Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Denis Jukić

Funkcije i funkcijske jednadžbe

Diplomski rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Denis Jukić

Funkcije i funkcijske jednadžbe

Diplomski rad

Mentor: izv.prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2019.

Sadržaj

Uvod

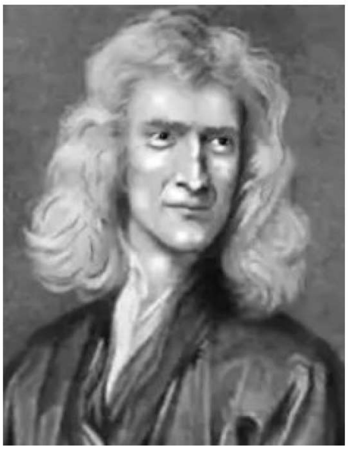
U ovom radu proučavat ćemo jedan od temeljnih matematičkih pojmova. To je pojam funkcije s kojim se učenici u nastavi matematike susreću u 7. razredu osnovne škole, a koji se detaljno izučava tek u 4. razredu srednje škole. Iako pojedine dijelove matematike poput linearne algebre ili teorije grupa možemo shvatiti kao načine za opis funkcija, zanimljivo je kako je prihvatljiva definicija ovoga pojma iskazana tek u 20. stoljeću zahvaljujući francuskom matematičaru Gourastu koji je rekao da je y funkcija od x ako vrijednost od x korespondira vrijednosti od y. Uveo je i oznaku za tu korespondenciju $y = f(x)$. Punih šest stoljeća prije njegove definicije, otkako se ovaj matematički pojam počeo proučavati, to nije pošlo za rukom mnogim vrsnim matematičarima i filozofima poput Newtona, Leibniza, Eulera, Cauchyja, a s kakvim su se problemima susretali pri definiciji funkcije razmotrit ćemo u povijsnom dijelu ovoga rada. Za razumijevanje funkcija veoma je bitno shvatiti njezine temeljne odrednice: domenu, kodomenu, pravilo pridruživanja, graf i sliku funkcije..., kao i svojstva funkcije: injektivnost, surjektivnost, bijektivnost, parnost i neparnost, monotonost... Sve ove pojmove teorijski i praktički, rješavanjem brojnih numeričkih i grafičkih zadataka, detaljno ćemo proučiti u ovome radu kako bismo kasnije što lakše uveli još jedan pojam vezan za funkcije, a to su funkcijske jednadžbe za čije je rješavanje bitno jako dobro shvatiti sve ranije navedene pojmove. Rješavajući ovakve zadatke učenici razvijaju i funkcijski način razmišljanja za čiji je razvoj vrlo bitno pojmove vezane za funkciju uvesti u nastavu matematike i prije nego je to predviđeno po obrazovnom kurikulumu, a načine na koje profesori mogu pomoći učenicima za što lakše shvaćanje ovoga pojma proučit ćemo u posljednjem poglavlju ovoga rada.

1 Povijesni pregled pojma funkcije

Prema nekim povijesnim izvorima, prvi koncept pojma funkcije pojavio se još za vrijeme drevnih Babilonaca koji su tablično prikazivali pridruživanje kvadrata i kubova prirodnim brojevima te u antičkoj Grčkoj kada je Ptolomej radio s objektima koje možemo smatrati početnim naznakama razvoja trigonometrijskih funkcija. No povjesničari se slažu da tadašnja gledišta nisu imala pravih poveznica s definicijom funkcije kakva nam je poznata danas. Notacija funkcije prvi se put pojavljuje sredinom 14. stoljeća kada je francuski filozof Oresme zakone prirode opisao korištenjem zavisnosti jedne veličine o drugoj.

Slika 1. Ptolomej (85.-165. pr. Kr.)

U začecima infinitezimalnog računa uočena je potreba za označavanjem funkcije kao individualne matematičke jedinice, gdje se ističu engleski fizičar, matematičar i astronom Isaac Newton te njemački filozof, matematičar, fizičar i diplomat Gottfried Leibniz. Newton je prilikom određivanja brzine iz puta i obrnuto uočio međusobnu inverznost te dvije operacije. Njegova pretpostavka kreće od ideje da postoji zamišljena čestica koja se giba po krivulji u pravokutnom koordinatnom sustavu. Njezine brzine (horizontalnu x i vertikalnu y) nazvao je fluksijama tekućih veličina.

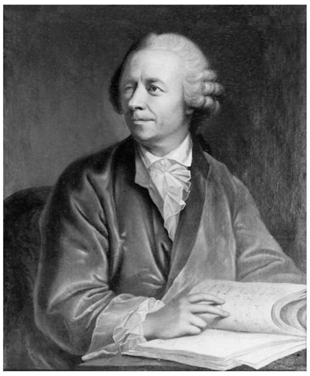


Slika 2. Isaac Newton (1642.-1727.)

Leibniz je prvi upotrijebio pojam "funkcija" 1673. godine u svom djelu *'Methodus tangentum inversa, suide functionibus'*. U vrlo općenitom smislu upotrijebio je pojam funkcije da opiše zavisnost geometrijskih vrijednosti subtangente i subnormale na krivulju. Također je uveo i pojmove: konstanta, parametar i varijabla, međutim ni Newton, ni Leibniz nisu dali preciznu definiciju pojma funkcije.

SLIKA 3. Gottfried Leibniz (1646.-1716.)

Pravi pomak u definiciji pojma funkcije javlja se 1748. godine kada je Euler objavio knjigu *'Introductio to analysin infinitorum'* u kojoj je pojam funkcije smatrao ključnim. U toj knjizi Euler je funkciju definirao ovako : 'Funkcija varijabilne veličine je analitički izraz koji je na bilo kakav način sastavljen od te varijabilne veličine i brojeva ili konstantnih veličina.' Euler u svojoj definiciji nije precizirao što smatra analitičkim izrazom te dozvoljava li postupak definiran u njegovom izrazu korištenje samo osnovnih računskih operacija poput zbrajanja, oduzimanja, dijeljenja i množenja ili dopušta pak i trigonometrijske funkcije i beskonačne produkte i sume. Tako je nastao problem u definiciji pojma funkcije te se sa svakim novim pokušajem javljalo nekoliko novih primjera i nerazjašnjenih potpitanja.



SLIKA 4. Euler (1707.-1783.)

Euler je pokušao ispraviti vlastitu definiciju kada je 1755. objavio knjigu *'Institutiones calculi differentialis'* u kojoj definira pojam funkcije na vrlo općenit način. Prema Euleru, ako x označava nezavisnu veličinu, tada se sve veličine koje na bilo koji način ovise o x ili su određene s x, nazivaju funkcijama od x. Euler je u ovoj knjizi strogo odijelio funkcije u nekoliko skupina. Razdvojio je funkcije zadane jednim analitičkim izrazom od funkcija zadanih pomoću dva ili više analitičkih izraza.

Nakon Eulera, francuski matematičar Cauchy je u prvoj polovici 19. stoljeća naveo primjer funkcije zadane pomoću dva analitička izraza: $y = x$ za $x \geq 0$ i $y = -x$ za $x < 0$, koja se također može zadati i samo jednom formulom $y = |x|$, čime je Eulerova podjela bila pobijena te je samim time izgubila na važnosti.

SLIKA 5. Cauchy (1789.-1857.)

Nakon brojnih pokušaja definicija pojma funkcije, činilo se da će pojam koji se danas smatra toliko elementarnim ostati nedefiniran, a u prilog tomu ide poznata izjava njemačkog matematičara Hermanna Hankelova koji je rekao da netko definira funkcije na esencijalno Eulerov način, netko zahtijeva da se y mora mijenjati u odnosu na x prema određenom zakonu, bez daljnjeg objašnjavanja zamišljenog koncepta, dok netko funkcije jednostavno ne definira. Na njegovu se izjavu nadovezao francuski matematičar Poincare koji je rekao da je jedini problem u definiciji pojma funkcije dokazati prethodnicima da su bili u krivu. Rasprava među matematičarima u vezi uvođenja pojma funkcije najviše se vodila između skupine matematičara koji su zastupali definiciju funkcije kao svakog pridruživanja između elemenata dvaju skupova i skupine matematičara koji su smatrali da bi trebalo biti jasno kako se to pridruživanje vrši.

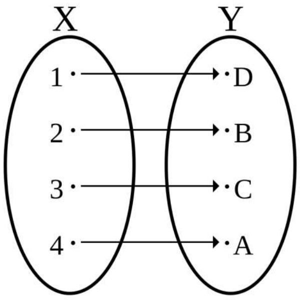
Francuski matematičar Goursat je tek 1923. iznio definiciju koja se i danas koristi: 'Kažemo da je y funkcija od x ako vrijednost od x korespondira vrijednosti od y. Ovu korespondenciju označavamo s $y = f(x)$.'

SLIKA 6. Goursat (1858.-1936.)

2 Pojam funkcije

Ako je svakom elementu x nekog skupa X pridružen točno jedan element y nekog skupa Y, tada kažemo da je definirano preslikavanje (funkcija) f iz skupa X u skup Y. Pišemo $y = f(x)$. Element x naziva se argument funkcije f, a y vrijednost te funkcije.

Simbolički pridruživanje elementa x elementu y možemo zapisati $x \to y$ i čitamo x se preslikava u y.



SLIKA 7. Pravilo pridruživanja

Na Slici 7. shematski je prikaz funkcije. Svakom elementu skupa X pridružen je točno jedan element skupa Y.

Skup X zovemo domenom ili područjem definicije funkcije f i označavamo s $\mathcal{D}$ ili $\mathcal{D}_f$, a skup Y zovemo kodomenom ili područjem vrijednosti i označavamo s $\mathcal{R}$ ili $\mathcal{R}_f$.

Iz prethodno navedenih tvrdnji možemo zaključiti kako je funkcija f zadana:

1. svojom domenom (područjem definicije) $\mathcal{D}$;
2. svojom kodomenom (područjem vrijednosti) $\mathcal{R}$;
3. pravilom pridruživanja $x \to f(x)$.

