Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Iva Petovari

Spektar grafa

Diplomski rad

Osijek, 2018.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Iva Petovari

Spektar grafa

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Snježana Majstorović

Osijek, 2018.

Sadržaj

Uvod

Teorija grafova u današnje je vrijeme izrazito primijenjena u raznim područjima znanosti. Mnoge društvene, računalne i biološke strukture ima smisla prikazivati grafovima te proučavati njihova svojstva. Često se u takvim grafovima nalazi izrazito mnogo vrhova, što otežava njihovo predočavanje. Zato često, umjesto samoga grafa, imamo samo informacije o povezanosti pojedinih vrhova, što se u računalu pohrani u matrici susjedstva. Razvojem raznih programskih jezika, s takvim matricama je u računalu lako raditi. Korištenjem jednostavnog programskog koda možemo izračunati svojstvene vrijednosti takvih matrica. Osnovna ideja ovoga rada je istražiti što možemo zaključiti o svojstvima grafa na temelju poznavanja nekih ili svih svojstvenih vrijednosti matrice susjedstva, tj. povezati razne karakteristike grafa sa njegovim spektrom. Time se upravo bavi spektralna teorija grafova. Također, u radu se proučava i suprotan smjer zaključivanja, tj. što na temelju svojstava grafa možemo reći o njegovom spektru.

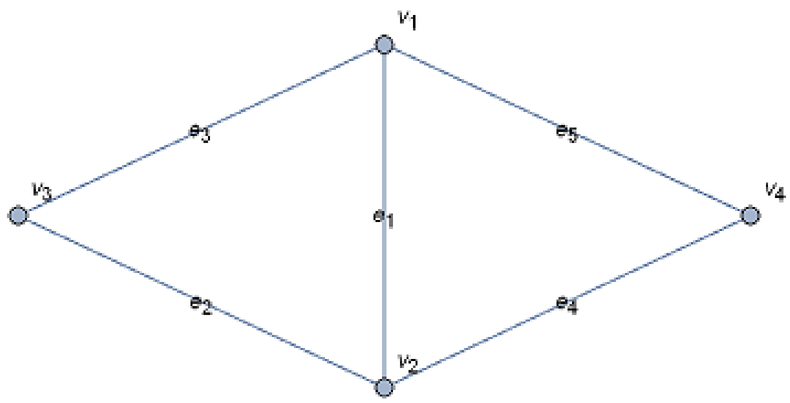
U prvom poglavlju su navedene neke osnovne definicije i tvrdnje iz teorije grafova koje su potrebne za razumijevanje rada. Također, ova tema zahtijeva poznavanje mnogih teorema iz linearne algebre te su oni navedeni u drugom poglavlju. Treće poglavlje se bavi matricom susjedstva, njezinim karakterističnim polinomom i spektrom te brojem šetnji u grafu. U četvrtom poglavlju je dan izvod karakterističnih polinoma i spektra nekih posebnih tipova grafova. Peto poglavlje povezuje svojstvene vrijednosti s nekim svojstvima grafa, kao što su bipartitnost, regularnost, dijametar, kromatski broj te grupa automorfizama.

1 Osnovni pojmovi iz teorije grafova

1.1 Neusmjereni grafovi

Kako je tema ovog diplomskog rada iz područja teorije grafova, prvo ćemo navesti najvažnije pojmove koji će nam kasnije trebati.

Graf G je uređena trojka $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ nepraznog skupa $V(G)$ vrhova od G, skupa bridova $E(G)$ koji je disjunktan s $V(G)$ te funkcije incidencije ψ_G koja svakom bridu od G pridružuje neuređeni par ne nužno različitih vrhova od G.



Slika 1: Graf G

Slikom 1 prikazan je graf G čiji je skup vrhova $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, a skup bridova $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. Često se za djelovanje funkcije incidencije umjesto $\psi_G(e_1) = \{v_1, v_2\}$ zbog jednostavnosti piše $\psi_G(e_1) = v_1v_2$. Ostale bridove funkcija ψ_G preslikava na sljedeći način:

$$\psi_G(e_2) = v_2v_3,\ \ \psi_G(e_3) = v_1v_3,\ \ \psi_G(e_4) = v_2v_4,\ \ \psi_G(e_5) = v_1v_4.$$

Funkcija incidencije ψ_G ne mora biti injekcija, tj. moguće je da različitim bridovima e_i i e_j pridruži isti par vrhova v_k i v_l. To znači da su ta dva vrha spojena s dva brida e_i i e_j. Grafove u kojima ima višestrukih bridova nazivamo *multigrafovima.* Također, ako za neki brid e_i vrijedi $\psi_G(e_i) = v_iv_i$, to znači da brid e_i spaja vrh v_i sa samim sobom. Takav brid se zove *petlja*, a grafovi koji sadrže petlje se nazivaju *pseudografovi.* U ovom radu ćemo se uglavnom baviti *jednostavnim grafovima*, tj. grafovima koji ne sadrže petlje i višestruke bridove.

Za krajeve v_i i v_j brida e_i kažemo da su *incidentni* s bridom e_i. Broj bridova incidentnih s vrhom v_i naziva se *stupanj vrha* v_i i označava s $d_G(v_i)$.

Vrlo je važno prisjetiti se i pojma izomorfnih grafova. Grafovi G i H su *izomorfni* ako postoje bijekcije $\theta\colon V(G) \to V(H)$ i $\phi\colon E(G) \to E(H)$ takve da vrijedi

$$\psi_G(e) = uv \iff \psi_H(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v).$$

Pišemo $G \cong H$, a par (θ, ϕ) nazivamo izomorfizam s G u H. U slučaju jednostavnih grafova nije potrebno konstruirati bijekciju između skupa bridova pa vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 1.1. *Jednostavni grafovi G i H su izomorfni ako i samo ako postoji bijekcija $f\colon V(G) \to V(H)$ takva da vrijedi:*

$$uv \in E(G) \iff f(u)f(v) \in E(H).$$

□

Izomorfizam grafa na samoga sebe naziva se *automorfizam grafa*. Dakle, automorfizam grafa G je bijekcija $f\colon V(G) \to V(G)$ takva da vrijedi

$$uv \in E(G) \iff f(u)f(v) \in E(G).$$

Možemo reći da je automorfizam permutacija vrhova koja čuva susjednost.

Ako za grafove G i H vrijedi $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq V(G)$ i $\psi_H = \psi_G|_{E(H)}$, kažemo da je H *podgraf* grafa G i pišemo $H \subseteq G$. Podgraf od G čiji je skup vrhova $V' \subseteq V(G)$, $V' \neq \emptyset$, a skup bridova se sastoji od svih bridova iz G koji povezuju vrhove iz V' nazivamo *podgraf induciran s* V' i označavamo s $G[V']$.

Šetnja u grafu G je konačan niz $v_0e_1v_1e_2v_2\ldots e_kv_k$ vrhova v_i i bridova e_i, pri čemu su v_{i-1} i v_i krajevi od e_i za svaki $i = 1, \ldots, k$. *Zatvorena šetnja* je ona u kojoj vrijedi $v_0 = v_k$. Ako su u zatvorenoj šetnji svi vrhovi osim prvog i zadnjeg različiti, zovemo ju *ciklus*. *Staza* je šetnja u kojoj su svi bridovi međusobno različiti, a *put* je šetnja u kojoj su svi vrhovi međusobno različiti.

U radu ćemo se baviti povezanim i nepovezanim grafovima, uz čiju se definiciju veže pojam udaljenosti vrhova. *Udaljenost vrhova* u i v u grafu G, u oznaci $d_G(u, v)$, je duljina najkraćeg (u, v)-puta u G. Ako on ne postoji, tada $d_G(u, v) = \infty$. Kažemo da je graf G *povezan* ako za svake $u, v \in V(G)$ vrijedi $d_G(u, v) < \infty$. U suprotnom, kažemo da je graf *nepovezan.*

Bitno obilježje vrha v povezanog grafa G je njegov *ekscentricitet*, u oznaci $e(v)$, a definira se na sljedeći način:

$$e(v) = \max_{u \in V(G)} d_G(v, u).$$

Najmanja vrijednost ekscentriciteta svih vrhova u povezanom grafu G naziva se *radijus*, a najveća *dijametar* grafa G, u oznakama $r(G)$ i $\operatorname{diam}(G)$:

$$r(G) = \min_{u \in V(G)} e(u),$$

$$\operatorname{diam}(G) = \max_{u \in V(G)} e(u).$$

Također ćemo se baviti problemom *bojenja vrhova* u grafu, tj. pridruživanja skupa vrhova skupu boja na način da je svakom vrhu pridružena jedna boja i svakom paru susjednih vrhova su pridružene različite boje. Ako se skup sastoji od k boja, takvo bojenje nazivamo *pravilno k-bojenje.* Za graf G kažemo da je *k-obojiv* ako dopušta pravilno k-bojenje. *Kromatski broj* grafa G definiran je sljedećim izrazom

$$\chi(G) = \min\{k : G \text{ je } k\text{-obojiv}\}.$$

Za graf kažemo da je *k-kromatski* ako je $\chi(G) = k$.

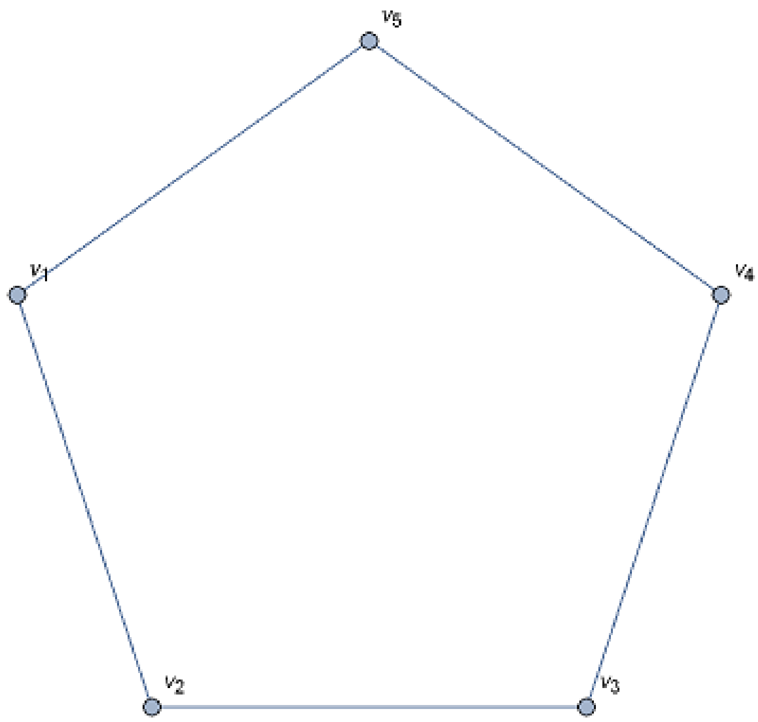
1.1.1 Posebni tipovi grafova

Put i ciklus smo već ranije definirali koristeći pojam šetnje. Sada ćemo ih definirati kao posebne tipove grafova. *Put* P_n s n vrhova je graf čiji su skupovi vrhova i bridova redom $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ i $E(G) = \{v_i v_{i+1} : i = 1, \ldots, n-1\}$. Put P_4 prikazan je na Slici 2.

Slika 2: Put P_4

Ciklus C_n s n vrhova je graf sa skupom vrhova $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ i skupom bridova $\{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$. *Potpun graf* s n vrhova K_n je jednostavan graf u kojemu je svaki par vrhova spojen bridom. Potpun graf K_5 i ciklus C_5 prikazani su Slikama 3 i 4.

