Kompaktni prostori

Jovanović, Antonio

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Antonio Jovanović

Kompaktni prostori

Završni rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Antonio Jovanović

Kompaktni prostori

Završni rad

Mentor: prof. dr. sc. Dragan Jukić

Osijek, 2019.

Compact spaces

Sažetak

U ovom završnom radu ćemo definirati pojam kompaktnosti topološkog prostora. Dokazat ćemo neka svojstva kompaktnih prostora i njihovih podskupova. Također ćemo pokazati kako se neprekidne funkcije ponašaju na kompaktnim prostorima. Proučit ćemo svojstva metričkih prostora i na kraju karatkerizirati lokalno kompaktne prostore.

Ključne riječi
topološki prostor, kompaktnost, neprekidnost, metrički prostor

Abstract

In this bachelor's thesis we will define compactness of a topological space. We will prove some properties of compact spaces and their subsets. Also, we will show how continuous functions behave on compact spaces. Some properties of metric spaces will be analyzed and in the end we will characterise locally compact spaces.

Keywords
topological space, compactness, continuity, metric space

Sadržaj

1 Uvod **1**

2 Kompaktnost **2**

3 Neprekidne funkcije na kompaktnim prostorima **5**

4 Kompaktnost u metričkim prostorima **7**
4.1 Kompaktnost u $\mathbb{R}^n$ 9

5 Lokalna kompaktnost **11**

1 Uvod

Kompaktnost je pojam koji se počeo proučavati tek u 19. stoljeću. Bolzano[1] je 1817. godine pokazao da svaki omeđen niz u $\mathbb{R}$ ima konvergentan podniz, ali nije primjetio da se u toj tvrdnji krije kompaktnost. 1870. godine Heine[2] je pokazao da je neprekidna funkcija na segmentu uniformno neprekidna i pri tome iskorstio današnju općenitu definiciju kompaktnosti, ali tek je 1895. Borel[3] zaključio da segmenti imaju dodatna svojstva osim zatvorenosti i omeđenosti. Tek su Alexandrov i Urysohn[4] 1929. uveli današnju definiciju kompaktnosti, koja nije intuitivna poput prijašnjih.

U prvom poglavlju definiramo kompaktne prostore i uz primjere dokazujemo svojstva takvih prostora i njihovih podskupova. Nakon toga se bavimo neprekidnim funkcijama i homeomorfizmima na kompaktnim prostorima. U trećem poglavlju promatramo metričke prostore, od kojih se jednostavno dobiju topološki prostori. Na kraju definiramo pojam lokalne kompaktnosti i navodimo neka svojstva takvih prostora.

[1] Bernard Bolzano (1781. - 1848.), češki matematičar

[2] Eduard Heine (1821. - 1881.), njemački matematičar

[3] Emile Borel (1871. - 1956.), francuski matematičar

[4] Pavel Alexandrov (1896. - 1982.) i Pavel Urysohn (1898. - 1924.), ruski matematičari

2 Kompaktnost

Prije kompaktnog prostora, potrebno je definirati pokrivač topološkog prostora.

Definicija 2.1. *Neka je (X, τ) topološki prostor i $K \subseteq X$. Familija $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in J\}$ podskupova A_α od X se naziva pokrivač od K ako je $K \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$.*

Kažemo da je pokrivač $\mathcal{A}$ otvoren ako je svaki element od $\mathcal{A}$ otvoren skup. Potfamilija $\mathcal{A}'$ od $\mathcal{A}$ koja je pokrivač od K se naziva potpokrivač od $\mathcal{A}$.

Napomena 2.1. *Nadalje ćemo topološki prostor (X, τ) označavati samo sa X.*

Definicija 2.2. *Neka je X topološki prostor. Kažemo da je X kompaktan ako svaki otvoren pokrivač od X ima konačan potpokrivač. Kažemo da je skup $K \subseteq X$ kompaktan ako je kompaktan kao potprostor od X.*

Primjer 2.1. *Svaki konačan topološki prostor je kompaktan jer je svaki otvoreni pokrivač tog prostora konačan.*

Primjer 2.2. *$\mathbb{R}$ nije kompaktan s topologijom otvorenih intervala. Zaista, $\{(n, n+2) : n \in \mathbb{Z}\}$ je otvoren pokrivač od $\mathbb{R}$, ali ne postoji konačan potpokrivač tog pokrivača.*

Teorem 2.1 ([2]). *Neka je X topološki prostor i $Y \subseteq X$. Y je kompaktan skup ako i samo ako svaki pokrivač od Y skupovima otvorenim u X ima konačan potpokrivač.*

Dokaz. Pretpostavimo da je Y kompaktan i neka je $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in J\}$ pokrivač od Y skupovima otvorenim u X. Tada je $\{A_\alpha \cap Y : \alpha \in J\}$ pokrivač od Y skupovima otvorenim u Y. Kako je Y kompaktan skup, postoji konačan pokrivač $\{A_{\alpha_1} \cap Y, ..., A_{\alpha_n} \cap Y\}$ od Y. Tada je $\{A_{\alpha_1}, ..., A_{\alpha_n}\}$ konačan potpokrivač od $\mathcal{A}$ koji pokriva Y.

