Particije Rogers-Ramanujanovog tipa

Petrić, Ines

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Ines Petrić

Particije Rogers-Ramanujanovog tipa

Diplomski rad

Osijek, 2018.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Ines Petrić

Particije Rogers-Ramanujanovog tipa

Diplomski rad

Voditelj: doc. dr. sc. Ivica Martinjak

Osijek, 2018.

Sadržaj

Uvod

U prvom dijelu ovog rada upoznajemo se s pojmom particije. Particija broja $n \in \mathbb{N}_0$ je način na koji taj broj možemo prikazati kao sumu prirodnih brojeva. Primjerice, broj 3 možemo napisati na 3 načina kao sumu prirodnih brojeva:

$$3, 2+1, 1+1+1.$$

Kako je zbrajanje komutativno dogovor je da se particija zapisuje u padajućem poretku pribrojnika kako se ne bi ista particija više puta brojala. Usprkos svojoj naizgled jednostavnoj definiciji particije zadovoljavaju zanimljiva i neočekivana svojstva, a neka od njih ćemo i pokazati. Grafički particije prikazujemo pomoću Youngovog dijagrama ili Ferrerovog grafa. Teorija particija razvija se dugi niz godina i mnogi matematičari imaju svoje doprinose.

U drugom dijelu gradiva dolazimo do Rogers-Ramanujanovih identiteta. Leonard James Rogers je bio engleski matematičar i glazbenik koji je zaslužan za otkrivanje ovih identiteta. Identitete je otkrio 1894. godine, a njihov dokaz je bio zanemaren od strane matematičkog društva. Oko 1913. godine identitete je otkrio i iskazao indijski matematičar Srinivasa Ramanujan ali bez njihovih dokaza. Međutim, 1917. godine Ramanujan je slučajno došao do Rogersovog rada u kojem je bio i dokaz. Ni dan danas nema jednostavnog dokaza ovih identiteta, ono za čime je veliki interes jest pronalazak elegantnog bijektivnog dokaza. U radu ćemo napraviti iskaz, dokaz identiteta i njihovu interpretaciju pomoću particija.

I zadnji dio rada je posvećen polariziranim i particijama Rogers-Ramanujanovog tipa. Particije Rogers-Ramanujanovog tipa ili 2-različite particije se dobiju kao posljedica identiteta u drugom dijelu, a polarizirane particije se u tom kontekstu savršeno uklapaju. Uspostavit ćemo bijekciju između 2-različitih i polariziranih particija koja je poznata pod nazivom Bressudova bijekcija. Također, poznato je da omjer brojeva particija Rogers-Ramanujanovog tipa teže prema zlatnom rezu,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|D_2(n)|}{|D_2'(n)|} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

1. Teorija particija

1.1. Pojam i definicija particije

Promatrajući broj 5 uočavamo da ga možemo prikazati kao sumu sljedećih prirodnih brojeva:

$$\begin{aligned}5 &= 5,\\ &= 4+1,\\ &= 3+2,\\ &= 3+1+1,\\ &= 2+2+1,\\ &= 2+1+1+1,\\ &= 1+1+1+1+1.\end{aligned}$$

Ovakav rastav na sumande motivira pojam particije. Teorija o particijama uključuje područja iz kombinatorike i teorije brojeva. To je matematičko područje zaintrigiralo mnoge velike matematičare kao što su: Euler, Legendre, Ramanujan, Hardy, Rademacher, Sylvester, Selberg, Dyson. Particiju broja $n \in \mathbb{N}_0$ definiramo na sljedeći način.

Definicija 1.1. *Particija broja $n \in \mathbb{N}_0$ je monotoni niz $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l$, pri čemu vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i = n,\ \lambda_i \in \mathbb{N},\ l \in \mathbb{N}.$$

Brojeve λ_i nazivamo dijelovima, broj n težina particije i $l(\lambda) = l$ duljina od λ. Particiju λ broja n označavamo s $\lambda \vdash n$. Primjerice, $(13, 5, 3, 1)$ je particija težine 22 i duljine 4, a $(15, 14, 9, 8, 6, 1)$ težine 53 i duljine 6. Skup svih particija broja $n \in \mathbb{N}_0$ je skup kojeg označavmo s $\mathcal{P}_n$,

$$\mathcal{P}_n = \{\lambda : \lambda \vdash n\}.$$

Funkciju $p : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$, gdje je $p(n) = |\mathcal{P}_n|$ nazivamo particijska funkcija. Ona daje kardinalni broj skupa $\mathcal{P}_n$, odnosno broj particija broja $n \in \mathbb{N}_0$.

Primjer 1.1. *Već i na samom početku smo pokazali* 7 *načina kako rastaviti broj* 5 *kao sumu prirodnih brojeva. Tada imamo da je $\mathcal{P}_5$ dan kao:*

$$\mathcal{P}_5 = \{(5), (4,1), (3,2), (3,1,1), (2,2,1), (2,1,1,1), (1,1,1,1,1)\}.$$

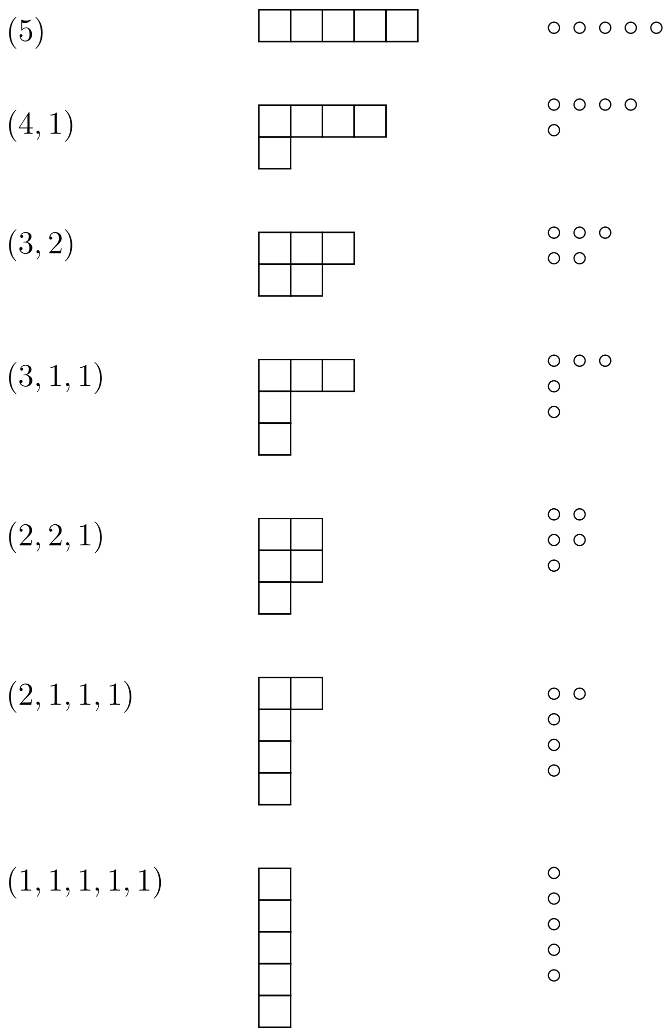
Kardinalni broj od $\mathcal{P}_5$ je particijska funkcija i ona za $n = 5$ iznosi 7*, odnosno $p(5) = |\mathcal{P}_5| = 7$.*

Svaku particiju $\lambda \vdash n$ možemo predočiti grafički. U ovom radu koristit ćemo poznate prikaze kao što su Youngov dijagram i Ferrerov graf.

Definicija 1.2. *Youngov dijagram od $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ definiramo kao skup parova $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ takvih da $1 \le i \le l$ i $1 \le j \le \lambda_i$. Reprezentiramo ga u ravnini $\mathbb{R}^2$ tako da točke i rastu u smjeru ordinate s orijentacijom prema ishodištu, a točke j rastu u smjeru apscise s orijentacijom od ishodišta.*

Ekvivalentno definiramo i Ferrerov graf. Razlika je u tome što kod Youngovog dijagrama točku (i, j) crtamo kao kvadrat s centrom u toj točki dok kod Ferrerovog grafa crtamo vrh. Sljedeći primjer ilustrira obje reprezentacije.

Primjer 1.2. *Prikažimo Youngovim dijagramom i Ferrerovim grafom svih 7 particija prirodnog broja 5, slika 1.*



Slika 1: Youngov dijagram (lijevo) i Ferrerov graf (desno) za particije broja $n = 5$.

S $p(n)$ označavamo broj particija broja $n \in \mathbb{N}_0$. Nadalje, s $p_k(n)$ označit ćemo broj particija od n duljine k, $p_k(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Primjerice, imamo dvije particije broja 5 duljine 3, to su:

$$(3, 1, 1), (2, 2, 1).$$

Dakle, $g_3(5) = 2$. Definiramo funkciju $g : \mathcal{P}_n \to \mathbb{N}$ takvu da je $g(\lambda) = \max\{\lambda_1, \ldots, \lambda_l\}$, gdje je $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$. Za particiju $\lambda = (3, 1, 1)$ maksimalni dio particije je 3, tj. $g(\lambda) = 3$.

Primjer 1.3. *Prirodni broj* 7 *ima* 15 *particija. Te particije ćemo zapisati redom po njihovim duljinama:*

- $l(\lambda) = 1 : (7)$,
- $l(\lambda) = 2 : (6, 1), (5, 2), (4, 3)$,
- $l(\lambda) = 3 : (5, 1, 1), (4, 2, 1), (3, 3, 1), (3, 2, 2)$,
- $l(\lambda) = 4 : (4, 1, 1, 1), (3, 2, 1, 1), (2, 2, 2, 1)$,
- $l(\lambda) = 5 : (3, 1, 1, 1, 1), (2, 2, 1, 1, 1)$,
- $l(\lambda) = 6 : (2, 1, 1, 1, 1, 1)$,
- $l(\lambda) = 7 : (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Ukoliko pogledamo particije duljine 3*, možemo uočiti da postoje* 4 *takve particije,*

$$p_3(7) = |\{(5, 1, 1), (4, 2, 1), (3, 3, 1), (3, 2, 2)\}| = 4.$$

Također, imamo 4 *particije kod kojih je* $g(\lambda) = 3$*, odnosno čiji je najveći dio* 3*, to su particije:*

$$(3, 3, 1), (3, 2, 1, 1), (3, 1, 1, 1, 1), (3, 2, 2).$$

Primjetimo da je broj particija duljine 3 *jednak broju particija čiji najveći dio je* 3*.*

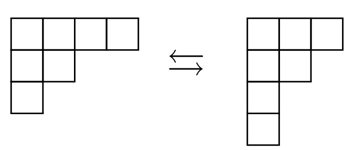
Pravilnost u prethodnom primjeru vrijedi i općenito, te ćemo tu tvrdnju iskazat i dokazat sljedećom propozicijom.