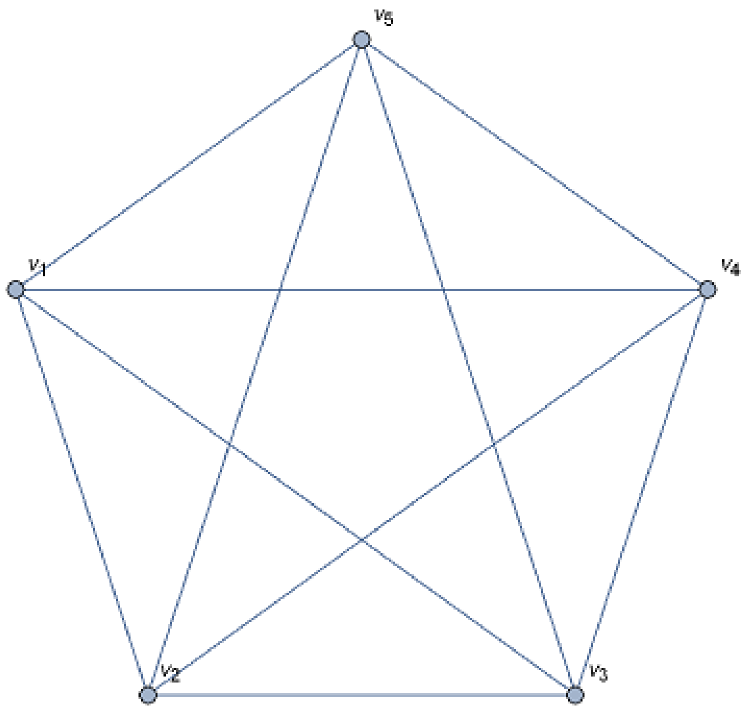
Kažemo da je graf *r-regularan* ako mu je svaki vrh stupnja r.



Slika 3: Ciklus C_5

Bipartitan graf G je graf kojem se skup vrhova može particionirati u dva skupa A i B tako da svaki brid ima jedan kraj u A, a drugi u B. Uređeni par (A, B) nazivamo biparticijom grafa G. Ako je u takvom grafu svaki vrh iz A spojen jednim bridom sa svakim vrhom iz B i obrnuto, onda takav graf nazivamo *potpun bipartitan graf* i označavamo s $K_{m,n}$, pri čemu je m broj vrhova u A, a n broj vrhova u B.

Ako se skup vrhova grafa može particionirati u k skupova, na način da nijedan brid nema oba kraja u istom podskupu, tada ga nazivamo *k-partitan* graf. *Potpun k-partitan* graf, u kojemu je svaki vrh spojen jednim bridom sa svakim vrhom koji nije u istom podskupu vrhova, označavamo s $K_{n_1,\ldots,n_k}$, gdje n_i označava broj vrhova u i-tom podskupu vrhova. Ako je graf potpun k-partitan za neki $k \geq 2$, nazivamo ga *potpun multipartitan graf.* Potpun bipartitan graf $K_{1,n-1}$ nazivamo *zvijezda* s n vrhova i označavamo sa S_n.



Slika 4: Potpun graf K_5

1.1.2 Operacije nad grafovima

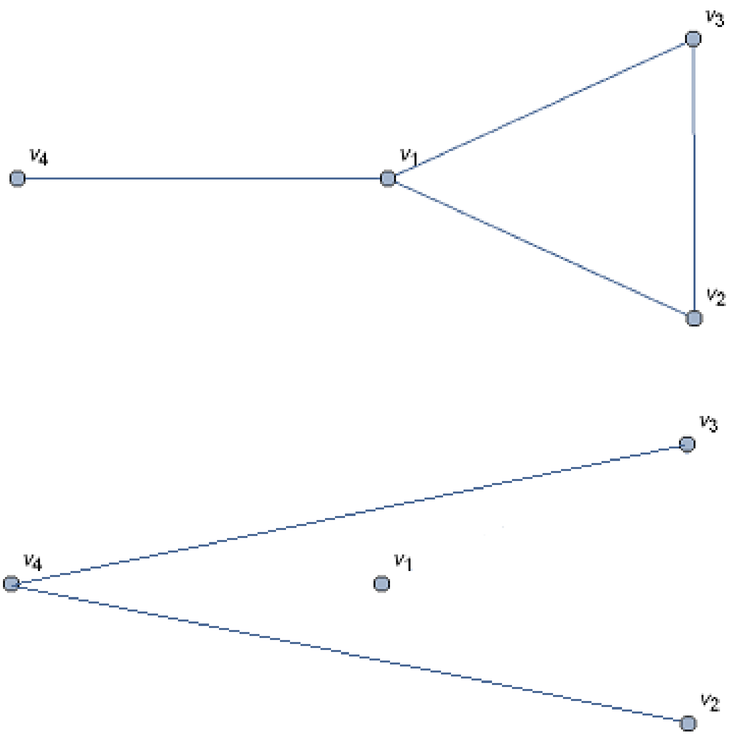
Pri dokazivanju pojedinih tvrdnji, bit će potrebno koristiti neke operacije nad grafovima.

Komplement jednostavnog grafa G, u oznaci $\bar{G}$, je jednostavan graf koji ima isti skup vrhova kao G, a dva vrha su u njemu spojeni bridom ako i samo ako nisu spojeni bridom u G.

Slikom 5 prikazan je graf G sa skupom vrhova $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ i skupom bridova $\{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_1v_4\}$ te njegov komplement $\bar{G}$ sa skupom bridova $\{v_2v_4, v_3v_4\}$.

Direktna suma grafova G i H, u oznaci $G\dot{+}H$, je graf sa skupom vrhova $V(G) \cup V(H)$, gdje $V(G) \cap V(H) = \emptyset$ i skupom bridova $E(G) \cup E(H)$.

Spoj grafova G i H, u oznaci $G\nabla H$, je graf koji nastaje kada u direktnoj sumi grafova G i H sve parove vrhova $\{u, v\}, u \in V(G), v \in V(H)$ spojimo bridom. Spoj grafova prikazan je Slikom 7.



Slika 5: Graf G (iznad) i njegov komplement $\bar{G}$ (ispod)

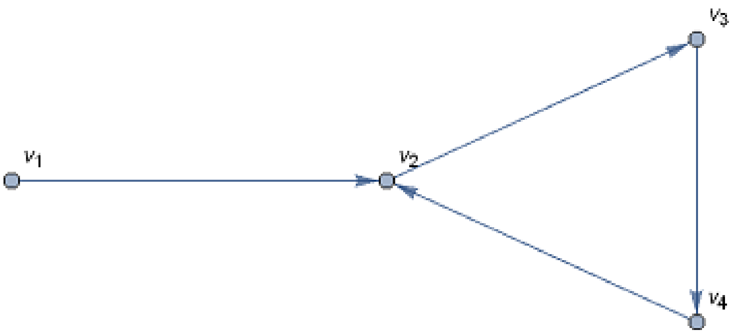
1.2 Usmjereni grafovi

Usmjeren graf (digraf) D je uređena trojka $(V(D), A(D), \psi_D)$ nepraznog skupa vrhova $V(D)$, skupa lukova $A(D)$ i funkcije incidencije ψ_D koja svakom luku $a \in A(D)$ pridružuje uređeni par ne nužno različitih vrhova $u, v \in V(D)$. Vrh u nazivamo početni, a v krajnji vrh luka a.

Na Slici 6 prikazan je primjer jednog usmjerenog grafa D sa skupom vrhova $V(D) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ te skupom lukova $A(D) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_2\}$.

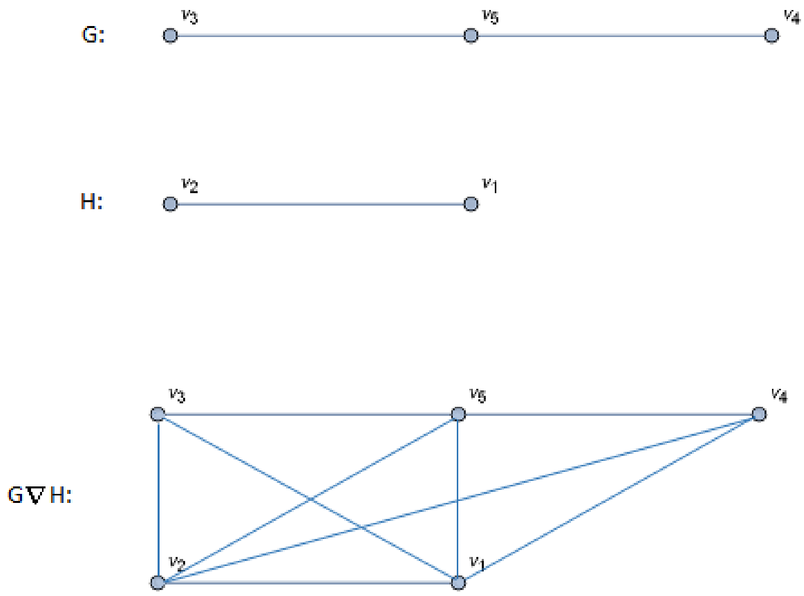
Za vrh $v \in V(D)$ digrafa D definiramo *ulazni stupanj* kao broj lukova u D s krajem u v te *izlazni stupanj* kao broj lukova u D s početkom u v. Vrh v_2 u usmjerenom grafu D sa Slike 6 ima ulazni stupanj jednak 2, a izlazni stupanj jednak 1.

U nastavku rada koristit ćemo i pojam *linearnog usmjerenog grafa*. Pod njim podrazumijevamo graf u kojemu svaki vrh ima ulazni i izlazni stupanj jednak 1, tj.



Slika 6: Usmjereni graf D

graf koji se sastoji od ciklusa.



Slika 7: Grafovi G i H (iznad) i njihov spoj $G\nabla H$ (ispod)

2 Osnovne tvrdnje iz linearne algebre

Uz navedene definicije i tvrdnje iz teorije grafova, trebat će nam i mnoge tvrdnje iz linearne algebre. Bavit ćemo se nenegativnim i ireducibilnim matricama. Kažemo da je matrica *nenegativna* ako su njezini elementi nenegativni brojevi, a za matricu A kažemo da je *reducibilna* ako postoji permutacijska matrica P takva da je matrica $P^{-1}AP$ oblika

$$\begin{bmatrix} X & O \\ Y & Z \end{bmatrix},$$

gdje su X i Z kvadratne matrice, a O nul-matrica. U suprotnom, kažemo da je A *ireducibilna.*

Jedan od ključnih teorema kojeg ćemo koristiti u ovom radu naziva se Perron-Frobeniusov teorem.

Teorem 2.1. *Ireducibilna, nenegativna $n \times n$ matrica A ima realnu, pozitivnu svojstvenu vrijednost λ_1 takvu da za sve ostale svojstvene vrijednosti $\lambda_i, i = 2, ..., n$, vrijedi $|\lambda_i| \leq \lambda_1$. Također, λ_1 je jednostruka nultočka karakterističnog polinoma $k_A(\lambda) = det(\lambda I - A)$ te njoj pridružen svojstveni vektor x_1 ima pozitivne komponente.*

Navedimo još neke važne teoreme.