Primjer 1. *Provjerite zadovoljava li zadana funkcija napisanu jednakost:*

a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4, f(2) = f(1);$

b) $g(t) = t^3 - 3t^2 + 4t - 1, g(2) = g(1);$

c) $h(u) = u^3 - 6u^2 + 11u - 10, u(3) = u(2) = u(1);$

Rješenje:

a) Uvrstimo li 2 *umjesto* x *u* $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$, *dobivamo:*

$$f(2) = 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 4$$
$$f(2) = 8 - 5 \cdot 4 + 16 - 4$$
$$f(2) = 8 - 20 + 16 - 4$$
$$f(2) = 0.$$

Analogno, uvrstimo li 1 *umjesto* x *u* $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$, *dobivamo:*

$f(1) = 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 - 4$

$f(1) = 1 - 5 \cdot 1 + 8 - 4$

$f(1) = 1 - 5 + 8 - 4$

$f(1) = 0.$

Zaključujemo kako je $f(2) = f(1) = 0$ *što znači da funkcija zadovoljava napisanu jednakost.*

b) Uvrstimo li 2 *umjesto* t *u* $g(t) = t^3 - 3t^2 + 4t - 1$, *dobivamo:*

$g(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 1$

$g(2) = 8 - 3 \cdot 4 + 8 - 1$

$g(2) = 8 - 12 + 8 - 1$

$g(2) = 3.$

Analogno, uvrstimo li 1 *umjesto* t *u* $g(t) = t^3 - 3t^2 + 4t - 1$, *dobivamo:*

$g(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 1$

$g(1) = 1 - 3 \cdot 1 + 4 - 1$

$g(1) = 1 - 3 + 4 - 1$

$g(1) = 1.$

Zaključujemo kako je $g(2) \neq g(1)$ *što znači da funkcija ne zadovoljava napisanu jednakost.*

c) Uvrstimo li 3 *umjesto* u *u* $h(u) = u^3 - 6u^2 + 11u - 10$, *dobivamo:*

$h(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 11 \cdot 3 - 10$

$h(3) = 27 - 6 \cdot 9 + 33 - 10$

$h(3) = 27 - 54 + 33 - 10$

$h(3) = -4.$

Analogno, uvrstimo li 2 *umjesto* u *u* $h(u) = u^3 - 6u^2 + 11u - 10$, *dobivamo:*

$h(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 11 \cdot 2 - 10$

$h(2) = 8 - 6 \cdot 4 + 22 - 10$

$h(2) = 8 - 24 + 22 - 10$

$h(2) = -4.$

Analogno, uvrstimo li 1 *umjesto* u *u* $h(u) = u^3 - 6u^2 + 11u - 10$, *dobivamo:*

$h(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 10$

$h(1) = 1 - 6 \cdot 1 + 11 - 10$

$h(1) = 1 - 6 + 11 - 10$

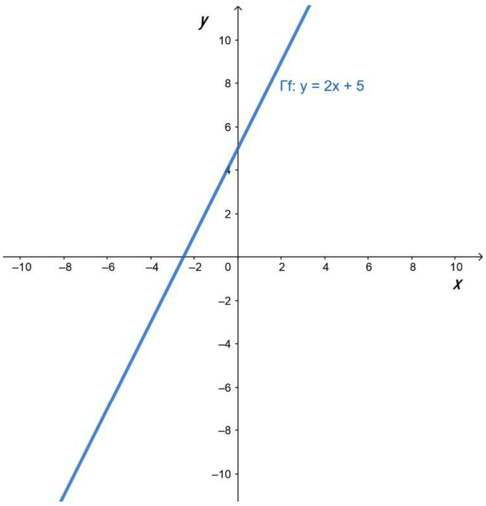
$h(1) = -4.$

Zaključujemo kako je $h(3) = h(2) = h(1) = -4$ *što znači da funkcija zadovoljava napisanu jednakost.*

Radi lakšeg razumijevanja pojma funkcije, funkcije ćemo kad god je to moguće prikazivati pomoću njezina grafa.

Graf Γ_f funkcije f je skup čiji su elementi uređeni parovi $(x,f(x))$ za sve x iz domene $\mathcal{D}$ funkcije f:

$$\Gamma_f = \{(x,y) : x \in \mathcal{D}, y = f(x)\}.$$



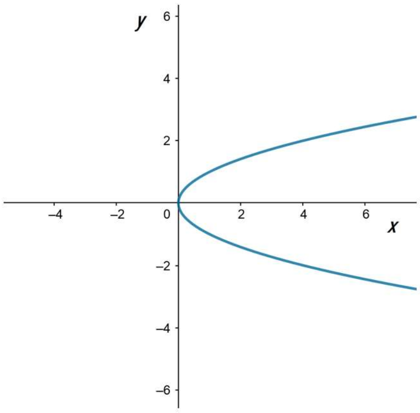
SLIKA 8. Graf funkcije $f(x) = 2x + 5$

Na Slici 8. prikazan je graf funkcije $f(x) = 2x + 5$, a to je pravac $y = 2x + 5$. Svakoj vrijednosti x iz domene odgovara točno jedna vrijednost $y = f(x)$ iz kodomene. Točke s koordinatama (x,y) predstavljaju graf funkcije.

Graf funkcije opisan je krivuljom ili dijelovima krivulja u ravnini pa je prirodno postaviti pitanja: 'Kada neka krivulja predstavlja graf neke funkcije?' i 'Kako se iz grafa određuje domena i kodomena funkcije, a kako pravilo pridruživanja?'.

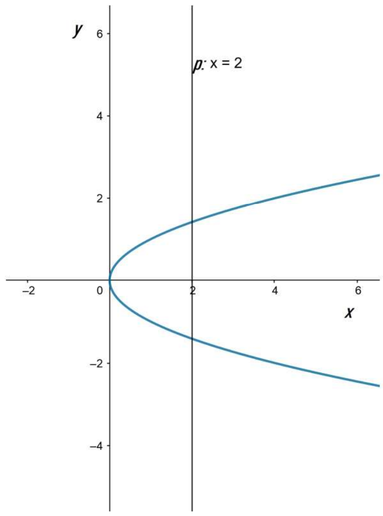
Odgovore na ova pitanja predstavlja sama definicija funkcije koja kaže da svakom elementu x iz domene $\mathcal{D}$ mora biti pridružen točno jedan element y iz kodomene $\mathcal{R}$. To znači da vertikalni pravac paralelan s osi y smije sjeći krivulju u najviše jednoj točki. Presjek tog pravca s osi apscisa predstavlja vrijednost varijable x, a vrijednost varijable y dobivamo iz presjeka pravca sa zadanom krivuljom.

Primjer 2. *Predstavlja li prikazana krivulja graf neke funkcije?*



SLIKA 9.

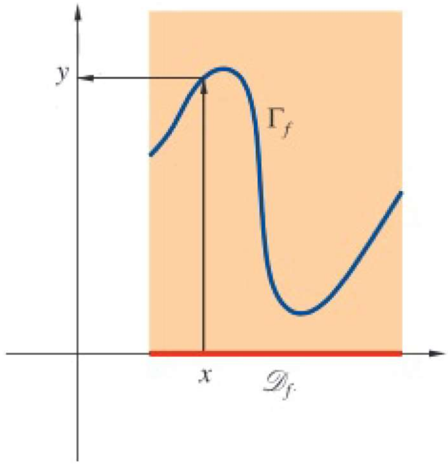
Rješenje:



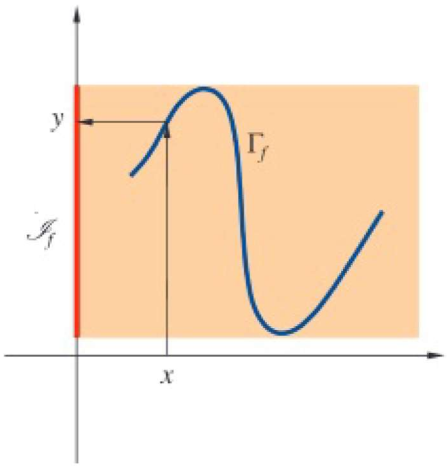
SLIKA 10.

Krivulja prikazana na Slici 9. ne predstavlja graf neke funkcije što možemo zaključiti prikažemo li njezin presjek s pravcem $x = 2$ *kao na Slici 10.. Uočavamo kako pravac* $x = 2$ *siječe krivulju u dvije različite točke što znači da su istoj vrijednosti varijable* x *pridružene dvije različite vrijednosti od* y*, što je u kontradikciji s definicijom funkcije i pravilom da se svakom elementu* x *iz skupa* X *pridružuje točno jedan element* y *nekog skupa* Y*.*

Rješavajući ovaj primjer pokušali smo dati odgovor na pitanje kada neka krivulja predstavlja graf neke funkcije. Za određivanje područja definicije iz grafa funkcije potrebno je pronaći sve x-eve na osi apscisa za koje postoji odgovarajući y. Taj skup $\mathcal{D}_f$ je jednak projekciji grafa na os apscisa. Pri određivanju kodomene funkcije ne moramo biti toliko precizni kao prilikom određivanja domene. Zato najčešće uzimamo $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ i pišemo $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. S pojmom kodomene povezan je još jedan skup koji nazivamo slika funkcije. Taj skup možemo shvatiti kao najmanju od svih mogućih kodomena funkcije. Sliku funkcije čine svi $y \in \mathbb{R}$ za koje postoji $x \in \mathcal{D}$ takav da je $y = f(x)$. Slika funkcije je skup na koji funkcija f preslikava svoju domenu. Označavamo ga s $\mathcal{I}_f$. Slika funkcije je projekcija grafa na os ordinata.



SLIKA 11. Određivanje domene iz grafa funkcije



SLIKA 12. Određivanje slike iz grafa funkcije

Na Slici 11. prikazan je način određivanja domene iz grafa funkcije f kao projekcija grafa na os apscisa, a na Slici 12. prikazano je određivanje slike funkcije f kao projekcija grafa na os ordinata.

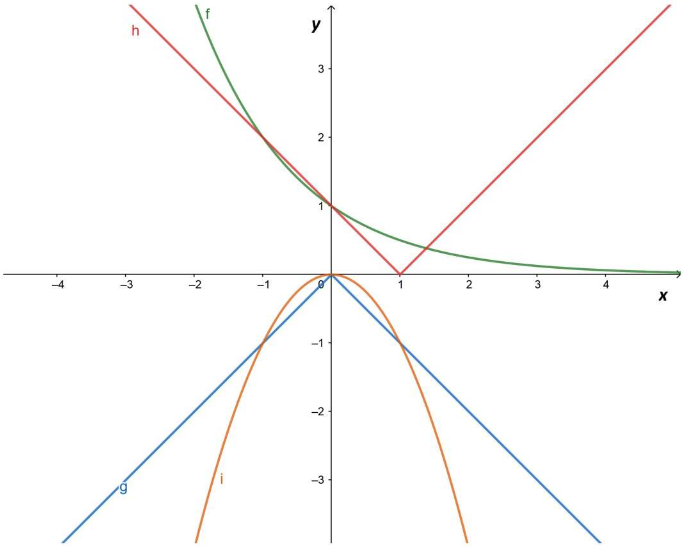
Primjer 3. *Povežite funkcije i njihove grafove:*

a) $f_1(x) = |x - 1|$;

b) $f_2(x) = -x^2$;

c) $f_3(x) = -|x|$;

d) $f_4(x) = 2^{-x}$;



Slika 13.

