Kvadratne forme i krivulje drugog reda

Pravdić, Tea

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA MATEMATIKU
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Tea Pravdić

Kvadratna forma i krivulje drugog reda

Završni rad

Osijek, 2019.

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA MATEMATIKU

Tea Pravdić

Kvadratna forma i krivulje drugog reda

Završni rad

Mentor:
doc.dr.sc. Suzana Miodragović

Osijek, 2019.

Sadržaj

Sažetak

Kvadratna forma je homogeni polinom drugog stupnja od n varijabli. Kvadratne forme spominju se u raznim granama matematike (teorija brojeva, linearna algebra, diferencijalna geometrija, diferencijalna topologija, ...). U prvom poglavlju ćemo definirati definitnost kvadratne forme. Zatim, prelazimo na skupove točaka ravnine, kao što su kružnica, elipsa, hiperbola i parabola koje imaju niz zajedničkih svojstava, pa ih jednim imenom zovemo krivulje drugog reda. Jedno od zajedničkih svojstava navedenih krivulja je da se svaka od njih može zapisati kao skup svih nultočki polinoma drugog stupnja. Veza između kvadratne forme i krivulja drugog reda omogućuje nam određivanje o kojoj je krivulji riječ i onda kada nam je ona zadana općom jednadžbom, tj. kada nemamo zadanu jednadžbu krivulje sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava. Najvažniji dio završnog rada, veza između kvadratne forme i krivulja drugog reda, poopćen je primjerima u svrhu boljeg razumijevanja ove teme.

Ključne riječi: kvadratna forma, krivulja drugog reda, hiperbola, elipsa, parabola, polinom

Abstract

Quadratic form is a homogeneous second degree polynomial of n variables. The quadratic form is used in various branches of mathematics (number theory, linear algebra, differential geometry, differential topology,...). In the first chapter we will define the definiteness of the quadratic form. Next, we move to sets of points of the plane, such as a circle, an ellipse, a hyperbola, and a parabola that have a number of common features, and we call them second order curves by one name. One of the common features of the curves mentioned is that each of them can be written as a set of all null points of second order polynomial. The connection between the quadratic form and the second-order curves allows us to determine what curve it is and when it is given to us by the general equation, that is, when we do not have a given curve equation centered at the origin of the coordinate system. The most important part of the this paper, the link between the quadratic form and the second-order curves, is generalized with examples for the purpose of a better understanding of this topic.
Key words: quadratic forms, second-oder curve, ellipse, hyperbole, parabola, polynomial

Uvod

Između skupa točaka ravnine M i vektorskog prostora $X_0(M)$ postoji bijekcija, pa ćemo svakoj točki P pridružiti njezin radij-vektor $\overrightarrow{OP}$. Definirajmo sada preslikavanje $\mathcal{A} : X_0 \to X_0$ koje će radij-vektor $\overrightarrow{OP}$ preslikati u radij-vektor $\overrightarrow{OP'}$, tj.

$$\mathcal{A}(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{Of(P)},$$

gdje je $f : M \to M$ funkcija koja preslikava ravninu M u ravninu M. Preslikavanje $\mathcal{A}$ zvat ćemo **operator**.

Definicija 1. *Kažemo da je operator $\mathcal{A} : X_0 \to X_0$ linearan operator ako $(\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R})(\forall x, y \in X_0)$ vrijedi*

$$\mathcal{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda \mathcal{A}(x) + \mu \mathcal{A}(y).$$

Definicija 2. *Kažemo da je kompleksni broj $\lambda \in \mathbb{C}$* ***svojstvena vrijednost*** *linearnog operatora $\mathcal{A} : X_0 \to X_0$ ako postoji ne-nul vektor $x \neq 0$, takav da vrijedi*

$$\mathcal{A}x = \lambda x.$$

Tada vektor x nazivamo svojstveni vektor koji pripada svojstvenoj vrijednosti λ.

Definicija 3. *Kažemo da je linearni operator $\mathcal{A} : X_0 \to X_0$ simetričan ako vrijedi*

$$\langle \mathcal{A}x, y \rangle = \langle x, \mathcal{A}y \rangle, \qquad \forall x, y \in X_0.$$

Teorem 1. *(**Teorem o dijagonalizaciji simetričnog operatora.**) Ako je $\mathcal{A} : X_0 \to X_0$ simetrični linearni operator na vektorskom prostoru $X_0 = X_0(M)$, onda postoje realni brojevi $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ i ortonormirana baza $\{e_1', e_2'\}$ vektorskog prostora X_0, tako da bude*

$$\mathcal{A}e_1' = \lambda_1 e_1', \qquad \mathcal{A}e_2' = \lambda_2 e_2'.$$

Svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2 simetričnog linearnog operatora $\mathcal{A} : X_0 \to X_0$ su realne i $\lambda_1 \neq \lambda_2$, a odgovarajući svojstveni vektori v_1 i v_2 su međusobno okomiti.
Vektore ortonormirane baze za X_0 dobijemo tako da:

$$e_1' = \frac{v_1}{\|v_1\|}, \qquad e_2' = \frac{v_2}{\|v_2\|}.$$

Definicija 4. *Kažemo da je linearni operator $\mathcal{U} : X_0 \to X_0$ ortogonalan operator ako je*

$$\langle \mathcal{U}x, \mathcal{U}y \rangle = \langle x, y \rangle, \qquad \forall x, y \in X_0.$$

Definicija 5. *Kvadratnu matricu A kojoj su svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki*

0 *nazivano* ***dijagonalna*** *matrica.*

Kvadratna forma

Funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definirana formulom

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$$

naziva se **kvadratna forma**.