Obratno, pretpostavimo da svaki pokrivač od Y skupovima otvorenim u X ima konačan potpokrivač. Neka je $\mathcal{A}' = \{A'_\alpha : \alpha \in J\}$ pokrivač od Y skupovima otvorenim u Y. Za svaki α odaberimo A_α otvoren u X takav da vrijedi $A'_\alpha = A_\alpha \cap Y$. Sada je $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in J\}$ pokrivač od Y skupovima otvorenim u X i postoji konačan potpokrivač $\{A_{\alpha_1}, ..., A_{\alpha_n}\}$ tog pokrivača. Slijedi da je $\{A'_{\alpha_1}, ..., A'_{\alpha_n}\}$ konačan potpokrivač od $\mathcal{A}'$, što znači da je Y kompaktan skup. □

Teorem 2.2 ([2]). *Svaki zatvoreni podskup kompaktnog prostora je kompaktan.*

Dokaz. Neka je Y zatvoreni podskup kompaktnog prostora X i neka je $\mathcal{A}$ pokrivač od Y skupovima otvorenim u X. Skup $X \backslash Y$ je otvoren pa je $\mathcal{B} := \mathcal{A} \cup \{X \backslash Y\}$ otvoren pokrivač od X. Kako je X kompaktan, postoji konačan potpokrivač $\mathcal{B}'$ od $\mathcal{B}$. Ako $\mathcal{B}'$ sadrži $\{X \backslash Y\}$, izbacimo ga iz familije, a u suprotnom familiju ostavimo istom. Dobivena familija je konačan potpokrivač od $\mathcal{A}$ pa je Y kompaktan skup. □

Za kompaktnost su zanimljivi Hausdorffovi prostori jer su bogati svojstvima koje ćemo ubrzo pokazati.

Definicija 2.3. *Neka je X topološki prostor. Kažemo da je X Hausdorffov ako za svake dvije točke $x, y \in X, x \neq y$, postoje disjunktne otvorene okoline U od x i V od y.*

Primjer 2.3.

1. *Topološki prostori koje susrećemo u analizi su najčešće Hausdorffovi, na primjer $\mathbb{R}^n$ i svi metrički prostori.*

2. *Beskonačan topološki prostor X sa topologijom $\tau = \{A \subseteq X : A = \emptyset$ ili $X \backslash A$ konačan$\}$ nije Hausdorffov. Pretpostavimo da je X Hausdorffov. Neka su $x, y \in X, x \neq y$ i U, V redom njihove disjunktne otvorene okoline. Tada je $(U \cap V)^c = \emptyset^c$, to jest prema De Morganovim pravilima $U^c \cup V^c = X$, što je nemoguće jer su U^c i V^c po definiciji konačni skupovi, a X beskonačan. Slijedi da X nije Hausdorffov.*

Teorem 2.3 ([2]). *Svaki kompaktan podskup Hausdorffovog prostora je zatvoren.*

Dokaz. Neka je Y kompaktan podskup Hausdorffovog prostora X. Dovoljno je pokazati da je $X \backslash Y$ otvoren. Neka je $x_0 \in X \backslash Y$. Za svaku točku $y \in Y$ možemo definirati disjunktne otvorene okoline U_y od x_0 i V_y od y jer je X Hausdorffovov prostor. Familija $\{V_y : y \in Y\}$ je pokrivač od Y skupovima otvorenima u X, pa postoji konačan potpokrivač $\{V_{y_1}, ..., V_{y_n}\}$ tog pokrivača. Sada je $V_{y_1} \cup ... \cup V_{y_n}$ otvoren skup koji sadrži Y i disjunktan je od $U_{y_1} \cap ... \cap U_{y_n}$, što je otvorena okolina od x_0. Time je pokazano da je $X \backslash Y$ otvoren skup, to jest da je Y zatvoren, što je i traženo. □

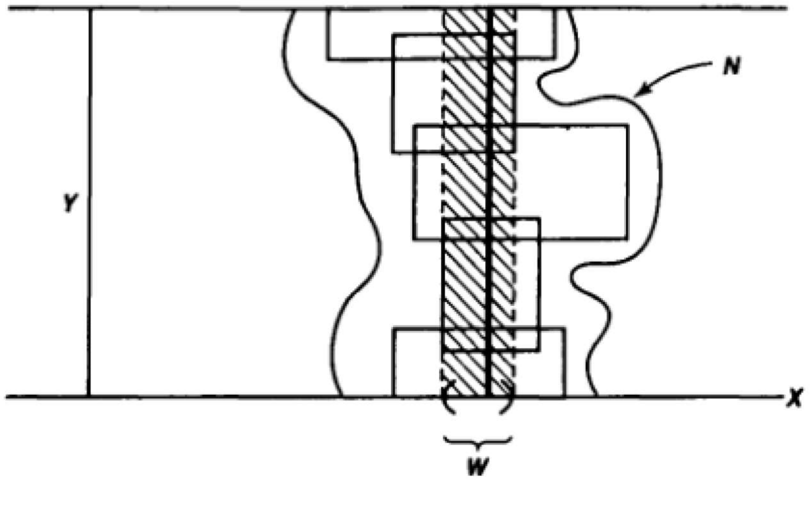
Od dvaju ili više topoloških prostora možemo konstruirati njihove produkte. Zanima nas je li produkt kompaktnih prostora opet kompaktan. Odgovor je potvrdan i to nam govori sljedeći teorem.

Teorem 2.4 ([2]). *Produkt konačno mnogo kompaktnih prostora je kompaktan.*

Kako bismo dokazali ovaj teorem, potrebna nam je jedna pomoćna tvrdnja.