Rješenje:

a) *Uvrstimo li* 0 *umjesto* x *u* $f_1(x) = |x-1|$, *dobit ćemo* $f_1(0) = |0-1| = |-1| = 1$ *što jedino može odgovarati funkcijama označenim s* f *i* h *na Slici* 13.. *Uvrstimo li još* 1 *umjesto* x *dobit ćemo* $f_1(1) = |1-1| = |0| = 0$. *Sada smo, gledajući graf, sigurni da je* $f_1(x) = |x-1| = h$.

b) *Uvrstimo li* 0 *umjesto* x *u* $f_2(x) = -x^2$, *dobit ćemo* $f_2(0) = -0^2 = 0$ *što jedino može odgovarati funkcijama označenim s* g *i* i *na Slici* 13.. *Uvrstimo li još* 0.5 *umjesto* x *dobit ćemo* $f_2(0.5) = -0.5^2 = -0.25$. *Sada smo, gledajući graf, sigurni da je* $f_2(x) = -x^2 = i$.

c) *Uvrstimo li* 0 *umjesto* x *u* $f_3(x) = -|x|$, *dobit ćemo* $f_3(0) = -|0| = 0$ *što jedino može odgovarati funkcijama označenim s* g *i* i *na Slici* 13. *Uvrstimo li još* 1 *umjesto* x *dobit ćemo* $f_3(1) = -|1| = -1$. *Sada smo, gledajući graf, sigurni da je* $f_3(x) = -|x| = g$.

d) *Uvrstimo li* 0 *umjesto* x *u* $f_4(x) = 2^{-x}$, *dobit ćemo* $f_4(0) = 2^{-0} = 2^0 = 1$ *što jedino može odgovarati funkcijama označenim s* f *i* h *na Slici* 13. *Uvrstimo li još* 1 *umjesto* x *dobit ćemo* $f_4(1) = 2^{-1} = 0.5$. *Sada smo, gledajući graf, sigurni da je* $f_4(x) = 2^{-x} = f$.

2.1 Svojstva funkcije

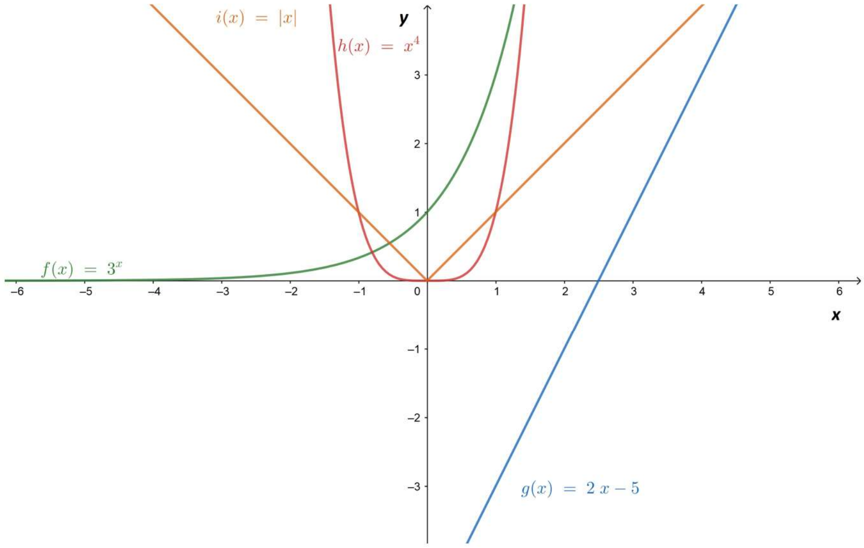
2.1.1 Injektivnost, surjektivnost i bijektivnost funkcije

Definicija 1. *Kažemo da je funkcija* $f : \mathcal{D} \to \mathcal{R}$ *injekcija ako*

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \text{ za svaki } x_1, x_2 \in \mathcal{D}.$$

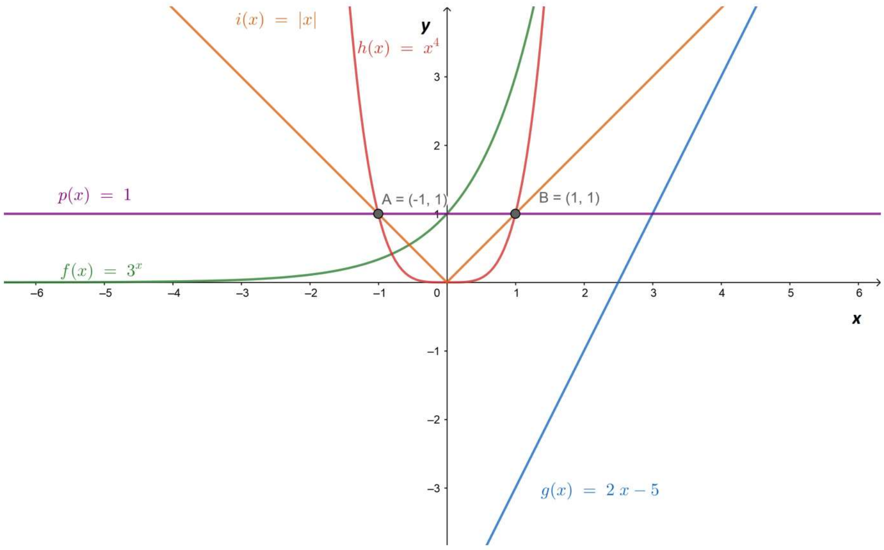
Kriterij za određivanje injektivnosti funkcije je takozvani horizontalni test koji kaže da je funkcija injektivna ako svaki pravac paralelan s x osi siječe njezin graf najviše u jednoj točki.

Primjer 4. *Koje funkcije prikazana na slici su injektivne?*



SLIKA 14.

Rješenje:



SLIKA 15. Horizontalni kriterij

Dovoljno je napraviti horizontalni kriterij kako bismo provjerili koje funkcije prikazane na Slici 14. su injektivne. Nacrtamo li na slici pravac $p(x) = 1$ kao što je prikazano na Slici 15., možemo uočiti kako taj pravac paralelan s osi x siječe grafove funkcija $i(x)$ i $h(x)$ u dvije točke koje smo označili s $A = (-1, 1)$ i $B = (1, 1)$. Iz toga možemo zaključiti kako funkcije $i(x) = |x|$ i $h(x) = x^4$ nisu injekcije, dok funkcije koje taj isti pravac siječe u točno jednoj točki jesu injekcije, a to su $f(x) = 3^x$ i $g(x) = 2x - 5$.

Definicija 2. *Kažemo da je funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathcal{R}$ surjekcija ako je slika funkcije jednaka kodomeni funkcije.*

Definicija 3. *Kažemo da je funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathcal{R}$ bijekcija ako je ona i injekcija i surjekcija.*

Definicija 4. *Neka je $f : \mathcal{D} \to \mathcal{R}$ bijekcija. Tada postoji funkcija $f^{-1} : \mathcal{R} \to \mathcal{D}$ definirana formulom $f^{-1}(y) = x$ gdje je $x \in \mathcal{D}$ jedinstveni element takav da je $f(x) = y$. Funkciju f^{-1} zovemo inverznom funkcijom funkcije f.*

Inverz funkcije nalazimo sljedećim postupkom:

1. Napišemo $y = f(x)$.
2. Jednadžbu $y = f(x)$ riješimo po nepoznanici x.
3. Ako postoji jedinstveno rješenje te jednadžbe, tad funkcija ima inverznu funkciju, $x = f^{-1}(y)$.
4. Zamijenimo imena nepoznanicama x i y da bismo dobili zapis $y = f^{-1}(x)$.

Primjer 5. *Provjerite je li funkcija definirana s $f(x) = 2x + 5$ bijekcija i ako je odredite joj inverz.*

Rješenje:

Kako bismo pokazali da je funkcija $f(x) = 2x+5$ bijekcija, trebamo pokazati da je injekcija i surjekcija:

1. *f je injekcija: mora vrijediti da za sve x_1 i x_2 takve da je $f(x_1) = f(x_2)$ nužno slijedi $x_1 = x_2$. Računamo:*

$$2x_1 + 5 = 2x_2 + 5 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

   i funkcija je injekcija.

2. *f je surjekcija: mora vrijediti da za sve $y_0 \in \mathbb{R}$ postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ takac da je $f(x_0) = y_0$ što znači da je $2x_0 + 5 = y_0$. Iz ove jednakosti lako možemo izračunati x_0:*

$$2x_0 + 5 = y_0 \Rightarrow 2x_0 = y_0 - 5 \Rightarrow x_0 = \tfrac{1}{2}y_0 - \tfrac{5}{2}.$$

   Provjerimo da je $f(x_0) = y_0$:

$$f(x_0) = 2x_0 + 5 = 2\left(\tfrac{1}{2}y_0 - \tfrac{5}{2}\right) + 5 = y_0 - 5 + 5 = y_0.$$

Ovu operaciju možemo izvesti za sve $y_0 \in \mathbb{R}$ *pa je* f *surjekcija.*

Budući da je f *injektivna i surjektivna funkcija,* f *je bijekcija pa joj možemo izračunati inverz.*

$$f(x) = 2x + 5 \Rightarrow x = 2f^{-1}(x) + 5 \Rightarrow 2f^{-1}(x) = x - 5 \Rightarrow f^{-1}(x) = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{5}{2}.$$

2.1.2 Kompozicija funkcije

Definicija 5. *Neka su* $f : A \to B$ *i* $g : C \to D$ *dvije funkcije takve da je* $\mathcal{R}(f) \subseteq C$*. Tada funkciju* $h : A \to D$ *definiranu formulom:*

$$h(x) = g(f(x)), \qquad x \in A$$

označavamo s $g \circ f$ *i zovemo kompozicija funkcija* f *i* g*.*

Komponiranje dviju funkcija nije komutativno tj. općenito vrijedi $f \circ g \neq g \circ f$.

