Spektralna teorija normalnih operatora

Juzbašić, Lara

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA MATEMATIKU
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Lara Juzbašić

Spektralna teorija normalnih operatora

Završni rad

Osijek, 2019.

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA MATEMATIKU

Lara Juzbašić

Spektralna teorija normalnih operatora

Završni rad

Mentor:
doc.dr.sc. Suzana Miodragović
Komentor:
dr.sc. Marija Miloloža Pandur

Osijek, 2019.

Sadržaj

Sažetak

U ovom radu proučavamo normalne operatore i njihova spektralna svojstva. U prva tri poglavlja navest ćemo osnovne pojmove, definirati projektore i spomenuti njihova svojstva te objasniti vezu normalnog operatora s dekompozicijom jedinice. Nakon toga, Cayleyevim transformacijama povezat ćemo hermitske i unitarne operatore te proširiti pojam adjungiranog operatora. U posljednja dva poglavlja objasnit ćemo konstrukciju projektora na područje vrijednosti operatora te upoznati se s pojmom kvazi inverznog operatora i njegovom primjenom kod rješavanja problema najmanjih kvadrata.

Ključne riječi: normalan operator, hermitski operator, unitaran operator, adjungirani operator, spektar, svojstvena vrijednost, svojstveni vektor, slika operatora, jezgra operatora, projektor, dekompozicija jedinice

Abstract

In this bachelor's thesis we will consider normal operators and their spectral properties. In the first three chapters we will investigate basic concepts, define projections and mention their properties. After that, we will connect Hermitian and unitary operators by Cayley transformations, and expand the concept of an adjoint operator. In the last two chapters the construction of a projection onto the image of an operator will be explained, and the concept of a generalized inverse and its usage in solving the least squares problem will be introduced.

Key words: normal operator, Hermitian operator, unitary operator, adjoint operator, spectrum, eigenvalue, eigenvector, the image of an operator, the kernel of an operator, projection, decomposition of unity

1 Uvod

Navedimo osnovne pojmove koji se spominju u narednim poglavljima.

Definicija 1. *Neka je X vektorski prostor nad poljem Φ.* **Skalarni produkt** *na X je preslikavanje $(\cdot,\cdot)_X : X \times X \to \Phi$ koje ima sljedeća svojstva:*

(1) $(x,x)_X \geq 0, \quad \forall x \in X;$

(2) $(x,x)_X = 0 \iff x = 0;$

(3) $(x_1 + x_2, y)_X = (x_1, y)_X + (x_2, y)_X, \quad \forall x_1, x_2, y \in X;$

(4) $(\alpha x, y)_X = \alpha(x,y)_X, \quad \forall \alpha \in \Phi, \quad \forall x, y \in X;$

(5) $(x,y)_X = \overline{(y,x)_X}, \quad \forall x, y \in X.$

Vektorski prostor na kojem je definiran skalarni produkt zove se **unitaran prostor**.

Teorem 1. *Neka je X unitaran prostor. Za $x \in X$ stavimo $\|x\|_X = \sqrt{(x,x)_X}$ (nenegativan drugi korijen). Tada funkcija $x \mapsto \|x\|_X$ s vektorskog prostora X u skup $\mathbb{R}_+ = \{\lambda \in \mathbb{R};\ \lambda \geq 0\}$ ima sljedeća svojstva:*

(1) za $x \in X$ vrijedi $\|x\|_X = 0$ ako i samo ako je $x = 0$;

(2) za $x \in X$ i $\lambda \in \Phi$ vrijedi $\|\lambda x\|_X = |\lambda| \cdot \|x\|_X$;

(3) za $x, y \in X$ vrijedi tzv. **nejednakost trokuta**: $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X$.

Dokaz. *Vidi [2].*

Nadalje, za bilo koje $x, y \in X$ vrijedi tzv. **Cauchy−Schwarz−Bunyakowskyjeva nejednakost***:*

$$|(x,y)_X| \leq \|x\|_X \cdot \|y\|_X,$$

pri čemu vrijedi znak jednakosti ako i samo ako su x i y proporcionalni.