Propozicija 1.1. *Za svaki* $n \in \mathbb{N}_0$ *vrijedi da je,*

$$p_k(n) = |\{\lambda \vdash n : g(\lambda) = k\}|. \tag{1}$$

Za sami dokaz prethodne propozicije potreban je pojam konjugirane particije. Promotrimo sljedeći primjer kako bismo se upoznali s takvim tipom particije.

Primjer 1.4. *Neka je* $\lambda = (4, 2, 1)$*. Primjetimo da je ovo particija broja* $n = 7$*. Transponiranjem Youngovog dijagrama, odnosno zamjenom redaka i stupaca particije* λ *dobivamo konjugiranu particiju* $\psi = (3, 2, 1, 1)$*, slika 2.*



Slika 2: Par konjugiranih particija $\lambda = (4, 2, 1)$ i $\mu = (3, 2, 1, 1)$.

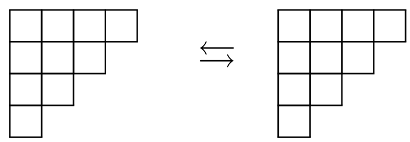
Definicija 1.3. *Kažemo da je particija $\lambda \vdash n$ konjugirana obzirom na particiju $\mu \vdash n$ ako su im Youngovi dijagrami simetrični obzirom na glavnu dijagonalu.*

Sada kada smo upoznati s konjugiranim particijama dokaz propozicije 1.1 je trivijalan. Prikazat ćemo bijektivni dokaz.

Dokaz. (Propozicija 1.1) Neka je λ početna particija i ψ njena konjugirana particija. Tada je duljina od λ jednaka upravo $g(\psi)$, odnosno maksimalnom dijelu particije ψ. Ukoliko pogledamo primjer 1.4, vidimo da je $l(\lambda) = 3$ i $g(\psi) = 3$. Očito je da su ovakve particije jednakobrojne, odnosno da vrijedi (1). □

Postoje particije koje kada konjugiramo one su jednake same sebi. Particije s takvim svojstvom nazivamo samo-konjugirane particije.

Primjer 1.5. *Konjugirana particija od $\lambda = (4, 3, 2, 1)$ jednaka je samoj sebi. Znači, $\lambda = (4, 3, 2, 1)$ je samo-konjugirana particija.*



Slika 3: Par konjugiranih particija koje su jednake.

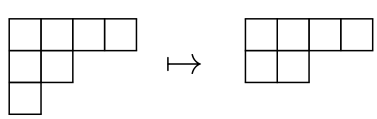
Sljedeća propozicija prikazuje još neka svojstva za broj particija od n, $n \in \mathbb{N}_0$.

Propozicija 1.2. *Za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi:*

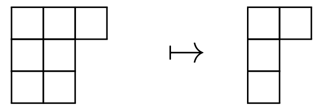
i) $p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$,

ii) $p(n) = p_n(2n)$.

Dokaz. 1. Za dokaz prvog dijela ćemo napraviti takozvani bijektivn dokaz. Nekaj je λ particija od n duljine k. Broj takvih particija označavamo s $p_k(n)$. Ukoliko particija λ sadrži jedinicu kao dio, tada ostatak $n-1$ možemo particionirati na $p_{k-1}(n-1)$ načina. Primjerice, particija $(4, 2, 1)$ je particija broja $n = 7$ duljine $k = 3$ i sadrži jedinicu. Iz slike 4 jasno se vidi kako smo od particije $(4, 2, 1)$ dobili particiju $(4, 2)$, gdje je $n = 6$ i $k = 2$. Nadalje, ako imamo particiju $\mu \vdash n$ duljine k koja ne sadrži jedinicu kao dio, onda svakom dijelu oduzmemo jedinicu i imamo $p_k(n-k)$ particija broja $n-k$ duljine k. Za $n = 7$ i $k = 3$ particija $(3, 2, 2)$ je particija duljine 3 i ona ne sadrži jedinicu kao dio. Slika 5 pokazuje tako opisanu bijekciju između particija $(3, 2, 2)$ i $(2, 1, 1)$. Iz ovog je očito da vrijedi rekurzija $p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$.



Slika 4: Bijekcija kada particija od 7 duljine 3 sadrži jedinicu kao dio.



Slika 5: Bijekcija kada particija od 7 duljine 3 ne sadrži jedinicu kao dio.

2. Druga tvrdnja slijedi iz prve. Naime,

$$\begin{aligned}
p_n(2n) &= p_{n-1}(2n-1) + p_n(n) \\
&= p_{n-2}(2n-2) + p_{n-1}(n) + p_n(n) \\
&= p_{n-3}(2n-3) + p_{n-2}(n) + +p_{n-1}(n) + p_n(n) \\
&\vdots \\
&= p_1(n) + p_2(n) + \cdots + +p_{n-1}(n) + p_n(n) \\
&= p(n).
\end{aligned}$$

□

1.2. Eulerov teorem

Jedan od najistaknutijih teorema u teoriji particija je Eulerov teorem. On povezuje neparne i striktne particije. Particije čiji su svi dijelovi neparni nazivamo neparne particije i skup takvih particija označavmo s $\mathcal{O}_n$, gdje je

$$\mathcal{O}_n = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \vdash n : \lambda_i \equiv 1 \pmod 2,\ i = 1, ..., \ l(\lambda)\} \subseteq \mathcal{P}_n.$$

Striktne particije su one particije gdje su svi dijelovi međusobno različiti,

$$\mathcal{D}_n = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \vdash n : \lambda_i \neq \lambda_j, \forall\ i \neq j\} \subseteq \mathcal{P}_n.$$

Primjer 1.6. *Odredimo skup neparnih i striktnih particija za $n = 5$. Broj 5 možemo prikazati na 7 načina kao sumu prirodnih brojeva:*

- $l(\lambda) = 1 : (5),$
- $l(\lambda) = 2 : (4,1),\ (3,2),$
- $l(\lambda) = 3 : (2,2,1),\ (3,1,1),\ (3,2,2),$
- $l(\lambda) = 4 : (2,1,1,1),$
- $l(\lambda) = 5 : (1,1,1,1,1).$

Nadalje, skup neparih particija dan je sljedećim elementima skupa $\mathcal{O}_n$,

$$\mathcal{O}_n = \{(5), (3, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1)\},$$

dok su striktne particije elementi skupa $\mathcal{D}_n$,

$$\mathcal{D}_n = \{(5), (4, 1), (3, 2)\}.$$

U prethodnom primjeru primjećujemo da je broj elemenata skupa neparnih particija i striktnih particija jednak i to će vrijediti za svaki prirodan broj. Upravo tu povezanost između broja striktnih i neparnih particija iskazujemo Eulerovim teoremom.
Pretpostavimo da svaki parni dio u proizvoljnoj striktnoj particiji $\mu \vdash n$ rastavimo na dva jednaka pribrojnika i to radimo sve dok ne dođemo do neparnih sumanada. Primjerice za striktnu particiju $\psi = (6, 5, 4)$ težine $n = 15$ rastavljanjem parnih dijelova na jednake pribrojnike dobivamo:

$$\begin{aligned}(6,5,4) &\rightarrow (3,3,5,2,2)\\ &\rightarrow (3,3,5,1,1,1,1)\\ &\rightarrow (5,3,3,1,1,1,1).\end{aligned}$$

Očito je da ovim postupkom od polazne striktne particije dobivamo neparnu particiju $\lambda \vdash n$. Suprotno, zbrajanjem jednakih dijelova u proizvoljnoj neparnoj particiji $\lambda \vdash n$ uvijek rezultira striktnom particijom iste težine. Dakle, u našem primjeru,

$$\begin{aligned}(5,3,3,1,1,1,1) &\rightarrow (5,6,2,2)\\ &\rightarrow (5,6,4)\\ &\rightarrow (6,5,4).\end{aligned}$$

Ovim bijektivnim postupkom dokazujemo Eulerov teorem koji još preostaje precizno iskazat.

Teorem 1.1 (Eulerov teorem)**.** *Za svaki $n \in \mathbb{N}_0$, broj neparnih particija $\lambda \vdash n$ jednak je broju striktnih particija $\mu \vdash n$, odnosno*

$$|\ \mathcal{O}_n\ |=|\ \mathcal{D}_n\ |\ .$$

Euler je istraživao particije pomoću funkcija izvodnica. Stoga, prikazat ćemo dokaz Eulerovog teorema i na taj način. Prije samog dokaza i upoznavanja s funkcijama izvodnicama primjer u kojem prikazujemo bijekciju sa skupa neparnih u skup striktnih particija.

Primjer 1.7. *Neka je $n = 6$, odredimo bijektivno preslikavanje $\mathcal{O}_6 \rightarrow \mathcal{D}_6$. Broj $n = 6$ ima* 11 *particija i one su dane kao:*

- $l(\lambda) = 1 : (6)$,
- $l(\lambda) = 2 : (5, 1),\ (4, 2),\ (3, 3)$,

- $l(\lambda) = 3 : (4, 1, 1), (3, 2, 1), (2, 2, 2)$,
- $l(\lambda) = 4 : (3, 1, 1, 1), (2, 2, 1, 1)$,
- $l(\lambda) = 5 : (2, 1, 1, 1, 1)$,
- $l(\lambda) = 6 : (1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Skup neparnih particija je skup koji sadrži particije čiji su svi dijelovi neparni. Za $n = 6$ postoji 4 takve particije, a one su sljedeće:

$$\mathcal{O}_6 = \{(5, 1), (3, 3), (3, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1, 1)\}.$$

Skup striktnih particija sadrži elemente odnosno particije čiji su dijelovi međusobno različiti. Broj striktnih particija broja 6 je 4,

$$\mathcal{D}_6 = \{(6), (5, 1), (4, 2), (3, 2, 1)\}.$$

Primjenom procedure koju smo objasnili tijekom bijektivnog dokaza Eulerovog teorema imamo:

$$\begin{aligned}
(5, 1) &\rightarrow (5, 1), \\
(3, 3) &\rightarrow (6), \\
(3, 1, 1, 1) &\rightarrow (3, 2, 1), \\
(1, 1, 1, 1, 1, 1) &\rightarrow (2, 2, 2) \rightarrow (4, 2).
\end{aligned}$$

Dakle, bijekcija sa $\mathcal{O}_6 \rightarrow \mathcal{D}_6$ je dana s:

$$\begin{aligned}
(5, 1) &\mapsto (5, 1), \\
(3, 3) &\mapsto (6), \\
(3, 1, 1, 1) &\mapsto (3, 2, 1), \\
(1, 1, 1, 1, 1, 1) &\mapsto (4, 2).
\end{aligned}$$

Ukratko ćemo objasniti što su zapravo funkcije izvodnice da bi shvatili ovaj važan kombinatorni koncept. Grubo govoreći, nizu brojeva pridružimo red potencija čiji je zbroj neka funkcija koju zovemo pripadna funkcija izvodnica. Dakle, funkcija izvodnica kao jedan objekt zamjenjuje čitav niz brojeva. Lakše je manipulirati s jednim objektom nego s beskonačno mnogo članova niza.