Kvadratnu formu možemo prikazati pomoću skalarnog produkta

$$\langle Ax, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) x_i = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = x^T A x,$$

gdje su $x = [x_1 \dots x_n]^T$ i $A = (a_{ij})$, a i-ta komponenta vektora Ax jednaka $(Ax)_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$.

Definicija 1. *Kvadratnu funkciju dviju varijabli* $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$q(x_1, x_2) = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2, \quad a_{11}, a_{12}, a_{22} \in \mathbb{R}$$

nazivamo ***kvadratna forma dviju varijabli****.*

Napomena. *Lako se može uočiti da svakoj matrici odgovara jedinstvena kvadratna forma, dok jednoj kvadranoj formi odgovara više kvadratnih matrica. Na primjer, općenito za matricu drugog reda kvadratna forma ima oblik:*

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2^2, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad i, j \in \{1, 2\}.$$

Za matricu $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ *odgovarajuća kvadratna forma je:*

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} = 2x_1^2 + 2x_1 x_2 + 3x_2^2,$$

a za matricu $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ *kvadratna forma je:*

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2x^2 + 2xz + 4xy - 2yz + 3z^2.$$

Promotrimo i obrat. Spomenutoj kvadratnoj formi $2x^2+2xz+4xy-2yz+3z^2$ *odgovaraju, uz gornju, još i matrice:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 11 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \textit{itd.}$$

Primijetimo da sve one imaju iste dijagonalne elemente, kao i zbroj $a_{ij} + a_{ji}$ *dvaju elemenata simetričnih s obzirom na glavnu dijagonalu. Taj je zbroj upravo koeficijent uz član* $x_i x_j$ *u kvadratnoj formi. Odavde također možemo zaključiti da će za zadanu kvadratnu formu postojati jedinstvena odgovarajuća simetrična matrica. Zato ćemo u daljnjem promatrati samo simetrične matrice.*
Forma koja je pridružena dijagonalnoj matrici je ***kanonska****.*

Linearnom operatoru $\mathcal{A} : X_0 \to X_0$ u bazi $\{e_1, e_2\}$ pripada matrica $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ koju zovemo **matrica kvadratne forme**.

Prema prethodnoj napomeni jasno nam je da ćemo za matricu kvadratne forme uzeti da je simetrična, tj. operator $\mathcal{A}$ je simetričan.

U nastavku ćemo pokazati postupak kojim kvadratnu formu prevodimo u kanonsku formu.
Ranije smo rekli da kvadratnu formu $q(x_1, x_2)$ možemo prikazati kao skalarni produkt $\langle Ax, x\rangle$, $x \in X_0$ i $x = x_1e_1 + x_2e_2$.

Kako je

$$\begin{aligned} Ax = x_1Ae_1 + x_2Ae_2 &= x_1(a_{11}e_1 + a_{12}e_2) + x_2(a_{12}e_1 + a_{22}e_2) \\ &= (x_1a_{11} + x_2a_{12})e_1 + (x_1(a_{12} + x_2a_{22})e_2, \end{aligned}$$

imamo

$$\begin{aligned} \langle Ax, x\rangle &= x_1(x_1a_{11} + x_2a_{12}) + x_2(x_1a_{12} + x_2a_{22}) \\ &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = q(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Nadalje, prema teoremu o dijagonalizaciji simetričnog operatora postoji ortonormirana baza $\{e_1^{'}, e_2^{'}\}$ i $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tako da je

$$\begin{aligned} \mathcal{A}e_1^{'} &= \lambda_1 e_1^{'}, \\ \mathcal{A}e_2^{'} &= \lambda_2 e_2^{'}, \end{aligned}$$

tj. u novoj bazi $\{e_1^{'}, e_2^{'}\}$ linearnom operatoru $\mathcal{A}$ pripada dijagonalna matrica $D = diag(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$. Ortonormirana baza $\{e_1^{'}, e_2^{'}\}$ se dobije od baze $\{e_1, e_2\}$ rotacijom za kut $\varphi(cos\varphi = e_1 \cdot e_1^{'})$ u pozitivnom smjeru.
U novoj bazi $\{e_1^{'}, e_2^{'}\}$ vektoru x pripadaju kordinate $x = y_1 e_1^{'} + y_2 e_2^{'}$, a skalarni produkt $\langle Ax, x\rangle$ postaje:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}x, x\rangle &= \mathcal{A}(y_1 e_1^{'} + y_2 e_2^{'})(y_1 e_1^{'} + y_2 e_2^{'}) \\ &= (y_1 \mathcal{A}e_1^{'} + y_2 \mathcal{A}e_2^{'})(y_1 e_1^{'} + y_2 e_2^{'}) \\ &= (y_1 \lambda_1 e_1^{'} + y_2 \lambda_1 e_2^{'})(y_1 e_1^{'} + y_2 e_2^{'}) \\ &= \lambda_1 (y_1)^2 + \lambda_2 (y_2)^2. \end{aligned}$$