Funkcija $x \mapsto \|x\|_X$ definirana na vektorskom prostoru X i s vrijednostima u skupu $\mathbb{R}_+$ koja ima svojstva (1), (2) i (3) iz prethodnog teorema zove se **norma** na vektorskom prostoru X. Vektorski prostor na kome je zadana norma zove se **normiran prostor**.

Za vektore x i y iz unitarnog prostora X kaže se da su **međusobno okomiti** ili **ortogonalni** (oznaka: $x \perp y$) ako je $(x,y)_X = 0$. Konačan skup vektora $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ je **ortogonalan** ako je $e_i \perp e_j$, $\forall i \neq j$, a **ortonormiran** ako je ortogonalan i ako je $\|e_i\|_X = 1$, $\forall i = 1, \ldots, k$. Posebno, svaki ortonormiran skup je linearno nezavisan. Ortonormiran skup koji je baza od X zove se **ortonormirana baza** od X.

Ako su X i Y vektorski prostori, svako preslikavanje $A : X \to Y$ zove se **operator**.

Definicija 2. *Neka su X i Y vektorski prostori nad istim poljem Φ. Preslikavanje $A : X \to Y$ zove se* **linearan operator** *ako vrijedi $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$, $\forall x, y \in X,\ \forall \alpha, \beta \in \Phi$.*

Linearan operator $A : X \to Y$ naziva se:

(1) **monomorfizam** ako je A injekcija;

(2) **epimorfizam** ako je A surjekcija;

(3) **izomorfizam** ako je A bijekcija.

Skup svih linearnih operatora s X u Y označavamo s $L(X, Y)$, a skup svih linearnih operatora s X u X s $L(X)$.
Spektar $\sigma(A)$ operatora $A \in L(X)$ je skup svih skalara $\lambda \in \Phi$, takvih da operator $A - \lambda I$ nije invertibilan, gdje je I jedinični operator na X. Za skalar $\lambda \in \Phi$ kažemo da je **svojstvena vrijednost** operatora $A \in L(X)$ ako postoji vektor $x \neq 0$ takav da je $Ax = \lambda x$. Svaki se takav vektor x zove **svojstveni vektor** operatora A za svojstvenu vrijednost λ. Skup svih svojstvenih vektora svojstvene vrijednosti λ naziva se **svojstveni potprostor** pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Uočimo, za $A \in L(X, Y)$ i proizvoljan ne-nul vektor $x \in X$,

$$Ax = \lambda x \text{ povlači } X \cap Y \neq \{0\}\,,$$

pa traženje svojstvenih vrijednosti ima smisla i za one operatore koji djeluju između prostora čiji je presjek netrivijalan.

Primjer 1. *Neka je $A \in L(P_2, P_3)$ zadan s $Ap = p$, gdje je $p \in P_2$ i P_n vektorski prostor polinoma stupnja manjeg ili jednakog n, $n = 2, 3$. Presjek prostora P_2 i P_3 jednak je prostoru P_2 te za $\lambda = 1$ vrijedi*

$$Ap = \lambda p, \quad \textit{za svaki } p \in P_2.$$

Dakle, p je svojstveni vektor operatora A pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda = 1$, $\forall p \in P_2$.

U daljnjem tekstu promatrat ćemo samo svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore operatora iz $L(X)$.

Propozicija 1. *Neka je X konačnodimenzionalan vektorski prostor i $A \in L(X)$. Spektar $\sigma(A)$ operatora A je skup svih svojstvenih vrijednosti tog operatora.*

Dokaz. *Vidi [2].*

Definicija 3. *Neka je X vektorski prostor nad poljem Φ* [1]*. Vektorski prostor $L(X, \Phi)$ zove se* **dualni prostor** *prostora X, a njegovi elementi, linearni operatori s X u Φ, nazivaju se* **linearni funkcionali***.*

Teorem 2. *(O reprezentaciji linearnog funkcionala)*
Neka je X konačnodimenzionalan unitaran prostor nad poljem Φ. Za svaki $f \in L(X, \Phi)$ postoji jedinstven $y \in X$ takav da vrijedi $f(x) = (x, y)_X$, za svaki $x \in X$.

