Osnovni teoremi diferencijalnog računa funkcije jedne varijable

Devčić, Katarina

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Katarina Devčić

Osnovni teoremi Diferencijalnog računa funkcije jedne varijable

Završni rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Katarina Devčić

Osnovni teoremi Diferencijalnog računa funkcije jedne varijable

Završni rad

Mentor: prof. dr. sc. Kristian Sabo

Osijek, 2019.

Fundamental Theorems of Differential Calculus in One Variable Function

Sažetak

Diferencijalni je račun područje matematičke analize koje ispituje funkcije koristeći se njihovim derivacijama. Osnovni su teoremi Diferencijalnog računa: Fermatov, Rolleov, Lagrangeov, Cauchyjev i Taylorov. U ovome ćemo radu svaki od tih teorema dokazati te ćemo za svaki navesti primjer. Za Fermatov, Rolleov, Lagrangeov i Cauchyjev pojasnit ćemo i geometrijske interpretacije.

Ključne riječi: Fermatov teorem, Rolleov teorem, Lagrangeov teorem, Cauchyjev teorem, Taylorov teorem

Abstract

The differential calculus denotes an area of mathematical analysis that concerns itself with examining functions by using functional derivations. The fundamental theorems of differential calculus are: Fermat's theorem, Rolle's theorem, Lagrange's theorem, Cauchy's theorem and Taylor's theorem. In this paper we focus on proving each of the above theorems as well as providing an adequate example for each of them. In cases of Fermat's, Rolle's Lagrange's and Cauchy's theorem we will also explain geometrical interpretations.

Key words: Fermat's theorem, Rolle's theorem, Lagrange's theorem, Cauchy's theorem, Taylor's theorem

Sadržaj

1 Uvod

U ovom ćemo završnom radu iskazati i dokazati osnovne teoreme Diferencijalnog računa. Rad se sastoji od 5 poglavlja. U prvom ćemo poglavlju proučiti Fermatov teorem koji daje nužne uvjete za postojanje lokalnog ekstrema derivabilne funkcije. Ovaj ćemo teorem iskoristiti u dokazu Rolleovog teorema koji nam daje uvjete uz koje postoji stacionarna točka neke funkcije. Potom ćemo iskazati i dokazati Lagrangeov teorem. Kao posljedice ovoga teorema navest ćemo tri teorema na osnovi kojih ćemo dobiti postupak kako da, koristeći derivaciju funkcije, odredimo lokalne ekstreme i intervale u kojima je funkcija monotona. Zatim ćemo proučiti Cauchyjev teorem koji je poopćenje Lagrangeovog teorema. Posljednji teorem kojega ćemo iskazati i dokazati je Taylorov. Taj teorem nam daje uvid o aproksimaciji funkcije polinomom.

2 Fermatov teorem

Na samom početku, kako bi nam Fermatov teorem kojega ćemo u ovome poglavlju iskazati i dokazati, bio u potpunosti jasan definirajmo lokalne ekstreme funkcije jedne varijable.

Definicija 2.1. *Neka je dana funkcija $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ i točka $x_0 \in (a,b)$.*

i) Funkcija f postiže lokalni minimum u točki x_0 ako postoji $\delta > 0$, takav da za svaki $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (a,b)$ vrijedi: $f(x) \geq f(x_0)$, tj.

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(x_0)$$

ii) Funkcija f postiže lokalni maksimum u točki x_0 ako postoji $\delta > 0$, takav da za svaki $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (a,b)$ vrijedi: $f(x) \leq f(x_0)$, tj.

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(x_0)$$

Kada smo definirali lokalne ekstreme, iskažimo tvrdnju Fermatovog teorema koji kaže da ako funkcija ima ekstrem u nekoj točki i ako ima tangentu u toj točki, onda je u tom slučaju tangenta horizontalna, tj. koeficijent smjera tangente jednak je nuli.

Teorem 2.1 (Vidi [2]). *(Fermatov teorem) Neka je funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ takva da u točki $x_0 \in (a,b)$ ima lokalni ekstrem. Ako je funkcija f derivabilna u točki x_0, onda je njezina derivacija jednaka nuli, tj. $f'(x_0) = 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da funkcija f u točki $x_0 \in (a,b)$ postiže lokalni maksimum. To prema Definiciji 2.1 znači da postoji $\delta > 0$ takav da je

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(x_0).$$

Derivacija funkcije f u točki x_0 je

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ako je $|x - x_0| < \delta$ onda je $f(x) \leq f(x_0)$. Kako se x_0 nalazi unutar intervala (a,b), $x - x_0$ može biti pozitivan ili negativan. Ako je $x - x_0 < 0$ onda je