Između starih i novih koordinata vektora x postoji veza:

$$y_1 = x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi,$$

$$y_2 = -x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi,$$

pa za svaki $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = \lambda_1(x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi)^2 + \lambda_2(-x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi)^2.$$

Na osnovi definicije jednakosti polinoma dobivamo sljedeće jednakosti:

$$a_{11} = \lambda_1 \cos^2\varphi + \lambda_2 \sin^2\varphi,$$

$$a_{22} = \lambda_1 \sin^2\varphi + \lambda_2 \cos^2\varphi,$$

$$a_{12} = (\lambda_1 - \lambda_2) \sin\varphi \cos\varphi,$$

iz kojih računamo:

$$
\begin{aligned}
\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 &= (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\sin^2\varphi\cos^2\varphi + \lambda_1\lambda_2(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi) - (\lambda_1 - \lambda_2)^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi \\
&= \underbrace{\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2\right)}_{=2\lambda_1\lambda_2}\sin^2\varphi\cos^2\varphi + \lambda_1\lambda_2(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi) \\
&= \lambda_1\lambda_2(2\sin^2\varphi\cos^2\varphi + \sin^4\varphi + \cos^4\varphi) = \lambda_1\lambda_2(\sin^2\varphi\cos^2\varphi)^2 \\
&= \lambda_1\lambda_2,
\end{aligned}
$$

$\mathrm{tr}\, A = a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2$.

Prema tome, koristeći Vieteove formule, svojstveni polinom linearnog operatora $\mathcal{A}$ kojem su svojstvene vrijednosti λ_1, λ_2 možemo zapisati kao

$$
\begin{aligned}
P(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \\
&= \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 \\
&= \lambda^2 - \lambda\,\mathrm{tr}\, A + \det A.
\end{aligned}
$$

Primjer 1. *Neka je $(O; e_1, e_2)$ pravokutni koordinatni sustav u ravnini i* $A = \begin{bmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ *matrica kvadratne forme.*

- Odgovarajuća kvadratna forma je

$$q(x_1, x_2) = 17x_1^2 + 2 \cdot 6x_1x_2 + 8x_2^2.$$

- Svojstveni polinom je

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 25\lambda + 100.$$

Odavde dobijemo svojstvene vrijednosti matrice A, kao nultočke polinoma P, $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 20$.

- Svojsveni vektori su jednaki:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \mathcal{A}e_1 - \lambda_2 e_1 = -3e_1 + 6e_2, \\
v_2 &= \mathcal{A}e_1 - \lambda_1 e_1 = 12e_1 + 6e_2.
\end{aligned}
$$

- Nova baza u kojoj je kvadratna forma kanonska je:

$$
\begin{aligned}
e_1' &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-e_1 + 2e_2), \\
e_2' &= \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2e_1 + e_2).
\end{aligned}
$$

- Kvadratna forma u novoj bazi ima oblik

$$q(y_1, y_2) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 5y_1^2 + 20y_2^2.$$

Ispitivanje definitnosti kvadratne forme

Definicija 1. *Kažemo da je kvadratna forma*

$$q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2, \quad a_{11}, a_{12}, a_{22} \in \mathbb{R}$$

- ***pozitivno semidefinitna*** *ako poprima samo nenegativne vrijednosti, tj.* $q(x_1, x_2) \geq 0, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$*;*
- ***pozitivno definitna*** *ako je pozitivno semidefinitna i ako je* $q(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$*;*
- ***negativno semidefinitna*** *ako poprima samo nepozitivne vrijednosti, tj.* $q(x_1, x_2) \leq 0, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$*;*
- ***negativno definitna*** *ako je negativno semidefinitna i ako je* $q(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$*;*
- ***indefinitna*** *ako prima i pozitivne i negativne vrijednosti.*

Neka je $(O; e_1, e_2)$ pravokutni koordinatni sustav u ravnini, a $\{e_1, e_2\}$ ortonormirana baza. Kao što smo vidjeli u prethodnim razmatranjima, za kvadratnu formu $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vrijedi:

$$q(x_1, x_2) = \langle Ax, x \rangle, \tag{1}$$

gdje je $x = x_1e_1 + x_2e_2$, a linearni operator $\mathcal{A}$ u bazi $\{e_1, e_2\}$ zadan je matricom $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Također, u novoj ortonormiranoj bazi $\{e_1^{'}, e_2^{'}\}$ definiranoj preko svojstvenih vektora linearnog operatora $\mathcal{A}$, vrijedi da je

$$q(y_1, y_2) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2,$$

gdje je $x = y_1e_1^{'} + y_2e_2^{'}$, a $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi:

$$\lambda_1\lambda_2 = \det\, A == a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}\, A = a_{11} + a_{22}.$$

Kriteriji za ispitivanje kvadratne forme

- Kvadratna forma q je pozitivno definitna ako i samo ako je $a_{11} > 0$ i $\det\, A > 0$.

