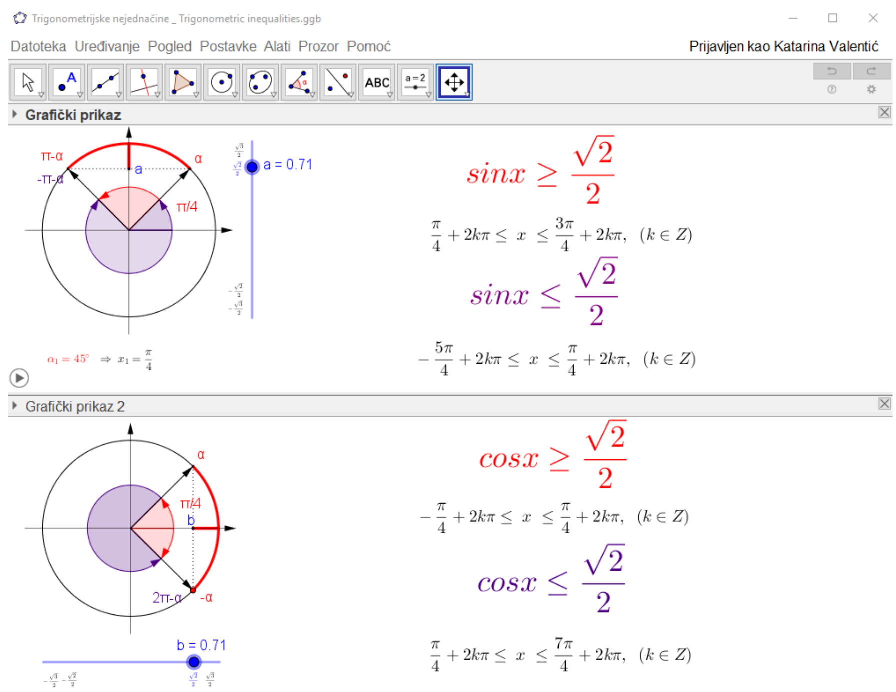
Rješavanje osnovnih trigonometrijskih jednadžbi i nejednadžbi prikazat ćemo pomoću *Geogebra* apleta, dok se ostale trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe svode na spomenute *algebarske*, *linearne* i *kvadratne*.

Na slici 33. prikazan je *GeoGobra* aplet koji pokazuje rješavanje osnovnih trigonometrijskih jednadžbi s funkcijama sinus i kosinus. Učenici na početku rješavaju jednostavne primjere, pri čemu je vizualizacija vrlo bitna. Na grafičkom prikazu se rješava trigonometrijska jednadžba u kojoj se pojavljuje sinus. Prikazana je trigonometrijska kružnica na kojoj su naznačeni kutovi izraženi u radijanima i u stupnjevima. Pored trigonometrijske kružnice napisana je jednadžba koja se rješava, a ispod nje su prikazana njena rješenja. Na grafičkom prikazu 2 rješava se trigonometrijska jednadžba u kojoj se pojavljuje kosinus. Na oba grafička prikaza klizač je ograničen na $[-1, 1]$ zbog omeđenosti tih funkcija.

Na slici 34. prikazan je *GeoGebra* aplet koji pokazuje rješenje osnovnih trigonometrijskih nejednadžbi s funkcijama sinus i kosinus. Razlika je od prethodnog *GeoGebra* apleta je ta što imamo dvije nejednadžbe $\sin x \leqslant a$ i $\sin x \geqslant a$, te naznačena njihova rješenja. Dodatno je obojan i jedan kružni luk kao rješenje $\sin x \geqslant a$ i $\cos x \geqslant a$.