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \textit{te je} \quad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

a ako je $x - x_0 > 0$, onda je

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \textit{te je} \quad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Prema pretpostavci funkcija f je derivabilna u x_0 te je

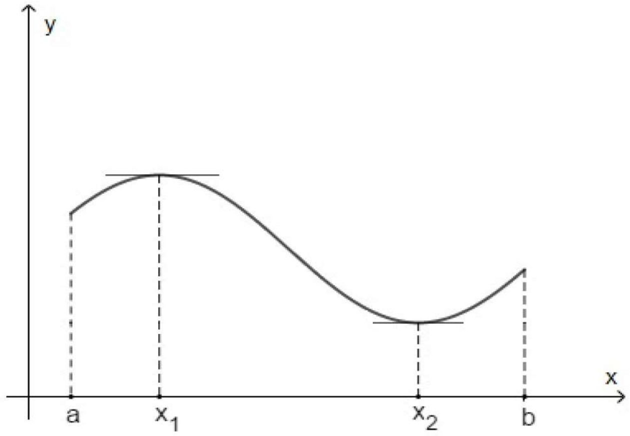
$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

a to povlači da je $f'(x_0) = 0$ i time je teorem dokazan.

□

Posljedica je Fermatovog teorema sljedeći korolar.

Korolar 2.1. *Funkcija f može imati ekstrem u točki $x \in (a, b)$ samo ako nije derivabilna u x (odnosno, ako f' ne postoji u x) ili ako je $f'(x) = 0$.*



Slika 1: Geometrijska interpretacija Fermatovog teorema

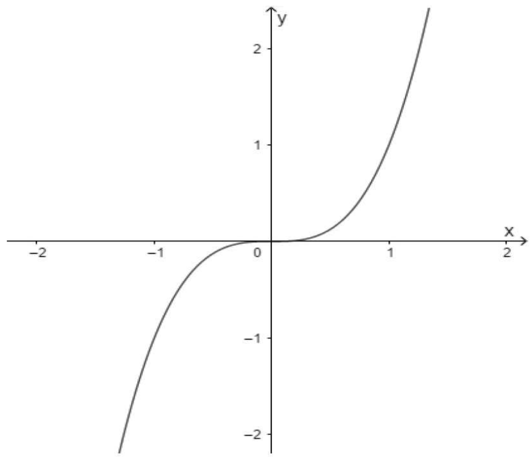
Napomena 2.1 (Geometrijska interpretacija Fermatovog teorema)**.** *Tangenta na graf derivabilne funkcije u točki lokalnog ekstrema paralelna je s apscisom pa je koeficijent smjera tangente jednak nuli(vidi* Sliku 1*).*

Navedimo dvije važne napomene vezane za Fermatov teorem.

Napomena 2.2. *Fermatov teorem daje nužne uvjete za postojanje lokalnog ekstrema funkcije koja je derivabilna.*

Napomena 2.3. *Obrat Fermatovog teorema ne vrijedi. Ilustrirajmo to sljedećim primjerom.*

Primjer 2.1. *Ispitajmo vrijedi li obrat Fermatovog teorema za funkciju $f(x) = x^3$ na segmentu $[-2, 2]$.*

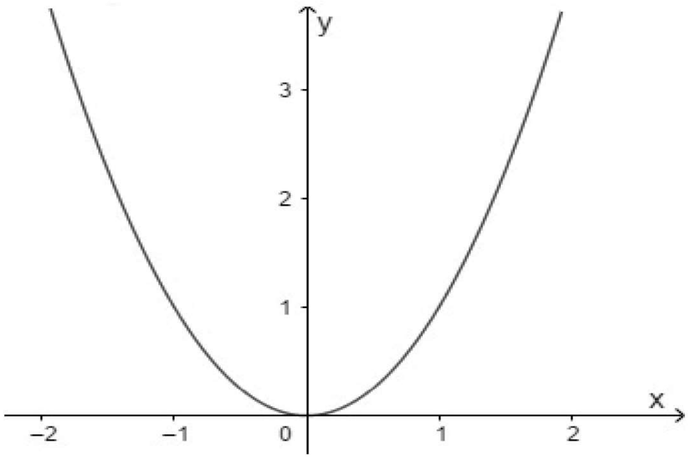


Slika 2: Graf funkcije $f(x) = x^3$

Izjednačavanjem dane funkcije (čiji je graf Slika 2) s 0 dobivamo $x^3 = 0$, tj. $x = 0$. Deriviranjem dobivamo $f'(x) = 3x^2$. Derivacija finkcije f u $x_0 = 0$ postoji i jednaka je $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$, ali u $x_0 = 0$ nema lokalnog ekstrema pa prema tome ne vrijedi obrat Fermatovog teorema.