Primjer 1.8. *Promotrimo skup $S = \{1, 2, 3\}$. Striktne particije koje možemo formirati od elemenata iz skupa S su:*

$$(1), (2), (3), (2, 1), (3, 1), (3, 2), (3, 2, 1).$$

Nadalje, pomnožimo li

$$(1 + x^1)(1 + x^2)(1 + x^3),$$

dobivamo polinom

$$1 + x^1 + x^2 + x^{1+2} + x^3 + x^{1+3} + x^{2+3} + x^{1+2+3}. \tag{2}$$

Eksponenti dobivnog polinoma (2) su upravo sve moguće striktne particije s dijelovima iz skupa S*. Primjetimo da ovdje imamo dvije striktne particije od* 3*, te po jednu striktnu particiju brojeva* $1, 2, 4, 5$ *i* 6*. To zapisujemo na sljedeći način:*

$$\prod_{i=1}^{3}(1 + x^i) = \sum_{n \geq 0} \mid D_n^{(3)} \mid x^n,$$

gdje je $D_n^{(3)}$ *skup striktnih particija od* n *s dijelovima iz skupa* $S = \{1, 2, 3\}$*. U ovom slučaju* n *ide do* 6.

Općenitije, kada imamo da je $S = \{1, \ldots, r\},\ r \in \mathbb{N}$, tada vrijedi:

$$\prod_{i=1}^{r}(1 + x^i) = \sum_{n \geq 0} \mid D_n^{(r)} \mid x^n.$$

U slučaju da želimo generirati particije za proizvoljni n, skup S treba sadržavati sve prirodne brojeve i u tom slučaju imamo:

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1 + x^i) = \sum_{n \geq 0} \mid D_n \mid x^n,$$

gdje je $|D_n|$ broj striktnih particija broja n, te možemo zaključiti da je

$$F(x) = \prod_{i=1}^{\infty}(1 + x^i)$$

funkcija izvodnica za broj striktnih particija od n, $n \in \mathbb{N}_0$. Ovo je bilo za particije kod kojih nije bilo dopušteno ponavljanje dijelova. Promotrimo sada particije kod kojih je dopušteno ponavljanje dijelova. Pretpostavimo da se svaki element skupa $S = \{1, 2, 3\}$ može pojaviti najviše dva puta u particiji. Tada imamo:

$$(1+x^1+x^{1+1})(1+x^2+x^{2+2})(1+x^3+x^{3+3}) = 1+x^1+x^{1+1}+x^2+x^{2+2}+\cdots+x^{1+1+2+2+3+3},$$

gdje eskponenti predstavljaju sve particije čiji su dijelovi iz skupa S koji se ponavljaju najviše dva puta. Ako je $S = \{1, \ldots, r\}$, a pojedini dio se može ponoviti najviše d puta, onda produkt

$$\prod_{i=1}^{r}(1 + x^i + x^{2i} + \cdots + x^{di})$$

daje funkciju izvodnicu za brojeve takvih particija. Konačno, ako je suma u faktorima beskonačna i skup S je skup prirodnih brojeva, tada vrijedi:

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1+x^i+x^{2i}+\dots)=\sum_{n\geq 0}p(n)x^n, \tag{3}$$

gdje je $p(n)=|\mathcal{P}_n|$ broj particija broja n, $n\in\mathbb{N}_0$. Za $|x|<1$ geometrijski red na lijevoj strani jednakosti (3) konvergira, te dobivamo:

$$\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^i}=\sum_{n\geq 0}|\mathcal{P}_n|x^n,$$

što znači da je lijeva strana prethodne jednakosti zapravo funkcija izvodnica za $p(n)$. Odredimo sada funkciju izvodnicu za broj neparnih particija. Neka je S skup neparnih prirodnih brojeva, $S=\{n\in\mathbb{N}: n\equiv 1 \pmod 2\}$, tada je:

$$\prod_{i\ neparan}(1+x^i)=\sum_{n\geq 0}|\mathcal{O}'_n|x^n$$

funkcija izvodnica za $|\mathcal{O}'_n|$, gdje je $|\mathcal{O}'_n|$ broj neparnih particija čiji su dijelovi međusobno različiti. Kada je suma u particijama beskonačna, odnosno kada se elementi skupa S mogu beskonačno mnogo puta ponoviti u particiji, tada vrijedi jednakost:

$$\prod_{i\ neparan}(1+x^i+x^{2i}+\dots)=\sum_{n\geq 0}|\mathcal{O}_n|x^n. \tag{4}$$

Za $|x|<1$ lijeva strana jednakosti (4) konvergira i dobivamo da je

$$G(x)=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2i-1}}$$

funkcija izvodnica za broj neparnih particija prirodnog broja n. Pokažimo sada da su funkcije izvodnice za broj striktnih i za broj neparnih particija jednake,

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{\infty}(1+x^i) &= (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots\\ &= \frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)\dots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\dots}\\ &= \frac{1}{(1-x)(1-x^3)\dots}\\ &= \prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2i-1}}.\end{aligned}$$

Ovime smo upravo dokazali Eulerov teorem i pokazali da je broj neparnih particija od n jednak broju striktnih particija od n.

1.3. Brojevna svojstva particijske funkcije

Već smo definirali particijsku funkciju kao funkciju $p : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$, gdje je $p(n) = |\mathcal{P}_n|$, tj. $p(n)$ je broj particija od $n \in \mathbb{N}_0$. Promotrimo sljedeću tablicu.

n	$p(n)$	n	$p(n)$	n	$p(n)$	n	$p(n)$	n	$p(n)$
0	1	5	7	10	42	15	176	20	627
1	1	6	11	11	56	16	231	21	792
2	2	7	15	12	77	17	297	22	1002
3	3	8	22	13	101	18	385	23	1255
4	5	9	30	14	135	19	490	24	1575

Tablica 1: Vrijednosti funkcije $p(n)$.

Iz same definicije particije jasno je da će funkcija $p(n)$ biti rastuća funkcija. Promatrajući prethodnu tablicu vidimo da se radi o funkciji koja uistinu brzo raste. Za $n = 200$ broj particija iznosi 3972999029388. Znameniti indijski matematičar S. Rmanaujan 1918. godine zajedno s G. H. Hardyem pronašao je asimptosku formulu za $p(n)$:

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{2n/3}}. \tag{5}$$

Aproksimacija (5) je vjerojatno najpoznatiji rezultat u cijeloj teoriji particija. Što je n veći aproksimacija je bolja. Promotrimo opet tablicu 1 i obratimo pažnju na svaku petu vrijednost od $p(n)$. Zapažamo da je svaka peta vrijednost od $p(n)$ djeljiva s 5, odnosno možemo naslutiti da vrijedi sljedeća kongruencija:

$$p(5n + 4) \equiv 0 \pmod 5, \tag{6}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}_0$. Kongruenciju (6) je iskazao i dokazao S. Ramanujan. Ubrzo nakon dokaza kongruencije (6) Ramanujan je pokazao da vrijedi slično za proste brojeve 7 i 11:

$$p(7n + 5) \equiv 0 \pmod 7$$

i

$$p(11n + 6) \equiv 0 \pmod{11}.$$

Možda bi nas sumnja navela da bi sljedeća kongruncija za prost broj 13 izgledala kao:

$$p(13n + 7) \equiv 0 \pmod{13}. \tag{7}$$

Međutim tvdnja (7) ne vrijedi. Zanimljivo je da sljedeća takva kongruencija je otkrivena 50 godina poslije nego je Ramanujan otkrio ove tri i glasi:

$$p(17303n + 237) = p(11^3 \cdot 13n + 237) \equiv 0 \pmod{13}.$$

Prethodna kongruencija nije nimalo elegantna kao one 3 što je otkrio Ramanujan. Prirodno je da se zapitamo, postoji li takva kongruencija za svaki prost broj? Znamo da za proste brojeve 17 i 19 postoji i glasi:

$$p(206839n + 2623) = p(12167 \cdot 17n + 2623) \equiv 0 \pmod{17},$$
$$p(1977147619n + 815655) = p(104060401 \cdot 19n + 815655) \equiv 0 \pmod{19}.$$

Kao što smo rekli mnoga zanimljiva svojstva vrijede za $p(n)$. Izdvojit ćemo još jedan teorem od najproduktivnijeg matematičara u povijesti - Euler. Pokazali smo da je broj neparnih particija jednak broju striktnih particija. Ono što sada slijedi je teorem koji govori o odnosu između broja striktnih particija neparne i parne duljine. Teorem je poznat pod nazivom Eulerov pentagonalni teorem. Zapravo, Legendre je bio onaj koji je dao interpretaciju ovog teorema u sklopu particija. Broj striktnih particija označavmo s $p^{(1)}(n)$. Prije samog iskaza napomena.

Napomena 1.1. *Broj particija broja n uz nekakav uvjet označavat ćemo s $p(n|uvjet)$, gdje uvjet može biti primjerice da su svi dijelovi particije različiti, neparni i sl.*

Teorem 1.2 (Eulerov pentagonalni teorem)**.** *Za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi sljedeće:*

$$p^{(1)}(n|\text{ particije parne duljine}) - p^{(1)}(n|\text{ particije neparne duljine}) = e(n),$$

gdje je $e(n) = (-1)^j$, ako je $n = j(3j \pm 1)/2$ za prirodan broj j i 0 inače.

Dokaz ovog teorema se može pronaći u [4]. Ono što je posebno interesantno jest njegova posljedica. Ona će dati još jednu rekurizvnu formulu za $p(n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Prije same posljedice primjer.