Primjer 6. *Neka je* $f(x) = 2x - 1$ *i* $g(x) = x^2 + 2x - 3$*. Odredite* $(f \circ g)(x)$ *i* $(g \circ f)(x)$*.*
Rješenje:

$(f \circ g)(x) = f(g(x))/$*umjesto* $g(x)$ *uvrštavamo* $x^2 + 2x - 3$
$(f \circ g)(x) = f(x^2 + 2x - 3)/$*računamo vrijednost funkcije* $f(x)$ *u* $x^2 + 2x - 3$
$(f \circ g)(x) = 2(x^2 + 2x - 3) - 1$
$(f \circ g)(x) = 2x^2 + 4x - 6 - 1$
$(f \circ g)(x) = 2x^2 + 4x - 7.$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))/$*umjesto* $f(x)$ *uvrštavamo* $2x - 1$
$(g \circ f)(x) = g(2x - 1)/$*računamo vrijednost funkcije* $g(x)$ *u* $2x - 1$
$(g \circ f)(x) = (2x - 1)^2 + 2(2x - 1) - 3$
$(g \circ f)(x) = 4x^2 - 4x + 1 + 4x - 2 - 3/$*sređivanjem desne strane jednadžbe dobivamo:*
$(g \circ f)(x) = 4x^2 - 4.$

2.1.3 Parnost i neparnost funkcije

Definicija 6. *Funkcija je parna ako vrijedi*

$$f(x) = f(-x) \text{ za svaki } x \in \mathcal{D},$$

a neparna ako vrijedi

$$f(x) = -f(x) \text{ za svaki } x \in \mathcal{D}.$$

Primjer 7. *Ispitajte parnost sljedećih funkcija:*

a) $f(x) = \frac{x^2+5}{x^2+1}$;

b) $f(x) = \frac{x^3+5x}{x^2+1}$;

c) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 5$;

Rješenje:

a) $f(-x) = \frac{(-x)^2+5}{(-x)^2+1} = \frac{x^2+5}{x^2+1} = f(x) \Rightarrow$ *funkcija je parna.*

b) $f(-x) = \frac{(-x)^3+5(-x)}{(-x)^2+1} = \frac{-x^3-5x}{x^2+1} = -\frac{x^3+5x}{x^2+1} = -f(x) \Rightarrow$ *funkcija je neparna.*

c) $f(-x) = (-x)^3 + 2(-x)^2 - (-x) + 5 = -x^3 + 2x^2 + x + 5 \Rightarrow$ *funkcija nije ni parna ni neparna.*

2.1.4 Monotonost funkcije

Definicija 7. *Za funkciju f kažemo da raste na intervalu $I \subseteq \mathcal{D}$ ako vrijedi*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \text{ za sve } x_1, x_2 \in I.$$

Za funkciju f kažemo da strogo raste na intervalu $I \subseteq \mathcal{D}$ ako vrijedi

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ za sve } x_1, x_2 \in I.$$

Za funkciju f kažemo da pada na intervalu $I \subseteq \mathcal{D}$ ako vrijedi

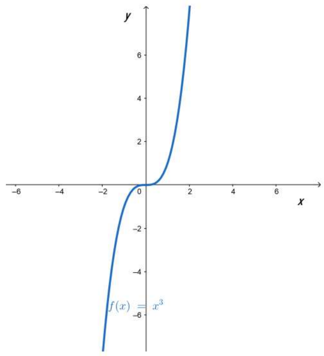
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \text{ za sve } x_1, x_2 \in I.$$

Za funkciju f kažemo da strogo pada na intervalu $I \subseteq \mathcal{D}$ ako vrijedi

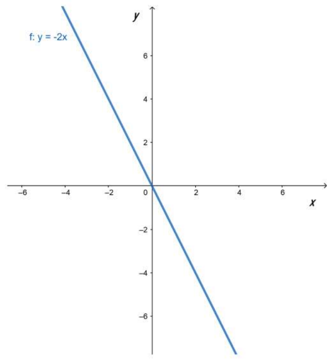
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \text{ za sve } x_1, x_2 \in I.$$

Funkcija koja na cijeloj domeni (strogo) raste naziva se rastućom funkcijom, a funkcija koja na cijeloj domeni (strogo) pada naziva se padajućom funkcijom. Rastuće i padajuće funkcije zovemo monotonim funkcijama.

Funkcija $f(x) = x^3$ je strogo rastuća funkcija, a funkcija $f(x) = -2x$ je strogo padajuća funkcija što možemo vidjeti iz grafa tih funkcija i definicije strogo rastuće, odnosno strogo padajuće funkcije.



SLIKA 16. Graf funkcije $f(x) = x^3$



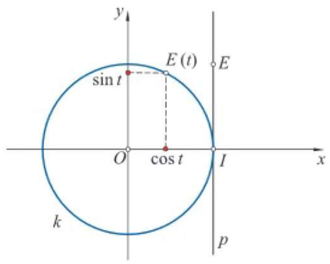
SLIKA 17. Graf funkcije $f(x) = -2x$

2.1.5 Periodičnost funkcije

Definicija 8. *Funkcija f je periodična ako postoji realan broj $T > 0$ takav da je $f(x+T) = f(x)$, za sve $x \in \mathcal{D}$.*

Svaki takav broj T naziva se period funkcije f. Najmanji period naziva se temeljni period.

Primjer 8. *Pokažite da je funkcija $\sin(t)$ periodična s temeljnim periodom 2π.*
Rješenje:
Najprije definirajmo funkciju $\sin(t)$. Brojevnu kružnicu $k(O, r = 1)$ smjestimo u koordinatni sustav u ravnini tako da se ishodište koordinatnog sustava podudara sa središtem O kružnice k, a os x neka se podudara s pravcem OI.



SLIKA 18. Brojevna kružnica

Sada je brojevni pravac p paralelan s osi y, a njegove točke I i E imaju koordinate $(1, 0)$, odnosno $(1, 1)$. Realnom broju t na ovaj način pridružena je točka $E(t)$ kružnice k. Funkcija *koja broju* t *pridružuje broj* $\sin(t)$ *naziva se sinus i označava se sa* sin. *Brojevi koji se razlikuju za višekratnik broja* 2π*, pridruženi su na brojevnoj kružnici istoj točki, tj. vrijedi*

$$\sin(t) = \sin(t + 2k\pi) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Pokažimo sada da je 2π *temeljni period funkcije sinus. Neka je* $T > 0$ *temeljni period funkcije sinus. Uvrstimo li u jednadžbu iz definicije 8.* $x = \frac{\pi}{2}$ *dobit ćemo:*

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + T\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Kako je $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$*, ordinata točke* $E\left(\frac{\pi}{2}\right)$ *jednaka je* 1*, a na brojevnoj kružnici jedina točka s ordinatom* 1 *je točka* $(0,1)$ *kojoj su pridruženi brojevi:* $\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}, \ldots$ *Dakle,* $T \in \{0, -2\pi, 2\pi, 4\pi, \ldots\}$*, a najmanji pozitivan realan broj tog skupa je* 2π *što znači da je* 2π *temeljni period funkcije sinus.*

3 Načini zadavanja funkcije

3.1 Analitički zadane funkcije

Za funkciju zadanu zakonom pridruživanja (koji popularno nazivamo 'formulom'), kažemo da je zadana analitički.

Primjeri analitički zadanih funkcija:

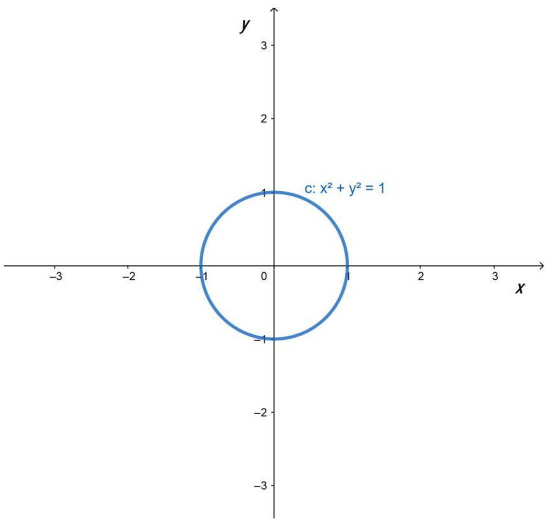
$$f(x) = 3x^2 - 2x + 1$$
$$g(x) = \ln(x - 1)$$
$$h(x) = \sqrt{2 - \sin(x)}.$$

3.2 Implicitno i eksplicitno zadane funkcije

Skup svih točaka (x, y) koji zadovoljavaju jednadžbu

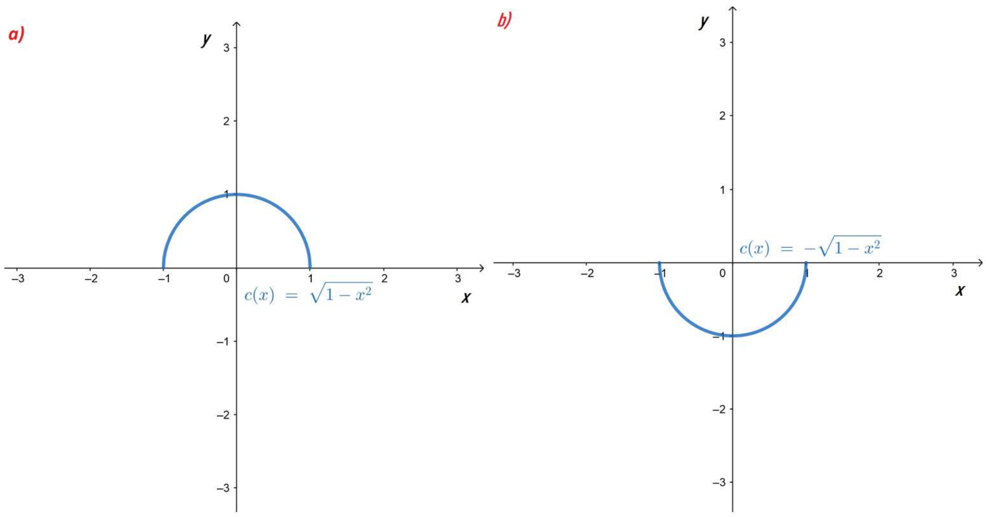
$$x^2 + y^2 = 1 \tag{2}$$

predstavlja kružnicu u ravnini $\mathbb{R}^2$ Slika 19.. Kako ova krivulja ne zadovoljava uvjet jedinstvenosti presjeka s pravcem paralelnim s osi ordinata, ona ne određuje funkcijsku vezu između varijabli x i y. Međutim, veza ovih varijabli ipak postoji.