Teorem 2.2. *Sve svojstvene vrijednosti simetrične matrice su realni brojevi.*

Teorem 2.3. *Najveća svojstvena vrijednost λ_1' svake glavne podmatrice (reda manjeg od n) nenegativne matrice A (reda n) nije veća od najveće svojstvene vrijednosti λ_1 matrice A. Ako je A ireducibilna, tada je $\lambda_1' < \lambda_1$. Ako je A reducibilna, tada za barem jednu glavnu podmatricu vrijedi $\lambda_1' = \lambda_1$.*

Teorem 2.4. *Porastom nekog elementa nenegativne matrice A najveća svojstvena vrijednost se ne smanjuje. Najveća svojstvena vrijednost strogo raste ako je A ireducibilna matrica.*

Teorem 2.5. *Neka je A realna simetrična matrica i λ_n njezina najmanja svojstvena vrijednost. Za glavnu podmatricu B matrice A i njezinu najmanju svojstvenu vrijednost λ_n' vrijedi $\lambda_n \leq \lambda_n'$.*

Dokaze Teorema 2.1 i 2.3 može se pronaći u [6], Teorema 2.2 u [10], Teorema 2.4 u [2] i Teorema 2.5 u [8].

Za dokazivanje raznih tvrdnji trebat će nam i sljedeći teoremi, čiji se dokazi mogu naći u [1].

Teorem 2.6. *Neka je A realna $n \times n$ matrica. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

a) A je ortogonalno dijagonalizabilna.

b) A ima ortonormiran skup svojstvenih vektora.

c) A je simetrična.

Teorem 2.7. *Neka je A kvadratna matrica. A je dijagonalizabilna ako i samo ako je geometrijska kratnost svake svojstvene vrijednosti jednaka algebarskoj kratnosti.*

Teorem 2.8. *Neka je A kvadratna matrica reda n. Tada je*

$$r(A) + d(A) = n,$$

gdje je $r(A)$ rang, a $d(A)$ defekt od A.

Teorem 2.9. *Neka je A realna $n \times n$ matrica, a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ njezine svojstvene vrijednosti. Tada za trag matrice A vrijedi*

$$tr\, A = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n.$$

Trebat će nam i sljedeći teorem, poznat pod nazivom Gershgorinov teorem. Dokaz se može pronaći u [16].

Teorem 2.10. *Neka je A kompleksna $n \times n$ matrica s elementima a_{ij}, $i, j = 1, \dots, n$. Za svaki $i = 1, \dots, n$ stavimo $R_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. Tada se svaka svojstvena vrijednost matrice A nalazi u barem jednom zatvorenom krugu $D(a_{ii}, R_i) \subseteq \mathbb{C}$ sa središtem u a_{ii} radijusa R_i.*

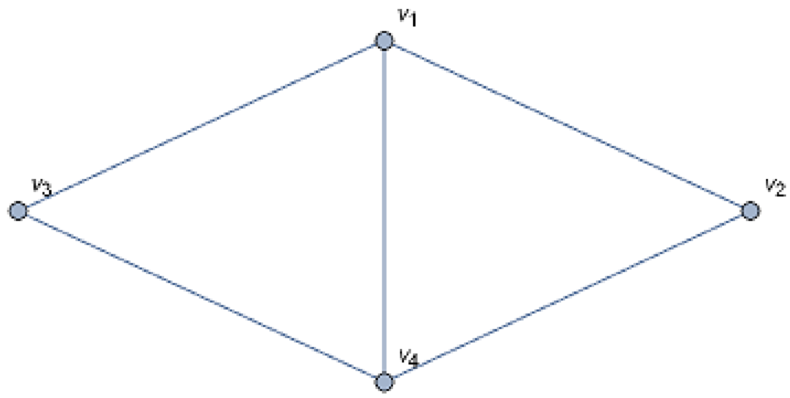
3 Matrica susjedstva i spektar grafa

U ovom poglavlju bavit ćemo se jednostavnim neusmjerenim grafom G s konačnim skupom vrhova $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Tom grafu se mogu pridružiti razne matrice, a jedna od njih je matrica susjedstva.

Matrica susjedstva A grafa G je $n \times n$ matrica s elementima a_{ij} koji označavaju broj bridova između vrhova v_i i v_j, za $i, j = 1, \ldots, n$.

Matrica susjedstva grafa prikazanog na Slici 8 jednaka je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$



Slika 8: Primjer grafa

Iz definicije matrice susjedstva slijedi da je suma elemenata u i-tom retku ili i-tom stupcu matrice A jednaka stupnju vrha v_i te da je A simetrična matrica. Zato su, prema Teoremu 2.2, sve svojstvene vrijednosti od A realni brojevi.

Skup svih svojstvenih vrijednosti matrice susjedstva grafa G zvat ćemo *spektar grafa* G i označavati sa $Sp(G)$.

Nadalje, uočimo da postoji lijepa veza između svojstva povezanosti grafa i ireducibilnosti njegove matrice susjedstva.

Ukoliko graf G nije povezan, postoji particija skupa vrhova $V(G)$ na podskupove $V_1, V_2, \ldots, V_c$, $c \geq 2$, takva da su grafovi $G[V_i]$, $i = 1, \ldots, c$ maksimalni povezani podgrafovi tog grafa. Drugim riječima, nema bridova između $G[V_i]$ i $G[V_j]$, $i \neq j$. No, tada će retci matrice susjedstva A koji odgovaraju vrhovima iz V_i i stupci od

A koji odgovaraju vrhovima iz V_j činiti nul-podmatricu od A. Dakle, za nepovezan graf postoji permutacijska matrica P takva da je $P^{-1}AP$ blok-dijagonalna matrica pa je matrica A reducibilna. Lako se dokaže da vrijedi i obrat. Zato zaključujemo da je graf povezan ako i samo ako je njegova matrica susjedstva ireducibilna. Prema Teoremu 2.1, slijedi da spektar povezanog grafa pripada segmentu $[-\lambda_1, \lambda_1]$, gdje je λ_1 najveća svojstvena vrijednost od A.

Navedimo osnovna svojstva spektra grafa.

Teorem 3.1. *Za spektar $Sp(G) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ grafa G, gdje $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots \geq \lambda_n$, vrijedi:*

1) $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$.

2) Ako G ne sadrži bridove, onda je $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

3) Ako G sadrži barem jedan brid, onda vrijedi:

$$1 \leq \lambda_1 \leq n - 1,$$

$$-\lambda_1 \leq \lambda_n \leq -1.$$

Za povezan graf vrijedi

$$2\cos\frac{\pi}{n+1} \leq \lambda_1 \leq n - 1.$$

Dokaz:

1) S obzirom da vrijedi $a_{ii} = 0$, $i = 1, \ldots, n$, to prema Teoremu 2.9 imamo $tr\, A = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$.

2) Ako G ne sadrži bridove, tada je matrica susjedstva nul-matrica pa njezin karakteristični polinom jednak $k_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n$, što daje

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

3) Ove tvrdnje ćemo dokazati koristeći teoreme iskazane u poglavlju 2. Ako je G povezan, prema Teoremu 2.4, za najveću svojstvenu vrijednost λ_1 vrijedi

$$2\cos\frac{\pi}{n+1} \leq \lambda_1 \leq n - 1,$$

gdje se donja granica postiže za put, a gornja za potpun graf (što će biti dokazano u poglavljima 4.2 i 4.5). Ako graf nije povezan, znamo da u grafu postoji podgraf K_2, a njegova matrica susjedstva ima svojstvenu vrijednost jednaku 1. Zato je, prema Teoremu 2.3, $\lambda_1 \geq 1$. Time smo dokazali nejednakosti

$$1 \leq \lambda_1 \leq n - 1.$$

Prema Teoremu 2.5, za najmanju svojstvenu vrijednost λ_n vrijedi $\lambda_n \leq -1$, jer u grafu postoji podgraf K_2 čija matrica susjedstva ima svojstvenu vrijednost jednaku -1. Kako se sve svojstvene vrijednosti nalaze u segmentu $[-\lambda_1, \lambda_1]$, dokazali smo i tvrdnju

$$-\lambda_1 \leq \lambda_n \leq -1.$$

□

3.1 Koeficijenti karakterističnog polinoma

Iznos koeficijenata karakterističnog polinoma matrice susjedstva ovisi o strukturnim svojstvima danog grafa. O tome će nam reći teorem koji se odnosi na usmjerene grafove, a kojega ćemo kasnije iskoristiti za teorem namijenjen neusmjerenim grafovima.

Prisjetimo se, matrica susjedstva A digrafa D sa skupom vrhova $\{v_1, \ldots, v_n\}$ je $n \times n$ matrica s elementima a_{ij} pri čemu je a_{ij} broj lukova u D s početkom u vrhu v_i i krajem u vrhu v_j.

Teorem 3.2. *Neka je*

$$k_A(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$$

karakteristični polinom usmjerenog grafa G. Tada za $i = 1, \ldots, n$ vrijedi

$$a_i = \sum_{L \in \mathscr{L}_i} (-1)^{p(L)},$$

gdje je $\mathscr{L}_i$ skup svih linearnih usmjerenih podgrafova L grafa G s točno i vrhova, $p(L)$ broj komponenti od L, tj. broj ciklusa od kojih se sastoji L.

Dokaz: Dokažimo tvrdnju za $i = n$. Znamo da je

$$a_n = k_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det A,$$

pa koristeći definiciju determinante dobivamo

$$a_n = (-1)^n \sum_P (-1)^{I(P)} a_{1i_1} \cdots a_{ni_n} = \sum_P (-1)^{n+I(P)} a_{1i_1} \cdots a_{ni_n},$$

gdje je $I(P)$ broj inverzija u permutaciji

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}.$$

Član $S_P = (-1)^{n+I(P)} a_{1i_1} \cdots a_{ni_n}$ je različit od nule ako i samo ako postoje lukovi $v_1 v_{i_1}$, $v_2 v_{i_2}, \ldots, v_n v_{i_n}$.

Permutaciju P možemo pisati kao produkt disjunktnih ciklusa, tj. u obliku

$$P = (1 i_1 \cdots)(\cdots) \cdots (\cdots).$$

Ako je $S_P \neq 0$, tada svakom ciklusu permutacije P odgovara ciklus u G. Zato permutaciji P odgovara direktna suma ciklusa koji sadrže sve vrhove grafa, tj. linearni usmjereni podgraf $L \in \mathscr{L}_n$. Obrnuto, svakom linearnom usmjerenom podgrafu $L \in \mathscr{L}_n$ odgovara permutacija P i član S_P koji je jednak 1 ili -1, ovisno o broju $e(L)$ parnih ciklusa u L:

$$S_P = (-1)^{n+e(L)}.$$

Kako je $n + e(L) \equiv p(L) \pmod 2$, slijedi da je

$$a_n = \sum_P S_P = \sum_{L \in \mathscr{L}_n} (-1)^{p(L)}, \tag{1}$$

čime smo dokazali tvrdnju za n.

Neka je sada $1 \leq i \leq n$ fiksan. Prema [12], suma svih glavnih minora matrice A reda i jednaka je $(-1)^i a_i$. Kako postoji bijekcija između skupa tih minora i skupa svih induciranih podgrafova od G koji imaju točno i vrhova, koristeći tvrdnju (1) za svaku od ukupno $\binom{n}{i}$ minora i sumiranjem, tražena jednakost je dokazana.