Lema 2.5 ([2]). *Neka su X i Y topološki prostori, pri čemu je Y kompaktan. Neka je $x_0 \in X$. Ako je N otvoren skup u $X \times Y$ koji sadrži $\{x_0\} \times Y$, onda N sadrži neku otvorenu okolinu $W \times Y$ od $\{x_0\} \times Y$, gdje je W otvorena okolina od x_0 u X.*

Napomena 2.2. *Često se okolina $W \times Y$ iz prethodne leme naziva cijev oko $\{x_0\} \times Y$. Dokaz ove leme može se pronaći u [2].*



Slika 1: Cijev oko $\{x_0\} \times Y$ (preuzeto iz [2])

Dokaz teorema 2.4. Dovoljno je pokazati da je produkt dva kompaktna prostora kompaktan. Tvrdnja teorema slijedi primjenom matematičke indukcije.

Neka su X i Y kompaktni prostori i neka je $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in J\}$ otvoren pokrivač od $X \times Y$. Neka je $x_0 \in X$. Pokažimo da je $\{x_0\} \times Y \subseteq X \times Y$ kompaktan skup. Neka je $\mathcal{B}$ otvoren pokrivač od $\{x_0\} \times Y$. Tada je $\mathcal{B}$ oblika $\{U_\beta \times V_\beta : \beta \in I\}$, gdje su U_β otvoreni podskupovi od X i V_β otvoreni podskupovi od Y. Familija $\{V_\beta : \beta \in I\}$ je otvoren pokrivač od Y, a kako je Y kompaktan, postoji konačan potpokrivač $\{V_{\beta_1}, ..., V_{\beta_r}\}$ tog pokrivača. Sada je $\{U_{\beta_0} \times V_{\beta_0}, U_{\beta_1} \times V_{\beta_1}, ..., U_{\beta_r} \times V_{\beta_r}\}$ konačan potpokrivač od $\mathcal{B}$, gdje je x_0 sadržan u U_{β_0}[5]. Slijedi da je $\{x_0\} \times Y$ kompaktan skup. Kako je $\mathcal{A}$ ujedno pokrivač od $\{x_0\} \times Y$, postoji konačan pokrivač $\{A_1, ..., A_n\} \subseteq \mathcal{A}$ tog skupa. Definiramo $N := \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. To je otvoren skup koji sadrži $\{x_0\} \times Y$ pa prema lemi 2.5 N sadrži cijev $W \times Y$ oko $x_0 \times Y$, gdje je W skup otvoren u X. Slijedi da je $\{A_1, ..., A_n\}$ pokrivač od $W \times Y$. Sada za svaki $x \in X$ možemo pronaći otvorenu okolinu W_x od x takva da je cijev $W_x \times Y$ pokrivena sa konačno mnogo elemenata iz $\mathcal{A}$. Familija $\{W_x : x \in X\}$ je otvoren pokrivač od X pa postoji konačan potpokrivač $\{W_1, ..., W_k\}$ i vrijedi $\bigcup_{i=1}^{k} (W_i \times Y) = X \times Y$, a kako svaki od $W_i \times Y$ možemo pokriti sa konačno mnogo elemenata iz $\mathcal{A}$, isto možemo napraviti sa $X \times Y$. □

Očito nam prethodna tvrdnja ništa ne govori o beskonačnim produktima. Nameće se pitanje vrijedi li isto za beskonačne produkte i odgovor je opet potvrdan.

Teorem 2.6 (Tihonov, [2]). *Produkt beskonačno mnogo kompaktnih prostora je kompaktan.*

Ovaj teorem je dokazao Tihonov[6] 1930. godine. Dokaz je znatno teži i dulji nego u konačnom slučaju i zahtjeva dodatno znanje iz topologije. Sam dokaz se može pronaći u [2].

[5]Može se dogoditi da se x_0 ne nalazi ni u jednom od skupova $U_{\beta_1}, ..., U_{\beta_r}$

[6]Andrey Nikolayevich Tihonov (1906. - 1993.), ruski matematičar

3 Neprekidne funkcije na kompaktnim prostorima

Neprekidne funkcije na kompaktnim prostorima su bogate zanimljivim svojstvima.

Teorem 3.1 ([2]). *Neka su X i Y topološki prostori i $f : X \to Y$ neprekidna funkcija. Ako je X kompaktan, onda je $f(X)$ kompaktan skup.*

Dokaz. Neka je X kompaktan prostor, Y topološki prostor i $f : X \to Y$ neprekidna funkcija. Neka je $\mathcal{A}$ pokrivač od $f(X)$ skupovima otvorenim u Y. Tada je $\{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}\}$ otvoren pokrivač od X jer je f neprekidna funkcija. Kako je X kompaktan, postoji konačan potpokrivač $\{f^{-1}(A_1), f^{-1}(A_2), ..., f^{-1}(A_n)\}$ tog pokrivača. Sada $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ pokriva $f(X)$, čime je dokazana njegova kompaktnost. $\square$

Definicija 3.1. *Neka su X i Y topološki prostori. Kažemo da je $f : X \to Y$ homeomorfizam ako je f bijekcija i f i f^{-1} su neprekidne. Ako postoji homeomorfizam između prostora X i Y, kažemo da su oni homeomorfni.*

Primjer 3.1.

