Newton i Leibniz

Penava, Petra

Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Petra Penava

Newton i Leibniz

Završni rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Petra Penava

Newton i Leibniz

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Mihaela Ribičić Penava

Osijek, 2019.

Sadržaj

Sažetak

U ovom završnom radu upoznat ćemo se sa životom i radom Isaaca Newtona i Gottfrieda Leibniza. U prvom dijelu rada bavit ćemo se Newtonovim binomnim teoremom i metodom fluksija, ali dotaknut ćemo se i njegovog rada na području fizike. Zatim ćemo reći nešto o Leibnizovom razvoju infinitezimalnog računa kroz otkriće suma i diferencija te karakterističnog trokuta. U zadnjem dijelu rada navest ćemo glavnu polemiku između Newtona i Leibniza.

Ključne riječi: Newton, binomni teorem, fluksija, derivacija, integral, Leibniz, infinitezimalni račun, sume, karakteristični trokut

Abstract

In this final paper we will be introduced to life and work of Isaac Newton and Gottfried Leibniz. In the first part of the paper we will deal with Newton's binomial theorem and the method of fluxions, but also say something about his work in physics. Afterwards, we will say something about Leibniz's calculus development through discovering sums and differencies as well as differential triangle. In the last part of the paper we will mention the priority controversy between Newton and Leibniz.

Keywords: Newton, binomial theorem, fluxion, derivative, integral, Leibniz, calculus, sums, differential triangle

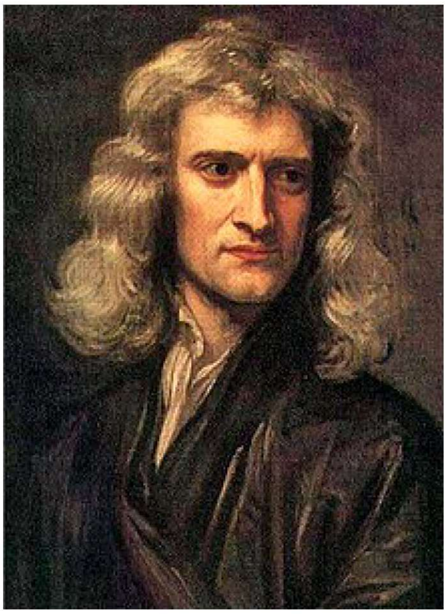
1 Uvod

Isaac Newton i Gottfried Leibniz dva su velika matematičara koja su znatno pomogla razvoju, kako matematike i fizike, tako i brojnih drugih znanosti. Detaljnije ćemo se baviti njihovim doprinosom matematici, no dotaknut ćemo se i fizike. U drugom poglavlju govorit ćemo o Newtonovu životu i radu. Objasnit ćemo otkriće binomnog teorema te metode fluksija, danas poznate kao diferencijalni račun. Zatim ćemo kratko spomenuti njegovu nebesku fiziku. Treće poglavlje posvetit ćemo Leibnizovu životu, njegovoj verziji infinitezimalnog računa kroz ideje o sumama i diferencijama, kao inverznim operacijama, iz kojih slijedi fundamentalni teorem te karakterističnom trokutu. Konačno ćemo, uz brojne sličnosti, navesti glavnu polemiku između dva velikana.

2 Isaac Newton

2.1 Biografija

Isaac Newton rođen je 25. prosinca 1642. u Woolsthorpeu nedaleko od Londona. Godine 1655. poslan je u Granthamsku lokalnu školu gdje je usavršio latinski jezik i gdje ga je Henry Stokes * upoznao s matematikom. Newton tu nije samo upoznao osnove aritmetike, nego je čak proučavao neke vrlo napredne teme kao što su trigonometrija ravnine i razne geometrijske konstrukcije što ga je činilo puno naprednijim od njegovih kolega. Godine 1661. upisao je studij na Cambridgeu gdje je počeo samostalno proučavati matematiku i savladao euklidsku geometriju, Descartesovu geometriju, Viéteova sabrana djela te Wallisovu Arithmetica infinitorum †. Zanimljivo je to da je Newton bio poznat po svojoj snazi koncentracije jer je držao određeni problem u glavi sve dok ga nije razriješio. Nakon završetka studija, vratio se u Woolsthorpe gdje je došao do niza temeljnih otkrića u području mehanike i optike. Doživio je 84 godine i preminuo u Kensingtonu. Newton se smatra najoriginalnijim i najutjecajnijim teoretičarem u povijesti znanosti. Pored otkrića infinitezimalnog računa i nove teorije prirode svjetlosti i boja, Newton je postavljanjem tri zakon kretanja i općim zakonom gravitacije temeljito promijenio osnovnu strukturu fizike.
Više informacija u [3, str. 545] i [6].



Slika 1: Isaac Newton

*Henry Stokes, 1650.-1663. profesor u školi u Granthamu koju je pohađao Newton

†Arithmetica infinitorum, najpoznatije djelo engleskog matematičara Johna Wallisa izdano 1656.