□

Ako je G neusmjeren graf, možemo ga promatrati kao usmjeren graf G', pri čemu brid u G između vrhova v_i i v_j promatramo kao par usmjerenih bridova $v_i v_j$ i $v_j v_i$ u G'. Tada svakom bridu iz G odgovara ciklus duljine 2 u G', a svakom ciklusu u G odgovara par suprotno orijentiranih ciklusa u G'. Zato se prethodni teorem za neusmjerene grafove može formulirati na sljedeći način:

Teorem 3.3. *Neka je*

$$k_A(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$$

karakteristični polinom neusmjerenog grafa G. Nazovimo sljedeće grafove elementarnim grafovima:

a) graf K_2,

b) graf C_q, $q \geq 1$,

a osnovnim grafovima svaki graf U čije su komponente elementarni grafovi. Neka je $p(U)$ broj komponenti, a $c(U)$ broj ciklusa u U. Označimo s $\mathcal{U}_i$ skup svih osnovnih grafova sadržanih u G koji imaju točno i vrhova. Tada za $i = 1, \ldots, n$ vrijedi

$$a_i = \sum_{U \in \mathcal{U}_i} (-1)^{p(U)} \cdot 2^{c(U)}.$$

□

Uz iste oznake, teorem možemo izreći i na sljedeći način:

Teorem 3.4. *Definirajmo doprinos b elementarnog grafa E s*

$$b(K_2) = -1, \; b(C_q) = (-1)^{q+1} \cdot 2,$$

a osnovnog grafa U s

$$b(U) = \prod_{E \subseteq U} b(E).$$

Tada je

$$(-1)^i a_i = \sum_{U \in \mathcal{U}_i} b(U).$$

□

3.2 Broj šetnji

Kao što je već spomenuto ranije, matrica susjedstva neusmjerenog grafa je simetrična i svojstvene vrijednosti su realni brojevi. Također, prema Teoremu 2.6 svojstveni vektori pridruženi svojstvenim vrijednostima su ortogonalni i čine bazu za $\mathbb{R}^n$ pa je matrica susjedstva ortogonalno slična dijagonalnoj matrici D sa svojstvenim vrijednostima na dijagonali, tj.

$$A = VDV^T, \tag{2}$$

gdje je V ortogonalna matrica čiji su stupci svojstveni vektori $v_1, ..., v_n$ matrice A. Zaključujemo da vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 3.5. *Graf je potpuno određen svojstvenim vrijednostima i svojstvenim vektorima matrice susjedstva.* □

Matrica susjedstva je usko povezana i s brojem šetnji između vrhova grafa, što nam govori sljedeći teorem:

Teorem 3.6. *Broj šetnji duljine $k \geq 1$ između vrhova v_i i v_j u grafu G jednak je $(A^k)_{ij}$.*

Dokaz: Ovu tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom po k. Za $k = 1$, element a_{ij} matrice A predstavlja broj šetnji duljine 1 između vrhova v_i i v_j.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $k-1$ i pokažimo da vrijedi za k. Znamo da je $A^k = A^{k-1} \cdot A$. Zato je

$$(A^k)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} (A^{k-1})_{il} a_{lj}.$$

Šetnja duljine k između vrhova v_i i v_j sastoji se od šetnje duljine $k-1$ između v_i i v_l, gdje je v_l susjed od v_j, i brida između v_l i v_j. Prema pretpostavci indukcije, broj šetnji duljine $k-1$ između v_i i v_l jednak je $(A^{k-1})_{il}$. Također, znamo da a_{lj} označava broj bridova između v_l i v_j. Zato je, prema principu umnoška i zbroja, broj šetnji duljine k između v_i i v_j jednak

$$\sum_{l=1}^{n} (A^{k-1})_{il} a_{lj},$$

što smo i trebali dokazati.

□

Označimo sada s $N_k(i,j)$ broj šetnji duljine k između vrhova v_i i v_j. Prema prethodnom teoremu vrijedi

$$N_k(i,j) = (A^k)_{ij}.$$

Iz (2) slijedi da je

$$(A^k)_{ij} = \sum_{s=1}^{n} v_{is} v_{js} \lambda_s^k,$$

gdje su v_{ij} elementi matrice V.

Iz toga slijedi da je broj N_k svih šetnji duljine k u grafu G jednak

$$N_k = \sum_{i,j} N_k(i,j) = \sum_{i,j} (A^k)_{ij} = \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} v_{is} \right)^2 \lambda_s^k.$$

Ovu tvrdnju iskazujemo sljedećim teoremom.

Teorem 3.7. *Broj N_k svih šetnji duljine k u grafu G jednak je*

$$N_k = \sum_{s=1}^{n} C_s \lambda_s^k,$$

gdje je

$$C_s = \left(\sum_{i=1}^{n} v_{is} \right)^2.$$

□

Broj šetnji duljine k u G može se dovesti u vezu s karakterističnim polinomom matrice susjedstva grafa G i njegovog komplementa $\bar{G}$, o čemu govori sljedeći teorem.

Teorem 3.8. *Neka je G graf, $\bar{G}$ njegov komplement, a $H_G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} N_k t^k$ funkcija izvodnica za niz N_k (broj šetnji duljine k u grafu G). Tada je*

$$H_G(t) = \frac{1}{t} \left[(-1)^n \frac{k_{\bar{G}}(-\frac{t+1}{t})}{k_G(\frac{1}{t})} - 1 \right], \tag{3}$$

gdje je $k_{\bar{G}}(\lambda)$ karakteristični polinom matrice susjedstva grafa $\bar{G}$, a $k_G(\lambda)$ karakteristični polinom matrice susjedstva grafa G.

Dokaz: Za regularnu matricu M reda n, označimo s $\{M\}$ matricu formiranu od kofaktora elemenata matrice M, tj. adjunktu matrice M. Znamo da vrijedi $\{M\}^T = M^{-1} \cdot \det(M)$. Također, označimo sa $\mathrm{sum}(M)$ sumu svih elemenata matrice M te s J kvadratnu matricu čiji je svaki element jednak 1. Tada za proizvoljan realan broj x vrijedi

$$\det(M + xJ) = \det(M) + x \cdot \mathrm{sum}(\{M\}). \tag{4}$$

Prema Teoremu 3.6 znamo da vrijedi $N_k = \mathrm{sum}(A^k)$ te za $\|At\| < 1$, tj. $|t| < \frac{1}{\lambda_1}$ (λ_1 najveća svojstvena vrijednost) vrijedi

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k t^k = I + At + A^2 t^2 + \cdots = (I - tA)^{-1} = (\det(I - tA))^{-1} \{I - tA\},$$

pa dobivamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{sum}(A^k)t^k = \sum_{k=0}^{\infty} N_k t^k = (\det(I - tA))^{-1}\mathrm{sum}(\{I - tA\}),$$

odnosno

$$H_G(t) = \frac{\mathrm{sum}(\{I - tA\})}{\det(I - tA)}. \tag{5}$$

Ako u (4) stavimo $M = I - tA$ i $x = t$, onda dobivamo

$$\mathrm{sum}(\{I - tA\}) = \frac{1}{t}(\det(I - tA + tJ) - \det(I - tA)),$$

odnosno

$$\mathrm{sum}(\{I - tA\}) = \frac{1}{t}(\det((t+1)I + t\bar{A}) - \det(I - tA)),$$

gdje je $\bar{A} = J - I - A$ matrica susjedstva komplementa $\bar{G}$.

Uvrštavanjem u (5) dobivamo

$$H_G(t) = \frac{1}{t}\left[(-1)^n \frac{\det(-\frac{t+1}{t}I - \bar{A})}{\det(\frac{1}{t}I - A)} - 1\right],$$

što smo i trebali dokazati. $\square$

4 Spektar nekih posebnih tipova grafova

4.1 Regularni grafovi stupnja jedan

Dokažimo prvo tvrdnju koja će nam trebati za pronalazak svojstvenih vrijednosti ovakvih grafova.

Propozicija 4.1. *Vrijedi*

$$k_{G_1 \dot{+} G_2}(\lambda) = k_{G_1}(\lambda) k_{G_2}(\lambda),$$

gdje je $G_1 \dot{+} G_2$ *direktna suma grafova* G_1 *i* G_2.

Dokaz: Ako je A_1 matrica susjedstva grafa G_1, a A_2 matrica susjedstva grafa G_2, tada matrica susjedstva A direktne sume $G_1 \dot{+} G_2$ ima oblik

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}.$$

Njezin karakteristični polinom je tada jednak

$$k_{G_1 \dot{+} G_2}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda I - A_1 & 0 \\ 0 & \lambda I - A_2 \end{vmatrix} = \det(\lambda I - A_1) \det(\lambda I - A_2),$$

čime smo dokazali tvrdnju. □

Ova tvrdnja vrijedi i za direktnu sumu proizvoljno mnogo grafova $G_1 \dot{+} \cdots \dot{+} G_n$.

Kako je svaka komponenta 1-regularnog grafa G izomorfna potpunom grafu K_2 čiji je karakteristični polinom matrice susjedstva jednak

$$k_{K_2}(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1) = \lambda^2 - 1,$$

koristeći Propoziciju 4.1 dobivamo

$$k_G(\lambda) = (\lambda^2 - 1)^k,$$

gdje je broj vrhova u G jednak $2k$. Stoga je spektar 1-regularnog grafa G s $2k$ vrhova jednak $Sp(G) = \{1^{(k)}, (-1)^{(k)}\}$, gdje broj u eksponentu predstavlja kratnost svojstvene vrijednosti.

4.2 Potpun graf

Matrica susjedstva potpunog grafa K_n je oblika

$$A(K_n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pronađimo svojstvene vrijednosti ove matrice, tj. nultočke karakterističnog polinoma

$$k_{A(K_n)}(\lambda) = \det(\lambda I - A(K_n)) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & \lambda \end{vmatrix}.$$

Odmah vidimo da je $\lambda = -1$ jedna svojstvena vrijednost, jer je $\det(-I - A(K_n)) = 0$. Odredimo joj kratnost.

Kako je $A(K_n)$ simetrična matrica, ona se može dijagonalizirati pa je prema Teoremu 2.7 algebarska kratnost svake svojstvene vrijednosti jednaka geometrijskoj kratnosti. Koristeći sada Teorem 2.8 o rangu i defektu, imamo

$$r(\lambda I - A) + d(\lambda I - A) = n.$$

Znamo da je $d(\lambda I - A) = \dim(\mathrm{Ker}(\lambda I - A)) = \gamma_A(\lambda)$ geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti λ.

Za $\lambda = -1$ dobivamo

$$\gamma_A(-1) = n - r(-I - A) = n - 1,$$

pa je kratnost svojstvene vrijednosti $\lambda = -1$ jednaka $n - 1$.

Kako je trag matrice $A(K_n)$ jednak sumi svojstvenih vrijednosti, to je

$$(n-1)(-1) + \lambda = 0,$$

tj. $\lambda = n - 1$ je preostala svojstvena vrijednost kratnosti 1.

Zaključujemo da je karakteristični polinom matrice susjedstva oblika

$$k_{K_n}(\lambda) = (\lambda - n + 1)(\lambda + 1)^{n-1}, \tag{6}$$

a spektar je $Sp(K_n) = \{(-1)^{(n-1)}, n - 1\}$.

4.3 Potpun bipartitan graf

Za potpun bipartitan graf K_{n_1,n_2} vrijedi $K_{n_1,n_2} = G_1 \nabla G_2$, gdje su G_1 i G_2 grafovi s redom n_1 i n_2 izoliranih vrhova.

Za određivanje spektra grafa K_{n_1,n_2} bit će neophodan sljedeći rezultat čiji se dokaz može pronaći u [4].