1. *Svaki topološki prostor homeomorfan je sam sebi, a pripadni homeomorfizam je identiteta.*

2. *Svaki otvoreni interval $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ je homeomorfan prostoru $\mathbb{R}$. Pripadni homeomorfizam je $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-x}$*

Primjer 3.2. *Nije svaka neprekidna bijekcija homeomorfizam. Neka je $X = \mathbb{R}$ sa diskretnom topologijom i $Y = \mathbb{R}$ sa standardnom topologijom. Tada je identiteta $f : X \to Y$ neprekidna bijekcija, ali f^{-1} nije neprekidna funkcija. U X je skup $\{x\}$ otvoren za svaki $x \in X$. $f(\{x\})$ je jednočlan podskup od Y, to jest zatvoren skup pa zaključujemo da f^{-1} ne može biti neprekidna.*

Međutim, ako prostori imaju neka specijalna svojstva, možemo zaključiti da je neprekidna bijekcija ujedno i homeomorfizam.

Lema 3.2 ([2]). *Neka su X, Y topološki prostori i $f : X \to Y$ neprekidna funkcija. Ako je $K \subseteq Y$ zatvoren skup, onda je $f^{-1}(K)$ zatvoren skup.*

Teorem 3.3 ([1]). *Neka su X i Y topološki prostori i $f : X \to Y$ neprekidna bijekcija. Ako je X kompaktan i Y Hausdorffov, onda je f homeomorfizam.*

Dokaz. Neka je $A \subseteq X$ zatvoren. Zbog kompaktnosti prostora X, prema teoremu 2.2 je A također kompaktan. Iz teorema 3.1 slijedi da je $f(A)$ kompaktan. Kako je Y Hausdorffov, prema teoremu 2.3 slijedi da je $f(A)$ zatvoren. Sada je prema lemi 3.2 f^{-1} neprekidna funkcija, odakle slijedi da je f homeomorfizam. $\square$

U matematičkoj analizi i optimizaciji vrlo često se primjenjuje sljedeća tvrdnja.

Teorem 3.4 ([1]). *Neka je X kompaktan prostor i $f : X \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada postoje $x_1, x_2 \in X$ takvi da vrijedi*

$$f(x_1) \leq f(x), \forall x \in X$$
$$f(x_2) \geq f(x), \forall x \in X$$

Dokaz. Neka je X kompaktan prostor i $f : X \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Prema teoremu 3.1 je $A := f(X)$ kompaktan. Pokazat ćemo da A ima maksimalni element M i minimalni element m. Pretpostavimo da A nema maksimalni element. Neka je $\{(-\infty, a) : a \in A\}$ otvoren pokrivač od A. Kako je A kompaktan, postoji konačan potpokrivač $\{(-\infty, a_1), ..., (-\infty, a_n)\}$. Ako je a_i najveći među $a_1, ..., a_n$, on se ne nalazi ni u jednom od tih intervala, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je ta familija pokrivač od A. Prema tome, A sadrži maksimalni element M. Analognim postupkom se pokaže da A sadrži minimalni element m i možemo označiti

$$f(x_1) = m$$
$$f(x_2) = M$$

□

Definicija 3.2. *Neka je X topološki prostor i (x_n) niz funkcija $x_n : X \to \mathbb{R}$, $\quad n \in \mathbb{N}$. Kažemo da niz (x_n) uniformno konvergira prema funkciji $f : X \to \mathbb{R}$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in n$ tako da za svaki $n \geq n_0$ i za svaki $t \in X$ vrijedi*

$$|x_n(t) - f(t)| < \varepsilon$$

Za kraj ovog poglavlja dokažimo još Dinijev[7] teorem.

Teorem 3.5 ([1]). *Neka je X kompaktan prostor i (x_n) niz neprekidnih funkcija $x_n : X \to \mathbb{R}$ koji točkovno konvergira prema funkciji $x_0 : X \to \mathbb{R}$. Ako je niz (x_n) monoton i funkcija x_0 neprekidna, onda (x_n) konvergira uniformno prema x_0.*

Dokaz. Pretpostavimo da (x_n) raste, to jest da raste $(x_n(s))$ za svaki $s \in X$. Kako je $\lim_{n\to\infty} x_n(s) = x_0(s)$ za svaki $s \in X$, to za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n(s) \in \mathbb{N}$ takav da je

$$0 \leq x_0(s) - x_{n(s)}(s) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1}$$

Zbog neprekidnosti funkcija x_0 i $x_{n(s)}$ u točki s postoji otvorena okolina $U(s)$ točke s sa svojstvom

$$t \in U(s) \implies |x_0(t) - x_0(s)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2}$$

$$t \in U(s) \implies |x_{n(s)}(t) - x_{n(s)}(s)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3}$$

Iz 1, 2 i 3 slijedi

$$x_0(t) - x_{n(s)}(t) = |x_0(t) - x_{n(s)}(t)| < \varepsilon, \quad t \in U(s) \tag{4}$$

Kako je po pretpostavci $(x_n(t))$ rastući, iz 4 dobivamo

$$|x_0(t) - x_n(t)| = x_0(t) - x_n(t) \leq x_0(t) - x_{n(s)}(t) < \varepsilon, \quad n \geq n(s), \quad t \in U(s) \tag{5}$$

Familija $\{U(s) : s \in X\}$ je otvoren pokrivač od X pa postoji konačan pokrivač $\{U(s_1), ..., U(s_r)\}$ od X. Neka je $n_0 = \max\{n(s_1), ..., n(s_r)\}$. Pokazat ćemo da vrijedi

$$n \geq n_0 \implies |x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon, \quad t \in X$$

Za proizvoljnu točku $t \in X$ postoji $i \in \{1, ..., r\}$ takav da je $t \in U(s_i)$. Ako je $n \geq n_0$, onda je $n \geq n(s_i)$ pa iz 5 slijedi

$$|x_0(t) - x_n(t)| < \varepsilon$$

to jest niz (x_n) je uniformno konvergentan.