2.2 Binomni teorem

Kao posljedicu proučavanja Wallisova djela *Arithmetica Infinitorum*, Newton je otkrio opći binomni teorem ili proširenje $(a+b)^n$, gdje n može biti razlomak ili čak negativna vrijednost. Wallis je ranije napravio tablice onoga što bi danas pisali kao $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$ za određeni pozitivni cijeli broj n, ali nije napravio procjenu za $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx$. Newton je otkrio da se Wallisova teorija može još poopćiti ako se računa područje od 0 do proizvoljne vrijednosti x (on nije imao znak za integral, ali je definirao integral kao granicu niza suma). Dakle, rješavajući problem izračunavanja površine kruga, uzeo je niz krivulja sličnih Wallisovim, tj. krivulje $y = (1-x^2)^n$. Newton je zatim tablično prikazao vrijednosti ispod tih krivulja kao funkcije varijable x. U zapisu:

$$\int_0^x (1-t^2)dt = x - \frac{1}{3}x^3,$$

$$\int_0^x (1-t^2)^2 dt = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5,$$

$$\int_0^x (1-t^2)^3 dt = x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7,$$

$$\int_0^x (1-t^2)^4 dt = x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{6}{5}x^5 - \frac{4}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9.$$

Newton je primijetio da je prvi član svakog izraza x koji se povećava neparno, te da se predznaci članova izmjenjuju. Analogno, pretpostavio je da su prva dva člana od $\int_0^x (1-t^2)^{\frac{1}{2}} dt$ trebala biti $x - \frac{\frac{1}{2}}{3}x^3$. Daljnji pokušaji za prepoznavanje uzorka za interpolaciju‡ iz specifičnih slučajeva doveli su ga do:

$$\int_0^x (1-t^2)^{\frac{1}{2}} dt = x - \frac{\frac{1}{2}}{3}x^3 - \frac{\frac{1}{8}}{5}x^5 - \frac{\frac{1}{16}}{7}x^7 - \frac{\frac{5}{128}}{9}x^9 - ...$$

Brojnici $\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ i $-\frac{5}{128}$ samo su $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3} i \binom{n}{4}$ za konkretni slučaj $n = \frac{1}{2}$, u općoj formuli:

$$\int_0^x (1-t^2)^n dt = x - \binom{n}{1}\frac{1}{3}x^3 + \binom{n}{2}\frac{1}{5}x^5 - \binom{n}{3}\frac{1}{7}x^7 + \binom{n}{4}\frac{1}{9}x^9 - ...$$

gdje je

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}.$$

Drugim riječima, Newton je koristio binomni koeficijent toga oblika i za racionalne eksponente. Primjerice

$$\binom{\frac{1}{2}}{0} = 1, \binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2} = -\frac{1}{8}, \binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{6} = \frac{1}{16}, ...$$

Deriviranjem je dobio izraz:

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - ...$$

a zatim provjerio ispravnost prethodnog računa tako da je desnu stranu pomnožio samu sa sobom i dobio $1 - x^2$.

‡Određivanje nepoznatih vrijednosti neke veličine s pomoću poznatih u nekom intervalu u kojemu su poznate zakonitosti njezinih promjena

Na temelju svega toga Newton je otkrio **binomni teorem** za racionalne eksponente zapisan u obliku beskonačnog reda potencija:

$$(a+bx)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}bx + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2x^2 + ...$$

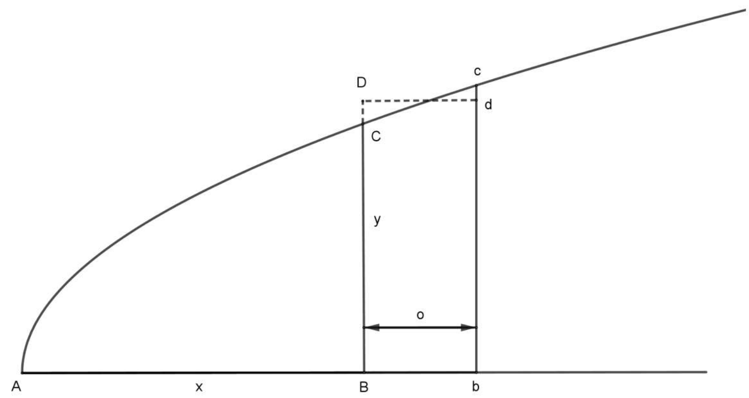
Nikad nije objavio svoj binomni teorem (u čiju točnost je bio posve siguran) niti ga je dokazao u potpunosti. Newton nije razmatrao pitanje konvergencije reda potencija. Binomni teorem postao je poznat preko privatnih krugova, ali se to ne uzima u obzir sve dok se nije pojavio u tiskanom izdanju 1685. godine.
Tvrdnje u ovom poglavlju preuzete su iz [2, str. 394-395] i [3, str. 548].

2.3 Metoda fluksija

Prvo Newtonovo otkriće bila je matematička metoda koju je nazvao **fluksija**, a danas je poznata kao diferencijalni račun. Godine 1671. napisao tekst *De Methodis Serierum et Fluxionum* o fluksijama.

U osnovi, radi se o određivanju brzine iz puta i obrnuto, a Newton je uočio njihovu međusobnu povezanost. Zamislio je česticu koja se giba po krivulji u pravokutnom koordinatnom sustavu, a njene brzine (horizontalnu ẋ i vertikalnu ẏ) naziva fluksijama tekućih veličina (**fluensa**) x i y, pridruženih fluksu (toku) vremena. Ukoliko je putanja opisana krivuljom $f(x, y) = 0$, onda je $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ koeficijent smjera tangente na tu putanju. Koristi Barrowovu ideju o tangenti kao limesu sekanti u određivanju brzine. Inverzni se problem sastoji od određivanja ordinate y iz poznavanja veze izmedu apscise x i omjera vertikalne i horizontalne brzine $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Koristeći razvoj funkcija u redove potencija, Newton je riješio i taj problem i tako uz deriviranje otkrio i antideriviranje tj. neođredeni integral i to da su oni međusobno inverzni (osnovni teorem infinitezimalnog računa). Također je uočio da se antideriviranjem mogu odrediti površine te da su problemi površine, volumena i duljine luka vrlo slični.