Propozicija 4.2. *Karakteristični polinom matrice susjedstva spoja regularnih grafova G_1 stupnja r_1 i G_2 stupnja r_2 dan je sljedećim izrazom:*

$$k_{G_1 \nabla G_2}(\lambda) = \frac{k_{G_1}(\lambda) k_{G_2}(\lambda)}{(\lambda - r_1)(\lambda - r_2)}((\lambda - r_1)(\lambda - r_2) - n_1 n_2),$$

gdje su n_1 i n_2 redom brojevi vrhova grafova G_1 i G_2.

S obzirom da se potpun bipartitan graf može dobiti kao spoj dva 0-regularna grafa čiji su karakteristični polinomi matrica susjedstva dani s

$$k_{G_1}(\lambda) = \lambda^{n_1}, \;\; k_{G_2}(\lambda) = \lambda^{n_2},$$

koristeći Propoziciju 4.2 dobivamo

$$k_{K_{n_1,n_2}}(\lambda) = \frac{\lambda^{n_1}\lambda^{n_2}}{\lambda^2}(\lambda^2 - n_1 n_2) = \lambda^{n_1+n_2-2}(\lambda^2 - n_1 n_2).$$

Slijedi da je 0 svojstvena vrijednost kratnosti n_1+n_2-2 te da su $\sqrt{n_1 n_2}$ i $-\sqrt{n_1 n_2}$ svojstvene vrijednosti kratnosti 1, odnosno

$$Sp(K_{n_1,n_2}) = \{0^{(n_1+n_2-2)}, \sqrt{n_1 n_2}, -\sqrt{n_1 n_2}\}.$$

4.4 Potpun multipartitan graf

Potpun multipartitan graf $K_{n_1,\ldots,n_k}$ s n vrhova, pri čemu $n_1 = \ldots = n_k = \frac{n}{k}$, je komplement direktne sume k potpunih grafova s $\frac{n}{k}$ vrhova. Stoga ćemo koristeći formulu za karakteristični polinom komplementa regularnog grafa odrediti spektar od $K_{n_1,\ldots,n_k}$.

Teorem 4.3. *Neka je G r-regularan graf s n vrhova. Tada je karakteristični polinom matrice susjedstva komplementa $\bar{G}$ grafa G jednak*

$$k_{\bar{G}}(\lambda) = (-1)^n \frac{\lambda - n + r + 1}{\lambda + r + 1} k_G(-\lambda - 1),$$

tj. ako je spektar od G skup $\{\lambda_1 = r, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, onda je spektar od $\bar{G}$ skup $\{n - 1 - r, -\lambda_2 - 1, \ldots, -\lambda_n - 1\}$.

Dokaz: Šetnja duljine k u G može za početni vrh imati bilo koji od n vrhova pa se zatim nastaviti na ukupno r načina, zbog r-regularnosti od G. Zato je broj N_k šetnji duljine k jednak $N_k = nr^k$. Funkcija izvodnica $H_G(t)$ za N_k je

$$H_G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} N_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} nr^k t^k = \frac{n}{1-rt}, \ |t| < \frac{1}{r}.$$

Koristeći Teorem 3.8 i jednakost (3) dobivamo

$$\frac{1}{t}\left[(-1)^n \frac{k_{\bar{G}}(-\frac{t+1}{t})}{k_G(\frac{1}{t})} - 1\right] = \frac{n}{1-rt}.$$

Stavimo li u gornji izraz $-\frac{t+1}{t} = \lambda$, dobivamo traženu jednakost. □

Kako je karakteristični polinom matrice susjedstva direktne sume k potpunih grafova s $\frac{n}{k}$ vrhova prema (6) i Propoziciji 4.1 jednak

$$k_G(\lambda) = \left(\lambda - \frac{n}{k} + 1\right)^k ((\lambda+1)^{\frac{n}{k}-1})^k = \left(\lambda - \frac{n}{k} + 1\right)^k (\lambda+1)^{n-k},$$

karakteristični polinom matrice susjedstva potpunog multipartitnog grafa $K_{\frac{n}{k},\ldots,\frac{n}{k}}$ je

$$k_{K_{\frac{n}{k},\ldots,\frac{n}{k}}}(\lambda) = (-1)^n \frac{\lambda - n + \frac{n}{k} - 1 + 1}{\lambda + \frac{n}{k} - 1 + 1}\left(-\lambda - 1 - \frac{n}{k} + 1\right)^k (-\lambda - 1 + 1)^{n-k}.$$

Nakon sređivanja prethodnog izraza, dobivamo

$$k_{K_{\frac{n}{k},\ldots,\frac{n}{k}}}(\lambda) = \lambda^{n-k}\left(\lambda + \frac{n}{k} - n\right)\left(\lambda + \frac{n}{k}\right)^{k-1}.$$

Iz toga slijedi da su svojstvene vrijednosti matrice susjedstva ovog grafa $n - \frac{n}{k}$ kratnosti 1, $-\frac{n}{k}$ kratnosti $k-1$ i 0 kratnosti $n-k$, tj.

$$Sp(G) = \left\{n - \frac{n}{k}, \left(-\frac{n}{k}\right)^{(k-1)}, 0^{(n-k)}\right\}.$$

U slučaju da brojevi $n_1, \ldots, n_k$ nisu svi jednaki, tada je komplement potpunog multipartitnog grafa $K_{n_1,\ldots,n_k}$ direktna suma potpunih grafova $K_{n_1}, \ldots, K_{n_k}$ s brojem vrhova $n_1, \ldots, n_k$ pa je njegov karakteristični polinom prema Propoziciji 4.1 jednak

$$k_{\bar{K}_{n_1,\ldots,n_k}}(\lambda) = (\lambda+1)^{n_1-1}(\lambda - n_1 + 1)\cdots(\lambda+1)^{n_k-1}(\lambda - n_k + 1),$$

tj.

$$k_{\bar{K}_{n_1,\ldots,n_k}}(\lambda) = (\lambda+1)^{n-k}\prod_{j=1}^{k}(\lambda - n_j + 1).$$

Sada iz formule (3) Teorema 3.8 supstitucijom $t = \frac{1}{\lambda}$ dobivamo:

$$k_G(\lambda) = (-1)^n \frac{\lambda k_{\bar{G}}(-\lambda-1)}{H_G(\frac{1}{\lambda}) + \lambda}. \tag{7}$$

Kako znamo karakteristični polinom komplementa $k_{\bar{K}_{n_1,\ldots,n_k}}(\lambda)$, preostaje još odrediti $H_{K_{n_1,\ldots,n_k}}(t)$. Koristeći formulu (3) iz Teorema 3.8, za potpun graf K_{n_1} dobijemo

$$H_{K_{n_1}}(t) = \frac{1}{t}\left((-1)^{n_1}\frac{(-\frac{t+1}{t})^{n_1}}{(\frac{1}{t}+1)^{n_1-1}(\frac{1}{t}-n_1+1)} - 1\right).$$

Nakon sređivanja dobivamo

$$H_{K_{n_1}}(t) = \frac{n_1}{1-(n_1-1)t}.$$

Za određivanje funkcije H za direktnu sumu k potpunih grafova, trebat će nam sljedeća tvrdnja, čiji se dokaz može pronaći u [4]:

Propozicija 4.4. *Neka je $H_G(t)$ funkcija izvodnica za broj šetnji u grafu G. Vrijedi:*

$$H_{\bar{G}}(t) = \frac{H_G(-\frac{t}{t+1})}{t+1-tH_G(-\frac{t}{t+1})}, \tag{8}$$

$$H_{G_1 \dot{+} G_2}(t) = H_{G_1}(t) + H_{G_2}(t). \tag{9}$$

S obzirom da je $\bar{K}_{n_1,\ldots,n_k}$ direktna suma k potpunih grafova, to je prema jednakosti (9)

$$H_{\bar{K}_{n_1,\ldots,n_k}}(t) = \sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{1-(n_i-1)t}.$$

Koristeći (8), dobivamo

$$H_{K_{n_1,\ldots,n_k}}(t) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{n_i}{1+(n_i-1)\frac{t}{t+1}}}{t+1-t\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{n_i}{1+(n_i-1)\frac{t}{t+1}}},$$

odnosno

$$H_{K_{n_1,\ldots,n_k}}(t) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{n_i}{1+n_i t}}{1 - t\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{n_i}{1+n_i t}}.$$

Uvrstimo li to u (7), slijedi da je karakteristični polinom matrice susjedstva grafa $K_{n_1,\ldots,n_k}$ dan s

$$k_{K_{n_1,\ldots,n_k}}(\lambda) = \lambda^{n-k}\left(1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{\lambda + n_i}\right) \prod_{j=1}^{k} (\lambda + n_j).$$

Prema [14], najveća svojstvena vrijednost se dobiva iz jednakosti $\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{n_i}{\lambda+n_i} = 1$, zatim imamo svojstvenu vrijednost 0 kratnosti $n-k$, a preostalih $k-1$ svojstvenih vrijednosti se nalaze u intervalima $[-n_k, -n_{k-1}], \ldots, [-n_2, -n_1]$ (po jedna svojstvena vrijednost iz svakog intervala).

4.5 Put

Matrica susjedstva puta P_n ima oblik

$$A(P_n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Njezin karakteristični polinom je

$$k_{A(P_n)}(\lambda) = \det(\lambda I_n - A(P_n)) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & \lambda \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & \lambda \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \lambda \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} - \begin{vmatrix} \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \lambda \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)}.$$

Primijetimo da uz oznaku $S_n := k_{A(P_n)}(\lambda)$ vrijedi sljedeća rekurzija

$$S_n = \lambda S_{n-1} - S_{n-2},\ n \geq 3.$$

Prema [11], Čebiševljev polinom druge vrste U_n zadovoljava rekurziju

$$U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0,$$

uz početne uvjete $U_0(x) = 1$ i $U_1(x) = 2x$, a dan je eksplicitno s

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sin(\arccos x)}, \quad |x| < 1.$$

Zato primjećujemo da za karakteristični polinom S_n vrijedi

$$S_n(\lambda) = U_n\left(\frac{\lambda}{2}\right).$$

Također, prema Teoremu 2.10, za svaku svojstvenu vrijednost λ je $|\lambda - a_{ii}| \leq \sum\limits_{i\neq j} |a_{ij}|$, za neki $i = 1, \dots, n$. Iz toga slijedi da je $|\lambda| \leq 2$, tj. $|\frac{\lambda}{2}| \leq 1$. Zato je $U_n(\frac{\lambda}{2})$ dobro definiran.