Primjer 1.9. *Za $n = 7$ imamo 15 particija koje smo ispisali u primjeru 1.3. Od tih 15 particija imamo 3 koje su striktne i njihova duljina je paran broj, to su:*

$$(6, 1), (5, 2), (4, 3).$$

Nadalje, imamo 2 striktne particije broja 7 neparne duljine, to su:

$$(7), (4, 2, 1).$$

Koristeći teorem 1.2, odnosno Eulerov pentagonalni teorem imamo:

$$\begin{aligned} |\{(6, 1), (5, 2), (4, 3)\}| - |\{(7), (4, 2, 1)\}| &= 3 - 2 \\ &= (-1)^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Gdje za $j = 2$ broj 7 možemo zapisati kao:

$$7 = 2 \cdot (3 \cdot 2 + 1)/2$$

i upravo zbog toga se broj -1 pojavljuje na drugu potenciju. Ukoliko je $n = 8$, ne postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da broj 8 možemo zapisati kao $j(3j \pm 1)/2$. Sada koristeći Eulerov pentagonalni teorem imamo sljedeće:

$$\begin{aligned} |\{(7, 1), (6, 2), (5, 3)\}| - |\{(8), (5, 2, 1), (4, 3, 1)\}| &= 3 - 3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Definirajmo funkciju izvodnicu s dvije varijable. Promotrimo sljedeći produkt polinoma:

$$\begin{aligned}(1+zq^{n_1})(1+zq^{n_2})(1+zq^{n_3}) &= 1+zq^{n_1}+zq^{n_2}+zq^{n_3}+z^2q^{n_1+n_2}+z^2q^{n_1+n_3}\\ &+ z^2q^{n_2+n_3}+z^3q^{n_1+n_2+n_3}.\end{aligned}$$

Uočimo da na desnoj strani prethodne jednakosti potencije od z govore kolika je duljina striktne particije čiji su dijelovi iz skupa $S=\{n_1,n_2,n_3\}$, a potencije od q o kojoj particiji se radi. Tada je funkcija izvodnica za broj striktnih particija s m dijelova iz skupa $S=\mathbb{N}$ dana na desnoj strani sljedeće jednakosti:

$$\sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0} p_m^{(1)}(n)z^m q^n = \prod_{n=1}^{\infty}(1+zq^n). \tag{8}$$

U jednakosti (8) postavimo da je $z=-1$. Tada lijeva strana te jednakosti (8) daje upravo lijevu stranu pentagonalnog teorema. Zbog jednostavnijeg zapisa broj striktnih particija parne duljine broja n označavat ćemo s $|\mathcal{D}_n'|$ i broj striktnih particija od n neparne duljine s $|\mathcal{D}_n''|$. Dakle, dalje imamo:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(|\mathcal{D}_n'|-|\mathcal{D}_n''|)q^n &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j q^{j(3j-1)/2}+\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j q^{j(3j+1)/2}\\ &= 1+\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j q^{j(3j-1)/2}(1+q^j). \end{aligned}\tag{9}$$

Prethodni identitet je važan za algoritam broja svih particija od $n\in\mathbb{N}_0$. Naime, pokazali smo da je funkcija izvodnica za broj particija od n dana s:

$$\sum_{n=0}^{\infty}p(n)q^n=\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^m}.$$

Prethodnu jednakost možemo zapisati na sljedeći način:

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)\sum_{n=0}^{\infty}p(n)q^n=1. \tag{10}$$

Ukoliko u jednakosti (10) iskoristimo (9) dobivamo sljedeće:

$$\Big(1+\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j q^{j(3j-1)/2}(1+q^j)\Big)\sum_{n=0}^{\infty}p(n)q^n=1. \tag{11}$$

Izjednačavanjem koeficijenata od q^n u jednakosti (11) dobivamo sljedeću rekurziju za $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned}
p(0) &= p(1) = 1, \\
p(2) &- p(1) - p(0)5 = 0, \\
p(3) &- p(2) - p(1)5 = 0, \\
&\vdots \\
p(n) &- p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) + p(n-7) - \cdots + (-1)^j p\Big(n - j \cdot \frac{3j-1}{2}\Big) \\
&+ (-1)^j p\Big(n - j \cdot \frac{3j+1}{2}\Big) + \cdots = 0. \qquad (12)
\end{aligned}$$

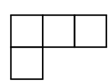
Primjer 1.10. *Pomoću prethodne rekurzije za p(n), $n \in \mathbb{N}_0$ izračunajmo $p(8)$. Iz (12) imamo sljedeće:*

$$\begin{aligned}
p(8) &= p(7) + p(6) - p(3) - p(1) \\
&= 15 + 11 - 3 - 1 \\
&= 22.
\end{aligned}$$

U radu ćemo u primjeru 3.2 pokazati da se broj 8 *može particionirati na* 22 *načina.*

1.4. Enumeracija standardnih Youngovih tablica

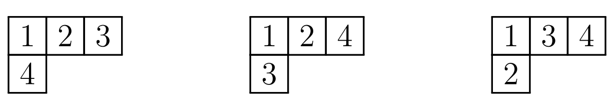
Na samom početku smo definirali Youngove dijagrame. Osim kod reprezentacije particija koriste se i kod teorije reprezentacije, simetričnih funkcija itd. Primjerce, particiju $(3,1)$ broja 4 grafički prikazujemo Youngovim dijagramom, slika 6.



Slika 6: Youngov dijagram particije $(3,1)$.

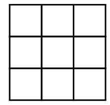
Definicija 1.4. *Youngova tablica je dijagram u kojem svakoj čeliji pridružujemo broj. Standardna Youngova tablica oblika λ, $\lambda \vdash n$ je tablica u kojoj se svaki broj $1, \ldots, n$ pojavljuje jednom.*

Sljedeća slika prikazuje standardne Youngove tablice particije $(3,1)$. Redni brojevi $1,2,3,4$ na slici prikazuju redoslijed crtanja kvadrata Youngovog dijagrama i možemo zaključiti da postoje 3 načina na koji možemo nacrtat Youngov dijagram particije $(3,1)$.



Slika 7: Standardna Youngova tablica particije $(3,1)$.

Ukoliko imamo particiju $(3,3,3)$, Youngov dijagram te particije vidimo na slici 8. Postoji čak 42 načina kako možemo nacrtati Youngov dijagram particije $(3,3,3)$.



Slika 8: Youngov dijagram particije $(3, 3, 3)$.

Zanimljivo je zapravo da postoji formula kojom računamo broj načina na koliko možemo nacrtati određenu particiju broja n. Ta formula je poznata pod nazivom formula kuke i glasi:

$$f^{\lambda} = \frac{n!}{\prod_{i,j\in\lambda} h_{i,j}}, \tag{13}$$

gdje je $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \vdash n$. U nazivniku formule (13) nalaze se brojevi kuke, odnosno njihov produkt. Brojeve kuke particije $(3, 1)$ prikazali smo na slici 9 pomoću Youngovih tablica.

4	2	1
1		

Slika 9: Youngova tablica koja sadži brojeve kuke particije $(3, 1)$.

Prirodno je da se zapitamo kako se oni zapravo dobiju. Pri promatranju određenog kvadrata Youngovog dijagrama broj kuke dobijemo tako da gledamo koliko kvadrata ima desno od njega, ispod njega i ubrajajući njega samog. Na slici 9 u prvom kvadratu imamo broj kuke 4, zato što uz taj kvadrat koji promatramo imamo još 3 kvadrata koji se nalazi desno i ispod njega i to je ukupno 4. Na analogan način računamo i ostale brojeve kuke. Pokazali smo da postoji 3 načina kako nacrtati Youngove dijagrame particije $(3, 1)$. Uvjerimo se u to i formulom:

$$f^{(3,1)} = \frac{4!}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1} = 3.$$

Primjer 1.11. *Za particiju* $(5, 4, 2, 2, 1)$ *težine* 14 *izračunajmo na koliko načina se mogu nacrtati Youngovi dijagrami te particije. Prvo ćemo nacrtati Youngovu tablicu od* $(5, 4, 2, 2, 1)$ *zajedno s brojevima kuke, slika 10.*

9	7	4	3	1
7	5	2	1	
4	2			
3	1			
1				

Slika 10: Youngova tablica i brojevi kuke particije $(5, 4, 2, 2, 1)$.

Koristeći formulu kuke (13) dobije se da je broj načina na koje možemo nacrtati Youngove dijagrame particije $(5, 4, 2, 2, 1)$ *jednak:*

$$\begin{aligned} f^{(5,4,2,2,1)} &= \frac{14!}{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1} \\ &= 68640. \end{aligned}$$

2. Rogers-Ramanujanovi identiteti

2.1. Iskaz i dokaz Rogers Ramanujanovih identiteta

U ovom dijelu iskazat ćemo i provesti dokaz znamenitih Rogers-Ramanujanovih identiteta. Ovi identiteti su jedna od centralnih tema u teoriji particija. Mnoštvo radova je inspirano njima, neki od tih radova su [14], [20], [21]. Za sami dokaz potrebno je definirati pojam q-binomnih koeficijenata i iskazati Jacobijev identitet trostrukog produkta.

Teorem 2.1 (Rogers-Ramanujanovi identiteti)**.** *Za $|q| < 1$ vrijedi sljedeće:*

$$1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{m^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n-4})(1-q^{5n-1})}, \tag{14}$$

$$1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{m^2+m}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n-2})(1-q^{5n-3})}. \tag{15}$$

2.1..1 q-binomni koeficijenti i Jacobijev identitet

U ovom dijelu radimo kratki sažetak q-binomnih koeficijenata. q-binomne koeficijente označavamo s $\binom{N}{m}_q$ i definiramo na sljedeći način:

$$\binom{N}{m}_q = \frac{(1-q^N)(1-q^{N-1})(1-q^{N-2})\cdots(1-q^{N-m+1})}{(1-q^m)(1-q^{m-1})(1-q^{m-2})\cdots(1-q)}.$$

Također, te koeficijente interpretiramo pomoću particija i njihova interpretacija glasi:

$$\binom{N+m}{m}_q = \sum_{n \geq 0} p(n|\ duljina\ particije \leq m\ i\ dijelovi\ particije\ \leq N) q^n.$$

$\binom{N+m}{m}_q$ je broj particija čija je duljina manja ili jednaka od m i dijelovi te particije su manji ili jednaki od N. Promotrimo sljedeći primjer.

Primjer 2.1. *Za $N = 2$ i $m = 3$, zanimaju nas particije čija je duljina manja ili jednaka od 3, a dijelovi su manji ili jednaki od 2. Particije koje zadovoljavaju to svojstvo su sljedeće*

$$\begin{aligned}
n &= 0: \quad (0),\\
n &= 1: \quad (1),\\
n &= 2: \quad (2), (1,1),\\
n &= 3: \quad (2,1), (1,1,1),\\
n &= 4: \quad (2,2), (2,1,1),\\
n &= 5: \quad (2,2,1),\\
n &= 6: \quad (2,2,2).
\end{aligned}$$

Način kako to možemo zapisati je sljedeći,

$$\binom{2+3}{3}_q = q^0 + q^1 + 2q^2 + 2q^3 + 2q^4 + q^5 + q^6. \tag{16}$$

Interpretacija koeficijenata polinoma je koliko zapravo imamo particija sa željenim svojstvom, a potencije od q govore o particiji kojeg broja se radi.

Koristeći samu definiciju q-binomnih koeficijenata lako se dobije jednakost (16) u primjeru 2.1. Određena svojstva koja vrijede za q-binomne koeficijente navedena su u sljedećoj lemi.

Lema 2.1. *Vrijedi sljedeće:*

i) $\binom{N+m}{m}_q = \binom{N+m}{N}_q$,

ii) $\binom{N+m}{m}_q = \binom{N+m-1}{m-1}_q + q^m \binom{N+m-1}{N-1}_q$,

iii) $\binom{N+m}{m}_q = q^N \binom{N+m-1}{m-1}_q + \binom{N+m-1}{N-1}_q$,

iv) $\sum_{j=0}^{n} q^{j^2} \binom{n}{j}_q^2 = \binom{2n}{n}_q$.