Navedimo sada primjer funkcije za koju vrijede svi uvjeti Fermatovog teorema.

Primjer 2.2. *Ispitajmo zadovoljava li funkcija $f(x) = x^2$ na segmentu $[-2, 2]$ sve uvjete Fermatovog teorema.*



Slika 3: Graf funkcije $f(x) = x^2$

Deriviramo li zadanu funkciju (čiji je graf Slika 3), dobivamo $f'(x) = 2x$. Izjednačavanjem derivacije s 0 imamo $2x = 0$ iz čega slijedi da je $x = 0$. Kako je $f(0) = 0$, 0 je stacionarna točka dane funkcije. Provjerimo ima li funkcija lokalni ekstrem. Druga je derivacija funkcije pozitivan broj, tj. $f''(x) = 2 > 0$ pa funkcija u $x_0 = 0$ ima lokalni minimum. Funkcija f je derivabilna i njezina je derivacija jednaka $f'(x) = 2x$. Uvrstimo li $x_0 = 0$ u $f'(x)$ dobivamo da je $f'(0) = 0$. Budući da funkcija ima lokalni ekstrem i da je prva derivacija jednaka nuli, funkcija ispunjava uvjete Fermatovog teorema.

3 Rolleov teorem

Prije samoga iskaza Rolleovog teorema definirajmo stacionarnu (kritičnu) točku neke funkcije te iskažimo teorem kojeg ćemo iskoristiti u dokazu Rolleovog teorema.

Definicija 3.1. *Neka je $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija. Kažemo da je $x_0 \in (a, b)$ stacionarna ili kritička točka ako je $f'(x_0) = 0$.*

Teorem 3.1 (Vidi [2])**.** *Ako je funkcija f neprekidna na segmentu $[a, b]$, ona je na tom intervalu ograničena i postiže svoj infimum i supremum.*

Teorem 3.2 (Vidi [6])**.** *(Rolleov teorem) Neka je dana funkcija $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Vrijede li sljedeće pretpostavke:*

i) f je neprekidna na $[a, b]$

ii) f je derivabilna na (a, b)

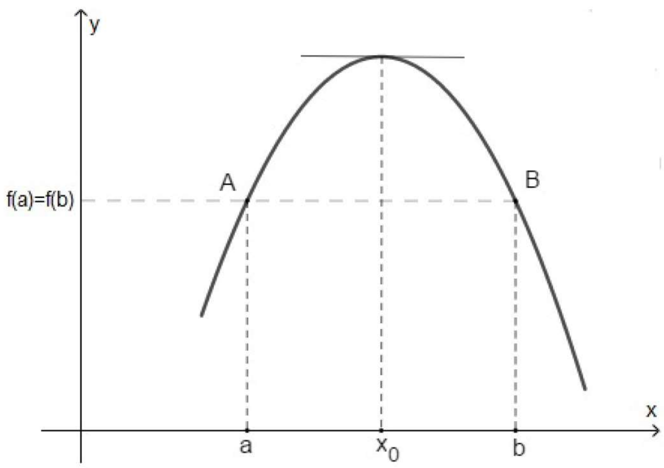
iii) $f(a) = f(b)$

onda postoji barem jedna točka $x_0 \in (a, b)$*, takva da je* $f'(x_0) = 0$.

Dokaz. Razlikujemo dva slučaja, kada je funkcija konstanta i kada nije. Ako je $f(x) = f(a) = f(b)$, $\forall x \in [a, b]$, tj. ako je funkcija f konstantna za sve x iz $[a, b]$, slijedi da je $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$. Ako funkcija nije konstantna onda zbog neprekidnosti prema Teoremu 3.1 funkcija f na segmentu $[a, b]$ poprima svoju najveću, odnosno najmanju vrijednost. U slučaju rubova a i b to se ne može postići jer bi tada funkcija bila konstanta. Zaključujemo da postoji $x_0 \in (a, b)$ u kojoj f poprima najveću ili najmanju vrijednost. Kako je funkcija f derivabilna, prema Fermatovom teoremu, slijedi da je $f'(x_0) = 0$. U oba slučaja smo pokazali da je $f'(x) = 0$ pa je teorem dokazan.