Dokaz. *Vidi [2].*

Definicija 4. *Neka je X vektorski prostor, te neka su L i M njegovi potprostori* [2]*.* **Suma potprostora** *L i M označava se s $L + M$ i definira kao $L + M := [L \cup M]$*[3]*.*

Kažemo da je suma potprostora L i M **direktna** ako je $L \cap M = \{0\}$ i tada ju označavamo s $L \dot{+} M$. Ukoliko je direktna suma potprostora L i M jednaka X, M nazivamo **direktnim komplementom** od L. Uočimo da je $L \dot{+} M = M \dot{+} L$, pa je i L direktan komplement od M.

Definicija 5. *Neka je X unitaran prostor i M potprostor od X.* **Ortogonalni komplement** *potprostora M je $M^{\perp} = \{x \in X : (x, y)_X = 0,\ \forall y \in M\}$.*

$M^{\perp}$ je (jedan) direktan komplement od M u X i njihovu direktnu sumu označavamo s $M \oplus M^{\perp}$.

Definicija 6. *Neka je X konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(X)$. Operator $A^* \in L(X)$ sa svojstvom $(Ax, y) = (x, A^*y)$, $\forall x, y \in X$, zove se* **hermitski adjungiran operator** *operatoru A.*

Za konačnodimenzionalan unitaran prostor X operator $A \in L(X)$ zove se:

- **hermitski**, ako vrijedi $A^* = A$;
- **antihermitski**, ako vrijedi $A^* = -A$;
- **unitaran**, ako je $A^*A = AA^* = I$, tj. A je invertibilan u $L(X)$ i $A^{-1} = A^*$;
- **normalan**, ako je $A^*A = AA^*$.

Primijetimo da su i hermitski i antihermitski i unitarni operatori normalni operatori.

[1] Polje Φ je vektorski prostor nad samim sobom dimenzije 1.

[2] Potprostor vektorskog prostora X je podskup $V \subseteq X$ koji je i sam vektorski prostor nad istim poljem s obzirom na iste operacije.

[3] Simbolom $[S]$ označavamo linearnu ljusku skupa S i definiramo ju kao

$$[S] = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i : \alpha_i \in \Phi, a_i \in S, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Propozicija 2. *Operator $A \in L(X)$ je unitaran ako i samo ako vrijedi $(Ax, Ay)_X = (x, y)_X$, $\forall x, y \in X$.*

Dokaz. *Vidi [2].*

Definicija 7. *Ako red potencija $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_k$ konvergira za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$, funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ koju taj red definira zove se* **cijela funkcija**.

2 Projektori i njihova svojstva

Neka je X unitaran prostor nad poljem Φ i neka je X_0 potprostor od X. Proizvoljan $x \in X$ možemo na jedinstven način zapisati kao zbroj $x = x_0 + x_1$, $x_0 \in X_0$, $x_1 \in X_0^{\perp}$. Definirajmo operator $P : X \to X$ s

$$Px = x_0.$$

Operator P zadovoljava svojstva:

linearnost

$$P(x+y) = x_0 + y_0 = Px + Py, \qquad x, y \in X, \quad y = y_0 + y_1, \quad y_0 \in X_0, \quad y_1 \in X_0^{\perp}$$
$$P(\alpha x) = \alpha x_0 = \alpha Px, \qquad \alpha \in \Phi.$$

idempotentnost

$$P^2 x = Px_0 = x_0 = Px \quad \Longrightarrow \quad P^2 = P.$$

hermitičnost

Primijetimo, $\;Px_0 = x_0, \quad \forall x_0 \in X_0$.

$$(Px, y)_X = (x_0, y_0 + y_1)_X = (x_0, y_0)_X = (x, y_0)_X = (x, Py)_X \quad \Longrightarrow \quad P^* = P.$$

Tako definiran operator P naziva se **ortogonalni** ili **hermitski projektor** na potprostor X_0.