Dokazi ovih tvrdnji se mogu pronaći u [4]. Ono što ćemo još pokazati, a da se tiče q-binomnih koeficijenata su limesi (17) i (18) koji će koristiti za sami dokaz Rogers-Ramanujanovih identiteta,

$$\begin{aligned}
\lim_{N->\infty} \binom{N}{m}_q &= \lim_{N->\infty} \frac{\prod_{j=1}^{N}(1-q^j)}{\prod_{j=1}^{m}(1-q^j)\prod_{j=1}^{N-m}(1-q^j)} \\
&= \frac{\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)}{\prod_{j=1}^{m}(1-q^j)\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)} \\
&= \frac{1}{\prod_{j=1}^{m}(1-q^j)}. \qquad (17)
\end{aligned}$$

Za fiskne m_1 i m_2, te $R > S$ imamo:

$$\begin{aligned}
\lim_{N->\infty} \binom{RN+m_1}{SN+m_2}_q &= \lim_{N->\infty} \frac{\prod_{j=1}^{RN+m_1}(1-q^j)}{\prod_{j=1}^{SN+m_2}(1-q^j)\prod_{j=1}^{(R-S)N+m_1-m_2}(1-q^j)} \\
&= \frac{\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)}{\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)} \\
&= \frac{1}{\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)}, \qquad (18)
\end{aligned}$$

Ono što je još potrebno da bismo dokazali (14) i (15) je Jacobijev identitet. Iskazat ćemo ga sljedećim teoremom i njegov dokaz se može pronaći u [4]. Nakon iskaza spremni smo za dokaz Rogers-Ramanujanovih identiteta.

Teorem 2.2 (Jacobijev identitet trostrukog produkta)**.** *Za* $|q| < 1$ *i* $z \neq 0$ *vrijedi:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{n(n+1)/2} \quad = \quad \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1+zq^n)(1+z^{-1}q^{n-1}). \tag{19}$$

2.1..2 Analitički dokaz

Konačno, došli smo do samog dokaza identiteta. Definirajmo sljedeće polinome:

$$s_n(q) = \sum_{j=0}^{n} q^{j^2}\binom{n}{j}_q, \tag{20}$$

$$t_n(q) = \sum_{j=0}^{n} q^{j^2+j}\binom{n}{j}_q, \tag{21}$$

$$\sigma_n(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(5j+1)}{2}}\binom{2n}{n+2j}_q, \tag{22}$$

$$\sigma_n'(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(5j+1)}{2}}\binom{2n+1}{n+1+2j}_q, \tag{23}$$

$$\tau_n(q) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{\frac{j(5j-3)}{2}}\binom{2n+1}{n+2j}_q. \tag{24}$$

Za prethodne polinome metodom matematičke indukcije se pokaže da vrijede sljedeće jednakosti:

$$s_n(q) = \sigma_n(q) = \sigma_n'(q)$$

i

$$t_n(q) = \tau_n(q).$$

Zbog limesa (17) kod q-binomnih koeficijenata očito je da vrijedi sljedeće:

$$\lim_{n\to\infty} s_n(q) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q^{j^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)},$$

$$\lim_{n\to\infty} t_n(q) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q^{j^2+j}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)}.$$

Nadalje, ono što još preostaje iskoristiti je Jacobijev identitet trostrukog produkta. Znamo da vrijedi:

$$1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q^{j^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \lim_{n\to\infty} s_n(q) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(q).$$

Iskoristimo Jacobijev identitet tako da umjesto q stavimo q^5 i z zamijenimo s $-q^{-2}$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \, q^{-2j} q^{\frac{5j(j+1)}{2}} &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{j(5j+1)/2} \\
&= \prod_{m=1}^{\infty} (1-q^{5m})(1-q^{5m-2})(1-q^{5m-3}).
\end{aligned}$$

Koristeći limes (18) dobivamo sljedeći izraz:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sigma_n(q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{j(5j+1)/2} \frac{1}{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)} \\
&= \frac{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{5m})(1-q^{5m-2})(1-q^{5m-3})}{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)} \\
&= \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5m-4})(1-q^{5m-1})}.
\end{aligned}$$

Na analogan način dolazimo i do drugog Rogers-Ramanujanovog identiteta. Prvo krećemo od onog što znamo da vrijedi:

$$1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q^{j^2+j}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \lim_{n\to\infty} t_n(q) = \lim_{n\to\infty} \tau_n(q)$$

Opet koristeći Jacobijev identitet, gdje umjesto q stavimo q^5, a z zamijenimo s $-q^{-1}$ i time dobivamo:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \, q^{-j} q^{\frac{5j(j+1)}{2}} &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{j(5j-3)/2} \\
&= \prod_{m=1}^{\infty} (1-q^{5m})(1-q^{5m-1})(1-q^{5m-4}).
\end{aligned}$$

Iskoristimo limes (18) i dobivamo sljedeće:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \tau_n(q) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j q^{j(5j-3)/2} \frac{1}{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)} \\
&= \frac{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{5m})(1-q^{5m-1})(1-q^{5m-4})}{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)} \\
&= \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5m-3})(1-q^{5m-2})}.
\end{aligned}$$

2.2. Kombinatorna interpertacija Rogers-Ramanujanovih identiteta

Rogers-Ramanujanove identitete možemo interpretirati pomoću particija. U teoriji particija mnogi identiteti, a samim time i Rogers-Ramanujanovi zadovoljavaju sljedeće:

$$p(n|\ uvjet) = p(n, N),$$

gdje je $p(n, N)$ broj particija broja n čiji su dijelovi elementi skupa N, a $p(n|\ uvjet)$ broj particija od n uz nekakav uvjet. Prvi Rogers-Ramanujanov identitet je povezan s brojem tako zvanim 2-različitim particijama. Kakve su to particije objasnit ćemo definicijom i primjerom.

Definicija 2.1. *Za particiju* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ *kažemo da je d-različita particija,* $d \geq 1$*, ukoliko je*

$$\lambda_i - \lambda_{i+1} \geq d, \quad \forall\ i = 1, \ldots, l-1.$$

Dakle, 2-različite particije su one particije gdje je apsolutna vrijednost razlike između dva dijela particije veća ili jednaka od 2. Skup d-različitih particija broja n označavamo s $D_d(n)$, odnosno za $d = 2$ s $D_2(n)$. Broj elemenata skupa $D_d(n)$ označimo s $p^{(d)}(n)$. U sljedećoj tablici su ispisane sve 2-različite particije za $n = 1, \ldots, 11$.

n	broj 2-različitih particija	2-različite particije
1	1	(1)
2	1	(2)
3	1	(3)
4	2	(4), (3,1)
5	2	(5), (4,1)
6	3	(6), (5,1), (4,2)
7	3	(7), (6,1), (5,2)
8	4	(8), (7,1), (6,2), (5,3)
9	5	(9), (8,1), (7,2), (6,3), (5,3,1)
10	6	(10), (9,1), (8,2), (7,3), (6,4), (6,3,1)
11	7	(11), (10,1), (9,2), (8,3), (7,4), (7,3,1), (6,4,1)

Tablica 2: 2-različite particije za $n = 1, \ldots, 11$.

Promatrajući prethodnu tablicu možemo probat na jedinstveni način konstruirati skup S takav da je:

$$p^{(2)}(n) = p(n, S),$$

gdje je $p(n, S)$ broj particija broja n čiji su dijelovi elementi skupa S. Takav skup je moguće konstruirati. Počinjemo s tim da skup S postavimo kao prazan skup, tj. $S = \emptyset$.

1. Imamo jednu particiju broja 1 koja je ujedno i 2-različita particija, stoga 1 dodajemo u S. Sada je $S = \{1\}$.

2. Imamo jednu 2-različitu particiju od 2. Broj 2 možemo zapisati kao particiju $(1, 1)$, gdje su dijelovi te particije elementi skupa S. Znači, 2 ne dodajemo u S.

3. Imamo jednu 2-različitu particiju od 3. Broj 3 možemo zapisati kao particiju $(1, 1, 1)$, gdje su dijelovi te particije elementi skupa S. Znači, 3 ne dodajemo u S.

4. Imamo dvije 2-različite particije od 4. Samo jednu particiju broja 4 možemo zapisati pomoću elemenata skupa S. Što znači, 4 dodajemo u S. Sada je $S = \{1, 4\}$.

5. Imamo dvije 2-različita particije od 5. 5 ne dodajemo u S jer se broj 5 može zapisati kao $(1, 1, 1, 1, 1)$ i $(4, 1)$, a dijelovi ovih particija su elementi skupa S.

6. Imamo tri 2-različite particije od 6, a samo dvije možemo zapisati pomoću elemenata skupa S, te zbog toga 6 dodajemo u S. Sada je $S = \{1, 4, 6\}$.

7. Imamo tri 2-različite particije od 7. Također, tri particije broja 7 možemo zapisati pomoću elemenata skupa S, $(6, 1)$, $(4, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Broj 7 ne dodajemo u S.

Promatrajući dalje na analogan način, dobivamo da je skup $S = \{1, 4, 6, 9, 11, 14, 16, 19, \dots\}$. Ukoliko malo bolje obratimo pažnju na elemente skupa S vidimo da su ti elementi kongruentni 1 ili 4 modulo 5, tj.

$$m \equiv \pm 1 \pmod 5,$$

gdje je m element skupa S. Pogledajmo prvi Rogers-Ramanujanov identitet (14), lijeva strana tog identiteta je funkcija izvodnica za 2-različite particije, a desna strana funkcija izvodnica za particije čiji su dijelovi kongruentni 1 ili 4 modulo 5. Stoga, 2-različite particije su poznate i pod nazivom particije Rogers-Ramanujanovog tipa. Kombinatorna interpretacija prvog identiteta je dana sljedećim teoremom.

Teorem 2.3. *Neka je S podskup skupa $\mathbb{N}_0$ takav da su svi njegovi elementi kongruentni ± 1 modulo 5, tada je*

$$|D_2(n)| = p(n, S).$$

Primjer 2.2. *Neka je $n = 7$, pokažimo da je $p^{(2)}(n) = p(7, S)$. Skup S je podskup prirodnih brojeva čiji elementi su kongruentni 1 ili 4 modulo 5. Particije broja 7 su:*

- $l(\lambda) = 1 : (7)$,
- $l(\lambda) = 2 : (6, 1),\ (5, 2),\ (4, 3)$,
- $l(\lambda) = 3 : (5, 1, 1),\ (4, 2, 1),\ (3, 3, 1),\ (3, 2, 2)$,
- $l(\lambda) = 4 : (4, 1, 1, 1),\ (3, 2, 1, 1),\ (2, 2, 2, 1)$,

- $l(\lambda) = 5 : (3, 1, 1, 1, 1)$, $(2, 2, 1, 1, 1)$,
- $l(\lambda) = 6 : (2, 1, 1, 1, 1, 1)$,
- $l(\lambda) = 7 : (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Skup $D_2(7)$ dan je sljedećim elementima,

$$D_2(7) = \{(7), (6, 1), (5, 2)\}.$$

Apsolutna vrijednost razlike dijelova ovih particija je veća ili jednaka od 2*, zato njih i nazivamo* 2*-različite particije,* $|D_2(7)| = 3$. *Nadalje,* $p(7, S) = |\{(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), (4, 1, 1, 1), (6, 1)\}| = 3$. *Time smo pokazali da vrijedi:*

$$|D_2(7)| = p(7, S) = 3.$$

Nakon prvog Rogers-Ramanujanovog identiteta na sličan način interpretiramo i drugi identitet. Drugi identitet govori o broju 2-različitih particija s uvjetom da je najmanji dio veći ili jednak od 2. Skup takvih particija označavamo s $D_2'(n)$. Očito je da vrijedi:

$$D_2'(n) \subseteq D_2(n).$$

Primjerice, particija $(8, 5, 2) \vdash 15$ je 2-različita particija čiji je najmanji dio veći ili jednak od 2. U tablici 3 su ispisane 2-različite particije s uvjetom na najmanji dio za $n = 1, \ldots, 11$.