Tražeći nultočke karakterističnog polinoma $S_n(\lambda)$, dobivamo $U_n(\frac{\lambda}{2}) = 0$, tj.

$$\sin\left((n+1)\arccos\frac{\lambda}{2}\right) = 0,$$

iz čega slijedi da je

$$(n+1)\arccos\frac{\lambda}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Rješavajući dobivenu jednadžbu dobivamo

$$\lambda = 2\cos\frac{k\pi}{n+1}, k \in \mathbb{Z}.$$

Kako nam treba samo prvih n rješenja, spektar puta P_n je

$$Sp(P_n) = \left\{2\cos\frac{k\pi}{n+1}\ :\ k = 1, \dots, n\right\}.$$

4.6 Ciklus

Matrica susjedstva ciklusa C_n s n vrhova ima oblik

$$A(C_n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ona pripada klasi cikličkih matrica, o kojima se može pročitati u [7]. Ciklička matrica je kvadratna matrica oblika

$$C = \begin{bmatrix} v_0 & v_1 & v_2 & \dots & v_{n-2} & v_{n-1} \\ v_{n-1} & v_0 & v_1 & \dots & v_{n-3} & v_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_2 & v_3 & v_4 & \dots & v_0 & v_1 \\ v_1 & v_2 & v_3 & \dots & v_{n-1} & v_0 \end{bmatrix}$$

i kažemo da je zadana vektorom $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$. Svojstvene vrijednosti matrice C su vrijednosti $f(\omega^j), j = 0, \dots, n-1$, gdje je f funkcija definirana s $f(\lambda) = v_0 + v_1\lambda + \dots + v_{n-1}\lambda^{n-1}$, a a ω je n-ti primitivni korijen od jedinice, tj. vrijedi da je $\omega^n - 1 = 0$ i $\omega^k - 1 \neq 0$, $\forall k < n$, $k \in \mathbb{N}$. Dakle, $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

Za ciklus C_n matrica $A(C_n)$ je ciklička matrica i zadana je vektorom $(0, 1, 0, 0, \dots, 0, 1)$. Slijedi da su svojstvene vrijednosti matrice susjedstva ciklusa C_n dane s

$$\lambda_j = \omega^j + (\omega^j)^{n-1} = 2\cos\frac{2\pi j}{n}, j = 0, 1, \dots, n-1,$$

tj. spektar je

$$Sp(C_n) = \left\{2\cos\frac{2\pi j}{n} \ : \ j = 0, 1, \dots, n-1\right\}.$$

5 Veza spektra i strukture grafa

5.1 Bipartitni grafovi

Važno strukturno svojstvo grafa koje se može povezati sa spektrom je bipartitnost. Iskažimo prvo jednu vrlo poznatu karakterizaciju bipartitnosti koja će nam trebati u nastavku.

Propozicija 5.1. *Graf je bipartitan ako i samo ako ne sadrži neparne cikluse.*

Dokaz propozicije može se pronaći u [5]. O karakterizaciji bipartitnosti pomoću svojstvenih vrijednosti govori nam sljedeći teorem:

Teorem 5.2. *Graf G je bipartitan ako i samo ako za svaku svojstvenu vrijednost λ matrice susjedstva koja nije jednaka nuli je i $-\lambda$ također svojstvena vrijednost, tj. spektar od G je simetričan s obzirom na nulu.*

Dokaz: Neka je G bipartitan. Tada njegovu matricu susjedstva možemo zapisati u obliku

$$A = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Neka je λ svojstvena vrijednost matrice A, a $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ pridruženi svojstveni vektor. Tada vrijedi $Av = \lambda v$, tj.

$$\begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Iz toga slijedi da je $By = \lambda x$ i $B^T x = \lambda y$. No, vrijedi i sljedeće

$$\begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -By \\ B^T x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix} = -\lambda \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix},$$

pa je $-\lambda$ također svojstvena vrijednost matrice A, i to uz pripadajući svojstveni vektor $\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$.

Dokažimo sada drugi smjer tvrdnje. Neka je za svaku svojstvenu vrijednost $\lambda \neq 0$ i $-\lambda$ također svojstvena vrijednost matrice susjedstva nekog grafa. Uzmimo prirodan neparan broj k. Vrijedi da je

$$\operatorname{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k = 0.$$

Prema Teoremu 3.6 o broju šetnji, broj ciklusa duljine k koji počinju i završavaju u vrhu v_i jednak je $(A^k)_{ii} \geq 0$. Kako je $\mathrm{tr}(A^k) = 0$, slijedi da je $(A^k)_{ii} = 0$, za svaki $i = 1, \ldots, n$, iz čega zaključujemo da ne postoji ciklus duljine k. Zbog proizvoljnosti neparnog broja k, slijedi da u grafu ne postoji neparan ciklus. Prema Propoziciji 5.1 vrijedi da je graf bipartitan.

□

U dokazu prethodnog teorema, vidjeli smo da je za svojstvenu vrijednost $-\lambda$ pridruženi svojstveni vektor dobiven zamjenom predznaka komponenata svojstvenog vektora pridruženog svojstvenoj vrijednosti λ koje pripadaju jednom dijelu biparticije.

Za povezane grafove vrijedi i jača tvrdnja, tj. karakterizacija bipartitnosti samo pomoću najveće i najmanje svojstvene vrijednosti matrice susjedstva.

Teorem 5.3. *Neka je G povezan graf, λ_1 najveća, a λ_n najmanja svojstvena vrijednost matrice susjedstva. Graf G je bipartitan ako i samo ako $\lambda_n = -\lambda_1$.*

Dokaz: Neka je G bipartitan. Prema Teoremu 2.1 (Perron-Frobenius), slijedi da je $|\lambda_n| \leq \lambda_1$. Kako je, prema prethodnom teoremu, skup svojstvenih vrijednosti simetričan s obzirom na nulu, a λ_n je najmanja svojstvena vrijednost, mora vrijediti $\lambda_n = -\lambda_1$.

Dokažimo obrat. Neka je $\lambda_n = -\lambda_1$, a x_n svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_n takav da vrijedi $x_n^T x_n = 1$. Definiramo $y(i) = |x_n(i)|$, za svaki i, gdje $x_n(i)$ označava i-tu komponentu vektora x_n. Tada vrijedi $y^T y = x_n^T x_n = 1$. Također, za svojstvenu vrijedost λ_n vrijedi

$$|\lambda_n| = |x_n^T A x_n| = \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_n(i) x_n(j) a_{ij} \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} |x_n(i)||x_n(j)|. \tag{10}$$

Kako je $|x_n(i)| = y(i)$, slijedi

$$|\lambda_n| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y(i) y(j) = y^T A y$$

Prema [17], za najveću svojstvenu vrijednost λ_1 vrijedi $\lambda_1 = \max\limits_{x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x}$, pa je

$$|\lambda_n| \leq y^T A y = \frac{y^T A y}{y^T y} \leq \lambda_1.$$

Kako vrijedi $|\lambda_n| = \lambda_1$, u prethodnom retku sve nejednakosti možemo zamijeniti jednakostima pa je $\lambda_1 = y^T Ay$, tj. $Ay = \lambda_1 y$. Time smo dokazali da je y svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_1.

Prema Teoremu 2.1 (Perron-Frobenius), y ima sve pozitivne komponente pa je $x_n(i) \neq 0$, $\forall i$. Kako u (10) svuda vrijede jednakosti, imamo

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_n(i)x_n(j)a_{ij}\right| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}|x_n(i)||x_n(j)|,$$

tj. $x_n(i)x_n(j)$ su istog predznaka kad god je $a_{ij} \neq 0$. Kako je $\lambda_n = x_n^T Ax_n < 0$, produkti $x_n(i)x_n(j)$ su negativni. To znači da je za svaki brid v_iv_j ili $x_n(i) < 0$, $x_n(j) > 0$ ili $x_n(i) > 0$, $x_n(j) < 0$.

Tako smo dobili biparticiju (A, B) definiranu s

$$A = \{v_i : x_n(i) < 0\},$$

$$B = \{v_i : x_n(i) > 0\}$$

pa je promatrani graf bipartitan. □

5.2 Regularni grafovi

Lako se može provjeriti da je $\lambda_1 = k$ svojstvena vrijednost k-regularnog grafa te da njoj pridružen svojstveni vektor ima sve komponente jednake 1. Nadalje, ta svojstvena vrijednost će ujedno biti i najveća svojstvena vrijednost k-regularnog grafa. To slijedi iz Gershgorinovog teorema (vidi Teorem 2.10), tj. svaka svojstvena vrijednost λ se nalazi u barem jednom skupu $D(a_{ii}, R_i)$, pri čemu je $R_i = \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$. Kako je $R_i = k$, $\forall i = 1, \ldots, n$, to za svojstvenu vrijednost λ vrijedi $\lambda \leq k$. Prema Teoremu 2.1, najveća svojstvena vrijednost je jednostruka nultočka karakterističnog polinoma, tj. $\lambda_1 = k$ je svojstvena vrijednost k-regularnog grafa kratnosti jedan.

Ako znamo spektar nekog grafa, možemo na osnovu njega također zaključiti je li dani graf regularan. Prije teorema o vezi spektra i regularnosti, iskažimo prvo propoziciju koja će nam trebati u njegovom dokazu. Dokaz propozicije može se pronaći u [4].

Propozicija 5.4. *Neka je $\bar{d}$ srednja vrijednost stupnjeva u grafu G, a λ_1 najveća svojstvena vrijednost matrice susjedstva grafa G. Tada vrijedi*

$$\bar{d} \leq \lambda_1.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je G regularan.

Teorem 5.5. *Neka je G jednostavan graf s n vrhova, a $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ svojstvene vrijednosti matrice susjedstva od G. Označimo $k = \lambda_1$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

a) G je k-regularan,

b) AJ=kJ, gdje je J $n \times n$ matrica sa svim elementima jednakim 1,

c) $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = kn$.

Dokaz:

a) $\iff$ b) G je k-regularan ako i samo ako se u matrici susjedstva A u svakom retku i svakom stupcu nalazi točno k jedinica, tj. $\forall i, j = 1, \ldots, n$ vrijedi

$$(AJ)_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}(J)_{rj} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} = k = (kJ)_{ij}.$$

b) $\implies$ c) Neka je $AJ = kJ$. Tada je prema prethodno dokazanom G k-regularan. Promotrimo dijagonalne elemente matrice A^2. Vrijedi

$$(A^2)_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}a_{rj},$$

pa je

$$(A^2)_{ii} = \sum_{r=1}^{n} (a_{ir})^2 = d_i.$$

Zato vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \operatorname{tr}(A^2) = \sum_{i=1}^{n} (A^2)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} d_i = kn.$$

c) $\implies$ b) Neka vrijedi $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = kn$. Kako je $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i$, slijedi da je

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d_i = k,$$

pa je prema prethodnoj propoziciji graf regularan. Kako je najveća svojstvena vrijednost $\lambda_1 = k$, graf je k-regularan pa zbog prethodno dokazane tvrdnje a) $\implies$ b) vrijedi jednakost $AJ = kJ$. □

Prethodnim teoremom smo dokazali da je za zaključivanje o k-regularnosti danog grafa G dovoljno provjeriti čemu je jednaka suma kvadrata svojstvenih vrijednosti matrice susjedstva.

O regularnim grafovima možemo zaključiti i nešto više promatrajući kratnost najveće svojstvene vrijednosti.

Teorem 5.6. *Broj komponenata regularnog grafa G jednak je kratnosti najveće svojstvene vrijednosti.*

Dokaz: Ako je graf k-regularan s l komponenata povezanosti, onda je svaka od tih komponenata povezan k-regularan podgraf. Znamo da je $\lambda_1 = k$ jednostruka nultočka karakterističnog polinoma matrice susjedstva tog povezanog podgrafa. Nadalje, matrica susjedstva grafa G bit će blok-dijagonalna matrica čiji blokovi na dijagonali odgovaraju matricama susjedstva povezanih podgrafova od G. Karakteristični polinom matrice susjedstva od G jednak je umnošku karakterističnih polinoma matrica susjedstva pojedinih podgrafova. Za svaki od tih podgrafova vrijedi da je $\lambda_1 = k$ svojstvena vrijednost kratnosti jedan pa je $\lambda_1 = k$ svojstvena vrijednost grafa G kratnosti l. $\square$

5.3 Dijametar

Sjetimo se da je *minimalni polinom* matrice A normirani polinom najmanjeg stupnja koji poništava A. Kako je matrica susjedstva A simetrična, prema Teoremu 2.2, sve njezine svojstvene vrijednosti su realni brojevi. Neka je $\{\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m)}\}$, $m \leq n$, skup različitih svojstvenih vrijednosti matrice A. Tada je njezin minimalni polinom jednak

$$\mu_A(\lambda) = (\lambda - \lambda^{(1)}) \cdots (\lambda - \lambda^{(m)}).$$

Možemo ga napisati i u obliku

$$\mu_A(\lambda) = \lambda^m + b_1\lambda^{m-1} + \cdots + b_m.$$

Kako je $\mu_A(A) = 0$, vrijedi

$$A^m + b_1A^{m-1} + \cdots + b_m = 0,$$

pa je za svaki $k = 0, 1, \dots$

$$A^{m+k} + b_1A^{m+k-1} + \cdots + b_mA^k = 0. \tag{11}$$

Sada možemo iskazati i dokazati glavni rezultat ovog odjeljka.