Za padajući niz (x_n) isti zaključak dobijemo promatranjem rastućeg niza $(-x_n)$ □

[7]Ulisse Dini (1845. - 1918.), talijanski matematičar

4 Kompaktnost u metričkim prostorima

Metričke prostore nam se isplati promatrati jer u svakom metričkom prostoru (X, d) metrikom d možemo inducirati topologiju na X, a u smislu kompaktnosti takvih prostora dobivamo mnogo zanimljivih svojstava. Nadalje se podrazumijeva da je svaki metrički prostor ujedno i topološki prostor.

Definirajmo prvo neke alternativne definicije kompkatnosti.

Definicija 4.1. *Neka je X topološki prostor. Kažemo da X ima Bolzano-Weierstrass svojstvo ili da je BW-kompaktan ako svaki beskonačan podskup od X ima gomilište.*

Definicija 4.2. *Neka je X topološki prostor. Kažemo da je X nizovno kompaktan ako svaki niz (x_n) u X ima konvergentan podniz čiji je limes u X.*

Prethodne definicije su se uzimale kao definicije kompaktnosti sve do 1929. godine, dok Alexandrov i Urysohn nisu uveli današnju definiciju koristeći otvorene pokrivače.

Teorem 4.1 ([2]). *Neka je X metrički prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

1. *X je kompaktan.*
2. *X je BW-kompaktan.*
3. *X je nizovno kompaktan*

Za jedan dio dokaza ovog teorema potrebna nam je lema o Lebesgueovom broju pokrivača.

Lema 4.2 ([2]). *Neka je $\mathcal{A}$ otvoren pokrivač metričkog prostora (X, d). Ako je X kompaktan, onda postoji $\delta > 0$ takav da je svaki $A \subseteq X$ čiji je dijametar manji od δ sadržan u nekom elementu od $\mathcal{A}$.*

Napomena 4.1. *Broj δ sa ovim svojstvom nazivamo Lebesgueov broj pokrivača $\mathcal{A}$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{A}$ otvoren pokrivač od X. Ako je $X \in \mathcal{A}$, onda svaki pozitivan realan broj zadovoljava tvrdnju teorema. Zato pretpostavimo da ne vrijedi $X \in \mathcal{A}$. Neka je $\{A_1, ..., A_n\}$ konačan potpokrivač od $\mathcal{A}$. Za svaki $i \in \{1, 2, ..., n\}$ definiramo $C_i := X \backslash A_i$ i definiramo $f : X \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x, C_i)$$

Pokažimo da vrijedi $f(x) > 0$ za svaki $x \in X$. Neka je $x \in X$ proizvoljan. Odaberimo i takav da je $x \in A_i$ i $\varepsilon > 0$ takav da je $K(x, \varepsilon) \subseteq A_i$. Tada je $d(x, C_i) \geq \varepsilon$, to jest $f(x) \geq \frac{\varepsilon}{n}$. f je neprekidna funkcija pa prema teoremu 3.4 na X postiže svoj globalni minimum δ. Pokažimo da je δ naš traženi Lebesgueov broj. Neka je $B \subseteq X$ dijametra manjeg od δ. Odaberimo $x_0 \in B$. Tada je $B \subseteq K(x_0, \delta)$ i vrijedi

$$\delta \leq f(x_0) \leq d(x_0, C_m)$$

gdje je $d(x_0, C_m)$ najveći među $d(x_0, C_i)$. Sada je δ-okolina od x_0 sadržana u $A_m = X \backslash C_m$ pa vrijedi $B \subseteq A_m$, što je trebalo pokazati. □

Napomena 4.2. *Može se pokazati (vidi [2]) da lema 4.2 vrijedi i za nizovno kompaktne prostore.*