□

Napomena 3.1. *Rolleov nam teorem daje uvjete uz koje postoji stacionarna točka neke funkcije.*

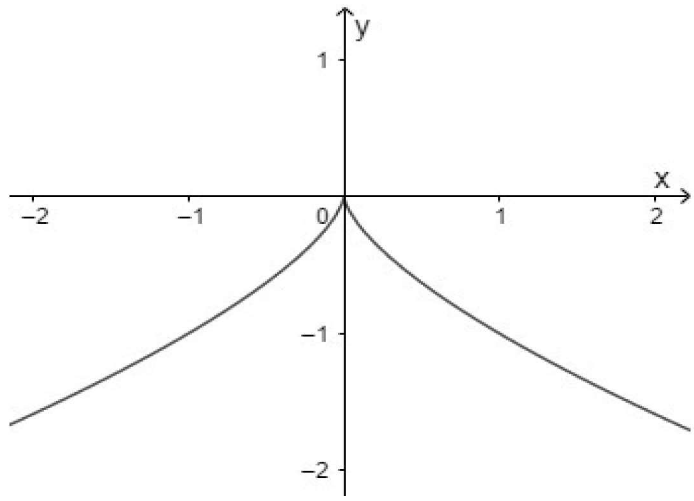


Slika 4: Geometrijska interpretacija Rolleovog teorema

Napomena 3.2 (Geometrijska interpretacija Rolleovog teorema)**.** *Ako graf neprekidne funkcije siječe pravac* $y = f(a) = f(b)$ *u točkama* $A = (a, f(a))$ *i* $B = (b, f(b))$ *i ako ima tangentu u svakoj točki između A i B, onda između tih točaka postoji barem jedna točka u kojoj je tangenta na dani graf funkcije paralelna s apscisom (Vidi* Sliku 4*).*

Sljedećim primjerom pokazat ćemo kako funkcija koja je neprekidna, ali ne i derivabilna u svim točkama danog segmenta ne ispunjava sve uvjete Rolleovog teorema.

Primjer 3.1. *Ispitajmo zadovoljava li funkcija* $f(x) = -\sqrt[3]{x^2}$ *na segmentu [-2, 2] uvjete Rolleovog teorema.*

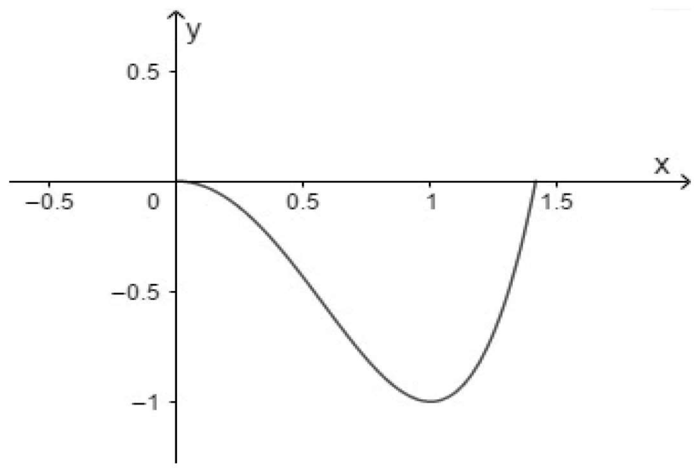


Slika 5: Graf funkcije $f(x) = -\sqrt[3]{x^2}$

Zadana je funkcija derivabilna u svim točkama segmenta $[-2, 2]$, osim u 0. Pošto funkcija nije derivabilna u 0, nisu ispunjeni svi uvjeti Rolleovog teorema. Da bi bili ispunjeni svi uvjeti Rolleovog teorema, funkcija bi trebala biti derivabilna u svakoj točki danog segmenta. Pogledamo li graf dane funkcije (Slika 5) vidimo da u $x_0 = 0$ ne možemo povući tangentu paralelnu s apscisom. Zaključujemo da za zadanu funkciju f na $[-2, 2]$ ne vrijedi Rolleov teorem.

Navedimo i primjer funkcije koja na danom segmentu zadovoljava sve uvjete Rolleovog teorema.

Primjer 3.2. *Ispitajmo vrijede li za funkciju $f(x) = x^4 - 2x^3$ na segmentu $[0, \sqrt{2}]$ uvjeti Rolleovog teorema te pronađimo točku $x_0 \in (0, \sqrt{2})$ za koju je $f'(x_0) = 0$.*



Slika 6: Graf funkcije $f(x) = x^4 - 2x^2$

Zadana funkcija (čiji je graf Slika 6) zadovoljava uvjete Rolleovog teorema jer je polinom četvrtog stupnja te vrijedi

$$f(0) = f(\sqrt{2}) = 0.$$

Pošto su uvjeti Rolleovog teorema zadovoljeni, znamo da postoji točka $x_0 \in (0, \sqrt{2})$ takva da je $f'(x_0) = 0$. Pronađimo je

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= 0 \\
4x_0^3 - 4x_0 &= 0 \\
x_0(4x_0^2 - 4) &= 0 \\
x_{0_1} = 0 \quad 4x_0^2 &= 4 \\
x_0^2 &= 1 \\
x_{0_2} = 1, \quad x_{0_3} &= -1
\end{aligned}
$$

$x_{0_1}, x_{0_3} \notin (0, \sqrt{2})$ pa je x_{0_2}, koja se nalazi unutar intervala $(0, \sqrt{2})$, tražena točka.