Dosta je mijenjao svoje oznake, ali najčešće su $\dot{x}$ za $\frac{dx}{dt}$, x' za antiderivaciju od x, o za dt i $\dot{x}o$ za dx. Newtonov opći postupak za nalaženje odnosa između površine ispod krivulje i njene ordinate (veza između integrala i derivacije) opisat ćemo primjerom. Pretpostavimo da se radi o krivulji u (x, y)-ravnini. Neka je sa z označena površina ispod krivulje (koja je cijela iznad x-osi i prolazi kroz ishodište) u granicama od $x = 0$ do x te neka je $z^2 = \frac{4}{9}x^3$. Ako desnu granicu pomaknemo za mali iznos o, površina se povećava i postoji pravokutnik s bazom $o = |Bb|$ i visinom $v = |bd|$ kojemu je površina jednaka povećanju površine.



Slika 2: Računanje derivacije Newtonovom metodom

Tada je

$$(z+ov)^2 = \frac{4}{9}(x+o)^3$$

iz čega slijedi

$$2zv + ov^2 = \frac{4}{9}(3x^2 + 3xo + o^2).$$

Ukoliko je o "beskonačno mali", onda je $v \approx y$, pa je $2zy \approx \frac{4}{3}x^2$, odnosno $y \approx \sqrt{x}$, tj. $z = \int_0^x t^{\frac{1}{2}} dt$. Vidimo da se u ovom postupku radi o računanju derivacije z po varijabli x, kao i inverznost integriranja i deriviranja. Newton je ovakvim načinom analizirao niz krivulja i dobio prvu tablicu integrala. Najvažniji korak u njegovu pristupu deriviranju i integriranju je dodavanje malog prirasta o varijabli x i pripadnog malog prirasta ov površini z te poništavanje prirasta o i prijelaz s v na y. Ovu je metodu koristio i u diskusijama ekstrema, tangenti i zakrivljenosti krivulja. Kasnije je u svojim radovima reformulirao argumente u terminima fluenta i fluksija. Newton na sličan način nalazi omjere fluksija (koeficijent smjera tangente na krivulju). Na primjer za krivulju

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0,$$

promijenimo li x u $x + o\dot{x}$ i y u $y + o\dot{y}$, dobivamo

$$(x^3 - ax^2 + axy - y^3) + o(3x^2\dot{x} + 3xo\dot{x}^2 + o^2\dot{x}^3 - 2ax\dot{x} - ao\dot{x}^2 + ax\dot{y} + ay\dot{x} + ao\dot{x}\dot{y} - 3y^2\dot{y} - 3yo\dot{y}^2 - o^2\dot{y}^3)$$

$= 0$.
Tada iz jednadžbe krivulje slijedi

$$o(3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + a\dot{y}x + a\dot{x}y - 3y^2\dot{y} + 3xo\dot{x}^2 + o^2\dot{x}^3 - ao\dot{x}^2 + ao\dot{x}\dot{y} - 3yo\dot{y}^2 - o^2\dot{y}^3) = 0$$

iz čega dijeljenjem s $o \neq 0$ dobivamo:

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + a\dot{y}x + a\dot{x}y - 3y^2\dot{y} + 3xo\dot{x}^2 + o^2\dot{x}^3 - ao\dot{x}^2 + ao\dot{x}\dot{y} - 3yo\dot{y}^2 - o^2\dot{y}^3 = 0.$$

Zanemarimo li članove s o dobivamo:

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{y}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 = 0$$

te je

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax}.$$

Navedeni račun je samo primjer, ali ne i dokaz. Sve navedene tvrdnje nalaze se u [1, str. 10-12].

2.4 Newtonova nebeska fizika

Astronom Johannes Kepler naslućivao je da je gibanje planeta oko Sunca uvjetovano privlačenjem Sunca, no mislio je da bi ta sila trebala biti obrnuto proporcionalna s udaljenosti. Više znanstvenika prije Newtona izreklo je da je gravitacijska sila obrnuto proporcionalna s kvadratom udaljenosti, a to je fizičar Robert Hooke posebno predstavio Newtonu i prije nego što je objavljen Newtonov zakon gravitacije[§] (vidi [4, str. 1]). Zatim je Newton to dokazao i utvrdio sličnost sa Zemljinom gravitacijom.

Godine 1687. započinje prva teorija gravitacije i to kada je Isaac Newton objavio svoje najvažnije dijelo *Matematička načela prirodne filozofije (Philosophiae naturalis principia mathematica)*. Svoja razmatranja Newton temelji na osnovu Keplerovih zakona:

Prvi Keplerov zakon: planeti se gibaju u elipsama oko Sunca koje se nalazi u jednom njihovom žarištu.
Drugi Keplerov zakon: radijus-vektor povučen od Sunca do planeta u jednakim vremenima prelazi jednake površine.
Treći Keplerov zakon: kvadrati obilaznih vremena planeta proporcionalni su kubovima velikih osi njihovih eliptičnih putanja.