Dokaz teorema 4.1.
1) $\implies$ 2)
Neka je X kompaktan prostor. Želimo pokazati da svaki beskonačan $A \subseteq X$ ima gomilište. Dokaz ćemo izvršiti kontrapozicijom. Neka je $A \subseteq X$ koji nema gomilište. Tada A sadrži sva svoja gomilišta pa je zatvoren. Kako A nema gomilište, za svaki $a \in A$ možemo pronaći okolinu U_a od a takvu da je $A \cap U_a = \{a\}$. Sada je $\{X \backslash A\} \cup \{U_a : a \in A\}$ otvoren pokrivač od X pa postoji konačan potpokrivač tog pokrivača. Kako je $(X \backslash A) \cap A = \emptyset$ i svaki U_a sadrži točno jednu točku iz A, slijedi da je A konačan skup.
2) $\implies$ 3)
Neka je X BW-kompaktan. Neka je (x_n) proizvoljan niz u X. Promotrimo skup $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ako je A konačan, onda postoji $x \in X$ takav da je $x = x_n$ za beskonačno mnogo prirodnih brojeva n. Tada niz (x_n) ima stacionaran podniz koji je konvergentan. Promotrimo sada drugi slučaj, kada je A beskonačan skup. Tada A ima gomilište x. Definiramo podniz od (x_n) na sljedeći način. Prvo odaberemo $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_{n_1} \in K(x, 1)$. Pretpostavimo da smo odredili n_{i-1} takav da je $x_{n_{i-1}} \in K(x, \frac{1}{i-1})$. Kako $K(x, \frac{1}{i})$ siječe A u beskonačno mnogo točaka, možemo odabrati $n_i > n_{i-1}$ takav da je $x_{n_i} \in K(x, \frac{1}{i})$. Sada podniz (x_{n_i}) od (x_n) konvergira prema x.
3) $\implies$ 1)
Neka je X nizovno kompaktan. Prvo ćemo pokazati da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačnan pokrivač od X koji se sastoji od ε-kugli[8]. Tvrdnju ćemo dokazati svođenjem na kontradikciju. Pretpostavimo da postoji $\varepsilon > 0$ takav da ne možemo pokriti X sa konačno mnogo ε-kugli. Konstruirajmo niz (x_n) u X na sljedeći način. Odaberemo proizvoljan $x_1 \in X$. Kako $K(x_1, \varepsilon)$ ne sadrži X, možemo odabrati $x_2 \in X \backslash K(x_1, \varepsilon)$. Opet, $K(x_1, \varepsilon) \cup K(x_2, \varepsilon)$ ne sadrži cijeli X. Induktivno nastavimo postupak i dobijemo niz (x_n) takav da $\{K(x_i, \varepsilon) : i \in \mathbb{N}\}$ nije pokrivač od X. Očito je $d(x_i, x_j) > \frac{\varepsilon}{2}$, za $i \neq j$ pa niz (x_n) nema konvergentan podniz, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je X nizovno kompaktan. Zaključujemo da za svaki $\varepsilon > 0$ možemo pokriti X sa konačno mnogo ε-kugli.

Sada ćemo pokazati da nizovna kompaktnost implicira kompaktnost. Neka je $\mathcal{A}$ otvoren pokrivač od X. Kako je X nizovno kompaktan, iz leme 4.2 slijedi da $\mathcal{A}$ ima Lebesgueov broj δ. Označimo $\varepsilon := \frac{\delta}{3}$. Opet iz nizovne kompaktnosti slijedi da X možemo pokriti sa konačno mnogo ε-kugli. Svaka od tih ε-kugli je dijametra najviše $\frac{2\delta}{3}$ pa se nalazi u nekom elementu od $\mathcal{A}$. Sada za svaku od tih ε-kugli odaberemo $A \in \mathcal{A}$ koji je sadrži i dobijemo konačan potpokrivač od $\mathcal{A}$, iz čega slijedi da je X kompaktan prostor. $\square$

Primjer 4.1. *Pokažimo da BW-kompaktnost općenito ne povlači kompaktnost u topološkom prostoru. Neka je $Y = \{a, b\}$ dvočlani skup sa topologijom $\tau = \{\emptyset, Y\}$ i $X := \mathbb{N} \times Y$, gdje $\mathbb{N}$ promatramo sa diskretnom topologijom. Uočimo da su jedini otvoreni skupovi u X prazan skup i skupovi oblika $U \times Y$, gdje je U otvoren u $\mathbb{N}$. X je BW-kompaktan jer svaki neprazan podskup S od X ima gomilište. Naime, ako je $(n, a) \in S$, onda je (n, b) gomilište od S jer svaki otvorena okolina od (n, b) ujedno sadrži (n, a), pa je presjek te okoline sa S neprazan. Analogno postupamo ako je $(n, b) \in S$.*

Ipak, X nije kompaktan, jer otvoren pokrivač $\{\{n\} \times Y : n \in \mathbb{N}\}$ od X nema konačan potpokrivač.

Definicija 4.3. *Neka su (X, d_x) i (Y, d_y) metrički prostori. Kažemo da je $f : X \to Y$ uniformno neprekidna funkcija ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve $x_0, x_1 \in X$ vrijedi*

$$d_x(x_0, x_1) < \delta \implies d_y(f(x_0), f(x_1)) < \varepsilon$$

[8] ε-kugla oko $x \in X$ je $K(x, \varepsilon)$

Vrlo važno svojstvo kompaktnih metričkih prostora je ekvivalencija neprekidnih i uniformno neprekidnih funkcija.

Teorem 4.3 ([1]). *Neka su (X, d_x) i (Y, d_y) metrički prostori i neka je $f : X \to Y$ neprekidna funkcija. Ako je X kompaktan, onda je f uniformno neprekidna.*

Dokaz. Neka je $f : X \to Y$ neprekidna funkcija. Za svaki $\varepsilon > 0$ i za svaki $x \in X$ postoji $\delta(x) > 0$ takav da je

$$d_x(x', x) < \delta(x) \implies d_y(f(x'), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Familija $\{K(x, \frac{\delta(x)}{2}) : x \in X\}$ je otvoren pokrivač od X pa iz kompaktnosti prostora X slijedi da postoji konačno mnogo točaka $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq X$ sa svojstvom da je $\{K(x_i, \frac{\delta(x_i)}{2}) : i = 1, ..., n\}$ pokrivač od X. Stavimo

$$\delta := \min\{\frac{1}{2}\delta(x_1), ..., \frac{1}{2}\delta(x_n)\} > 0$$

Neka su $x', x'' \in X$ takve da vrijedi $d_x(x', x'') < \delta$. Tada postoji $i \in \{1, ..., n\}$ takav da je $x' \in K(x_i, \delta(x_i))$, to jest da je

$$d_x(x', x_i) < \frac{1}{2}\delta(x_i) < \delta(x_i)$$

S druge strane je

$$d_x(x'', x_i) < d_x(x'', x') + d_x(x', x_i) < \delta + \frac{1}{2}\delta(x_i) < \delta(x_i)$$

pa možemo zaključiti da vrijedi

$$d_y(f(x'), f(x'')) \leq d_y(f(x'), f(x_i)) + d_y(f(x_i), f(x'')) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