4 Lagrangeov teorem

Teorem 4.1 (Vidi [3]). *(Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti) Neka je funkcija $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$ i derivabilna na otvorenom intervalu (a, b). Tada postoji barem jedna točka $c \in (a, b)$ takva da je*

$$
f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), \quad tj. \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).
$$

Dokaz. Neka je zadana funkcija g na segmentu $[a, b]$ sljedećom formulom

$$
g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).
$$

Deriviramo li funkciju g po varijabli x dobivamo

$$
g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.
$$

Budući da je $g(a) = g(b) = 0$, funkcija g zadovoljava uvjete Rolleovog teorema pa postoji točka $c \in (a, b)$ takva da je $g'(c) = 0$, tj.

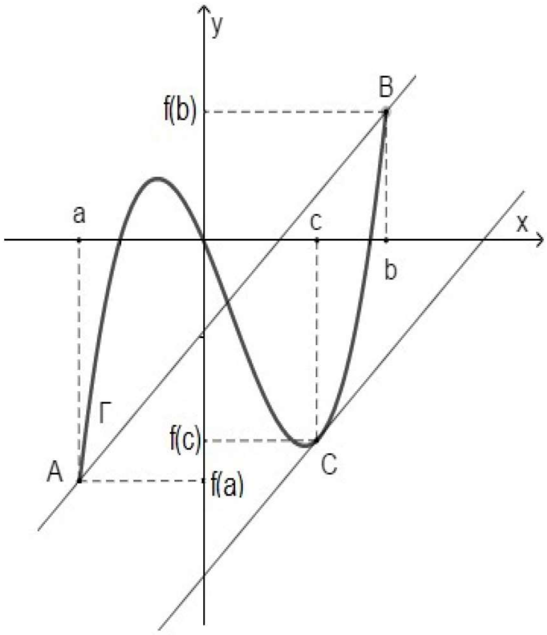
$$
f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,
$$

a to povlači da je

$$
f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}
$$

i time je teorem dokazan. □

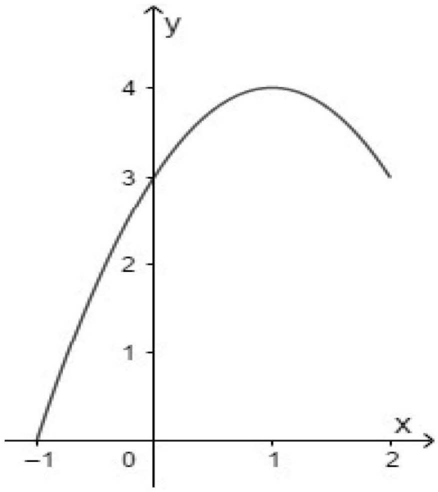
Napomena 4.1 (Geometrijska interpretacija Lagrangeovog teorema). *Kako je funkcija f derivabilna na intervalu (a, b), njezin je graf glatka funkcija te u svakoj točki krivulje Γ možemo povući tangentu na tu krivulju. Kroz točke $A = (a, f(a))$ i $B = (b, f(b))$ povućemo sekantu. Pomičemo li tu sekantu paralelno s polupravcem, koji prolazi kroz A i B, u jednom trenutku dolazimo do tangente na danu krivulju u nekoj točki $C = (c, f(c))$. Koeficijenti smjerova tangente i sekante su jednaki (Vidi* Sliku 7*).*



Slika 7: Geometrijska interpretacija Lagrangeovog teorema

Navedimo primjer funkcije koja na danom segemntu zadovoljava Lagrangeov teorem.