Dokaz:

Neka je q pozitivno definitna kvadratna forma.

Iz jednakosti (1) vrijedi da je $q(y_1, y_2) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 \geq 0 \Rightarrow \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$.

Kako je $q(y_1, y_2) = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2 = 0$, slijedi da je $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$. Prema tome je $\det A = \lambda_1 \lambda_2 > 0$.

Iz $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 \Rightarrow a_{11}a_{22} > a_{12}^2 \geq 0 \Rightarrow a_{11}a_{22} > 0$, slijedi da je $a_{11}a_{22} \neq 0$ i a_{11} i a_{22} su istog predznaka.

Nadalje, $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22}$, a kako je $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$, tada je i $a_{11} + a_{22} > 0 \Rightarrow a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$.

Obrnuto, ako je $a_{11} > 0$ i $\det A > 0$ iz $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 \Rightarrow a_{11}a_{22} > a_{12}^2 \geq 0 \Rightarrow a_{11}a_{22} > 0$.

Kako su a_{11} i a_{22} istog predznaka, slijedi da je $a_{22} > 0$.

Također, $\det A = \lambda_1 \lambda_2 > 0 \Rightarrow \lambda_1,\ \lambda_2 \neq 0$ i istog su predznaka.

Sada iz $\underbrace{a_{11} + a_{22}}_{>0} = \operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 > 0$, slijedi da su $\lambda_1,\ \lambda_2 > 0$, pa je $q(y_1, y_2) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$ pozitivno definitna. $\square$

Sličnim postupkom se mogu dokazati i sljedeći kriteriji:

- Kvadratna forma q je pozitivno semidefinitna ako i samo ako je $a_{11} \geq 0$, $a_{22} \geq 0$ i $\det A \geq 0$.
- Kvadratna forma q je negativno definitna ako i samo ako je $a_{11} < 0$ i $\det A > 0$.
- Kvadratna forma q je negativno semidefinitna ako i samo ako je $a_{11} \leq 0$, $a_{22} \leq 0$ i $\det A \geq 0$.
- Kvadratna forma q je indefinitna ako i samo ako je $\det A < 0$.

Primjer 2. *Ispitajmo definitnost sljedećih kvadratnih formi:*

a) $q(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_2^2$

Pripadna matrica je $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$. *Kako je* $\det A = -6 < 0$ *kvadratna forma je indefinitna.*

b) $q(x_1, x_2) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2$

Pripadna matrica je $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. *Kvadratna forma je negativno definitna jer je* $\det A = 1 > 0$, *a* $a_{11} = -1 < 0$.

c) $q(x_1, x_2) = 9x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_2^2$

Pripadna matrica je $A = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$. *Kvadratna forma je pozitivno definitna jer je* $a_{11} > 0$ *i* $\det A > 0$.

Krivulje drugog reda

O krivuljama drugog reda radove su pisali već stari Grci. To su bili Platonovi učenici koji su pisali o kružnici, elipsi, paraboli i hiperboli. No, važna znanstvena primjena tih radova pojavila se tek u 17. stoljeću, u trenutku kada je Johannes Kepler otkrio da se planeti kreću po elipsi i Galileo dokazao da je putanja projektila parabola.

Definicija 1. *Skup svih točaka projektivne ravnine čije koordinate zadovoljavaju algebarsku jednadžbu drugog reda*

$$a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$$

nazivamo ***konikom*** *ili* ***krivuljom drugog reda****.*

Gornji izraz možemo zapisati i u matričnom obliku:

$$X^TAX = 0$$

gdje je A simetrična matrica trećeg reda. Ukoliko je matrica A regularna tada govorimo o nesingularnim konikama. S obzirom na presjek konike i nepravog pravca, nesingularne konike dijelimo u tri skupine:

- Elipsa: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (ne sadrži neprave točke),
- Parabola: $y^2 = 2px$ (sadrži jednu nepravu točku),
- Hiperbola: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (siječe nepravi pravac u dvije točke).

Starogrčki matematičari definiraju krivulje drugog reda kao presjeke stošca ravninom, odakle i potječe hrvatski naziv čunjosječnice.

Također, krivulje drugog reda definiraju se i kao skup svih nultočaka polinoma drugog reda dviju varijabli $\mathcal{P} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{P}(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_0, \quad a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0 \in \mathbb{R},$$

pri čemu matrica kvadratne forme $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ nije nul-matrica.

Točka (x_1, x_2) ravnine M je nultočka polinoma $\mathcal{P}$ ako je $\mathcal{P}(x_1, x_2) = 0$.

Naš cilj je odrediti o kojoj je krivulji riječ kada nam nisu zadane jednadžbe krivulja drugog reda sa središtem u ishodištu. To vidimo u sljedećem primjeru.

Primjer. *Identificirajmo skup točaka dan jednadžbom* $x_1^2 - 4x_2^2 - 14x_1 + 45 = 0$ *u koordinatnom sustavu* $x_1O_1x_2$.