Isaac Newton zamislio je da bi se Zemljina sila gravitacije trebala protezati do Mjeseca. Kada bismo računali kolika privlačna sila Zemlje mora biti da Mjesec prisili na njegovu (približno) kružnu stazu, dobili bismo da je privlačna sila obrnuto proporcionalna kvadratu udaljenosti od Zemljina težišta. Newton postavlja svoj Newtonov zakon gravitacije prenoseći taj rezultat na sva nebeska tijela. Pri tome masu nebeskog tijela zamišljamo koncentriranu u točki. Dokazao je da tijelo sa sferno simetričnim rasporedom mase (takva su približno sva nebeska tijela) djeluje kao da je sva njegova masa koncentrirana u njegovu središtu.
Matematički izrazi za Keplerove zakone dobiveni su iz općeg zakona gravitacije pa tako treći Keplerov zakon za dva planeta točnije glasi:

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2(M+m_1)}{T_2^2(M+m_2)}$$

gdje su a_1, a_2 - velike osi putanja tih planeta, T_1, T_2 - ophodna vremena tih planeta, a m_1, m_2 - mase tih planeta koje su malene u odnosu na M - masa Sunca. Ako mase m_1, m_2 zanemarimo prema M, posljednji razlomak je jednak 1, pa dobivamo treći Keplerov zakon u izvornom obliku:

$$\frac{a^3}{T^2} = k.$$

Newtonovi zakoni gibanja tri su zakona klasične mehanike objavljena 1687. godine u djelu *Philosophiae naturalis principia mathematica.*

Prvi Newtonov zakon: Svako tijelo ostaje u stanju mirovanja ili jednolikog gibanja po pravcu sve dok vanjske sile ne uzrokuju promjenu tog stanja.

[§] Newtonov zakon gravitacije iz 1687.: Tijela se privlače silom koja je razmjerna njihovim masama i obrnuto razmjerna kvadratu njihove udaljenosti.

Drugi Newtonov zakon: Brzina promjene količine gibanja tijela jednaka je sili koja djeluje na tijelo.
Treći Newtonov zakon: Ako jedno tijelo djeluje silom na drugo, tada i to drugo tijelo djeluje silom na ono prvo. Te dvije sile jednakog su iznosa, suprotnog smjera i leže na istom pravcu. (Sile su međudjelovanje dvaju tijela, i zato se uvijek javljaju u paru; jednu od njih, najčešće proizvoljno, nazivamo akcijom, a drugu reakcijom.)

Principia, kao najvažnije djelo znanstvene revolucije, definirala je znanost o fizici za narednih 200 godina, osigurala Newtonovu reputaciju i pomogla mu postati predsjednikom Kraljevskog društva 1703.
Više o ovome u [5].

3 Gottfried Wilhelm Leibniz

3.1 Biografija

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646.-1716.) rođen je u Leipzigu oko dvije godine prije Vestfalskog mira. Njegov svijet je bio svijet knjiga. Već u dvanaestoj godini života vlada latinskim jezikom i piše stihove. Nakon latinskog naučio je i starogrčki te je mogao u originalu čitati, primjerice, Aristotela. Vladao je takoder i francuskim jezikom koji je bio treći jezik na kome je objavljivao svoje rasprave (njemački, latinski i francuski). Uz to što je sam naučio latinski i grčki, Leibniz je samovoljno, još kao dječak, na sveučilištu u Leipzigu slušao predavanja poznatog retoričara i povjesničara filozofije Jackoba Tomazija. Čitao je redom sve što mu je došlo pod ruku, a otac mu je nakon smrti ostavio veliku biblioteku s djelima Galileja, Campanelle, Platona, Aristotela, Hobbesa, Bacona, Descartesa i mnogih drugih velikih umova ranijih epoha. Upisao je studij s 14 godina. Studij je uključivao filozofiju, retoriku, matematiku, latinski, grčki i hebrejski. Diplomirao je u Leipzigu 1663. godine već sa 17 godina. Ljetni semestar odslušao je na Sveučilištu u Jeni, gdje je pohađao predavanja matematike, zatim se vratio u Leipzig gdje je studirao pravo te magistrirao sljedeće godine. U Parizu 1672. se upoznao s Christiaanom Huygensom¶ čijem se radu iskreno divio, kao i rješenjima nekih problema poput matematičkog klatna‖ i zamolio ga da ga podučava matematiku. Tako se Leibniz u 27. godini života upoznaje sa znanošću kojoj će dati toliko mnogo. Prve rezultate o infinitezimalnom računu imao je već pri povratku iz Pariza. Osim po infinitezimalnom računu, u matematici je poznat i po jednom mehaničkom kalkulatoru, osnovama binarne aritmetike te početnim idejama o determinantama. Leibnizov stil pisanja bio je mnogo sličniji suvremenom matematičkom zapisu za razliku od Newtonovih rezultata pisanih, za današnje shvaćanje, vrlo nejasno. Tijekom života napisao je nekoliko djela: *O principu pojedinačnog, Rasprava o metafizici, Monadologija* i *Ogled o teodiceji.* Preminuo je 14. studenog u Hannoveru. Zaboravljenog od svih, na groblje ga je ispratio samo njegov osobni tajnik.
Sve informacije o Leibnizovu životu preuzete su iz [1, str. 13] i [7].

Slika 3: Gottfried Wilhelm Leibniz

¶Christiaan Huygens (1629.-1695.) nizozemski astronom, matematičar i fizičar.

‖Matematičko klatno (njihalo) je materijalna točka ovješena o nerastegljivu nit bez mase. Za male amplitude, period titranja ovisi o ubrzanju sile teže g i o duljini niti l na koju je masa ovješena.