čime je dokazana tražena tvrdnja. □

Primjer 4.2. *Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ je neprekidna na $\mathbb{R}$, nije uniformno neprekidna na $\mathbb{R}$. Pretpostavimo da je dana funkcija uniformno neprekidna. Neka je $\varepsilon = 1$ i $\delta > 0$ takvi da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$|x - y| < \delta \implies |e^x - e^y| < \varepsilon$$

Uzmimo $x, y \in \mathbb{R}$ takve da je $y = x + \frac{\delta}{2}$. Tada je $|x - y| < \delta$ i moralo bi vrijediti $|e^x - e^{x+\frac{\delta}{2}}| < 1$, što očito ne vrijedi za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Međutim, prema prethodnom teoremu možemo zaključiti da je dana funkcija uniformno neprekidna na bilo kojem kompaktnom podskupu od $\mathbb{R}$.

4.1 Kompaktnost u $\mathbb{R}^n$

Definicija 4.4. *Kažemo da je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ omeđen ako postoji $\delta > 0$ i $x \in A$ takvi da vrijedi $A \subseteq K(x, \delta)$.*

Definicija 4.5. *Neka je X neprazan skup i $\leq$ binarna relacija na X. Kažemo da je $\leq$ relacija linearnog uređaja na X ako sljedeće tvrdnje vrijede za sve $a, b, c \in X$:*

1. *Ako je $a \leq b$ i $b \leq a$, onda je $a = b$*

2. *Ako je $a \leq b$ i $b \leq c$ onda je $a \leq c$*

3. *$a \leq b$ ili $b \leq a$*

Ako je $\leq$ relacija linearnog uređaja na X, uređen par $(X, \leq)$ se naziva linearno uređen skup. Kažemo da je podskup K linearno uređenog skupa X omeđen odozgo ako postoji $M \in X$ takav da je $x \leq M$ za svaki $x \in K$ i M nazivamo gornja međa od K. Najmanja gornja međa od K se naziva supremum od K.
Kažemo da linearno uređen skup X ima svojstvo supremuma ako svaki odozgo omeđen podskup od X ima supremum.

Napomena 4.3. *$(\mathbb{R}, \leq)$, gdje je $\leq$ standardni uređaj na $\mathbb{R}$, je linearno uređen skup sa svojstvom supremuma. Često umjesto $(\mathbb{R}, \leq)$ pišemo samo $\mathbb{R}$.*

Teorem 4.4 ([2]). *Neka je X linearno uređen skup sa svojstvom supremuma i τ topologija generirana otvorenim intervalima iz X. Tada je svaki zatvoreni interval $[a, b] = \{x \in X : a \leq x \text{ i } x \leq b\}$ je kompaktan skup.*

Dokaz ovog teorema može se naći u [2]. Kako se bavimo kompkatnošću u $\mathbb{R}^n$, zanimljiva nam je sljedeća tvrdnja.

Korolar 4.5 ([2]). *Svaki segment $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ je kompaktan.*

Dokažimo sada još općenitiju karakterizaciju kompaktnosti u $\mathbb{R}^n$.

Teorem 4.6 ([2]). *Skup $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktan ako i samo ako je omeđen i zatvoren.*

Dokaz. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompaktan. Prema teoremu 2.3, A je zatvoren. Pogledajmo familiju skupova $\{K(\mathbf{0}, m) : m \in \mathbb{N}\}$. Očito je ta familija pokrivač od $\mathbb{R}^n$ i od A pa postoji konačna potfamilija tog pokrivača koja pokriva A. Tada je $A \subseteq K(\mathbf{0}, M)$ za neki $M \in \mathbb{N}$, odakle slijedi da je A omeđen.

Obratno, pretpostavimo da je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ omeđen i zatvoren. Neka je $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq N$ za sve $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$. Odaberimo fiksni $\mathbf{a} \in A$ i neka vrijedi $d(\mathbf{a}, \mathbf{0}) = b$. Iz nejednakosti trokuta slijedi $d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) + d(\mathbf{a}, \mathbf{0}) = N + b$ za svaki $x \in A$. Označimo sada $P := N + b$. Vrijedi $A \subseteq [-P, P]^n$, što je, prema teoremima 2.4 i 4.5, kompaktan podskup od $\mathbb{R}^n$. Kako je A zatvoren, onda je i kompaktan. □

Ova tvrdnja ne vrijedi općenito u metričkim prostorima. Omeđenost prostora ovisi o metrici, dok kompaktnost ovisi samo o topologiji prostora.

5 Lokalna kompaktnost

Iako neki prostori, poput $\mathbb{R}^n$, nisu kompaktni, oni sadrže mnogo kompaktnih skupova.

Definicija 5.1. *Kažemo da je topološki prostor X lokalno kompaktan u točki $x \in X$ ako postoji kompaktan $C \subseteq X$ koji sadrži neku otvorenu okolinu od x. Ako je X lokalno kompaktan u svakoj točki, kažemo da je X lokalno kompaktan.*

Primjer 5.1. *$\mathbb{R}^n$ je lokalno kompaktan jer je svaki $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ sadržan u nekom otvorenom skupu $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n)$, što je podskup kompaktnog skupa $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$.*

Primjer 5.2. *Općenito je svaki linearno uređen skup sa svojstvom supremuma lokalno kompaktan.*

Kada promatramo topološke prostore, najbogatiji svojstvima su metrički i Hausdorffovi prostori, još više ako su kompaktni. Međutim, potprostor kompaktnog Hausdorffovog prostora ne mora biti kompaktan. Sljedeći teorem nam daje svojstva potprostora kompaktnih Hausdorffovih prostora.