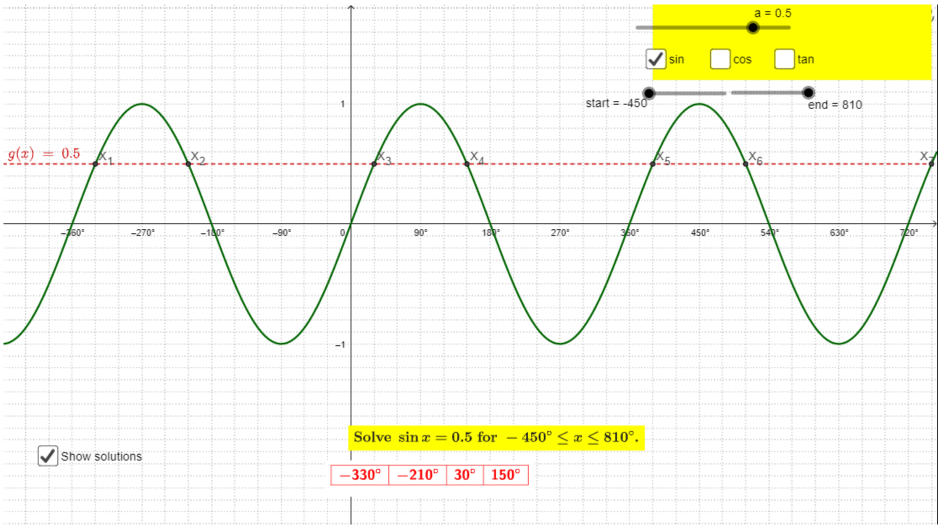


Slika 33: Rješavanje trigonometrijske jednadžbe

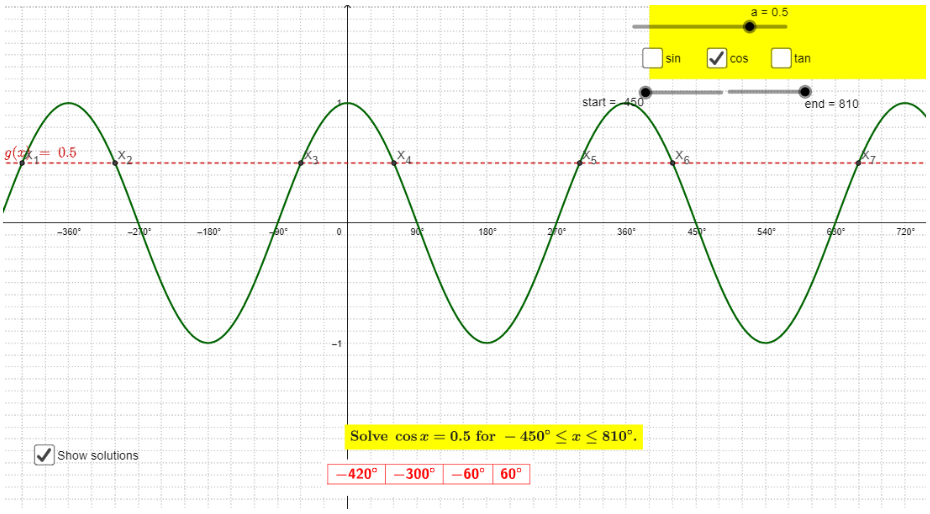


Slika 34: Rješavanje trigonometrijske nejednadžbe

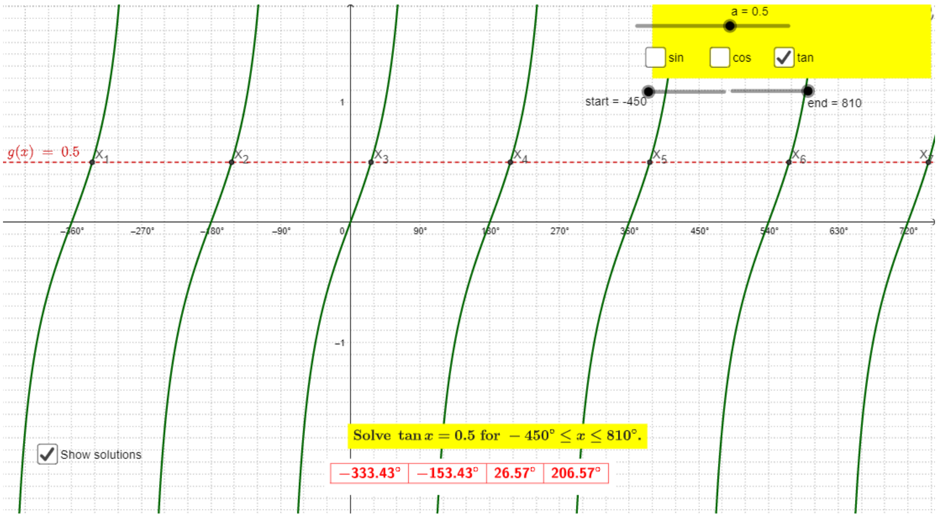
Slike 35.-37. su prikazuju rješenja trigonometrijskih jednadžbi na grafovima trigonometrijskih funkcija. Rezultati su dani u stupnjevima međutim mogu se lako pretvoriti u radijane.