3.2 Sume i diferencije

Tijekom jednog od njegovih ranijih sastanaka s Huygensom, Leibniz je tvrdio da može naći sumu bilo kojih beskonačnih nizova čiji su uvjeti formirani nekim pravilima (pod uvjetom da niz mora konvergirati). Huygens, želeći odmah testirati mladića, predložio mu je da pokuša odrediti sumu recipročnih trokutnih brojeva:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+...+\frac{2}{n(n+1)}+...$$

Leibniz je primijetio da se članovi reda mogu zapisati u obliku

$$\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

pa sumacija poprima oblik

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+...+\frac{2}{n(n+1)}+...=2-\frac{2}{2}+\frac{2}{2}-\frac{2}{3}+...+\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}+...$$

i svaki je konačni početni dio te sume (parcijalna suma) jednak

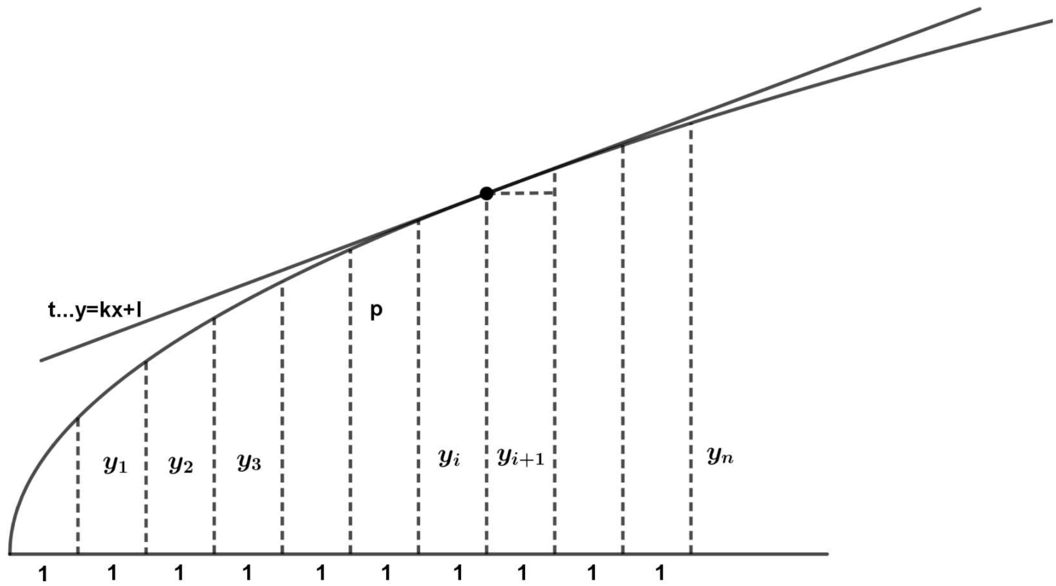
$$2-\frac{2}{n+1}.$$

Iz svega toga Leibniz zaključuje da je suma reda jednaka 2. Leibniz se počeo baviti sumama nizova i njihovih diferencija (s obzirom na to da je ključna ideja bila zapisati član reda kao diferenciju dva susjedna člana nekog niza), tj. ako je dan niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ te ako je pripadni niz diferencija definiran s $d_n = a_{n+1} - a_n$, onda je

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = a_1 - a_{n+1}.$$

Na taj je način uočio međusobnu inverznost formiranja niza diferencija i niza suma.

Kada je promatrao problem određivanja površine ispod krivulje uočio je da vrijedi: ako na krivulji odredimo točke s jednako udaljenim apscisama (razmak apscisa neka bude 1), one definiraju niz ordinata $y_1, y_2, ..., y_n$ i suma tih ordinata aproksimira površinu ispod krivulje, a diferencija dviju susjednih ordinata aproksimira nagib tangente u odgovarajućoj točki krivulje. Aproksimacije će biti točnije što je odabrana jedinica manja, a u slučaju beskonačno male jedinice, aproksimacija će postati egzaktna te su određivanje površine i određivanje nagiba tangente međusobno inverzne operacije.



Slika 4: Leibnizova ideja inverznosti deriviranja i integriranja: $k \approx y_{i+1} - y_i, P \approx y_1 + ... + y_n$

Leibniz uvodi simbol za površinu, odnosno integral $\int$ i simbol **d** za diferenciranje. Poseban simbol uvodi zbog inverznosti integriranja (sumiranja) i deriviranja (diferenciranja). Budući da mu je cilj izgraditi račun za sumacije, što je kompliciranije, uvodi račun za diferenciranje u nadi da će steći uvid u račun suma. Kako $\int$ povećava dimenziju, d je smanjuje. U prvoj varijanti piše $\frac{1}{d}$ za d (smisleno bi bilo pisati $\frac{ya}{d}$ jer diferencija površine treba biti dužina), no ubrzo prelazi na jednostavniji zapis d. Od tada $\int$ i d interpretira kao simbole bez dimenzije. Dugo je koristio zapise poput $\int x$, no kasnije je uočio da je zapis $\int xdx$ smisleniji te tako Leibnizu dugujemo današnji način zapisa integrala i mnoge osnovne formule integriranja. Upravo je izraz "diferencijalni i integralni račun" potekao od Leibniza. Njegove su ideje u mnogočemu slične Newtonovim. Leibniz koristi infinitezimalne priraste dx i dy umjesto Newtonovog malog prirasta o i ov. Kod njega onda nagib tangente nije omjer brzina nego omjer infinitezimalnih prirasta $\frac{dy}{dx}$. Na primjer, za funkciju $y = x^3$ imamo $y + dy = (x + dx)^3 = x^3 + 3x^2dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3$, tj. $dy = (3x^2 + 3xdx + (dx)^2)dx$ te je nagib tangente na tu parabolu $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 3xdx + (dx)^2$ odnosno ako zanemarimo dx jer je beskonačno malen, imamo nagib tangente $3x^2$.