Slika 19. Kružnica zadana jednadžbom $x^2 + y^2 = 1$

Računajući y iz (2) dobit ćemo dvije vrijednosti dane izrazom: $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$.



Slika 20.

Promotrimo krivulju prikazanu na Slici 20., a)). Ona zadovoljava kriterij jedinstvenosti što znači da jednoj vrijednosti varijable x odgovara jedna vrijednost varijable y. Ta krivulja određena je formulom:

$$y = f_1(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1. \tag{3}$$

Analogno, krivulja prikazana na Slici 20., b)) određuje funkcijsku zavisnost određenu formulom:

$$y = f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1. \tag{4}$$

Kažemo da je formulom $x^2 + y^2 = 1$ dana implicitna veza varijabli x i y, ili da je varijabla y zadana implicitnom formulom. Tu implicitnu formulu možemo prikazati u obliku nultočke funkcije dviju varijabli:

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{5}$$

Rješavanjem jednadžbe (5) po varijabli y određujemo eksplicitnu formulu tj. funkcijsku vezu varijabli x i y.

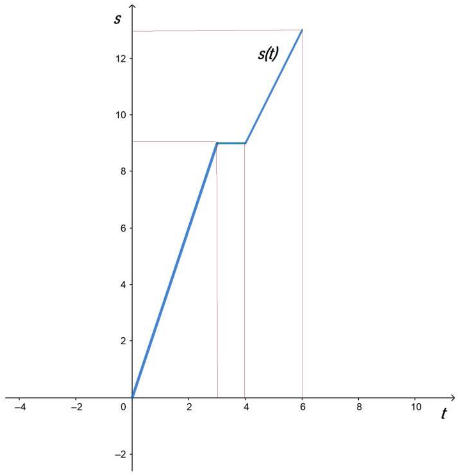
Primjer 9. *Odredite eksplicitnu formulu funkcije zadane jednadžbom $3x + 2y = 1$.*

Rješenje:

Jednadžba $F(x,y) = 0$, pri čemu je $F(x,y) = 3x + 2y - 1$, implicitna je jednadžba pravca. Njom je određena funkcijska veza između varijabli x i y. Njezin eksplicitni oblik možemo opisati izrazom $y = f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

3.3 Grafički zadane funkcije

Primjer 10. *Na grafu je plavom bojom prikazan prijeđeni put u kilometrima čovjeka koji je prva tri sata hodao brzinom 3 km/h, zatim se odmorio sat vremena, a nakon toga dva sata hodao brzinom 2 km/h. Funkcijski definirajte kretanje tog čovjeka.*



SLIKA 21.

Rješenje:

Traženu funkciju možemo opisati koristeći jednadžbu pravca kroz dvije točke na pojedinim intervalima, jer je prijeđeni put opisan linearnim funkcijama. Na segmentu $[0, 3]$ *jednadžba pravca je* $s(t) = 3t$*, funkcija je konstantna na intervalu* $\langle 3, 4]$ *i na njemu je definirana formulom* $s(t) = 9$*, za interval* $\langle 4, 6]$ *jednadžba pravca, a samim time i funkcije na intervalu je* $s(t) = 2t + 1$ *pa danu funkciju pomoću grafa možemo definirati:*

$$s(t) = \begin{cases} 3t & , 0 \leq t \leq 3 \\ 9 & , 3 < t \leq 4 \\ 2t+1 & , 4 < t \leq 6. \end{cases} \tag{6}$$

3.4 Tablično zadane funkcije

Uz pomoć četiriju osnovnih računskih operacija možemo odrediti vrijednosti polinoma i racionalnih funkcija. Razvoj primjene matematike u mehanici i fizici tijekom sedamnaestog i osamnaestog stoljeća, zahtijevao je računanje sa složenijim funkcijama, poput trigonometrijskih, logaritamskih i eksponencijalnih. Da bi se omogućio takav način računanja , bilo je nužno načiniti tablice funkcijskih vrijednosti, posebno trigonometrijskih funkcija i logaritamske funkcije. Na slici je prikazan izvadak iz tablice.

LOGARITAM BROJEVA

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	00 000	00 043	00 087	00 130	00 173	00 217	00 260	00 303	00 346	00 389
101	00 432	00 475	00 518	00 561	00 604	00 647	00 689	00 732	00 775	00 817
102	00 860	00 903	00 945	00 988	01 030	01 072	01 115	01 157	01 199	01 242
103	01 284	01 326	01 368	01 410	01 452	01 494	01 536	01 578	01 620	01 662
104	01 703	01 745	01 787	01 828	01 870	01 912	01 953	01 995	02 036	02 078
105	02 119	02 160	02 202	02 243	02 284	02 325	02 366	02 407	02 449	02 490
106	02 531	02 572	02 612	02 653	02 694	02 735	02 776	02 816	02 857	02 898
107	02 938	02 979	03 019	03 060	03 100	03 141	03 181	03 222	03 262	03 302
108	03 342	03 383	03 423	03 463	03 503	03 543	03 583	03 623	03 663	03 703
109	03 743	03 782	03 822	03 862	03 902	03 941	03 981	04 021	04 060	04 100
110	04 139	04 179	04 218	04 258	04 297	04 336	04 376	04 415	04 454	04 493
111	04 532	04 571	04 610	04 650	04 689	04 727	04 766	04 805	04 844	04 883
112	04 922	04 961	04 999	05 038	05 077	05 115	05 154	05 192	05 231	05 269

SLIKA 22. Tablica logaritama

Iz tablice prikazane na slici naprimjer možemo iščitati da je vrijednost od $\log(1.082) = 0.03423$.

4 Funkcijske jednadžbe

Kod proučavanja elementarnih funkcija važnu ulogu igraju funkcijske jednadžbe, a upravo ćemo se u ovom poglavlju baviti različitim načinima rješavanjima funkcijskih jednadžbi. Susrećemo ih već pri samim počecima srednjoškolskog obrazovanja, primjerice kod parnosti, neparnosti, periodičnosti funkcija koje smo definirali u 2. poglavlju.

Navedene jednadžbe:

$$f(-x) = f(x) \text{ (definicija parne funkcije)}$$
$$f(-x) = -f(x) \text{ (definicija neparne funkcije)}$$
$$f(x + 2\pi) = f(x) \text{ (definicija periodične funkcije s periodom } 2\pi)$$

predstavljaju funkcijske jednadžbe. Rješenje funkcijske jednadžbe je svaka funkcija koja zadovoljava tu jednadžbu.

Neka od rješenja prve funkcijske jednadžbe su:
$f(x) = |x|$, $f(x) = ax^{10}, a \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)$.

Neka od rješenja druge funkcijske jednadžbe su:
$f(x) = x$, $f(x) = ax^3, a \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$.

Neka od rješenja treće funkcijske jednadžbe su:
$f(x) = \cos(x)$, $f(x) = \sin(x)$.

Trigonometrijske funkcije $f(x) = \cos(x)$ i $g(x) = \sin(x)$ zadovoljavaju sljedeće funkcijske jednadžbe koje su poznate kao adicijski teoremi:

$$\begin{aligned} g(x+y) &= g(x)f(y) + f(x)g(y) \\ g(x-y) &= g(x)f(y) - f(x)g(y) \\ f(x+y) &= f(x)f(y) - g(x)g(y) \\ f(x-y) &= f(x)f(y) + g(x)g(y). \end{aligned}$$

Funkcijske jednadžbe zaokupile su interes matematičara prije dva stoljeća, a unatoč tomu do danas nije stvorena jedinstvena teorija o njima. Postoji vrlo malo općih metoda za rješavanje funkcijskih jednadžbi. Mnoge od njih ni dan danas nisu riješene. Poseban interes za rješavanje funkcijskih jednadžbi pokazao je Cauchy kojega smo spomenuli u 1. poglavlju, a koji je našao opće rješenje funkcijske jednadžbe:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

Osim navedene Cauchy je proučavao i druge tipove funkcijskih jednadžbi pa je tako upravo po njemu nazvana jednadžba:

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

U nastavku ćemo razmotriti različite tipove srednjoškolskih zadataka na temu funkcijske jednadžbe. Detaljno ćemo opisati korake rješavanja istih te na temelju toga zaključiti: kakvo se predznanje očekuje od učenika, kolika je složenost postupka rješavanja ovakvih zadataka te koji su ishodi učenja funkcijskih jednadžbi u srednjim školama.

Zadatak 1. *Odredite nepoznatu funkciju $g(x)$ ako vrijedi:*

a) $F(g(x)+2) = 3-4x, F(x) = -2x+3;$

b) $F(g(x)+2) = (3x+1)^2, F(x) = 3x-5;$

c) $F(g(x)+2) = \frac{16}{2^{3x}}, F(x) = 2^x;$

d) $F(g(x)+3) = 25^{x+3}, F(x) = 5^{x-1};$

Rješenje:

a) Uvrstimo li $g(x)+2$ umjesto x u $F(x) = -2x+3$ i izjednačimo dobiveni izraz s $3-4x$ dobivamo:

$$\begin{aligned} -2(g(x)+2)+3 &= 3-4x \\ -2g(x)-4+3 &= 3-4x \\ -2g(x) &= -4x+3-3+4 \\ -2g(x) &= -4x+4 / : (-2) \\ g(x) &= 2x-2. \end{aligned}$$

b) Uvrstimo li $g(x)+2$ umjesto x u $F(x) = 3x-5$ i izjednačimo dobiveni izraz s $(3x+1)^2$ dobivamo:

$$\begin{aligned} 3(g(x)+2)-5 &= (3x+1)^2 \\ 3g(x)+6-5 &= 9x^2+6x+1 \\ 3g(x) &= 9x^2+6x+1-1 \\ 3g(x) &= 9x^2+6x / : 3 \\ g(x) &= 3x^3+2x \\ g(x) &= x(3x+2). \end{aligned}$$

c) Uvrstimo li $g(x)+2$ umjesto x u $F(x)=2^x$ i izjednačimo dobiveni izraz s $\frac{16}{2^{3x}}$ dobivamo:

$$\begin{aligned} 2^{g(x)+2} &= \frac{16}{2^{3x}} \\ 2^{g(x)+2} &= \frac{2^4}{2^{3x}} \\ 2^{g(x)+2} &= 2^{4-3x} / eksponencijalne\ funkcije\ s\ jednakim\ bazama \\ g(x)+2 &= 4-3x \\ g(x) &= -3x+4-2 \\ g(x) &= -3x+2. \end{aligned}$$

d) Uvrstimo li $g(x)+3$ umjesto x u $F(x) = 5^{x-1}$ i izjednačimo dobiveni izraz s 25^{x+3} dobivamo:

$$\begin{aligned} 5^{g(x)+3-1} &= 25^{x+3} \\ 5^{g(x)+2} &= 5^{2(x+3)} \\ 5^{g(x)+2} &= 5^{2x+6} / eksponencijalne\ funkcije\ s\ jednakim\ bazama \\ g(x)+2 &= 2x+6 \\ g(x) &= 2x+6-2 \\ g(x) &= 2x+4. \end{aligned}$$