Slika 35: Rješenja trigonometrijske jednadžbe na grafu funkcije sinus



Slika 36: Rješenja trigonometrijske jednadžbe na grafu funkcije kosinus



Slika 37: Rješenja trigonometrijske jednadžbe na grafu funkcije tangens

Literatura

[1] T. BRZEZINSKI, *Trigonometric Identities*, URL: https://www.geogebra.org/m/DxAcj8E2

[2] V. BABOVIĆ, *Trigonometrija/Trigonometry*, URL: https://www.geogebra.org/m/fgeMhChg

[3] I. ČAVLOVIĆ, M. LAPAINE, *Matematika 3, udžbenik sa zbirkom zadataka za strukovne škole*, Školska knjiga, 2008.

[4] B. DAKIĆ, N. ELEZOVIĆ, *Matematika 2, udžbenik i zbirka zadataka za 2. razreda tehničkih škola*, Element, Zagreb, 2002.

[5] B. DAKIĆ, N. ELEZOVIĆ, *Matematika 2, udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred gimnazija i tehničkih škola, 1. dio*, Element, Zagreb 2014.

[6] B. DAKIĆ, N. ELEZOVIĆ, *Matematika 3, udžbenik i zbirka zadataka za 3. razred gimnazija i tehničkih škola, 1. dio*, Element, Zagreb, 2014.

[7] J. DORIĆ, *GeoGebra u nastavi matematike*, Diplomski rad, Zagreb, 2017

[8] D. JUKIĆ, R. SCITOVSKI, *Matematika 1*, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku, Osijek, 2000.

[9] B. PAVKOVIĆ, D. VELJAN, *Elementarna matematika 2.,* Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[10] Š. ŠULJIĆ, *Trigonometrija*, URL: https://www.geogebra.org/m/SgHuXMGD

[11] W.S. LEW, *Trigonometric Functions and Graphs*, URL: https://www.geogebra.org/m/wqxQQBnZ

[12] DOS AUTORI, *Matematika 2*, URL: https://www.geogebra.org/m/C9zmEu93

[13] *Geogebra* , URL:https://www.geogebra.org/classic

[14] *Geogebra priručnik*, URL: https://onlineobuka.files.wordpress.com/2014/12/geogebra-priruc48dnik.pdf

Sažetak

U diplomskom radu obrađena je trigonometrija u nastavi matematike srednje škole zajedno sa programom *GeoGebra* koji pomaže u učenju matematike ali i svih predmeta STEM područja. *GeoGebra* pomaže vizualizirati matematiku i približava matematičke koncepte te na lakši i brži način pomaže u savladavanju gradiva. Navedeni su *GeoGebra* apleti koji prate gradivo udžbenika za 2. i 3. razred srednje škole (gimnazije i tehničkih škola).

Ključne riječi: trigonometrija, trigonometrija pravokutnog trokuta, *GeoGebra*, *GeoGebra* apleti

Trigonometry in the teaching of mathematics and *GeoGebra* in the motivation of learning trigonometry

Summary

In this graduate thesis you can read about trignometry in math class of high school along with program named *GeoGebra* which can help whit math problems and all of the subject of STEM field. *GeoGebra* helps with visualize math and approaching math concepts and on easier and faster way helps with overcoming textbook materials. *GeoGebra* applets are listed which accompany the textbook material for the 2nd and 3rd grade of high schools (gymnasiums and technical schools).

Keywords: trigonometry, rectangular triangle trigonometry, *Geogebra*, *GeoGebra* applets

Životopis

Moje ime je Katarina Valentić, rođena sam 30. kolovoza 1993. godine u Vinkovcima. Osnovnu školu započela sam 2000. godine u osnovnoj školi Zrinskih, Nuštar. 2003. godine prebacujem se u osnovnu školu Antun Gustav Matoš, Vinkovci zbog preseljenja obitelji. Nakon završetka osnovne škole 2008. godine obrazovanje nastavljam u Ekonomskoj i trgovačkoj školi Ivana Domca, Vinkovci koju završavam 2012. godine. U istoj godini upisujem Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku, Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijeku.

Tijekom apsolventske godine koju mi je pružio Odjel za matematiku, radila sam kao zamjena nastavnice matematike u Poljoprivredno šumarskoj školi, Vinkovci i Tehničkoj školi Ruđera Boškovića, Vinkovci, koja je bila inspiracija za ovaj diplomski rad. Trenutno radim u svojoj osnovnoj školi Antun Gustav Matoš, izvodim nastavu informatike i matematike.