Teorem 5.1 ([2]). *Topološki prostor X je lokalno kompaktan Hausdorffov ako i samo ako postoji topološki prostor Y sa sljedećim svojstvima:*

1. *X je potprostor od Y*
2. *Skup $Y \setminus X$ se sastoji od jedne točke.*
3. *Y je kompaktan Hausdorffov prostor.*

Ako su Y i Y' prostori koji zadovoljavaju ove uvjete, onda postoji homeomorfizam $f : Y \to Y'$ koji je identiteta na X.

Definicija 5.2. *Neka je X topološki prostor. Kompaktifikacija prostora X je par (Y, i) prostora Y i funkcije $i : X \to Y$ sa svojstvima:*

1. *$i : X \to i(X)$ je homeomorfizam*
2. *Skup $i(X)$ je gust na Y*
3. *Y je kompaktan prostor*

Za svaki topološki prostor X koji nije kompaktan postoji kompaktifikacija $X' := X \cup \{\omega\}$, $\omega \notin X$. Preslikavanje $i : X \to X'$ je inkluzija. Skup $U \subseteq X'$ bit će otvoren ako zadovoljava jednu od sljedećih tvrdnji:

1. $U \subseteq X$ i U je otvoren podskup od X
2. $\omega \in U$ i $X \setminus U$ je kompaktan zatvoren podskup od X.

Ovakva kompaktifikacija zove se kompaktifikacija jednom točkom.
Ako je X Hausdorffov prostor, u uvjetu 2. ne zahtjevamo zatvorenost.

Korolar 5.2 ([1]). *Ako je X Hausdorffov lokalno kompaktan prostor, onda je kompaktifikacija jednom točkom X' od X kompaktan Hausdorffov prostor.*

Primjer 5.3.

1. *$\mathbb{R}$ je lokalno kompaktan Hausdorffov prostor pa postoji kompaktifikacija jednom točkom, koja je prema korolaru 5.2 Hausdorffov prostor. Označimo je $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Taj prostor je homeomorfan sferi $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Pripadni homeomorfizam $f : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \to S^1$ je zadan s:*

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}, \frac{2x}{1+x^2}\right) & \text{za } x \neq \infty \\ (-1, 0) & \text{za } x = \infty \end{cases}$$

2. *$\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ je kompaktifikacija jednom točkom od $\mathbb{R}^2$ i homeomorfna je sferi $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Homeomorfizam je analogan onom u prethodnom primjeru.*

Kažemo da je svojstvo **T** topološkog prostora X lokalno ako za svaki $x \in X$ i za svaku otvorenu okolinu U od x postoji otvorena okolina V od x sadržana u U koja ima svojstvo **T**. Naša definicija lokalne kompaktnosti nije iskazana kao lokalno svojstvo od X. Zato nam sljedeći teorem opisuje lokalnu kompaktnost na taj način, ali prije toga ćemo samo iskazati jednu pomoćnu tvrdnju.

Lema 5.3 ([2])**.** *Ako je Y kompaktan podskup Hausdorffovog prostora X i $x_0 \in X \backslash Y$, onda postoje disjunktni otvoreni podskupovi U i V od X koji redom sadrže x_0 i Y.*

Teorem 5.4 ([2])**.** *Neka je X Hausdorffov prostor. X je lokalno kompaktan ako i samo ako za svaki $x \in X$ i otvorenu okolinu U od x postoji otvorena okolina V od x takva da je $\mathrm{Cl}(V)$ kompaktan skup i $\mathrm{Cl}(V) \subseteq U$.*

Dokaz. Neka je X lokalno kompaktan, $x \in X$ i U otvorena okolina od x. Napravimo kompaktifikaciju jednom točkom X' od X i označimo $C := X' \backslash U$. C je zatvoren u X' pa je C kompaktan podskup od X'. Sada prema lemi 5.3 možemo odabrati disjunktne otvorene okoline V i W od x i C redom. $\mathrm{Cl}(V)$ je kompaktan u X' i disjunktan od C pa vrijedi $\mathrm{Cl}(V) \subseteq U$, što je trebalo pokazati.

Obratno, neka za svaki $x \in X$ i otvorenu okolinu U od x postoji otvorena okolina V od x takva da je $\mathrm{Cl}(V)$ kompaktan skup i $\mathrm{Cl}(V) \subseteq U$. Očito je onda X lokalno kompaktan jer je $x \in V \subseteq \mathrm{Cl}(V)$. □

Korolar 5.5 ([2])**.** *Neka je X lokalno kompaktan Hausdorffov prostor i neka je $A \subseteq X$. Ako je A zatvoren ili otvoren skup, onda je A lokalno kompaktan prostor.*

Literatura

[1] S. Mardešić, Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru, Školska knjiga, Zagreb, 1979.

[2] J. Munkres, Topology, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2000.

[3] W. Rudin, Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, SAD, 1976.

[4] Drake F. R., Singh D., Intermediate Set Theory, John Wiley & Sons, Baffins Lane, Chichester, 1996.