Teorem 5.7. *Ako matrica susjedstva povezanog grafa G ima točno m različitih svojstvenih vrijednosti, tada za dijametar grafa G vrijedi*

$$diam(G) \leq m - 1.$$

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. neka matrica susjedstva A ima točno m različitih svojstvenih vrijednosti i neka vrijedi

$$\mathrm{diam}(G) > m - 1.$$

Označimo $d = \mathrm{diam}(G)$. Prema definiciji dijametra, postoje $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ takvi da $(A^k)_{ij} = 0$ za $1 \leq k < d$, a $(A^d)_{ij} \neq 0$. To slijedi iz činjenice da je element $(A^k)_{ij}$ broj šetnji duljine k između vrhova v_i i v_j (Teorem 3.6).

Uvrstimo li u (11) $k = d - m$, dobijemo

$$A^d + b_1 A^{d-1} + \cdots + b_m A^{d-m} = 0.$$

Kako je $(A^k)_{ij} = 0$ za $1 \leq k < d$, iz prethodne jednakosti dobivamo da je $(A^d)_{ij} = 0$, što je u kontradikciji s činjenicom da $(A^d)_{ij} \neq 0$.

Slijedi da je

$$\mathrm{diam}(G) \leq m - 1.$$

□

Ovime smo pokazali da na temelju spektra grafa, točnije broja različitih svojstvenih vrijednosti, možemo zaključiti nešto i o strukturnom svojstvu grafa kao što je dijametar.

5.4 Grupa automorfizama

Skup svih automorfizama grafa G s operacijom kompozicije čini grupu koju nazivamo *grupa automorfizama* grafa G i označavamo s $\mathrm{Aut}(G)$.

Kao što smo napomenuli na početku rada, automorfizam grafa G možemo shvatiti kao permutaciju vrhova koja čuva susjednost, tj. ako s P označimo permutacijsku matricu, ona će biti automorfizam ako i samo vrijedi

$$P^{-1}AP = A.$$

Stoga za svaki automorfizam $P \in \mathrm{Aut}(G)$ vrijedi

$$AP = PA.$$

To će nam pomoći u dokazivanju sljedećeg teorema:

Teorem 5.8. *Ako matrica susjedstva A grafa G ima sve različite svojstvene vrijednosti, tada su svi netrivijalni automorfizmi P involutorni, tj. vrijedi*

$$P^2 = I.$$

Dokaz: Uzmimo svojstvenu vrijednost λ matrice A i njoj pridruženi svojstveni vektor v. Neka je P automorfizam grafa G. Vrijedi

$$A(Pv) = APv = PAv = P(Av) = P(\lambda v) = \lambda(Pv),$$

tj. i vektor Pv je svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Kako A ima sve različite svojstvene vrijednosti, kratnost od λ je jednaka 1, pa vektori v i Pv moraju biti linearno zavisni.

Kako je P permutacijska matrica, vrijedi $||Pv|| = ||v||$. Linearna zavisnost od v i Pv implicira

$$Pv = v \text{ ili } Pv = -v.$$

Zato je $P^2 v = v$, tj. $P^2 = I$.

□

Primijetimo da smo time dokazali i da je $\mathrm{Aut}(G)$ Abelova grupa jer za $P_1, P_2 \in \mathrm{Aut}(G)$ vrijedi

$$P_1P_2 = IP_1P_2I = P_2^2P_1P_2P_1^2 = P_2P_2P_1P_2P_1P_1 = P_2(P_2P_1)^2P_1 = P_2IP_1 = P_2P_1.$$

5.5 Kromatski broj

Spektar grafa G nam može dati informacije i o njegovom kromatskom broju. Točnije, najviše informacija daje nam najveća svojstvena vrijednost.

Iskažimo prvo tvrdnje koje vrijede za kromatski broj $\chi(G)$, a trebat će nam u nastavku. Dokazi se mogu pronaći u [5] i [3].

Propozicija 5.9. *Za svaki graf G vrijedi $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, gdje je $\Delta(G)$ najveći stupanj vrha u grafu.*

Propozicija 5.10. *Neka je G jednostavan povezan graf. Tada $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ ako i samo ako je G potpun graf ili neparan ciklus.*

Prethodna tvrdnja je poznata pod nazivom Brooksov teorem. Dokažimo sada teorem o kromatskom broju.

Teorem 5.11. *Neka je λ_1 najveća svojstvena vrijednost matrice susjedstva povezanog grafa G. Za kromatski broj $\chi(G)$ tada vrijedi*

$$\chi(G) \leq \lambda_1 + 1.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je G potpun graf ili ciklus neparne duljine.

Dokaz: Kako je $\chi(G)$ kromatski broj od G, to se G ne može pravilno obojiti s $\chi(G)-1$ boja. Zato postoji inducirani podgraf H grafa G kojemu je minimalan stupanj barem $\chi(G)-1$, tj.

$$d_{\min}(H) \geq \chi(G) - 1.$$

Označimo s $\lambda_1^{(H)}$ najveću svojstvenu vrijednost grafa H. Prema Teoremu 2.3 vrijedi $\lambda_1 \geq \lambda_1^{(H)}$. Propozicija 5.4 sada povlači da je $\lambda_1^{(H)} \geq \bar{d}_H$, gdje je $\bar{d}_H$ srednja vrijednost stupnjeva u grafu H. No tada je i $\lambda_1^{(H)} \geq d_{\min}(H)$.

Sada imamo da je

$$\lambda_1 \geq \lambda_1^{(H)} \geq d_{\min}(H) \geq \chi(G) - 1, \tag{12}$$

tj.

$$\chi(G) \leq \lambda_1 + 1,$$

čime je nejednakost iz tvrdnje teorema dokazana.

Neka sada vrijedi jednakost $\chi(G) = \lambda_1 + 1$. Tada vrijede jednakosti i u (12), tj. vrijedi

$$\lambda_1 = \lambda_1^{(H)}.$$

Kako je graf G povezan, matrica susjedstva je ireducibilna pa prema Teoremu 5 vrijedi da porastom nekog elementa u matrici A strogo raste najveća svojstvena vrijednost. Zato, ako gledamo da je matrica susjedstva grafa H iste dimenzije kao matrica susjedstva grafa G, s nulama kod vrhova koje H ne sadrži i elementima manjim ili jednakim od elemenata matrice susjedstva od G, mora slijediti

$$H = G.$$

Neka je $\bar{d}$ srednja vrijednost stupnjeva u G. Tada prema Propoziciji 5.4 vrijedi

$$d_{\min}(G) \leq \bar{d} \leq \lambda_1.$$

Kako je $H = G$, jednakosti u (12) povlače da je

$$d_{\min}(G) = \lambda_1,$$

tj.

$$\bar{d} = \lambda_1.$$

Prema Propoziciji 5.4 slijedi da je G regularan. Kako je najveća svojstvena vrijednost jednaka λ_1, zaključujemo da je G λ_1-regularan pa je stupanj svakog vrha jednak λ_1. Posebno, $\Delta(G) = \lambda_1$. Zato vrijedi

$$\chi(G) = \lambda_1 + 1 = \Delta(G) + 1.$$

Prema Brooksovom teoremu (Propozicija 5.10) slijedi da je G potpun graf ili ciklus neparne duljine.

Obrnuto, neka je G potpun graf ili ciklus neparne duljine. Tada opet prema Brooksovom teoremu vrijedi $\chi(G) = 1 + \Delta(G)$. Moramo dokazati da je $\chi(G) = \lambda_1 + 1$, tj.

$$\Delta(G) = \lambda_1.$$

Ako je G potpun graf s n vrhova, vrijedi $\Delta(G) = \lambda_1 = n - 1$, a ako je G ciklus s neparnim brojem vrhova, vrijedi $\Delta(G) = \lambda_1 = 2$, čime smo dokazali jednakost. □

Prethodnim teoremom smo dokazali gornju granicu za kromatski broj grafa izraženu najvećom svojstvenom vrijednošću. Sljedeći teorem daje nam donju granicu pomoću najveće i najmanje svojstvene vrijednosti. Za dokaz tog teorema trebat će nam lema čiji se dokaz može pronaći u [9].

Lema 5.12. *Neka je A realna simetrična matrica reda n, a $\beta_1 \cup \cdots \cup \beta_t$, $t \geq 2$, $\beta_i \neq \emptyset$, za svaki i, particija skupa $\{1, \ldots, n\}$. Označimo s A_{kk} podmatricu matrice A koja sadrži redove i stupce iz skupa β_k. Ako je $0 \leq i_k \leq |\beta_k|$, $k = 1, \ldots, t$, onda*

$$\lambda_{i_1+i_2+\cdots+i_t+1}(A) + \sum_{i=1}^{t-1} \lambda_{n-i+1}(A) \leq \sum_{k=1}^{t} \lambda_{i_k+1}(A_{kk}),$$

gdje su $\lambda_i(X), i = 1, 2, \ldots$ svojstvene vrijednosti matrice X u padajućem poretku.

Teorem 5.13. *Ako su $\lambda_1 \neq 0$ i λ_n redom najveća i najmanja svojstvena vrijednost grafa G, tada njegov kromatski broj $\chi(G)$ zadovoljava*

$$\chi(G) \geq -\frac{\lambda_1}{\lambda_n} + 1.$$

Dokaz: Označimo $\chi(G) = t$. Ako s $\{1, \ldots, n\}$ označimo skup vrhova grafa G, postoji njegova particija $\beta_1 \cup \cdots \cup \beta_t$ takva da svaki podgraf grafa G induciran skupom vrhova β_i ne sadrži bridove. Za $i_k = 0$, $k = 1, \ldots, t$, iz prethodne leme, slijedi

$$\lambda_1(G) + \sum_{i=1}^{t-1} \lambda_{n-i+1}(G) \leq \sum_{k=1}^{t} \lambda_1(G[\beta_k]).$$

Kako podgraf $G[\beta_k]$ induciran skupom vrhova β_k ne sadrži bridove, njegove svojstvene vrijednosti su jednake nuli, pa slijedi

$$\lambda_1(G) + \sum_{i=1}^{t-1} \lambda_{n-i+1}(G) \leq 0.$$

S obzirom da smo svojstvene vrijednosti uzeli u padajućem poretku, to je $\lambda_{n-i+1}(G) \geq \lambda_n$, $\forall i = 1, \ldots, t-1$. Slijedi

$$\sum_{i=1}^{t-1} \lambda_{n-i+1}(G) \geq (t-1)\lambda_n.$$

Koristeći prethodne dvije nejednakosti, imamo

$$(t-1)\lambda_n \leq \sum_{i=1}^{t-1} \lambda_{n-i+1}(G) \leq -\lambda_1.$$

Dijeljenjem s $\lambda_n < 0$, dobivamo traženu nejednakost

$$\chi(G) \geq -\frac{\lambda_1}{\lambda_n} + 1.$$

□

Donja granica za kromatski broj grafa dana je i izrazom koji ovisi o broju vrhova grafa i najveće svojstvene vrijednosti. O tome nam govori sljedeći teorem.