U ovom primjeru nemamo mješovitog člana, tj. koeficijent a_{12} je jednak 0, pa nam je potrebna samo translacija koordinatnog sustava.
Prvo napravimo grupiranje po nepoznanicama:

$$(x_1^2 - 14x_1) - 4x_2^2 + 45 = 0.$$

Kako bismo se riješili člana $14x_1$ svodimo izraz na potpuni kvadrat:

$$(x_1 - 7)^2 - 49 - 4x_2^2 + 45 = 0$$

$$(x_1 - 7)^2 - 4{x_2}^2 - 4 = 0.$$

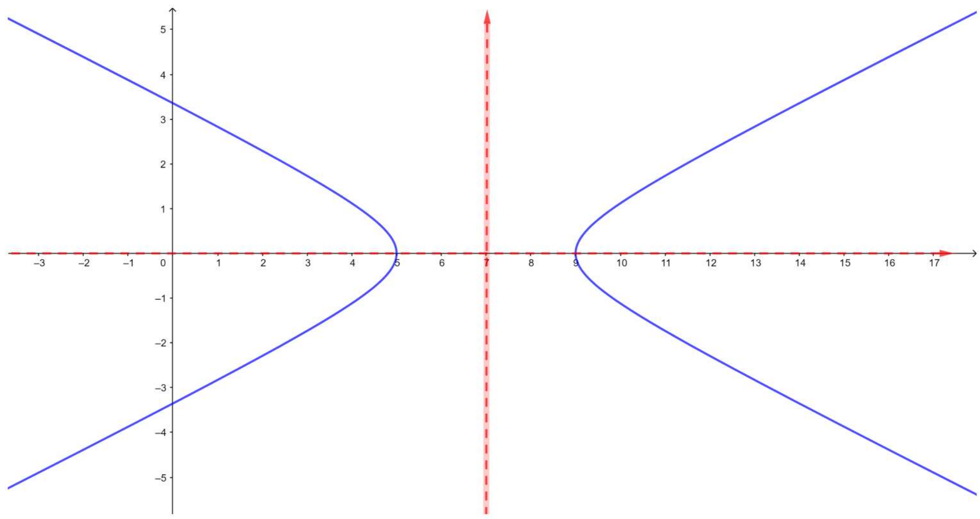
Sada, stavimo nepoznanice na jednu stranu, a na drugu slobodni član:

$$(\underbrace{x_1 - 7}_{y_1})^2 - 4\underbrace{x_2}_{y_2}{}^2 = 4.$$

Ovo nam već sliči na hiperbolu. Uvedemo li supstituciju $y_1 = x_1 - 7$, $y_2 = x_2$ napravili smo translaciju ishodišta u točku $(7, 0)$.
Prethodna jednadžba sada izgleda ovako:

$$y_1^2 - 4y_2^2 = 4.$$

Podijelimo li tu jednadžbu s 4 imamo $\dfrac{y_1^2}{2^2} - \dfrac{y_2^2}{1} = 1$, a to je hiperbola u novom koordinatnom sustavu y_1Oy_2.



Slika 1: Skup svih rješenja jednadžbe $x_1^2 - 4x_2^2 - 14x_1 + 45 = 0$.

Teorem 1. *Neka je $S \subset M$ skup svih nultočaka polinoma $\mathcal{P}$ u pravokutnom koordinarm sustavu $(O; e_1, e_2)$ i neka je $A \neq 0$ matrica pripadne kvadratne forme. Tada*

1. *ako je* $\det A > 0$*, onda je* S *elipsa ili jednočlan ili prazan skup;*

2. *ako je* $\det A < 0$*, onda je* S *hiperbola ili unija dvaju pravaca koji se sijeku;*

3. *ako je* $\det A = 0$*, onda je* S *parabola ili unija dvaju paralelnih pravaca ili jedan pravac ili prazan skup.*

Dokaz. Ako uvedemo vektore $x = x_1e_1 + x_2e_2$ i $a = a_1e_1 + a_2e_2$, jednadžbu

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_0 = 0$$

možemo zapisati kao $\langle \mathcal{A}x, x\rangle + \langle a, x\rangle + a_0 = 0$, gdje je $\mathcal{A}$ simetrični linearni operator kome je u bazi $\{e_1, e_2\}$ pridružena matrica A.

Neka je $\{e_1^{'}, e_2^{'}\}$ baza u kojoj je matrica A dijagonalna, $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$. Neka x i a u novoj bazi $\{e_1^{'}, e_2^{'}\}$ imaju oblik

$$x = y_1e_1^{'} + y_2e_2^{'}, \quad a = b_1e_1^{'} + b_2e_2^{'}.$$

Tada početna jednadžba prelazi u oblik

$$\lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + b_1y_1 + b_2y_2 + a_0 = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2, b_1, b_2, a_0 \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Primijetimo da ova jednadžba nema mješoviti član.

Kako je $A \neq 0$, barem jedna svojstvena vrijednost linearnog operatora $\mathcal{A}$ je različita od nule. BSO., neka je $\lambda_1 \neq 0$ i $\lambda_1 > 0$.