Primjer 4.1. *Promotrimo funkciju f definiranu na segmentu $[-1,2]$ formulom $f(x) = -x^2 + 2x + 3$. Ispitajmo zadovoljava li dana funkcija Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti i nađimo odgovarajuću vrijednost za c.*



Slika 8: Graf funkcije $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

Funkcija f (čiji je graf Slika 8) je neprekidna na segmentu $[-1,2]$ i derivabilna na intervalu $(-1,2)$. Dakle, ispunjene su pretpostavke Lagrangeovog teorema. Sada pronađimo $c \in (-1,2)$ za koju vrijedi

$$f(2) - f(-1) = f'(c)(2 - (-1))$$
$$f(2) = -2^2 + 2 \cdot 2 + 3 = -4 + 4 + 3 = 3$$
$$f(-1) = -(-1)^2 + 2(-1) + 3 = -1 - 2 + 3 = 0$$

$$f'(c) = -2c + 2$$
$$f'(c) = \frac{f(2) - f(-1)}{2 + 1} = \frac{3 - 0}{3} = 1$$

$$1 = -2c + 2$$
$$-2c = -1$$
$$c = \frac{1}{2}$$

Važna je posljedica Lagrangeovog teorema sljedeći korolar.

Korolar 4.1. *Ako je funkcija $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu $[a, b]$, derivabilna na intervalu (a, b) te ako je $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$, onda je f konstanta.*

Posljedice Lagrangeovog teorema su i sljedeća tri teorema na osnovi kojih dobivamo postupak kako da, koristeći derivaciju funkcije, odredimo lokalne ekstreme i intervale u kojima je funkcija monotona.

Teorem 4.2 (Vidi [6])**.** *Neka je funkcija $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabilna na intervalu (a, b).*

i) Funkcija f raste na intervalu (a, b) ako i samo ako je $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a, b)$.

ii) Funkcija f pada na intervalu (a, b) ako i samo ako je $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (a, b)$.

Teorem 4.3 (Vidi [6])**.** *Neka je funkcija $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabilna na intervalu (a, b).*

i) Ako f strogo raste na intervalu (a, b) onda skup svih točaka iz intervala (a, b) u kojima je derivacije funkcije nula, tj.

$$S = \{x \in (a, b) : f'(x) = 0\},$$

ne sadrži nikakav interval. Nadalje, vrijedi da je $f'(x) > 0$ za svaki $x \in (a, b)$ i $x \notin S$. Obratno, ako skup S ne sadrži nikakav interval i ako je $f'(x) > 0$, za svaki $x \in (a, b)$ i $x \notin S$, onda f strogo raste na (a, b).

ii) Ako f strogo pada na (a, b), onda skup S ne sadrži nikakav interval i $f'(x) < 0$, za svaki $x \in (a, b)$ i $x \notin S$. Obratno ako skup S ne sadrži interval i ako je $f'(x) < 0$, za svaki $x \in (a, b)$ i $x \notin S$, onda f strogo pada na (a, b).

Teorem 4.4 (Vidi [6])**.** *Neka je funkcija $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabilna na intervalu (a, b).*

i) Ako je $f'(c) = 0$ i ako postoji $\delta > 0$ takav da

$$x \in (c-\delta, c) \Rightarrow f'(x) > 0 \quad i \quad x \in (c, c+\delta) \Rightarrow f'(x) < 0,$$

onda f u točki c ima strogi lokalni maksimum.

ii) Ako je $f'(c) = 0$ i ako postoji $\delta > 0$ takav da

$$x \in (c-\delta, c) \Rightarrow f'(x) < 0 \quad i \quad x \in (c, c+\delta) \Rightarrow f'(x) > 0,$$

onda f u točki c ima strogi lokalni minimum.

5 Cauchyjev teorem

Teorem koji nam slijedi koristan je prilikom ispitivanja graničnih vrijednosti zadane funkcije.

Teorem 5.1 (Vidi [4]). *(Cauchyjev teorem) Neka su f i g neprekidne funkcije na segmentu $[a, b]$ i drivabilne na intervalu (a, b). Ako je $g'(x) \neq 0$ za svaki $x \in (a, b)$, onda postoji točka $c \in (a, b)$ takva da je*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Dokaz. Kako je $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$ to povlači da je $g(b) \neq g(a)$. U suprotnom bi funkcija definirana formulom $\tilde{g}(x) = g(x) - g(b)$ na $[a, b]$ ispunjavala sve uvjete Rolleovog teorema pa bi postojala točka $c \in (a, b)$ takva da je $\tilde{g}'(c) = g(c) = 0$. Funkcija h definirana formulom

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$$

na segmentu $[a, b]$ ispunjava sve uvjete Rolleovog teorema. Stoga postoji točka $c \in (a, b)$ takva da je $h'(c) = 0$, tj.