Teorem 5.14. *Ako je G graf s n vrhova, najvećom svojstvenom vrijednošću λ_1 i kromatskim brojem $\chi(G)$, onda vrijedi sljedeća nejednakost*

$$\chi(G) \geq \frac{n}{n - \lambda_1}.$$

Dokaz: Promotrimo prvo karakteristični polinom matrice susjedstva potpunog k-partitnog grafa $K_{n_1,\ldots,n_k}$. Iz poglavlja 4.4 znamo da vrijedi

$$k_{K_{n_1,\ldots,n_k}}(x) = x^{n-k}\left(1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{x+n_i}\right) \prod_{j=1}^{k}(x+n_j).$$

Prema [4], taj polinom ima točno jednu svojstvenu vrijednost λ_1 koja je pozitivna. Zato za $x > 0$ vrijedi $k_{K_{n_1,\ldots,n_k}}(x) \geq 0$ ako i samo ako je $x \geq \lambda_1$. To slijedi iz činjenice da je $k_{K_{n_1,\ldots,n_k}}(x) \geq 0$ ako i samo ako je

$$1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{x+n_i} \geq 0,$$

tj.

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{x+n_i} \leq 1 = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{\lambda_1 + n_i}.$$

Time smo pokazali ranije navedenu nejednakost, tj. da je vrijednost polinoma u točki $x > 0$ veća ili jednaka 0 ako i samo ako je x veći ili jednak jedinoj pozitivnoj svojstvenoj vrijednosti.

Nadalje, pogledajmo vrijednosti izraza

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{x+n_i}, \tag{13}$$

za $x > 0$, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

Pretpostavimo da su n_i realni brojevi. Tada suma (13) postiže svoju najveću vrijednosti kada su svi n_i međusobno jednaki. Naime, kada za neki n_i i n_j vrijedi $n_i \neq n_j$, zamjenom $n_i' = n_j' = \frac{1}{2}(n_i+n_j)$ vrijednost izraza raste. To slijedi iz činjenice da je

$$\frac{\frac{1}{2}(n_i+n_j)}{x+\frac{1}{2}(n_i+n_j)} + \frac{\frac{1}{2}(n_i+n_j)}{x+\frac{1}{2}(n_i+n_j)} = \frac{n_i+n_j}{x+\frac{1}{2}(n_i+n_j)} > \frac{n_i}{x+n_i} + \frac{n_j}{x+n_j},$$

što je izravna posljedica konkavnosti funkcije $f(y) = \frac{y}{x+y}$ na skupu pozitivnih realnih brojeva.

Za $x = \frac{k-1}{k}n > 0$, izraz (13) je jednak 1 kada su svi n_i međusobno jednaki. Kako je dokazano ranije, tada izraz poprima najveću vrijednost, a za sve međusobno različite n_i vrijednost izraza se smanjuje. Općenito, za prirodne brojeve n_i i za $x = \frac{k-1}{k}n$ vrijedi

$$k_{K_{n_1,\ldots,n_k}}(x) = x^{n-k}\left(1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{x+n_i}\right) \prod_{j=1}^{k} (x+n_j) \geq 0.$$

Prema ranije dokazanoj tvrdnji, tada vrijedi da je x veći ili jednak pozitivnoj svojstvenoj vrijednosti, tj.

$$\frac{k-1}{k}n \geq \lambda_1.$$

Primijetimo da smo time dokazali da za potpun k-partitan graf $K_{n_1,\ldots,n_k}$ vrijedi

$$\lambda_1 \leq \frac{k-1}{k}n, \tag{14}$$

gdje je λ_1 najveća svojstvena vrijednost njegove matrice susjedstva.

Vratimo se sad na graf G i stavimo $k = \chi(G)$. Tada se skup vrhova grafa G može particionirati na k nepraznih skupova $\beta_1, \ldots, \beta_k$ tako da podgraf $G[\beta_i]$ induciran skupom vrhova β_i ne sadrži bridove. Označimo s $n_1, \ldots, n_k$ ($n_1 + \cdots + n_k = n$) broj vrhova u skupovima $\beta_1, \ldots, \beta_k$. Jasno je da dodavanjem novih bridova u graf G možemo dobiti potpuni k-partitan graf $K_{n_1,\ldots,n_k}$. Prema Teoremu 2.4, dodavanjem bridova, tj. povećavanjem elemenata u matrici susjedsta ne smanjuje se najveća svojstvena vrijednost. Zato za najveću svojstvenu vrijedost λ_1 grafa G vrijedi da je manja ili jednaka najvećoj svojstvenoj vrijednosti od $K_{n_1,\ldots,n_k}$, za koju vrijedi izraz (14). Zato dobivamo

$$\lambda_1 \leq \frac{k-1}{k} n.$$

Sređivanjem prethodne nejednakosti, dobivamo

$$k \geq \frac{n}{n - \lambda_1},$$

što smo i trebali dokazati. □

Literatura

[1] H. Anton, C. Rorres, *Elementary Linear Algebra*, Anton Textbooks, Inc., 2014.

[2] L. Collatz, U. Sinogowitz, *Spektren endlicher Grafen*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg 21(1957), 63–77.

[3] D. W. Cranston, L. Rabern, *Brooks' Theorem and Beyond*, Journal of Graph Theory 80(2015), 199–225.

[4] D. M. Cvetković, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of Graphs: Theory and Applications*, Johann Ambrosius Barth Verlag, 1995.

[5] R. Diestel, *Graph Theory*, Electronic Edition, Springer-Verlag New York, 1997.

[6] F. R. Gantmacher, *Theory of Matrices I,II (2 vol.)*, Chelsea, New York, 1960.

[7] R. M. Gray, *Toeplitz and Circular Matrices: A Review*, NOW, 2006.

[8] A. J. Hoffman, *On the exceptional case in a characterization of the arcs of a complete graph*, IBM Journal of Research and Development 4(1960), 487–496.

[9] A. J. Hoffman, *On eigenvalues and colorings of graphs*, Academic Press, New York - London, 1970.

[10] M. Marcus, H. Minc, *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalites*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1964.

[11] R. Scitovski, *Numerička matematika*, Odjel za matematiku Sveučilišta u Osijeku, 2004.

[12] G. E. Shilov, *Linear Algebra*, Dover Publications, Inc., New York, 1977.

[13] D. Stevanović, *Spectral Radius of Graphs*, Elsevier Inc., 2015.

[14] D. Stevanović, I. Gutman, M. U. Rehman, *On spectral radius and energy of complete multipartite graphs*, Ars Mathematica Contemporanea 9(2015), 109–113.

[15] M. Stoll, *Linear Algebra 2*, 2007.
URL: http://www.mathe2.uni-bayreuth.de/stoll/lecture-notes/LinearAlgebraII.pdf

[16] R. S. Varga, *Geršgorin and His Circles*, Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2004.

[17] S. G. Walker, P. Van Mieghem, *On lower bounds for the largest eigenvalue of a symmetric matrix*, Linear Algebra and its Applications 429(2008), 519–526.

Sažetak i ključne riječi

Sažetak. Na temelju poznavanja nekih ili svih svojstvenih vrijednosti matrice susjedstva grafa možemo zaključiti nešto o strukturnim svojstvima kao što su bipartitnost, regularnost, grupa automorfizama, dijametar i kromatski broj. Također, informacije o tim svojstvima nam mogu ukazati na svojstva spektra.

Proučavajući skup svih elementarnih grafova sadržanih u danom grafu, koji se sastoje od ciklusa i potpunog grafa s dva vrha, možemo izračunati koeficijente karakterističnog polinoma grafa te na temelju toga odrediti svojstvene vrijednosti matrice susjedstva. Iz matrice susjedstva i njezinih potencija možemo odrediti broj šetnji određene duljine u danome grafu. Istu informaciju možemo dobiti i koristeći svojstvene vrijednosti i komponente svojstvenih vektora ili koristeći karakteristične polinome grafa i njegovog komplementa. Poznati su nam spektri nekih posebnih tipova grafova, kao što su regularni grafovi stupnja jedan, potpun graf, potpun bipartitan graf, potpun multipartitan graf, put i ciklus. Graf je bipartitan ako i samo ako je njegov spektar simetričan s obzirom na nulu. Također, ako je najveća svojstvena vrijednost povezanog grafa jednaka njegovoj negativnoj najmanjoj svojstvenoj vrijednosti, graf je bipartitan. Za dokazivanje regularnosti grafa, dovoljno je provjeriti sumu kvadrata svojstvenih vrijednosti. Broj različitih svojstvenih vrijednosti matrice susjedstva daje nam gornju granicu za grafov dijametar te opisuje grupu automorfizama grafa. Na temelju poznavanja najmanje i najveće svojstvene vrijednosti, možemo dobiti donju i gornju granicu za kromatski broj grafa.

Ključne riječi: spektar grafa, karakteristični polinom, matrica susjedstva, dijametar, kromatski broj

Spectra of Graph

Summary. By knowing some or all of the eigenvalues of the adjacency matrix of graph, we can conclude something about structural properties such as bipartitness, regularity, group of automorphisms, diameter and chromatic number. Also, information about these properties can point to the properties of graph spectra.

By studying the set of all elementary graphs contained in the graph, which consists of a cycle and a complete graph with two vertices, we can calculate coefficients of the characteristic polynomial of a graph and thus determine the eigenvalues. From the adjacency matrix and its powers we can determine the number of walks of a certain length in the graph. The same information can also be obtained by using the eigenvalues and components of the eigenvectors, or by using characteristic polynomials of a graph and its complement. We know the spectra of some special types of graphs, such as regular graphs of degree one, complete graph, complete bipartite graph, complete multiparty graph, path and cycle. The graph is bipartite if and only if its spectrum is symmetric with respect to zero. Also, if the largest eigenvalue of a connected graph is equal to its negative smallest eigenvalue, the graph is bipartite. To prove the regularity of the graph, it is sufficient to check the sum of the squares of the eigenvalues. The number of different eigenvalues of the adjaceny matrix gives us the upper bound for the graph's diameter and describes a group of automorphisms. By knownig the smallest and the largest eigenvalue, we can obtain lower and upper bounds for the graph's chromatic number.

Keywords: spectra of graph, characteristic polynomial, adjacency matrix, diameter, chromatic number

Životopis

Rođena sam 13. 12. 1994. u Osijeku, a živim u Valpovu. Od 2001. do 2009. godine sam pohađala Osnovnu školu Matije Petra Katančića u Valpovu, a 2013. godine sam završila Opću gimnaziju u Srednjoj školi Valpovo. Nakon toga sam upisala Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku. Tijekom studija sam bila demonstrator iz nekoliko kolegija na Odjelu.

U svibnju 2018. godine sudjelovala sam na regionalnom natjecanju Primatijada u Budvi u Crnoj Gori te sam s kolegicama s Odjela za matematiku napisala rad „Analiza terorističke mreže 9/11“, s kojim smo osvojile treće mjesto. U srpnju 2018. godine sam sudjelovala na međunarodnom matematičkom natjecanju IMC u Blagoevgradu u Bugarskoj i osvojila drugu nagradu.