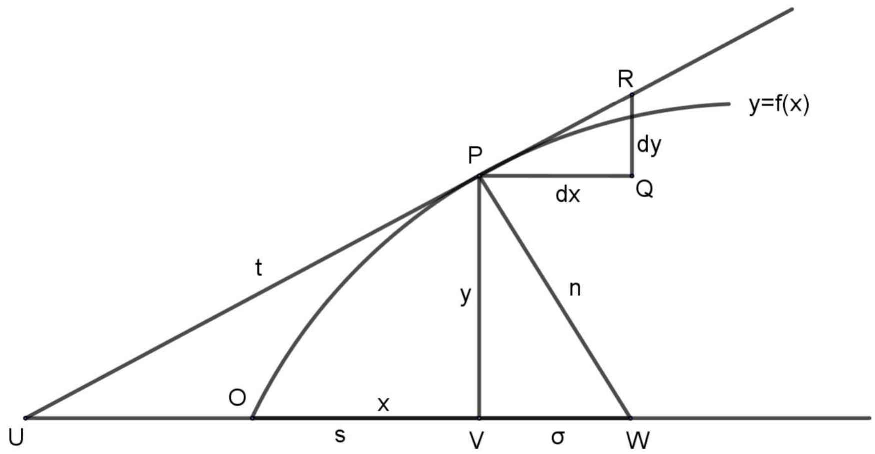
Nije začuđujuće da Leibnizu, uz znakove $\int$ i d, zahvaljujemo i za neke druge danas korištene oznake i nazive s obzirom na značaj koji je pridavao simbolici i prikladnim terminima. Upravo je on uveo pojam transcendentnih brojeva**, a za množenje koristi točku te za dijeljenje dvotočku. Obje su se oznake pojavljivale i ranije, ali nisu bile korištene u smislu aritmetičkih operacija.
Nešto detaljnije o navedenom u [1, str. 14-17].

**Transcendentni broj, bilo realan ili kompleksan, je onaj broj koji nije algebarski, tj. onaj koji se ne može dobiti kao korijen polinoma s cjelobrojnim koeficijentima.

3.3 Karakteristični trokut i transmutacijski teorem

Leibniz je istragu o infinitezimalnom računu temeljio na nečemu što je on nazivao **karakteristični trokut**. Inspiracija za njegovo korištenje došla je iz čitanja Pascalovih radova. Za krivulju $y = f(x)$, karakteristični trokut je pravokutni trokut čije su stranice $dx = |PQ|$, $dy = |QR|$ i $|PR|$ (dio tangente na krivulji $y = f(x)$ koja prolazi točkom P). Leibniz je napomenuo da je karakteristični trokut sličan trokutu kojeg za danu točku P određuju njena ordinata y, odsječak normale n između P i osi apscisa te dobiveni odsječak σ na osi apscisa, ali je takoder sličan trokutu PVU kojeg čine tangenta t, odsječak s na osi apscisa i ordinata y (vidi [1, str. 14]). Iz sličnosti trokuta i karakterističnog trokuta PVW dobivamo:

$$\frac{dy}{\sigma} = \frac{dx}{y} \qquad ili \qquad \sigma dx = ydy.$$



Slika 5: Karakteristični trokut

Leibniz je zbrajanjem beskonačno malih veličina dx i dy došao do rezultata

$$\int \sigma dx = \int ydy.$$

Kako bi riješio određeni problem, pretpostavio je da odsječak σ na osi apscisa treba biti obrnuto proporcionalan ordinati y, tj. $\sigma = \frac{a^2}{y}$ i dobio je $\frac{y^3}{3} = a^2x$ te je krivulja sa danim svojstvom kubna parabola.

Također, karakteristični je trokut Leibniz iskoristio za nalaženje raznih relacija između površina, tj. raznih formula za integriranje (više u [3, str. 568-569]).

Transmutacijski teorem

Ideja transmutacijskog teorema, kojeg je preuzeo iz Pascalovog učenja, je da u krivulji $y = f(x)$, gdje su točke P i Q vrlo blizu, konstruira trokut OPQ. Proširujući $ds = |PQ|$ u tangentu na krivulju, crtajući $|OW|$ okomito na tangentu i postavljajući h i z kao na slici, pokazao je, koristeći sličnost trokuta TWO i karakterističnog trokuta, da je