Zadatak 2. *Zadano je $f(x)=2x-1, f(g(x)-1)=2x^2+4x-3$. Odredite $g(\frac{1}{x})$.*
Rješenje:

Najprije je potrebno pronaći $g(x)$ kako bismo odredili $g(\frac{1}{x})$. Uvrstimo li $g(x)-1$ umjesto x u $f(x)=2x-1$ i izjednačimo dobiveni izraz s $2x^2+4x-3$ dobivamo:

$$\begin{aligned} 2(g(x)-1)-1 &= 2x^2+4x-3 \\ 2g(x)-2-1 &= 2x^2+4x-3 \\ 2g(x)-3 &= 2x^2+4x-3 \\ 2g(x) &= 2x^2+4x-3+3 \\ 2g(x) &= 2x^2+4x / :2 \\ g(x) &= x^2+2x. \end{aligned}$$

Nadalje računamo $g\left(\frac{1}{x}\right)$:

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{x}\right) &= \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{x}\right) \\ g\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} \\ g\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{1+2x}{x^2} / za\ x \neq 0\ jer\ 0\ nikad\ ne\ smije\ biti\ u\ nazivniku. \end{aligned}$$

Zadatak 3. *Odredite nepoznatu funkciju $f(x)$ ako vrijedi:*

a) $f(x+1) = 3x - 2$;

b) $f(x+3) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}$;

c) $f(3x-1) = 2x^2 - 3x + 5$;

d) $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$;

Rješenje:

a) Koristimo supstituciju $x + 1 = t \Rightarrow x = t - 1$.
Vratimo li se u početnu jednadžbu dobivamo:

$$f(t) = 3(t-1) - 2$$
$$f(t) = 3t - 3 - 2$$
$$f(t) = 3t - 5 / \textit{umjesto } t \textit{ uvrstimo } x \textit{ pa dobivamo:}$$
$$f(x) = 3x - 5.$$

b) Koristimo supstituciju $x + 3 = t \Rightarrow x = t - 3$.
Vratimo li se u početnu jednadžbu dobivamo:

$$f(t) = \frac{1}{2}(t-3)^2 + 2(t-3) + \frac{3}{2}$$
$$f(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 6t + 9) + 2(t-3) + \frac{3}{2}$$
$$f(t) = \frac{1}{2}t^2 - 3t + \frac{9}{2} + 2t - 6 + \frac{3}{2}$$
$$f(t) = \frac{1}{2}t^2 - t / \textit{umjesto } t \textit{ uvrstimo } x \textit{ pa dobivamo:}$$
$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x.$$

c) Koristimo supstituciju $3x - 1 = t \Rightarrow x = \frac{t+1}{3}$.
Vratimo li se u početnu jednadžbu dobivamo:

$$f(t) = 2\left(\frac{t+1}{3}\right)^2 - 3\left(\frac{t+1}{3}\right) + 5$$
$$f(t) = 2\left(\frac{t^2 + 2t + 1}{9}\right) - t - 1 + 5$$
$$f(t) = \frac{2t^2 + 4t + 2}{9} - t + 4 / \textit{svođenjem na zajednički nazivnik dobivamo:}$$
$$f(t) = \frac{2t^2 + 4t + 2 - 9t + 36}{9}$$
$$f(t) = \frac{2t^2 - 5t + 38}{9} / \textit{umjesto } t \textit{ uvrstimo } x \textit{ pa dobivamo:}$$
$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 38}{9}.$$

d) Koristimo supstituciju $\frac{x}{x+1} = t \Rightarrow x = \frac{t}{1-t}$.
Vratimo li se u početnu jednadžbu dobivamo:

$$f(t) = \left(\frac{t}{1-t}\right)^2$$
$$f(t) = \frac{t^2}{1-2t+t^2} / \textit{umjesto } t \textit{ uvrstimo } x \textit{ pa dobivamo:}$$
$$f(x) = \frac{x^2}{1-2x+x^2} / \textit{za } x \neq 1 \textit{ jer } 0 \textit{ nikad ne smije biti u nazivniku.}$$

Zadatak 4. *Ako je* $f(x-2) = x^3 - 2x - 1$, *izračunajte* $f(1)$.
Rješenje:
Koristimo supstituciju $x - 2 = t \Rightarrow x = t + 2$

$$f(t) = (t+2)^3 - 2(t+2) - 1$$
$$f(t) = t^3 + 6t^2 + 12t + 8 - 2t - 4 - 1$$
$$f(t) = t^3 + 6t^2 + 10t + 3$$
$$f(1) = 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 + 3$$
$$f(1) = 1 + 6 + 10 + 3$$
$$f(1) = 20.$$

Zadatak 5. *Ako je* $f(x+a) = x^2 + x + 2$, *izračunajte* $f(x-a)$.
Rješenje:
Koristimo supstituciju $x + a = t \Rightarrow x = t - a$

$$f(t) = (t-a)^2 + t - a + 2 / \textit{umjesto } t \textit{ uvrstimo } x \textit{ pa dobivamo:}$$
$$f(x) = (x-a)^2 + x - a + 2 / \textit{kada smo odredili } f(x) \textit{ lako možemo odrediti } f(x-a).$$
$$f(x-a) = (x-a-a)^2 + x - a - a + 2$$
$$f(x-a) = (x-2a)^2 + x - 2a + 2.$$

Zadatak 6. *Ako je* $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$, *odredite* $f(x)$.
Rješenje:

Koristimo supstitucije $x = t$ *i* $\frac{1}{x} = t$ *te dobivamo sustav jednadžbi:*

$$\begin{aligned}
f(t) + 2f\left(\frac{1}{t}\right) &= t\\
f\left(\frac{1}{t}\right) + 2f(t) &= \frac{1}{t} / \cdot (-2)\\
f(t) + 2f\left(\frac{1}{t}\right) &= t\\
-2f\left(\frac{1}{t}\right) - 4f(t) &= \frac{-2}{t} / \textit{zbrajanjem jednadžbi dobivamo:}\\
-3f(t) &= \frac{t^2 - 2}{t} / : (-3)\\
f(t) &= \frac{-t^2 + 2}{3t} / \textit{umjesto } t \textit{ uvrstimo } x \textit{ pa dobivamo:}\\
f(x) &= \frac{-x^2 + 2}{3x} / \textit{za } x \neq 0 \textit{ jer } 0 \textit{ nikad ne smije biti u nazivniku.}
\end{aligned}$$

Zadatak 7. *Ako je* $f(x-1) = 2x - 3$, *izračunajte* $f(f(x^2 - x + 1))$.
Rješenje:

Koristimo supstituciju $x - 1 = t \Rightarrow x = t + 1$

$$\begin{aligned}
f(t) &= 2(t+1) - 3\\
f(t) &= 2t + 2 - 3\\
f(t) &= 2t - 1 / \textit{umjesto } t \textit{ uvrstimo } x \textit{ pa dobivamo:}\\
f(x) &= 2x - 1 / \textit{kada smo odredili } f(x) \textit{ lako možemo odrediti } f(x^2 - x + 1)\\
f(x^2 - x + 1) &= 2(x^2 - x + 1) - 1\\
f(x^2 - x + 1) &= 2x^2 - 2x + 2 - 1\\
f(x^2 - x + 1) &= 2x^2 - 2x + 1 / \textit{koristeći definiciju kompozicije lako odredimo } f(f(x^2 - x + 1))\\
f(f(x^2 - x + 1)) &= 2(2x^2 - 2x + 1) - 1\\
f(f(x^2 - x + 1)) &= 4x^2 - 4x + 2 - 1\\
f(f(x^2 - x + 1)) &= 4x^2 - 4x + 1.
\end{aligned}$$

Zadatak 8. *Odredite sve funkcije* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *takve da za sve realne brojeve* x *i* y *vrijedi:*

$$f(x + f(y)) = f(f(y)) + 2xf(y) + x^2.$$

Rješenje:

Koristimo supstituciju $x = -f(y)$ i dobivamo:

$$\begin{aligned}
f(-f(y) + f(y)) &= f(f(y)) - 2f(y)f(y) + (-f(y))^2 \\
f(0) &= f(f(y)) - 2f(y)^2 + f(y)^2 \\
f(0) &= f(f(y)) - f(y)^2 / \textit{umjesto } y \textit{ uvrstimo } 0\text{:} \\
f(0) &= f(f(0)) - f(0)^2 / \textit{umjesto } f(0) \textit{ uvrstimo } a\text{:} \\
a &= f(a) - a^2 / \textit{sređivanjem jednakosti dobivamo:} \\
f(a) &= a^2 + a / \textit{vraćamo se na jednakost iz teksta zadatka i uvrstimo } y = 0\text{:} \\
f(x + f(0)) &= f(f(0)) + 2xf(0) + x^2 / \textit{kako je } f(0) = a \textit{ slijedi:} \\
f(x + a) &= f(a) + 2xa + x^2 / \textit{kako je } f(a) = a^2 + a \textit{ slijedi:} \\
f(x + a) &= a^2 + a + 2xa + x^2 / \textit{sređivanjem jednakosti dobivamo:} \\
f(x + a) &= (x + a)^2 + a.
\end{aligned}$$

Za $f(x+a) = (x+a)^2 + a$ želimo pronaći $f(x)$. Koristimo supstitucija $x + a = t$. Dobivamo da je $f(t) = t^2 + a$ pri čemu je a proizvoljan realna konstanta. Zamijenimo li t s x dobivamo rješenje funkcijske jednadžbe $f(x + f(y)) = f(f(y)) + 2xf(y) + x^2$, a to je $f(x) = x^2 + a$.