Razmatramo dva slučaja:

I. $\lambda_2 \neq 0$

$$\lambda_1y_1^2 + b_1y_1 = \lambda_1\Bigg(\underbrace{y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}}_{z_1}\Bigg)^2 - \frac{b_1^2}{4\lambda_1}$$

$$\lambda_2y_2^2 + b_2y_2 = \lambda_2\Bigg(\underbrace{y_2 + \frac{b_2}{2\lambda_2}}_{z_2}\Bigg)^2 - \frac{b_2^2}{4\lambda_2}$$

Tada jednadžba (2) ima oblik

$$\lambda_1z_1^2 - \frac{b_1^2}{4\lambda_1} + \lambda_2z_2^2 - \frac{b_2^2}{4\lambda_2} + a_0 = 0,$$

tj.

$$\lambda_1z_1^2 + \lambda_2z_2^2 = \gamma, \quad \gamma = \frac{b_1^2}{4\lambda_1} + \frac{b_2^2}{4\lambda_2} - a_0. \tag{3}$$

1) Ako je $\lambda_2 > 0$, situacija je karakterizirana jednostavnim kriterijem: $\det A > 0$. Stoga, jednadžba (3) može predstavljati: elipsu (za $\gamma > 0$) ili jednočlan skup (za $\gamma = 0$) ili prazan skup (za $\gamma < 0$)

2) Ako je $\lambda < 0$, situacija je karakterizirana kriterijem: $\det A < 0$. Kako je u ovom slučaju $\lambda_1 > 0$, a $\lambda_2 < 0$, jednadžba (3) može predstavljati: hiperbolu (za $\gamma \neq 0$) ili uniju dvaju pravaca koji se sijeku (za $\gamma = 0$).

II. $\lambda_2 = 0$

1) $b_2 \neq 0$.

U ovom slučaju jednadžbu (2) možemo zapisati u obliku

$$\lambda_1 z_1^2 + b_2 z_2 + \beta = 0, \tag{4}$$

gdje je

$$z_1 = y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}, z_2 = y_2, \beta = a_0 - \frac{b_1^2}{4\lambda_1}.$$

Jednadžba (4) predstavlja parabolu.

2) $b_2 = 0$

Jednadžba (2) izgleda ovako:

$$\lambda_1 y_1^2 + b_1 y_1 + a_0 = 0,$$

i nakon dijeljenja s λ_1 i svođenja na potpuni kvadrat postaje

$$\left(y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2 + 0 \cdot y_2 - \frac{b_1^2}{4\lambda_1^2} + \frac{a_0}{\lambda_1} = 0$$

i može se zapisati u obliku

$$z_1^2 + 0 \cdot z_2 = \gamma \tag{5}$$

gdje je

$$z_1 = y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}, \qquad z_2 = y_2, \qquad \gamma = \frac{1}{\lambda_1}\left(\frac{b_1^2}{4\lambda_1} - a_0\right).$$

Skup svih rješenja jednadžbe (5) za $\gamma < 0$ je prazan skup, za $\gamma = 0$ pravac $z_1 + 0 \cdot z_2 = 0$, a za $\gamma > 0$ to je unija paralelnih pravaca

$$z_1 + 0 \cdot z_2 = \sqrt{\gamma}, \qquad z_1 + 0 \cdot z_2 = -\sqrt{\gamma}.$$

Time je teorem dokazan. $\square$

Primjer 1. *U pravokutnom koordinatnom sustavu* $(O; e_1, e_2)$ *odredimo skup svih rješenja jednadžbe*

$$17x_1^2 + 12x_1x_2 + 8x_2^2 + 20\sqrt{5}x_1 + 20 = 0.$$

Odmah iz jednadžbe možemo iščitati da ćemo uz translaciju imati i rotaciju koordinatnog sustava kako bismo prešli u novu bazu prostora u kojoj će nam rješenje jednadžbe biti očito.

Odredimo matricu pripadne kvadratne forme:

$$A = \begin{bmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Determinanta ove matrice iznosi $\det A = 100$, što je veće od nule i prema prethodnom teoremu moguća rješenja su elipsa, jednočlan ili prazan skup. Vektor a, kojeg smo definirali u prethodnom teoremu, u novoj bazi ima oblik $a = 20\sqrt{5}e_1$, a $a_0 = 20$ je slobodni član početne jednadžbe.

Svojstvene vrijednosti dobivamo kao nultočke svojstvenog polinoma $P(\lambda) = \lambda^2 - 25\lambda + 100$ i to su

$$\lambda_1 = 20, \qquad \lambda_2 = 5.$$

Svojstveni vektori su

$$v_1 = 12e_1 + 6e_2,$$

$$v_2 = -3e_1 + 6e_2.$$

Nova baza u koordinatnom sustavu $(O_1, e_1^{'}, e_2^{'})$ ima oblik

$$e_1^{'} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2e_1 + e_2),$$

$$e_2^{'} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-e_1 + 2e_2).$$

Skalarni produkt $\langle Ax, x\rangle$ u novoj bazi glasi:

$$\langle Ax, x\rangle = 20y_1^2 + 5y_2^2.$$

Kako operator $\mathcal{A}$ u novoj bazi ima dijagonalnu matricu riješili smo se mješovitog člana. Ostaje nam još napraviti translaciju koordinatnog sustava.