Napomena 2.1. *U radu izraz za* 2*-različite particije s uvjetom na najmanji dio se odnosi na* 2*-različite particije čiji je najmanji dio veći ili jednak od* 2*.*

n	$\lvert D_2'(n) \rvert$	2-različite particije s uvjetom na najmanji dio
1	0	-
2	1	(2)
3	1	(3)
4	1	(4)
5	1	(5)
6	2	(6), (4,2)
7	2	(7), (5,2)
8	3	(8), (6,2), (5,3)
9	3	(9), (7,2), (6,3)
10	4	(10), (8,2), (7,3), (6,4)
11	4	(11), (9,2), (8,3), (7,4)

Tablica 3: 2-različite particije s uvjetom da je najmanji dio veći ili jednak od 2 za $n = 1, \ldots, 11$.

Neka je $T = \emptyset$.

1. Broj 1 nema 2-različitih particija s uvjetom na najmanji dio. Stoga, 1 nema potrebe dodati u skup T.
2. Broj 2 ima jednu 2-različitu particiju s uvjetom na najmanji dio, te 2 dodajemo u skup T. $T = \{2\}$.
3. Broj 3 ima jednu 2-različitu particiju s uvjetom na najmanji dio, međutim ona se ne može dobiti od elemenata skupa T. Znači i broj 3 dodajemo u T. Sada imamo da je $T = \{2, 3\}$.
4. Broj 4 i 5 ne dodajemo u skup T jer oni imaju po jednu 2-različitu particiju s uvjetom na najmanji dio koju možemo dobiti od elemenata skupa T. Particija od 4 čiji su elementi iz skupa T je $(2, 2)$, a od 5 je $(3, 2)$.
5. Broj 6 ne dodajemo u skup T. On ima 2 2-različite particije s uvjetom na najmanji dio i obje možemo zapisati pomoću elemenata skupa T.
6. 7 dodajemo u skup T, on ima dvije 2-različite particije s uvjetom na najmanji dio od kojih se samo jedna može zapisati pomoću elemenata skupa T. Sada je $T = \{2, 3, 7\}$.

Nastavljajući dalje na analogan način dobivamo da je $T = \{2, 3, 7, 8, 12, 13, 17, 18, \dots\}$. Elementi skupa T su kongruentni 2 ili 3 modulo 5. Ovdje imamo poveznicu između 2-različitih particija s uvjetom na najmanji dio i particija čiji su dijelovi kongruentni ± 2 modulo 5. Lijeva strana drugog Rogers-Ramanujanovog identiteta (15) je funkcija izvodnica za 2-različite particije s uvjetom da je najmanji dio veći ili jednak od 2, a desna strana funkcija izvodnica za particije čiji su elementi kongruentni 2 ili 3 modulo 5. Zato i 2-različite particije s uvjetom da je najmanji dio veći ili jednak od 2 nazivamo particije Rogers-Ramanujanovog tipa. Precizna kombinatorna interpretacija drugog Rogers-Ramanujanovog identiteta dana je sljedećim teoremom.

Teorem 2.4. *Neka je T podskup skupa $\mathbb{N}_0$ takav da su svi njegovi elementi kongruentni ± 2 modulo 5, tada je*

$$|D_2'(n)| = p(n, T).$$

Primjer 2.3. *U prethodnom primjeru 2.2 je pokazano da skup 2-različitih particija za $n = 7$ sadrži sljedeće elemente:*

$$D_2(7) = \{(7), (6, 1), (5, 2)\}.$$

Skup 2-različitih particija s uvjetom na najmanji dio je podskup skupa $D_2(7)$ i dijelovi tih particija su veći ili jednaki od 2,

$$D_2'(7) = \{(7), (5, 2)\}.$$

Nadalje, imamo skup T koji je podskup skupa prirodnih brojeva i elementi tog skupa su kongruentni 2 ili 3 modulo 5. Tada je:

$$p(7, T) = |\{(7), (3, 2, 2)\}| = 2.$$

Iz čega se jasno vidi da je:

$$|D_2'(7)| = p(7, T) = 2.$$

2.3. Alderova slutnja i Schurov teorem

Prisjetimo se Eulerovog teorema čiji iskaz kaže da je broj neparnih particija od $n \in \mathbb{N}_0$ jednak broju striktnih particija od n. Primjetimo da Eulerov teorem možemo zapisati na sljedeći način,

$$p(n, M) = |D_1(n)|,$$

gdje je $M = \{m \in \mathbb{N} : m \equiv \pm 1 \pmod 4\}$, a $D_1(n)$ je skup koji sadrži 1-različite particije broja n. Uočimo da su 1-različite particije broja n zapravo striktne partcije od n. Pokazali smo da i prvi Rogers-Ramanujanov identitet govori da je broj partcija broja $n \in \mathbb{N}_0$, čiji su dijelovi kongruentni ± 1 modulo 5 jednak broju 2-različitih particija broja n,

$$p(n, S) = |D_2(n)|,$$

gdje je $S = \{m \in \mathbb{N} : m \equiv \pm 1 \pmod 5\}$. Na osnovu Eulerovog teorema i prvog Rogers-Ramanujanovog identiteta prirodno je da se zapitamo da li vrijedi sljedeća jednakost:

$$p(n, L) = |D_d(n)|, \tag{25}$$

gdje je $L = \{m \in \mathbb{N} : m \equiv \pm 1 \pmod{d+3}\}$, a $D_d(n)$ skup koji sadrži sve d-različite particije od n, $d \in \mathbb{N}$. Identitet (25) je poznat pod nazivom Alderova slutnja. Međutim slutnja (25) ne vrijedi. Za $d = 3$ Alderova slutnja tvrdi da je:

$$p(n, L) = |D_3(n)|,$$

gdje je $L = \{m \in \mathbb{N} : m \equiv \pm 1 \pmod 6\} = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots\}$. U sljedećoj tablici prikazujemo 3-različite particije i particije generirane elementima skupa L, za $n = 1, 2, \dots, 9$. Na osnovu te tablice opovrgnut ćemo Alderovu slutnju. Prije svega napomena u kojoj opisujemo način na koji ćemo označavati particije u tablici.

Napomena 2.2. *Particiju* $(7, 7, 5, 4, 4, 4, 1, 1)$ *težine* 33 *možemo zapisati kao* $7^2 5^1 4^3 1^2$, *potencija govori koliko se puta ponavlja broj u "bazi".*

n	Particije generirane elementima iz L	3-različite particije
1	1^1	1^1
2	1^2	2^1
3	1^3	3^1
4	1^4	4^1
5	1^5, 5^1	5^1, $4^1 1^1$
6	1^6, $5^1 1^1$	6^1, $5^1 1^1$
7	1^7, $5^1 1^2$, 7^1	7^1, $6^1 1^1$, $5^1 2^1$
8	1^8, $5^1 1^3$, $7^1 1^1$	8^1, $7^1 1^1$, $6^1 2^1$
9	1^9, $5^1 1^4$, $7^1 1^2$	9^1, $8^1 1^1$, $7^1 2^1$, $6^1 3^1$

Tablica 4: Particije generirane elementima iz skupa L i 3-različite particije za $n = 1, 2, \dots, 9$.

Uočimo da za $n = 9$ imamo 4 3-različite particije, a samo 3 particije težine 9 možemo generirati iz skupa $L = \{1, 2, 7, 11, 13, 17, 19, \dots\}$. Upravo zbog toga zaključujemo da Alderova slutnja za $d = 3$ ne vrijedi. Američki matematičar Lehmer je pokazao da ne postoji skup L takav da vrijedi jednakost (25) za svaki $d \geq 3$. Nakon toga, Alder je svoju slutnju preoblikovao na sljedeći način:

$$p(n, L) \leq |D_d(n)|, \tag{26}$$

gdje je $L = \{m \in \mathbb{N} : m \equiv \pm 1 \pmod{d+3}\}$, za svaki $n, d \geq 0$. I dan danas nejednakost (26) nije dokazana. U trajanju drugog svjetskog rata njemački matematičar Schur je bio odvojen od ostalog matematičkog društva. On je u to vrijeme iskazao i dokazao Rogers-Ramanujanove identitete. Ne samo to, također je modificirao Alderovu slutnju za $d = 3$. Ta modifikacija je dana sljedećim teoremom.

Teorem 2.5 (Schurov teorem)**.** *Za svaki $n \in \mathbb{N}_0$, broj particija od n čiji su dijelovi kongruentni ± 1 modulo 6 jednak je broju 3-različitih particija broja n, gdje među dijelovima nema uzastopnih višekratnika broja 3.*

Prikazat ćemo bijektivni dokaz Schurovog teorema ali prije dokaza napomena i primjer. U napomeni ćemo objasniti na što mislimo kada kažemo 3-različitia particija od n, gdje među dijelovima nema uzastopnih višekratnika broja 3.

Napomena 2.3. *Ukoliko promotrimo particiju $(9, 6, 1)$, ova particija je 3-različita particija jer je aposlutna vrijednost razlike između dijelova veća ili jednaka od 3. Međutim, particija $(9, 6, 1)$ sadrži uzastopne višekratnike broja 3, to su 9 i 6 zato ovakvu particiju nebi brojali kod Schurovog teorema. Primjerice, 3-različita particija $(12, 7, 3)$ također sadrži dva višekratnika broja 3, to su 12 i 3 ali nisu uzastopni višekratnici jer se između njih nalazi 7 i ovu particiju bi brojali kod Scurovog teorema.*

Primjer 2.4. *Za $n = 8$ pokažimo da vrijedi Schurov teorem. Particije broja 8 su:*

- $l(\lambda) = 1 : (8)$,
- $l(\lambda) = 2 : (7, 1), (6, 2), (5, 3), (4, 4)$
- $l(\lambda) = 3 : (6, 1, 1), (5, 2, 1), (4, 3, 1), (4, 2, 2), (3, 3, 2)$,
- $l(\lambda) = 4 : (5, 1, 1, 1), (4, 2, 1, 1), (3, 2, 2, 1), (2, 2, 2, 2), (3, 3, 1, 1)$,
- $l(\lambda) = 5 : (4, 1, 1, 1, 1), (3, 2, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 1, 1)$,
- $l(\lambda) = 6 : (3, 1, 1, 1, 1, 1), (2, 2, 1, 1, 1, 1)$
- $l(\lambda) = 7 : (2, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$,
- $l(\lambda) = 8 : (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Particije čiji su dijelovi kongruentni ± 1 *modulo* 6 *su one particije čiji su dijelovi elementi skupa* $L = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots\}$. *Broj takvih particija broja* 8 *je* 3, *a radi se o sljedećim particijama:*

$$(7,1), (5,1,1,1), (1,1,1,1,1,1,1,1).$$

Imamo i 3 3*-različite particije broja* 8, *gdje među dijelovima nema uzastopnih višekratnika broja* 3. *To su particije:*

$$(8), (7,1), (6,2).$$

Ako se prisjetimo Alderove slutnje i tablice 4., za $n = 9$ *Alderova slutnja nije vrijedila. Sada kada imamo Schurov teorem i pogledamo opet tablicu 4. uočavamo da za* $n = 9$ *imamo* 3 *particije čiji su dijelovi iz* L *i isto toliko* 3*-različitih particija kod kojih nema uzastopnih višekratnika broja* 3. *Particiju* $(6,3)$ *ne ubrajamo među njih jer su* 6 *i* 3 *uzastopni višekratnici broja* 3.