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0$$

□

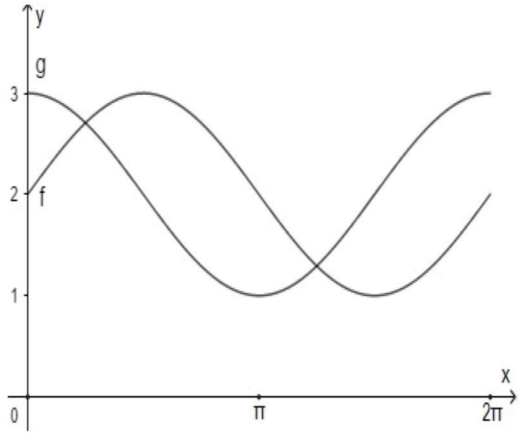
Napomena 5.1. *Cauchyjev je teorem poopćenje Lagrangeovog teorema jer za $g(x) = x$*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \textit{postaje} \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Napomena 5.2 (Geometrijska interpretacija Cauchyjevog teorema). *Geometrijska interpretacija Cauchyjevog teorema analogna je geometrijskoj interpretaciji Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti.*

Navedimo primjer funkcija koje zadovoljavaju uvjete Cauchyjevog teorema.

Primjer 5.1. *Promotrimo dvije funkcije $f(x) = \sin x + 2$ i $g(x) = \cos x + 2$. Ispitajmo ispunjavaju li te funkcije uvjete Cauchyjevog teorema na segmentu $[0, \frac{\pi}{2}]$ i ako ispunjavaju odredimo točku c.*



Slika 9: Graf funkcija $f(x) = \sin x + 2$ i $g(x) = \cos x + 2$

Funkcije f i g (čiji su grafovi prikazani na Slici 9) neprekidne su na $[0, \frac{\pi}{2}]$ i derivabilne na $(0, \frac{\pi}{2})$. Deriviranjem danih funkcija dobivamo

$$f'(x) = \cos x \quad i \quad g'(x) = -\sin x.$$

Kada smo izračunali derivaciju funkcije g, vidimo da je $g'(x) \neq 0$ za sve $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Dakle, zadovoljeni su svi uvjeti Cauchyjevog teorema pa znamo da postoji točka $c \in (0, \frac{\pi}{2})$ takva da je

$$\frac{f(\frac{\pi}{2}) - f(0)}{g(\frac{\pi}{2}) - g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{1}$$

Odredimo vrijednosti funkcija f i g u točkama 0 i $\frac{\pi}{2}$

$$f(\frac{\pi}{2}) = 3, \quad f(0) = 2, \quad g(\frac{\pi}{2}) = 2, \quad g(0) = 3.$$

Uvrštavanjem tih vrijednosti u (1) dobivamo da je $c = \frac{\pi}{4}$.

6 Taylorov teorem

Teorem 6.1 (Vidi [5]). *(Taylorov teorem) Neka je zadana funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$, gdje je I otvoren interval realnih brojeva i neka f ima derivacije do uključivo reda $n+1$ u svakoj točki intervala I. Odaberemo li neku točku $x_0 \in I$, funkciju f možemo u okolini te točke prikazati u obliku*

$$\begin{aligned} f(x) &= T_n(x) + R_n(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x) \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &\quad + R_n(x), \end{aligned}$$

pri čemu je

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad \xi \in (x_0, x).$$

Dokaz. Neka je segment $[x_0, x]$ sadržan u otvorenom intervalu I. Ako postoji $(n+1)$ derivacija funkcije f, onda postoje i sve njezine derivacije nižeg reda, za svaki $t \in [x_0, x]$. Definirajmo dvije pomoćne funkcije varijable t:

$$\begin{aligned} F(t) &= f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k, \quad x_0 \leqslant t \leqslant x, \\ G(t) &= (x-t)^{n+1}. \end{aligned}$$

Za ovako definirane funkcije vrijedi:

$$\begin{aligned} F(x_0) &= f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x) - T_n(x), \\ F(x) &= f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-x)^k = f(x) - f(x) = 0. \end{aligned}$$

Po pravilima deriviranja zbroja i produkta lako dobivamo da je

$$\begin{aligned} F'(t) &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1}(-1) \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n. \end{aligned}$$

Primjetimo, pribrojnici se u gornjim sumama poništavaju i ostaje samo posljednji član iz prve sume.

$$G(x) = 0, \quad G'(t) = (n+1)(x-t)^n(-1).$$

Primjenimo li Cauchyjev teorem na funkcije F i G na segmentu $[x_0, x]$ dobivamo da postoji $\xi \in (a, b)$ za koji je

$$\begin{aligned} \frac{F(x_0) - F(x)}{G(x_0) - G(x)} &= \frac{F(x_0)}{G(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}, \\ \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} &= \frac{-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n}{-(n+1)(x-\xi)^n}, \\ f(x) &= T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

Dobili smo što smo trebali i time je teorem dokazan. □

Sljedećim dvjema napomenama navest ćemo nazive izraza korištenih u Taylorovom teoremu.