Zadatak 9. *Odredite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x i y vrijedi:*

$$f(xy)(x + f(y)) = x^2 f(y) + y^2 f(x).$$

Rješenje:

Uvrštavanjem $x = y = 0$ u početnu jednadžbu dobivamo:

$$\begin{aligned}
f(0 \cdot 0)(0 + f(0)) &= 0^2 f(0) + 0^2 f(0) / \textit{sređivanjem jednakosti dobivamo:} \\
f(0)^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem $x = y = 1$ u početnu jednadžbu dobivamo:

$$\begin{aligned}
f(1 \cdot 1)(1 + f(1)) &= 1^2 f(1) + 1^2 f(1) \\
f(1)(1 + f(1)) &= 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(1) \\
f(1) + f(1)^2 &= f(1) + f(1) / \textit{sređivanjem jednakosti dobivamo:} \\
f(1)^2 &= f(1).
\end{aligned}$$

Postoje točno dva rješenja jednadžbe $f(1)^2 = f(1)$, a to su $f(1) = 0$ i $f(1) = 1$.
Ako je $f(1) = 0$, uvrštavanjem $x = 1$ u početnu jednadžbu dobivamo da za svaki $y \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$f(y)(1 + f(y)) = f(y), \textit{ tj. nakon sređivanja } f(y) = 0.$$

Ako je $f(1) = 1$, uvrštavanjem $y = 1$ u početnu jednadžbu dobivamo da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$f(x)(x+1) = x^2 + f(x), \text{ tj. nakon sređivanja } xf(x) = x^2.$$

Podijelimo li $xf(x) = x^2$ *s* x *za* $x \neq 0$ *dobivamo* $f(x) = x$.
Budući da je i $f(0) = 0 \Rightarrow f(x) = x$ *za svaki* $x \in \mathbb{R}$. *Uvrštavanjem vidimo da funkcije* $f(x) = x$ *i* $f(x) = 0$ *zaista zadovoljavaju početnu jednadžbu te su to tražena rješenja.*

Na temelju riješenih zadataka iz područja funkcijskih jednadžbi možemo zaključiti da se od učenika očekuje dobro vladanje temeljnim funkcijskim pojmovima: domenom funkcije, inverzom, kompozicijom, korištenjem supstitucija kao i otprije poznatim svojstvima različitih funkcija poput svojstva funkcije opće potencije. Pojedini zadatci zehtijevaju od učenika da razvijaju matematičko mišljenje što je posebno vidljivo u posljednja dva zadatka jer za rješavanje takvih zadataka ne postoji propisano pravilo i formula, dapače učenici na više načina mogu doći do točnog rješenja. Načine i sredstva na koje učitelji mogu pomoći učenicima za rješavanje zadataka i razvijanje takozvanog funkcijskog načina razmišljanja razmotrit ćemo u idućem poglavlju.

5 Poučavanje funkcija u osnovnim i srednjim školama

U ovom poglavlju razmatrat ćemo važnost izučavanja funkcija te koliko je usvajanje ovoga pojma bitno u procesu matematičkog obrazovanja. Upravo o važnosti funkcija govori nam prisutnost ovog pojma u matematičkom modeliranju prilikom opisivanja zavisnosti među veličinama (npr. zavisnosti tlaka plina o volumenu i temperaturi). Funkcije su bitan element matematičkih struktura poput operacija u algebarskim strukturama. Pomoću njih uspoređujemo strukture kad promatramo homomorfizme među njima. Pojedine dijelove matematike možemo shvatiti kao načine za opis funkcija: teorija grupa je u osnovi teorija transformacija, linearna algebra je teorija linearnih funkcija, matematička analiza je teorija neprekidnih i derivabilnih funkcija... Pojam funkcije povezan je i s algoritamskim sadržajem bitnim za konstruktivni i programski pristup rješavanju problema. Jasno je kako je razvijanje funkcijskog načina razmišljanja vrlo bitno u matematičkom obrazovanju. Upravo iz tih razloga važno je spomenuti i što se prema obrazovnom kurikulumu očekuje od nastavnika i učenika osnovnih i srednjih škola prilikom izučavanja funkcija.

Prema 'Nacionalnom okvirnom kurikulumu' od učenika se u osnovnim školama očekuje da znaju prikazati jednostavnu ovisnost dviju veličina (linearna, čista kvadratna, drugi korijen) riječima, tablicom pridruženih vrijednosti, formulom i grafički. Od učenika srednjih strukovnih škola se očekuje da opišu i izvedu jednostavne ovisnosti dviju veličina formulama, tablicama, grafovima i riječima te da prepoznaju i protumače karakteristična svojstva jednostavnih grafova (monotonost, periodičnost) i njihove karakteristične točke (nultočke, ekstreme), te uspoređuju jednostavne grafove. Od učenika gimnazije se uz navedeno dodatno očekuje da prepoznaju, odrede i protumače karakteristične elemente i svojstva jednostavnih funkcija, analiziraju linearne, kvadratne, eksponencijalne, logaritamske i trigonometrijske funkcije te rabe njihova svojstva. Također od njih se očekuje i da primjenjuju funkcije i njihove grafove te jednadžbe i nejednadžbe u rješavanju matematičkih problema i problema u ostalim odgojno-obrazovnim područjima i svakodnevnom životu.

Iako 'Nacionalni okvirni kurikulum' jasno precizira što se očekuje od učenika prilikom izučavanja funkcija, matematičari se slažu kako navedeni sadržaji najčešće nisu dovoljni za razumijevanje ovog pojma jer sadržaji u školskim udžbenicima nisu korelirani s drugim nastavnim predmetima poput fizike i informatike. Nedovoljno su obrađena geometrijska preslikavanja na kojima se mogu vizualno predstaviti mnoga svojstva funkcija i koja mogu pomoći u boljem razumijevanju geometrije i efikasnijem modeliranju i rješavanju geometrijskih problema. Također prema kurikulumu se ne precizira korištenje programa za crtanje i ispitivanje svojstava funkcija kojima se na jednostavan način može proširiti skup funkcija koje se mogu ispitivati i pomoću kojih se može modelirati širok raspon problema.

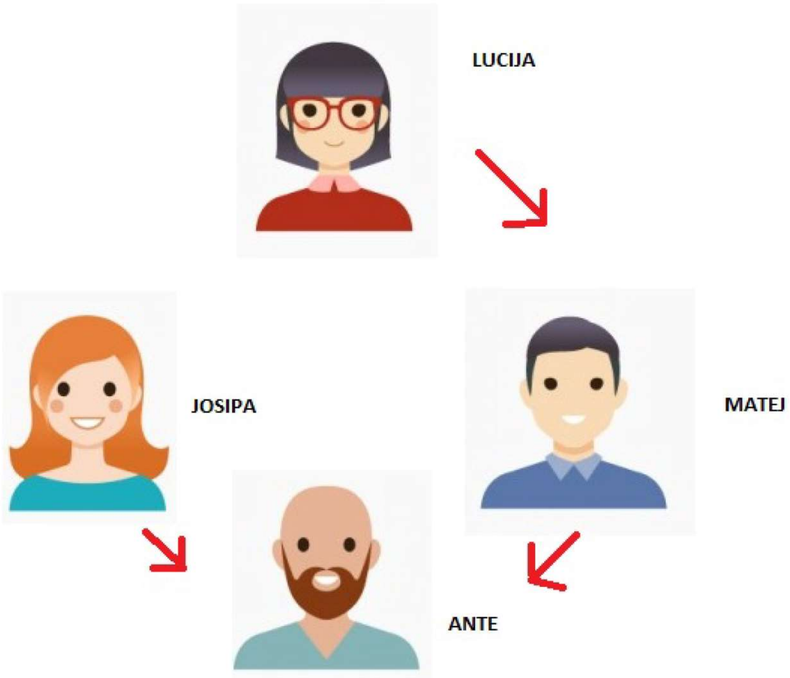
Kako se pojam funkcije u osnovnoškolskom obrazovanju uvodi relativno kasno, tek u 7. razredu, a detaljno se izučava tek u 4. razredu srednjoškolskog obrazovanja u nastavku ćemo razmotriti nekoliko jednostavnih primjera pomoću kojih se ovaj pojam na zanimljiv način i kroz igru može implementirati u nastavi učenicima nižih razreda osnovnih škola kako bi im isti u budućem stjecanju znanja o funkcijama bio što razumljiviji.

Primjer 11. *Na slici su prikazani rodbinski odnosi u jednoj obitelji pri čemu svatko strelicom pokazuje na svoga tatu. Gledajući sliku odgovorite na pitanja:*

a) Tko je Mateju tata?

b) Ima li Josipa brata?

c) Tko je Luciji Ante?



Slika 23. Grafički prikaz rodbinskih odnosa u obitelji

Rješenje:

a) Znamo da svatko strelicom pokazuje na svoga tatu. Iz grafa možemo iščitati kako Matej strelicom pokazuje na Antu. Prema tome Ante je Mateju tata.

b) Iz grafa možemo iščitati kako Josipa strelicom pokazuje na Antu što znači da je Ante Josipin tata, ali i Matej strelicom pokazuje na Antu pa je Ante i Matejov tata. Zaključujemo kako su Josipa i Matej brat i sestra, odnosno Josipa ima brata Mateja.

c) Iz grafa možemo iščitati kako Lucija strelicom pokazuje na Mateja što znači da je Matej Lucijin tata, a Matejev tata je Ante jer Matej strelicom pokazuje na njega što znači da je Ante tata Lucijinog tate, odnosno Lucijin djed.

U višim razredima osnovnoškolskog obrazovanja ovaj primjer se može nadograditi uvođenjem izraza $T(x)$ za tatu od x pri čemu x predstavlja određenu osobu na grafu. Prema tome $T(Lucija) = Matej$, a $T(T(Lucija)) = T(Matej) = Ante$.

Primjer 12. *Promotrimo dvije funkcije, funkciju MN koja slovo M u riječi zamjenjuje slovom N npr. MN(MINA)=NINA i funkciju A koja svaki samoglasnik u riječi zamjenjuje samoglasnikom A npr. A(ONA)=ANA. Vodeći se ovim pravilom odredite:*

a) MN(MAMA);

b) A(LOKOT);

c) MN(A(RIME));

d) A(MN(LIM));

Rješenje:

a) Znamo da funkcija MN slovo M mijenja u N. Prema tome MN(MAMA)=NANA.

b) Znamo da funkcija A sve samoglasnike u riječi mijenja u samoglasnik A. Prema tome A(LOKOT)=LAKAT.

c) Da bismo odredili MN(A(RIME)) najprije na riječ RIME djelujemo funkcijom A i sve samoglasnike u riječi zamijenimo samoglasnikom A, a zatim slovo M u riječi zamijenimo slovom N. Prema tome MN(A(RIME))=MN(RAMA)=RANA.

d) Da bismo odredili A(MN(LIM)) najprije na riječ LIM djelujemo funkcijom MN i slovo M zamijenimo slovom N, a zatim samoglasnik I u riječi zamijenimo samoglasnikom A. Prema tome A(MN(LIM))=A(LIN)=LAN.