Nadalje, $b_1 = ae_1^{'} = 40$, a $b_2 = ae_2^{'} = -20$ pa početna jednadžba prelazi u oblik (2) iz prethodnog teorema:

$$20y_1^2 + 5y_2^2 + 40y_1 - 20y_2 + 20 = 0.$$

Podijelimo ovu jednadžbu brojem 5 i grupiramo po nepoznanicama te dobivamo:

$$4(y_1^2 + 2y_1) + (y_2^2 - 4y_2) + 4 = 0.$$

Svođenjem na potpuni kvadrat imamo

$$4(y_1 + 1)^2 - 4 + (y_2 - 2)^2 = 0.$$

Sada, uvedemo zamjenu

$$z_1 = y_1 + 1, \qquad z_2 = y_2 - 2$$

te tako translatiramo ishodište O_1 koordinatnog sustava $(O_1, e_1^{'}, e_2^{'})$ u točku $O_2(-1, 2)$. O_2 ima koordinate $(0, 0)$ u koordinatnom sustavu $z_1 O_2 z_2$.

Jednadžbu $4z_1^2 + z_2^2 = 4$ podijelimo s 4 i dobivamo

$$\frac{z_1^2}{1} + \frac{z_2^2}{2^2} = 1, \tag{6}$$

a to je elipsa u novom koordinatnom sustavu $z_1 O_2 z_2$.

Kako je $\overrightarrow{OO_2} = -1e_1^{'} + 2e_2^{'} = \frac{-4}{\sqrt{5}}e_1 + \frac{3}{\sqrt{5}}e_2$, veza između koordinata neke točke $T \in M$ u koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$ i koordinatnom sustavu $(O_2; e_1^{'}, e_2^{'})$ dana je sljedećom vektorskom jednakošću

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 = \overrightarrow{OO_2} + z_1 e_1^{'} + z_2 e_2^{'} = \frac{-4}{\sqrt{5}}e_1 + \frac{3}{\sqrt{5}}e_2 + \frac{z_1}{\sqrt{5}}(2e_1 + e_2) + \frac{z_2}{\sqrt{5}}(-e_1 + 2e_2),$$

odakle dobivamo

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-4 + 2z_1 - z_2), \qquad x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(3 + z_1 + 2z_2),$$

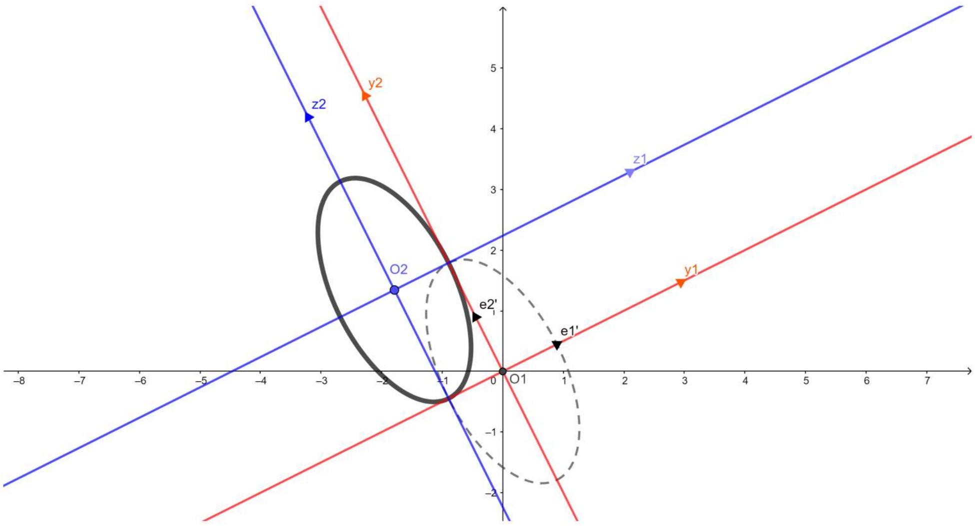
odnosno

$$z_1 = 1 + \frac{\sqrt{5}}{5}x_2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}x_1, \qquad z_2 = -2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}x_2 + \frac{\sqrt{5}}{5}x_1.$$

Zato jednadžba elipse (6) u koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$ glasi

$$\frac{\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{5}x_2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}x_1\right)^2}{1} + \frac{\left(-2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}x_2 + \frac{\sqrt{5}}{5}x_1\right)^2}{2^2} = 1,$$

što odgovara polaznoj jednadžbi.



Slika 2: Skup svih rješenja jednadžbe $17x_1^2 + 12x_1x_2 + 8x_2^2 + 20\sqrt{5}x_1 + 20 = 0$.

Primjer 2. *U pravokutnom koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$ odredimo skup svih rješenja jednadžbe*

$$9x_1^2 + 24x_1x_2 + 16x_2^2 + 50x_1 - 100x_2 + 25 = 0.$$

U ovom primjeru matrica prisutne kvadratne forme je $A = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$, vektor $a = 50e_1 - 100e_2$, a $a_0 = 25$. Kako je $\det A = 0$ imamo treći slučaj prethodnog teorema.