Ono što preostaje je dokazati Schurov teorem. Da bi ga dokazali definirajmo što su to Eulerovi parovi.

Definicija 2.2. *Neka su* M *i* N *neprazni podskupovi skupa prirodnih brojeva. Kažemo da je* (M, N) *Eulerov par ako za svaki* $n \in \mathbb{N}_0$, *broj particija* $\lambda \vdash n$ *s dijelovima iz skupa* M *jednak broju striktnih particija* $\mu \vdash n$ *s dijelovima iz skupa* N.

Primjer 2.5. *Eulerov teorem daje primjer Eulerovog para. Prisjetimo se, iskaz Eulerovog teorema kaže da za* $n \in \mathbb{N}_0$ *vrijedi da je broj neparnih particija* $\lambda \vdash n$ *jednak broju striktnih particija* $\mu \vdash n$. *Neka je* $M = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ *i* $N = \mathbb{N}$, *tada je*

$$p(n|\ dijelovi\ iz\ M) = p^{(1)}(n|\ dijelovi\ iz\ N).$$

Prema prethodnoj definiciji (M, N) *nazivamo Eulerov par,* M *je skup koji sadrži neparne brojeve, a* N *skup prirodnih brojeva.*

Lema 2.2. *Podskupovi prirodnih brojeva*

$$N = \{n \in \mathbb{N} : n \equiv \pm 1 \pmod 6\}$$

i

$$M = \{m \in \mathbb{N} : m \equiv \pm 1 \pmod 3\}$$

čine Eulerov par.

Sada preostaje dokazati teorem 2.5, odnosno Schurov teorem. Već smo spomenuli da ćemo prikazati bijektivni dokaz.

Dokaz. (Schurov teorem) Prema lemi 2.2 imamo da za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi:

$$p(n|\ dijelovi \equiv \pm 1 \pmod 6) = p^{(1)}(n|\ dijelovi \equiv \pm 1 \pmod 3).$$

Konstruirat ćemo bijekciju između skupa koji sadrži particije čiji su dijelovi različiti i kongruentni ± 1 modulo 3 i skupa koji sadrži 3-različite particije koje nemaju uzastopne višekratnike broja 3. Pretpostavimo da imamo striktnu particiju čiji su dijelovi kongruentni ± 1 modulo 3. Takvu particiju transformiramo tako da zbrojimo dijelove koji se razlikuju za najviše dva počevši od najmanjeg dijela. Spojeni parovi u ovom postupku će dati višekratnik broja 3, a uzastopni višekratnici se ne mogu pojaviti. Ako se nakon transformacije u particiji izmđu dva višekratnika od 3 nalazi i dijelova, onda se ti višekratnici razlikuju za najmanje $(2+i)\cdot 3$. Primjerice, particiju

$$(11, 10, 8, 5, 2, 1)$$

težine 37 transformiramo kao $(11, 10+8, 5, 2+1)$. U sljedećem koraku oduzimamo uzastopne višekratnike broja 3 u novonastaloj particiji. Počinjemo oduzimanjem nule od zadnjeg dijela i nastavljajući prema ostalim dijelovima. Promotrimo naš primjer. Kada oduzmemo uzastopne višekratnike broja 3 dobivamo sljedeću particiju:

$$(11-9, 10+8-6, 5-3, 2+1-0).$$

Preuredimo dobivenu particiju tako da krenemo od najvećeg dijela prema najmanjem. U našem slučaju imamo:

$$(12, 3, 2, 1).$$

Na kraju, zbrojimo uzastopne višekratnike broja 3 koje smo oduzeli. Krećemo od najmanjeg dijela prema većem. Promatrajući naš primjer dobivamo particiju sljedećeg oblika:

$$(12+9, 3+6, 2+3, 1+0).$$

Radi se o particiji $(21, 9, 5, 1)$ težine 36. Primjetimo da je takva particija striktna i da nema uzastopnih višekratnika broja 3. $\square$

3. Particije Rogers-Ramanujanovog tipa i polarizirane particije

3.1. Omjer broja Rogers-Ramanujanovih particija

Particije kod kojh je apsolutna vrijednost razlike između dva dijela veća ili jednaka 2 smo nazvali 2-različite particije. Dodatno, od interesa su 2-različite particije čiji je svaki dio strogo veći ili jednak od 2. Takve particije su poznate pod nazivmo particije Rogers-Ramanujanovog tipa. Skup 2-različitih particija broja n označili smo s $D_2(n)$, a skup 2-različitih particija s uvjetom da je najmanji dio veći ili jednak od 2 s $D_2'(n)$. Poznato je da omjer broja tih particija teži prema zlatnom rezu,

Teorem 3.1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|D_2(n)|}{|D_2'(n)|} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Dokaz prethodnog teorema se može pogledati u [10]. Pogledajmo sljedeću tablicu i promotrimo omjere brojeva 2-različitih i 2-različitih particija s uvjetom da je najmanji dio veći ili jednak od 2 za određene n-ove.

n	$p(n)$	$\lvert D_2(n)\rvert$	$\lvert D_2'(n)\rvert$	$\lvert D_2(n)\rvert/\lvert D_2'(n)\rvert$
6	11	3	2	1.5
7	15	3	2	1.5
8	22	4	3	1.33
9	30	5	3	1.667
10	42	6	4	1.5
11	56	7	4	1.75
12	77	9	6	1.5

Tablica 4: Omjer broja 2-različitih i 2-različitih particija s uvjetom da je najmanji dio veći ili jednak od 2.

Za prebrojavanje particija nisu zainteresirani samo oni koji se bave teorijom brojeva i kombinatorikom, već i fizičari. Kako smo već i pokazali, nije lako prebrojati sve particije za veće vrijednosti broja n. Te su teme od interesa i fizičarima. Ona se primjenjuju na različite modele koji omogućuju izračun određenih svojstava. The hard-hexagon model je model koji je povezan s Rogers-Ramanujanovim identitetima. Više se o tome može pročitati u [14] i vidjet kako se ovi identiteti prirodno uklapaju u model.

3.2. Polarizirane particije

Označimo s $l_{i,q}(\lambda)$ broj dijelova particije λ koji su kongruentni i modulo q. Primjerice, za particiju $\lambda = (13, 10, 9, 6, 3, 2)$ imamo da je broj dijelova particije koji su kongruentni 0 modulo 3 jednak 3, tj. $l_{0,3} = 3$. Nadalje, $l_{1,2}(\lambda)$ je broj neparnih dijelova u particiji. U našem primjeru broj takvih dijelova iznosi 3.

Definicija 3.1. *Neka je $e(\lambda)$ najmanji parni dio particije λ, ukoliko imamo neparnu particiju, tada je $e(\lambda) := 2l_{1,2}(\lambda)+2$. Particiju λ nazivamo polarizirana particija ako je 1-različita i vrijedi da je $e(\lambda) > 2l_{1,2}(\lambda)$.*

Primjer 3.1. *Promotrimo 1-različitu particiju $\lambda = (8,7,5,1)$. Najmanji parni dio ove particije iznosi 8 i označimo ga s $e(\lambda)$. Broj neparnih dijelova particije λ je 3, odnosno $l_{1,2}(\lambda) = 3$. Vrijedi da je $e(\lambda) > 2l_{1,2}(\lambda)$, tj. $8 > 6$. Prema prethodnoj definiciji λ nazivamo polariziranom particijom.*

Broj polariziranih particija broja $n \in \mathbb{N}_0$ označit ćemo s $\hat{p}^{(1)}(n)$,

$$\hat{p}^{(1)}(n) := |\{(\lambda_1, \dots, \lambda_l) \vdash n : \lambda_i - \lambda_{i+1} \geq 1, i = 1, \dots, l-1,\ e(\lambda) > 2l_{1,2}(\lambda)\}|.$$

Za $n = 7$ imamo tri polarizirane particije, $\hat{p}^{(1)}(7) := |\{(7), (6,1), (4,3)\}| = 3$. Također, imamo i 3 2-različite particije, $|D_2\,(7)\,| = |\{(7)\,, (6,1)\,, (5,2)\}| = 3$. Broj polariziranih i 2-različitih particija za $n \in \mathbb{N}_0$ će uvijek biti jednak i tu tvrdnju ćemo iskazat sljedećim teoremom.

Teorem 3.2. *Broj 2-različitih particija $\lambda \vdash n$ je jednak broju polariziranih particija $\mu \vdash n$,*

$$p^{(2)}(n) = \hat{p}^{(1)}(n).$$

Dokaz. Pretpostavimo da 2-različita particija λ težine n ima j neparnih dijelova s indeksima $b_1 < \cdots < b_j$ takvih da je $\lambda_{b_1} \leq \cdots \leq \lambda_{b_j}$ i $k - j$ parnih dijelova s indeksima $c_1 < \cdots < c_{k-j}$ takvih da je $\lambda_{c_1} \leq \cdots \leq \lambda_{c_{k-j}}$. Definirajmo particiju sa sljedećim dijelovima,

$$\begin{gathered}
\lambda_{b_1} - 2b_1 + 2, \\
\lambda_{b_2} - 2b_2 + 4, \\
\vdots \\
\lambda_{b_j} - 2b_j + 2j, \\
\lambda_{c_1} - 2c_1 + 2j + 2, \\
\vdots \\
\lambda_{c_{k-j}} - 2c_{k-j} + 2j + 2k.
\end{gathered}$$

Ova particija je 1-različita particija težine n s j neparnih i $k - j$ parnih dijelova,

$$\begin{aligned}
\lambda_{b_{i+1}} - 2b_{i+1} + 2(i+1) - (\lambda_{b_i} - 2b_i + 2i) &= (\lambda_{b_{i+1}} - \lambda_{b_i}) - 2(b_{i+1} - b_i) + 2 \\
&\geq 2,
\end{aligned}$$

gdje je $\lambda_{b_{i+1}} \geq \lambda_{b_i} + 2(b_{i+1} - b_i)$. Analogno se pokaže da je razlika između dva parna dijela veća ili jednaka od 2. Najmanji parni dio originalne particije λ_{c_1} je veći ili jednak od $2c_1$. Imamo da je najmanji parni dio u novoj particiji $\lambda_{c_1} - 2c_1 + 2j + 2$ je strogo veći od $2j$, odnosno dvostrukog broja neparnih dijelova u novoj particiji. Particije s takvim svojstvom su upravo polarizirane particije.