U višim razredima osnovnoškolskog i u srednjoškolskom poučavanju pojma funkcije možemo koristiti zadatke pomoću kojih će učenici samostalno određivati domenu i kodomenu funkcije kombinirajući teoriju funkcija s prethodno usvojenim matematičkim gradivom. Takav način poučavanja razmotrit ćemo rješavajući idući primjer.

Primjer 13. *Odredite domenu, kodomenu i pravilo pridruživanja koje:*

a) duljini stranice kvadrata pridružuje njezin opseg.

b) svakomu prirodnom broju pridružuje njegov sljedbenik.

c) polumjeru kružnice pridružuje njezin promjer.

d) svakomu cijelom broju pridružuje njegov suprotni broj.

Rješenje:

a) *Duljina stranice kvadrata je pozitivan realan broj, a opseg kvadrata je također pozitivan realan broj koji se računa formulom* $o = 4a$. *Prema tome* $\mathcal{D} = \mathbb{R}^+$, $\mathcal{R} = \mathbb{R}^+$, *a pravilo pridruživanja glasi* $f(a) = 4a$.

b) *Kako funkcija iz teksta zadatka svakom prirodnom broju pridružuje njegov sljedbenik znamo da je* $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \mathbb{N}$, *a pravilo pridruživanja sljedbenika prirodnom broju je* $f(n) = n + 1$.

c) *Polumjer kružnice je pozitivan realan broj, a promjer kružnice je također pozitivan realan broj koji se računa formulom* $R = 2r$. *Prema tome* $\mathcal{D} = \mathbb{R}^+$, $\mathcal{R} = \mathbb{R}^+$, *a pravilo pridruživanja glasi* $f(r) = 2r$.

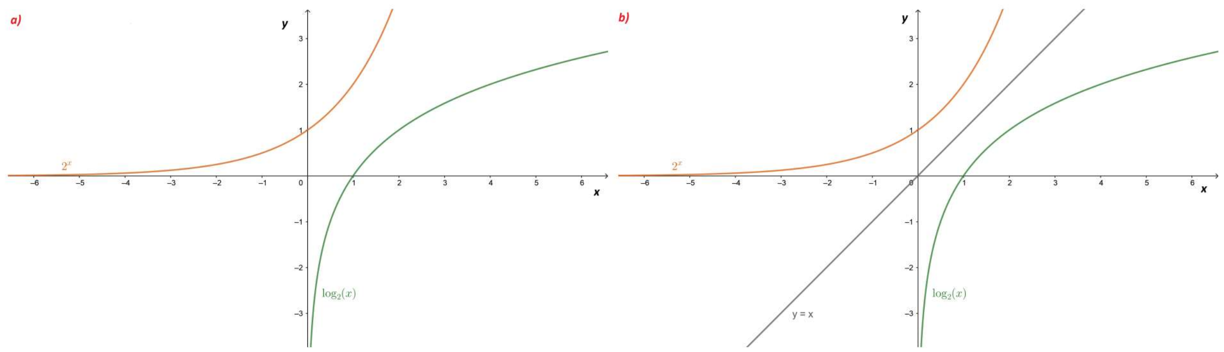
d) *Kako funkcija iz teksta zadatka svakom cijelom broju pridružuje njemu suprotan znamo da je* $\mathcal{D} = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \mathbb{Z}$, *a pravilo pridruživanja suprotnog broja cijelom broju je* $f(x) = -x$.

Rješavajući ove jednostavne primjere možemo zaključiti kako se pojam funkcije može vrlo jednostavno uvesti u nastavi matematike, a da se pri tome učenike ne opterećuje s preopsežnim sadržajem novih informacija. Tako naprimjer, predznanje i činjenice koje se očekuju za rješavanje prethodnog zadatka, učenici bi trebali imati na temelju osnovnoškolskog gradiva iz matematike.

U 2. razredu srednje škole obrađuju se kvadratne, polinomne, eksponencijalne, logaritamske i trigonometrijske funkcije te njima pripadne jednadžbe i nejednadžbe. Prilikom obrade logaritamskih i eksponencijalnih funkcija učenicima se pomoću grafova istih može uvesti i pojam inverzne funkcije.

Primjer 14. *U koordinatnom sustavu na istoj slici nacrtajte grafove funkcija* $\log_2(x)$ *i* 2^x. *Što možete zaključiti?*

Rješenje:



Slika 24. Grafovi funkcija $\log_2(x)$ i 2^x

Nakon što nacrtaju grafove funkcija od učenika se očekuje da uoče kako su te dvije funkcije međusobno simetrične s obzirom na pravac $y = x$. Kako bi im ta simetričnost bila očitija, možemo od učenika tražiti da nacrtaju pravac $y = x$ kao što je prikazano na Slici 24. b). Nakon toga možemo ih upoznati s terminom inverzne funkcije i reći ima kako su upravo $\log_2(x)$ i 2^x primjeri dviju funkcija koje su inverzna jedna drugoj.

Iako se pojam funkcije prema kurikulumu detaljno obrađuje tek u 4. razredu srednje škole, ovi primjeri nam pokazuju kako se s lakoćom termini vezani za funkcije mogu uvoditi u nastavi. Na taj način učenicima se mogu olakšati i drugi nastavni predmeti poput fizike za razumijevanje $v-t$, $s-t$ dijagrama koji se obrađuju već u osnovnoj školi. Bitno je isticanje sveprisutnosti funkcija kako u matematici, tako i u ostalim prirodoslovnim predmetima jer samo tako učenici mogu razviti funkcijski način razmišljanja koji je u 21. stoljeću, vremenu informatičke i tehnološke pismenosti, postao iznimno bitan.

6 Zaključak

Funkcije su temeljni matematički pojam na kojemu se zasnivaju brojna područja matematike. Definicija pojma funkcije javila se iz potrebe matematičara da na precizan način opišu zavisnost jedne veličine o drugoj. Razumijevanjem pojma funkcije i njemu pripadnih svojstava razvija se funkcijski način razmišljanja koji je u 21. stoljeću, vremenu informatičke pismenosti veoma bitan. Funkcijske jednadžbe su posebna vrsta jednadžbi usko povezane s pojmom funkcije. Za rješavanje funkcijskih jednadžbi potrebno je dobro savladati sve pojmove vezane za funkciju, zbog čega se one posljednje uvode u nastavu matematike. Kako bi pojam funkcije učenicima bio što razumljiviji, potrebno ga je što ranije uvesti u nastavu jer postoje brojni primjeri iz svakodnevnog života koji na jednostavan način i kroz igru mogu pomoći učenicima u savladavanju ovoga pojma.

7 Sažetak

U prvom poglavlju diplomskog rada proučavamo povijesni koncept razvoja pojma funkcije. Razmatramo s kojim su se problemima susretali matematičari i filozofi prilikom preciznog definiranja pojma funkcije. U drugom poglavlju definiramo pojam funkcije i temeljna svojstva vezana za funkciju: domena, kodomena, pravilo pridruživanja, kompoziciju funkcije, monotonost... Rješavanjem različitih zadataka na konkretnim primjerima prikazujemo svako navedeno svojstvo funkcije. U trećem poglavlju prikazujemo načine na koji se funkcija može zadati te ističemo njihovu primjenu u matematici. U četvrtom poglavlju proučavamo funkcijske jednadžbe i rješavamo različite tipove zadataka s kojima se susreću učenici u nastavi matematike. U petom poglavlju rada ističemo važnost poučavanja pojma funkcije te načine na koji se isti može uvesti u nastavu matematike. Razmatramo prednosti i nedostatke poučavanja ovoga pojma u današnjem školstvu te razmatramo kako profesori matematike mogu pomoći učenicima u razumijevanju funkcija.

Ključne riječi: Povijesni pregled pojma funkcije, Funkcija, Domena, Kodomena, Svojstva funkcija, Zadavanje funkcije, Funkcijske jednadžbe, Poučavanje funkcija.

8 Abstract

In the first chapter of thesis we consider the historical development of the notion of function. We consider with which problems mathematicians and philosophers encountered during defining of the term function. In the second chapter we define the concept of function and basic properties related to the function: domain, codomain, rule of accession, the composition, the monotony... By solving various tasks on concrete examples we showed each specified property function. The third chapter presents the ways in which the function can specify and emphasize their application in math. In the fourth chapter we study functional equations and solve different types of tasks faced by students in mathematics. In the fifth chapter of the work we emphasize the importance of teaching the notion of functions and ways in which the same can be introduced into the teaching of mathematics. We discuss the advantages and disadvantages of teaching this concept in today's school system and look at how math teachers can help students understand the function.

Keywords: Historical overview of the function, Function, Domain, Codomanin, Properties of functions, Assigning function, Functional equation, Teaching function.

Životopis

Moje ime je Denis Jukić i rođen sam 5. veljače 1993. u Slavonskome Brodu. Osnovnu školu Đure Pilara upisao sam 2000. godine, a završio 2008. godine. Svoje obrazovanje nastavio sam iste godine u općoj gimnaziji Matije Mesića koju sam uspješno završio 2012. godine. Te godine upisao sam Preddiplomski studij matematike Odjela za matematiku na Sveučilištu J.J.Strossmayera u Osijeku, a 2015. godine prebacio sam se na Nastavnički studij matematike i informatike. Za vrijeme fakulteta, od listopada 2015. do svibnja 2019. radio sam preko studentskog servisa kao agent u prodaji usluga Hrvatskog Telekoma.

Literatura

[1] S. Antoliš, A. Copić , *Matematika* 4, Školska knjiga, Zagreb, 2007.

[2] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika*, Gradska tiskara, Osijek, 1998.

[3] E. R. Marinić Kragić, *Funkcije u nastavi matematike*, Matematika i škola, **38**(2007), 105–110

[4] J. P. da Ponte, *The History of the Concept of Function and Some Educational Implications*, The Mathematics Educator, **3**(1992), 3–8.