Svojstvene vrijednosti su jednake:

$$\lambda_1 = 25,$$

$$\lambda_2 = 0,$$

a svojstveni vektori:

$$v_1 = 9e_1 + 12e_2,$$

$$v_2 = -16e_1 + 12e_2.$$

Nova baza u koordinatnom sustavu $(O_1, e_1^{'}, e_2^{'})$ ima oblik

$$e_1^{'} = \frac{1}{5}(3e_1 + 4e_2),$$

$$e_2^{'} = \frac{1}{5}(-4e_1 + 3e_2).$$

Skalarni produkt $\langle Ax, x \rangle$ u novoj bazi glasi:

$$\langle Ax, x \rangle = 25y_1^2.$$

Sada je $b_1 = ae_1^{'} = -50$, a $b_2 = ae_2^{'} = -100$ pa početnu jednadžu možemo zapisati u obliku (2) prethodnog teorema:

$$25y_1^2 - 50y_1 - 100y_2 + 25 = 0.$$

Ako podijelimo ovu jednadžbu brojem 25 i grupiramo po nepoznanicama imamo:

$$y_1^2 - 2y_1 - 4y_2 + 1 = 0.$$

Svođenjem na potpuni kvadrat imamo

$$(y_1 - 1)^2 - 4y_2 = 0.$$

Uvođenjem zamjene

$$z_1 = y_1 - 1, \qquad z_2 = y_2$$

translatiramo ishodište O_1 koordinatnog sustava $(O_1, e_1^{'}, e_2^{'})$ u točku $O_2(1,0)$, što je ishodište novog koordinatnog sustava $z_1 O_2 z_2$.

Jednadžbu smo sveli na izraz

$$z_1^2 = 4z_2 \tag{7}$$

i tako otkrili da se radi o paraboli.

Kako je $\overrightarrow{OO_2} = \sqrt{2}e_1^{'} - \sqrt{2}e_2^{'} = \frac{1}{5}(3e_1 + 4e_2)$, veza između koordinata neke točke $T \in M$ u koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$ i koordinatnom sustavu $(O_2; e_1^{'}, e_2^{'})$ dana je sljedećom vektorskom jednakošću

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 = \overrightarrow{OO_2} + z_1 e_1^{'} + z_2 e_2^{'} = \frac{1}{5}(3e_1 + 4e_2) + \frac{z_1}{5}(3e_1 + 4e_2) + \frac{z_2}{5}(-4e_1 + 3e_2),$$

odakle dobivamo

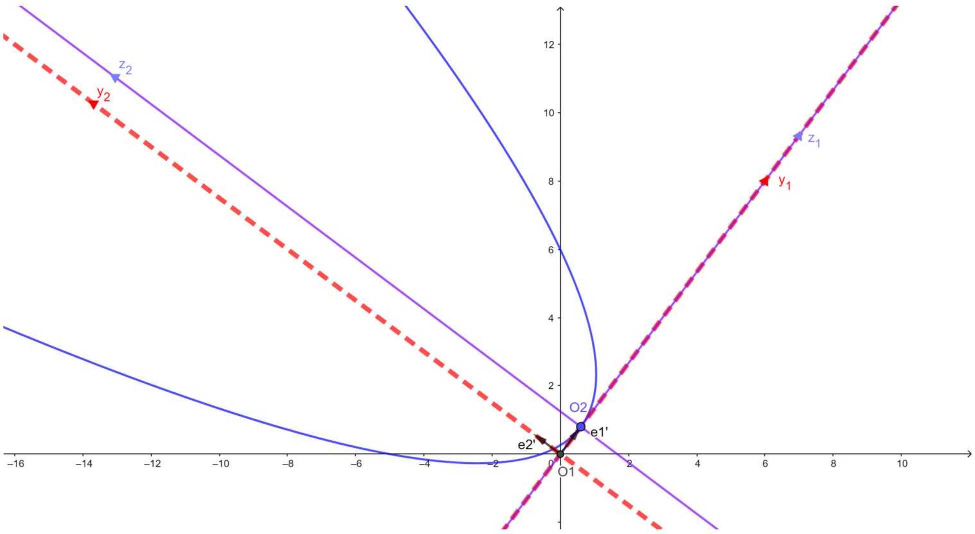
$$x_1 = \frac{1}{5}(3 + 3z_1 - 4z_2), \qquad x_2 = \frac{1}{5}(4 + 4z_1 + 3z_2),$$

odnosno

$$z_1 = \frac{1}{5}(3x_1 + 4x_2 - 5), \qquad z_2 = \frac{1}{5}(-4x_1 + 3x_2).$$

Zato jednadžba parabole (7) u koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$ glasi:

$$(3x_1 + 4x_2 - 5)^2 = 20(-4x_1 + 3x_2).$$



Slika 3: Skup svih rješenja jednadžbe $9x_1^2 + 24x_1x_2 + 16x_2^2 + 50x_1 - 100x_2 + 25 = 0$.

Literatura

[1] N. Elezović, *Linearna algebra*, Zagreb, 2006.

[2] $https://www.mathos.unios.hr/\ dbrajkovic/Materijali/GRP/Geo\_2.pdf$

[3] S. Kurepa, *Konačnodimenzionalni vektorski prostori i primjene*, tehnička knjiga, Zagreb, 1990.