□

Ovime smo dokazalli da je broj 2-različitih particija broja n jednak broju polariziranih particija broja n. Pokažimo to na primjeru za $n = 8$.

Primjer 3.2. *Za $n = 8$ pokažimo da je $p^{(2)}(8) = \hat{p}^{(1)}(8)$, tj. broj particija Rogers-Ramanujanovih tipa za $n = 8$ jednak je broju particija kod kojih je najmanji parni dio, ukoliko postoji, dvostruko veći od broja neparnih dijelova. Imamo 22 particije broja 8,*

- $l(\lambda) = 1 : (8)$,
- $l(\lambda) = 2 : (7,1)$, $(6,2)$, $(5,3)$, $(4,4)$
- $l(\lambda) = 3 : (6,1,1)$, $(5,2,1)$, $(4,3,1)$, $(4,2,2)$, $(3,3,2)$,
- $l(\lambda) = 4 : (5,1,1,1)$, $(4,2,1,1)$, $(3,2,2,1)$, $(2,2,2,2)$, $(3,3,1,1)$,
- $l(\lambda) = 5 : (4,1,1,1,1)$, $(3,2,1,1,1)$, $(2,2,2,1,1)$,
- $l(\lambda) = 6 : (3,1,1,1,1,1)$, $(2,2,1,1,1,1)$
- $l(\lambda) = 7 : (2,1,1,1,1,1,1)$,
- $l(\lambda) = 8 : (1,1,1,1,1,1,1,1)$.

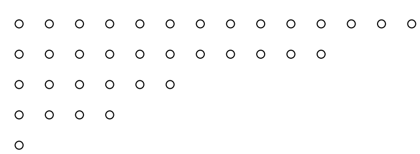
Od te 22 particije njih 4 su 2-različite, tj.

$$p^{(2)}(8) = |\{(8),(7,1),(6,2),(5,3)\}| = 4.$$

Nadalje, imamo i 4 polarizirane particije broja 8,

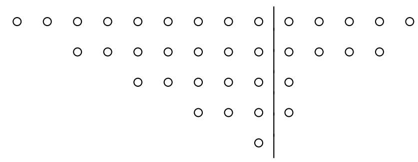
$$\hat{p}^{(1)}(8) = |\{(8),(7,1),(6,2),(5,3)\}| = 4.$$

Postoji bijekcija poznata pod nazivom Bressoudova bijekcija između broja polariziranih i 2-različitih particija. Tu bijekciju ćemo opisati na malom primjeru. Particija $(14, 11, 6, 4, 1)$ je 2-različita particija težine 36. Slika 11 prikazuje Ferrerov graf ove particije.

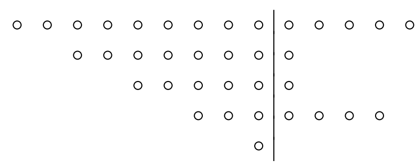


Slika 11: Ferrerov graf za particiju $(14, 11, 6, 4, 1)$.

Prethodni graf particije $(14, 11, 6, 4, 1)$ prilagodimo tako da u svakom redu s lijeve strane ostavimo dva slobodna mjesta, tj. vrha u odnosnu na prethodni red i dodamo vertikalnu liniju tako da se u zadnjem redu Ferrerovog grafa na lijevoj strani od te linije nalazi samo jedan vrh. Slika 12 pokazuje kakav graf dobijemo. Vrhove na desnoj strani vertikalne linije prethodne slike 12 poredamo po veličini. Poredat ćemo ih tako da po veličini poredamo prvo neparni broj vrhova zatim parni broj, slika 13.



Slika 12: Prilagođavanje i dodavanje vertikalne linije kod Ferrovog grafa particije $(14, 11, 6, 4, 1)$.



Slika 13: Nova particija težine $n = 36$.

Nakon što uklonimo liniju i uredimo, dobivamo particiju $(14, 8, 7, 6, 1) \vdash 36$. Najmanji parni dio ove particije je 6 i on je veći od dvostrukog broja neparnih dijelova. Neparnih dijelova je 2, očito je $6 > 4$. Prema definiciji 3.1 radi se o polariziranoj particiji.

Literatura

[1] G, L. Alexanderson, L. F. Klosinski, *Ramanujan in Bronze*, American mathematical society, Volume 53, Number 4, 2016, 673-679.

[2] G. E. Andrews, *An Analytic Generalization of the Rogers–Ramanujan Identities for Odd Moduli*, National Academy of Sciences, 71(10), 1974, 4082-4085

[3] G. E. Andrews, K. Eriksson, *Integer partitions*, Cambridge University Press, 2004.

[4] G. E. Andrews, *Number theory*, W. B. Saunders Company, 1971.

[5] G. E. Andrews, *The theory of partitions*, Cambridge University Press, 1984.

[6] R. J. Baxter, *Rogers-Ramanujan Identities in the Hard Hexagon Model*, Journal of Statistical Physics, Volume 26, 1981., 427–452.

[7] A. Berkovich, B. M. McCoy, *Rogers–Ramanujan Identities: A Century of Progress from Mathematics to Physics*, International Congress of Mathematicians, Volume 3, 1998, 163–172.

[8] C. Boulet, I. Pak, *Combinatorial Proof of the Rogers-Ramanujan and Schur Identities*, Jurnal of Combinatorial Theory, Volume 113, 2006., 1019–1030.

[9] D. M. Bressoud, *A New Family of Partition Identities*, Pacific J. Math, 77(1), 1978, 71–74.

[10] H. C. Chan, *Golden Ratio and a Ramanujan-Type Integral*, Axioms, 6, 2013, 58-66.

[11] W. Fulton, *Young Tableaux: With Application to Representation Theory and Geometry*, Cambridge University Press, 1996.

[12] M. J. Griffin, K. Ono, S. O. Warnaar, *A Framework of Rogers-Ramanujan Identities and Their Arithmetic Properties*, Duke Mathematical Journal, 165(8), 2016., 1475-1527.

[13] R. Kanigel, *The Man Hwo Knew Infinity*, Washington Square Press, 1992.

[14] J. Lepowsky, R. L. Wilson, *A New Family of Algebras Underlying the Rogers-Ramanujan Identities*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 78, 1981., 7254-7258.

[15] I. Martinjak, *Eulerov pentagonalni teorem*, Matematičko-fizički list, 268(4), 2017, 243-249.

[16] I. Martinjak, D. Svrtan, *New Identities for the Polarized Patitions and Partitions with d-Distant Parts* , University of Zagreb, 2010.

[17] I. Martinjak, *O Eulerovom teoremu o particijama*, Osječki matematički list, 16(1), 2016, 1-14.

[18] K. Ono, A. D. Aczel, *My search for Ramanujan: How I Learned to Count*, Springer, 2016.

[19] M. Pitici, *The Best Writing on Mathematics*, Princeton University Press, 2018.

[20] K. G. Ramanathan, *On the Rogers-Ramanujan Continued Fraction*, Indian Academy of Sciences-Mathematical Sciences, 93(2), 1984., 67–77.

[21] L. J. Slater, *Further Identities of the Rogers-Ramanujan Type*, London Mathematical Society, 54(2), 1952., 147–167.

[22] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, 2001.

[23] A. Youg, *What is a Young Tableau?*, Notices of the AMS, 54(2), 2007., 240-241.

Sažetak:

U ovom radu bavimo se particijama Rogers-Ramanujanovog tipa. Particija broja n je rastav od n na sumande, gdje poredak nije važan. Particije grafički reprezentiramo pomoću Youngovog dijagrama i taj prikaz koristimo za dokazivanje identiteta za particijsku funkciju. Broj particija čiji su svi dijelovi neparni jednak je broju particija čiji su svi dijelovi međusobno različiti. Lijeva strana prvog i drugog Rogers-Ramanujanovog identiteta je funkcija izvodnica za 2-različite i 2-različite particije s uvjetom da je najmanji dio veći ili jednak od 2. Takve particije nazivamo particije Rogers-Ramanujanovog tipa. Omjer brojeva particija Rogers-Ramanujanovog tipa teži prema zlatnom rezu. Broj particija čija je apsolutna vrijednost razlike između dva dijela veća ili jednaka od 2 jednak je broju particija kod kojih je najmanji parni dio, ukoliko postoji, dvostruko veći od broja neparnih dijelova te particije. Particije s tim svojstvima su poznate kao Rogers-Ramanujanove i polarizirane particije.

Abstract:

In this paper we are dealing with partitions of the Rogers-Ramanujan's type. The partition of n is an decomposition of n on sumande, where order is not important. Partitions are graphically displayed using Young diagram and we use this view to prove the identities for the partition function. The number of partitions whose parts are odd is equal to the number of partitions whose parts are distinct. The left side of the first and second Rogers-Ramanujan's identity is the 2-distinct and 2-distinct partition with the condition that the smallest part is greater or equal than 2. Such partitions are called the Rogers-Ramanujan type partitions. We observe the ratio of Rogers-Ramanujan's partitions, where it is known that this ratio actually tends to the golden ratio. The number of 2-distinct partitions is equal to the number of 1-distant partitions whose the smallest even part, if there are any, are greater than twice the number of odd parts. Partitions with these properties are known as Rogers-Ramanujan's and polarized partitions.

Ključne riječi:
particija, particijska funkcija, Youngov dijagram, Ferrerov graf, konjugirana particija, striktne particije, neparne particije, Eulerov teorem, funkcija izvodnica, Eulerov pentagonalni teorem, formula kuke, Rogers-Ramanujanovi identiteti, q-binomni koeficijenti, Jacobijev identitet, d-različite particije, Alderova slutnja, Schurov teorem, Eulerovi parovi, polarizirane particije, Bressoudova bijekcija.

Key words:
partitions, partition function, Young diagram, Ferres graph, conjugated partition, odd partitions, distinct partitions, Eulers's theorem, generating functions, Euler's pentagonal number theorem, the Hook length formula, Rogers-Ramanujan identities, q-binomial numbers, Jacobi's triple product identity, d-distinct partitions, Alder's conjecture, Schur's theorem, Euler's pairs, polar partitions, Bressoud's bijection.

Životopis:

Rođena sam 30.9.1993. godine u Vinkovcima. Osnovnu školu Stjepana Cvrkovića sam završila u Starim Mikanovcima, gdje sam nakon toga upisala Tehničku školu Ruđer Bošković u Vinkovcima. Nakon završetka srednje škole upisala sam preddiplomski studij Odjel za matematiku u Osijeku. Tema za završni rad mi je bila pod nazivom Gaussovi cijeli brojevi, gdje mi je mentorica bila doc.dr.sc. Mirela Jukić Bokun. Nakon toga sam upisala diplomski studij na istom Odjelu, smjer Financijska matematika i statistika.