Napomena 6.1. *Izraz*

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

nazivamo Taylorov polinom n-tog stupnja funkcije f u točki x_0.

Napomena 6.2. *Izraz*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad \xi \in (x_0, x), \quad tj. \quad \xi = x_0 + \theta(x-x_0), \quad 0 < \theta < 1$$

nazivamo ostatkom pri aproksimaciji funkcije polinomom.

Sada u obliku napomene navedimo kako će se Taylorova formula zvati uvrstimo li u nju $x_0 = 0$.

Napomena 6.3. *Uvrstimo li u Taylorovu formulu $x_0 = 0$ dobivamo Maclaurinovu formulu*

$$M_n(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + R_n(x).$$

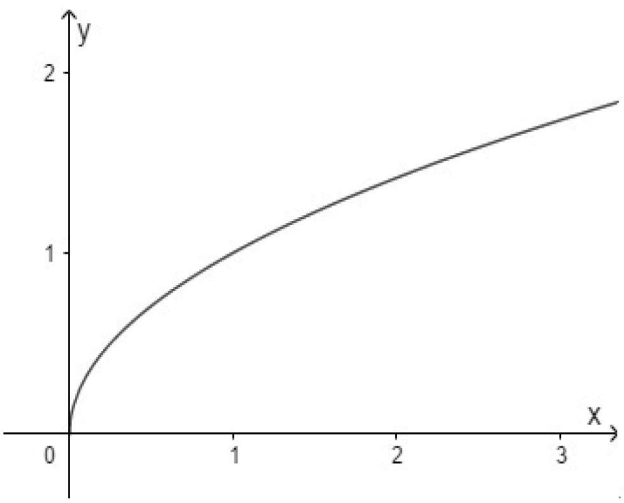
Napomenom navedimo i u kojem je slučaju Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti specijalni slučaj Taylorovog teorema.

Napomena 6.4. *Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti je specijalni slučaj Taylorovog teorema koji se dobiva za $n = 0$*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(\xi) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi), \quad \xi \in (x_0, x).$$

Na kraju navedimo primjer kojim ćemo pokazati kako razviti funkciju po Taylorovoj formuli.

Primjer 6.1. *Razvijmo funkciju $f(x) = \sqrt{x}$ po Taylorovoj formuli u okolini točke $x_0 = 1$.*



Slika 10: Graf funkcije $f(x) = \sqrt{x}$

Prvo odredimo derivacije dane funkcije (čiji je graf Slika 10) do n-tog reda u točki $x_0 = 1$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} &&\Rightarrow && f(x_0) = f(1) = 1\\
f'(x) &= \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} &&\Rightarrow && f'(1) = \frac{1}{2}\\
f''(x) &= \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2}\Big)x^{\frac{-3}{2}} &&\Rightarrow && f''(1) = \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2}\Big) = -\frac{1}{4}\\
f'''(x) &= \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big(-\frac{3}{2}\Big)x^{\frac{-5}{2}} &&\Rightarrow && f'''(1) = \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big(-\frac{3}{2}\Big) = \frac{3}{8}\\
& && \vdots
\end{aligned}
$$

$$
f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n} x^{-\frac{2n-1}{2}}.
$$

Slijedi:

$$
\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{3}{48}(x-1)^3 - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n} + R_n(x),
$$

$$
R_n(x) = (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n}\xi^{-(\frac{2n+1}{2})}.
$$

Literatura

[1] B. GULJAŠ, *Matematička analiza I i II*, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno - matematički fakultet - Matematički odjel, Zagreb, 2012.

[2] D. JUKIĆ, R. SCITOVSKI, *Matematika I*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2000.

[3] I. N. BRONŠTEJN, K. A. SEMENDJAJEV *Matematički priručnik* (za inžinjere i studente), Tehnička knjiga, Zagreb, 1964.

[4] M. CRNJAC, D. JUKIĆ, R. SCITOVSKI, *Matematika*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 1994.

[5] P. JAVOR, *Matematička analiza 1*, 2. izdanje, Element, Zagreb, 2003.

[6] S. KUREPA, *Matematička analiza 2* (funkcije jedne varijable), Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.

[7] http://www2.geof.unizg.hr/ jbeban/M1/11.pdf
(Pristupljeno 1. srpnja 2019.)

[8] http://www.mathematics.digital/matematika1/predavanja/node114.html
(Pristupljeno 12. srpnja 2019.)