$$\frac{dx}{h} = \frac{ds}{z} \qquad ili \qquad zdx = hds.$$

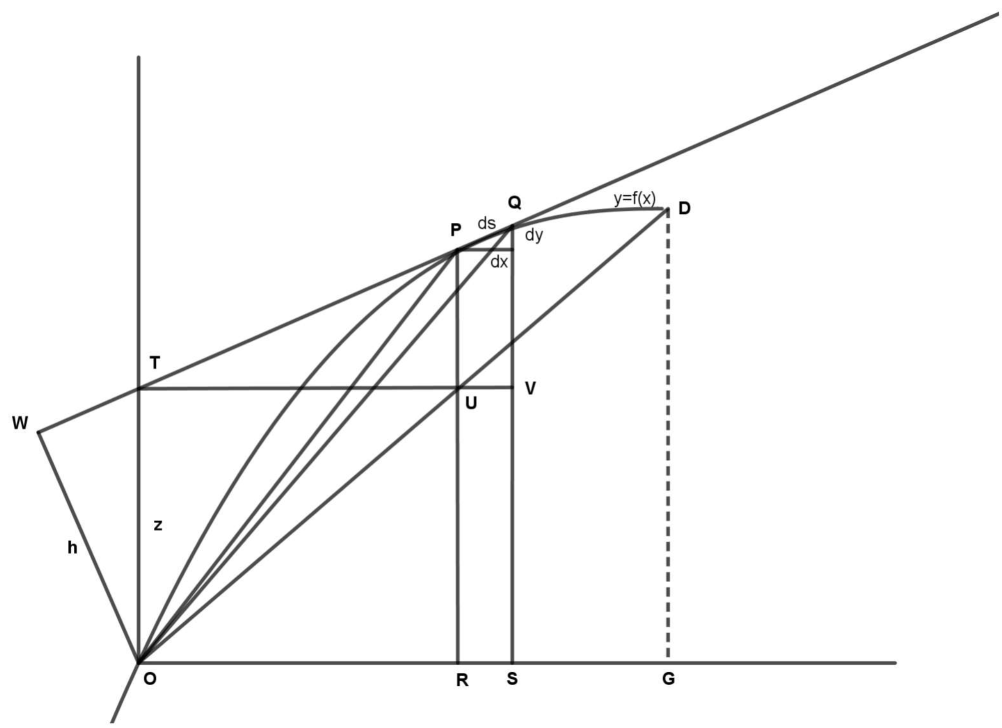
Iz navedenog Leibniz izvodi sljedeću jednakost:

$$\int ydx - \frac{1}{2}|OG| \times |GD| = \frac{1}{2}\int zdx.$$

Označimo li $|OG|$ sa x_0 i $|GD|$ sa y_0, Leibnizov transmutacijski teorem možemo zapisati kao

$$\int_0^{x_0} ydx = \frac{1}{2}\left(x_0 y_0 + \int_0^{x_0} zdx\right).$$

Zbog $z = y - |PU| = y - x(\frac{dy}{dx})$, transmutacijski teorem omogućio mu je pronalazak površine ispod originalne krivulje, pod pretpostavkom da je $\int zdx$ jednostavnije računati od $\int ydx$.



Slika 6: Transmutacijski teorem

Primjerice, Leibniz je iskoristio taj rezultat za računanje površine četvrtine kruga radijusa 1 danog sa $y^2 = 2x - x^2$. U tom je slučaju

$$z = y - x\left(\frac{1-x}{y}\right) = \frac{x}{y} = \sqrt{\frac{x}{2-x}} \qquad \textit{ili} \qquad z^2 = \frac{x}{2-x} \qquad \textit{ili} \qquad x = \frac{2z^2}{1+z^2}.$$

Preko transmutacijskog teorema, $\int ydx$ (ili $\frac{\pi}{4}$) jednako je $(\frac{1}{2})(1 + \int zdx)$. Vidimo da je $\int zdx = 1 - \int xdz$. Leibniz je zaključio

$$\int ydx = 1 - \int \frac{z^2}{1+z^2}dz.$$

Zatim je pokazao

$$\frac{z^2}{1+z^2} = z^2(1 - z^2 + z^4 - z^6 + ...)$$

i otuda je

$$\int ydx = 1 - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{7}z^7 + ...$$

Iz toga slijedi Leibnizov red $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$
Detaljnije u [3, str. 569-570].

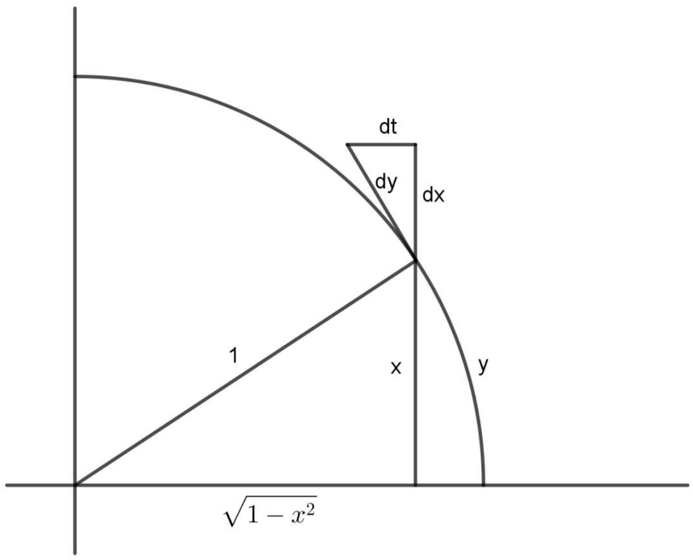
3.4 Fundamentalni teorem i diferencijalne jednadžbe

Leibniz je započeo svoj infinitezimalni račun idejom da su sume i diferencije inverzne operacije. Iz toga je osnovni teorem infinitezimalnog računa potpuno očit. Ideja teorema bila je pronaći krivulju s ordinatama z kako bi pronašao površinu ispod krivulje s ordinatama y tako da je $y = dz$. Leibniz je tu ideju eksplicitnije prikazao u djelu *Acta eruditorum* iz 1693. Ako je dana krivulja s ordinatama y, možemo pronaći krivulju z tako da je $\frac{dz}{dx} = y$ ili u modernom zapisu, s pretpostavkom da je $z(0) = 0$,

$$\int_0^b y dx = z(b).$$

Kao i Newton, Leibniz nije bio zainteresiran za računanje površina kao za rješavanje diferencijalnih jednadžbi posebno jer su se razni problemi u fizici rješavali pomoću njih. Međutim, Leibnizova metoda rješavanja tih jednadžbi razlikovala se od Newtonove. Primjerice, uzmimo jednadžbu u kojoj imamo odnos između luka y i njegovog sinusa u krugu radijusa 1. Karakteristični trokut sa stranicama dy, dt, dx sličan je trokutu sa stranicama 1, x, $\sqrt{1-x^2}$ (Slika 6.), tada je

$$dt = \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$$



Slika 7: Leibnizova derivacija diferencijalne jednadžbe za sinus

Pitagorin teorem nam daje $(dx)^2 + (dt)^2 = (dy)^2$. Uvrštavajući $dt = \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ u tu jednadžbu, dobivamo diferencijalnu jednadžbu koja stavlja u odnos luk i sinus: $(dx)^2 + x^2(dy)^2 = (dy)^2$. Smatrajući dy konstantom, Leibniz je primijenio svoj operator d na jednadžbu i zaključio

$$d((dx)^2 + x^2(dy)^2) = 0 \qquad ili \qquad 2dx(ddx) + 2xdx(dy)^2 = 0.$$

On je to pojednostavio u diferencijalnu jednadžbu drugog reda

$$d^2x + x(dy)^2 = 0 \qquad ili \qquad \frac{d^2x}{(dy)^2} = -x.$$

Nakon toga, pretpostavio je da x može biti prikazan u obliku niza polinoma u varijabli y: $x = by + cy^3 + ey^5 + fy^7 + gy^9 + ...$ Derivirajući taj niz dva puta, dobio je

$$\frac{d^2x}{(dy)^2} = 2 \times 3cy + 4 \times 5ey^3 + 6 \times 7fy^5 + 8 \times 9gy^7 + ...$$

Iz prethodne dvije jednakosti slijedi:

$$\begin{aligned} 2 \times 3c &= -b \\ 4 \times 5e &= -c \\ 6 \times 7f &= -e \\ &\vdots \end{aligned}$$

Postavljajući sada $b = 1$ kao drugi početni uvjet, dobio je $c = \frac{-1}{3!}, e = \frac{1}{5!}, f = \frac{-1}{7!}, ...$ te je tako izveo razvoj funkcije sinus u red potencija:

$$x = \sin y = y - \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 - \frac{1}{7!}y^7 + ...$$

Više o tome može se pronaći u [3, str. 572-574].

4 Polemika između Newtona i Leibniza

Unatoč mnogim sličnostima u radu oba matematičara, nailazimo i na brojne razlike.

Iako su obojica otkrili, u suštini, ista pravila i postupke koje danas jednom riječju zovemo infinitezimalni račun, njihov pristup problemu bio je potpuno različit. Newtonov pristup bio je kroz ideje o brzini i udaljenosti dok je Leibniz išao kroz ideje o sumama i diferencijama. Budući da Newtonov rad nije objavljen sve do ranog 18. st., a bio je dobro poznat u Engleskoj mnogo ranije, ne čudi što su određeni engleski matematičari optužili Leibniza i braću Bernoulli (Jacoba i Johanna) za plagiranje posebno iz razloga što je Leibniz, tijekom svog posjeta Londonu 1670.-ih, pročitao ponešto Newtonog materijala i primio dva Newtonova pisma u kojima Newton objašnjava neke od svojih rezultata. Proturječno tome, kako Newton nije objavio svoj rad, braća Bernoulli optužili su njega za plagiranje Leibniza.

Godine 1711., Kraljevsko je društvo, kojeg je Newton bio predsjenik, zadužilo povjerenstvo da prouči navedene optužbe. Očekivano, Leibniz je proglašen krivim prema svim optužbama. Nažalost, rezultat toga bio je prekid razmjena ideja između engleskih i kontinentalnih matematičara. Što se infinitezimalnog računa tiče, Englezi su usvojili Newtonove metode i zapis, a kontinentalci Leibnizove.

Dokazano je da je lakše raditi s Leibnizovim zapisom i njegovim računom diferencija, a i napredak na kontinentu bio je brži nego u Engleskoj. Na krajnju štetu, Englesko matematičko društvo bilo je lišeno velikog napretka kroz gotovo cijelo 18. st.
Sve tvrdnje u ovom poglavlju preuzete su iz [3, str. 574-575].

Literatura

[1] Franka Miriam Brückler *Povijest matematike II*, Osijek, 2009.

[2] David Burton *The History of Mathematics, An Introduction*, McGraw, H.Primis, 1985.

[3] Victor J. Katz *A History of Mathematics, 3rd edition - 16th chapter*, Pearson, 2008.

[4] *Fizika 1 - Opći zakon gravitacije*, (dostupno na `https://www.fkit.unizg.hr/_download/repository/F1-8-predavanje.pdf`)

[5] *Howling Pixel - Newtonov zakon gravitacije*, (dostupno na `https://howlingpixel.com/i-sh/Newtonov_zakon_gravitacije`, 2019.)

[6] *Hrvatska enciklopedija - Isaac Newton*, (dostupno na `http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=43655`)

[7] *Hrvatska enciklopedija - Gottfried Leibniz*, (dostupno na `http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=35902`)