Projektori P_1 i P_2 su **ortogonalni** ako je $P_1P_2 = 0$. Tada je i $P_2P_1 = 0$ jer su P_1 i P_2 hermitski operatori: $(P_1P_2)^* = P_2P_1 = 0$.
Označimo slike projektora P_1 i P_2 s $X_1 = P_1X$, odnosno $X_2 = P_2X$ i promotrimo operator $P_1 + P_2$. Taj operator je hermitski te vrijedi

$$(P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_1P_2 + P_2P_1 = P_1^2 + P_2^2 = P_1 + P_2.$$

Dakle, $P_1 + P_2$ je projektor. Nadalje, za $x_1 \in X_1$ i $x_2 \in X_2$ vrijedi

$$(x_1, x_2) = (P_1x_1, P_2x_2) = (P_2P_1x_1, x_2) = 0,$$

pa su potprostori X_1 i X_2 okomiti. Vrijedi i obrat, tj. okomitim potprostorima pripadaju okomiti projektori.

3 Dekompozicija jedinice

Definicija 8. *Familija projektora $I_1, I_2 \ldots, I_m$ zove se (ortogonalna)* **dekompozicija jedinice**, *ako je*

1. $I_k^* = I_k \neq 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$

2. $I_k I_j = 0 \quad za \quad k \neq j,$

3. $I = \sum_{k=1}^{m} I_k,$ *pri čemu je* I *jedinični operator.*

Dakle, elementi dekompozicije jedinice su ne-nul hermitski projektori definirani na istom unitarnom prostoru, međusobno ortogonalni, a u sumi daju jedinični operator.

Neka su N i M operatori oblika

$$N = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k I_k, \qquad M = \sum_{k=1}^{m} \mu_k I_k, \qquad \lambda_k, \mu_k \in \Phi. \tag{1}$$

Tada su N i M linearni operatori te međusobno komutiraju:

$$NM = \sum_{j,k=1}^{m} \lambda_k \mu_k I_j I_k = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \mu_k I_k.$$

Kako je N^* istog oblika kao i N, tj.

$$N^* = \sum_{k=1}^{m} \overline{\lambda_k} I_k,$$

N i N^* komutiraju, pa je N normalan operator.
Pogledajmo specijalne slučajeve operatora N. Operator N je:

- hermitski, ako vrijedi $N = N^*$, tj.

$$\sum_{k=1}^{m} \overline{\lambda_k} I_k = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k I_k$$
$$\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{m} (\overline{\lambda_k} - \lambda_k) I_k = O$$

  Primijenimo li na to vektor $I_j x$, $x \in X$, dobivamo

$$(\overline{\lambda_j} - \lambda_j) I_j x = 0.$$

  Kako je $I_j x \neq 0$ za barem jedan x, slijedi $\overline{\lambda_j} = \lambda_j$. Dakle, N je hermitski onda i samo onda, ako su λ_k realni brojevi.

- antihermitski, ako je $N^* = -N$, tj. ako su λ_k čisto imaginarni brojevi (analogno kao u prethodnom slučaju).

- unitaran, ako $NN^* = I$. To je zadovoljeno onda i samo onda, ako je $\overline{\lambda_k} \lambda_k = 1$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Ako je u zapisu (1) npr. $\lambda_{m-1} = \lambda_m$, umjesto projektora $I_{m-1} + I_m$ uzmemo novu oznaku te tako dobivamo novu dekompoziciju jedinice na $m-1$ projektor. Prikaz operatora N pomoću takve dekompozicije jedinice,

$$N = \sum_{k=1}^{m'} \lambda_k I_k, \qquad \lambda_i \neq \lambda_j, \forall i, j = 1, \ldots, m',$$

zove se **dekompozicija jedinice operatora** N.

Djelujemo li na N cijelom funkcijom f dobivamo

$$f(N) = \sum_{k=1}^{m} f(\lambda_k) I_k.$$

Zaista, iz

$$NM = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \mu_k I_k$$

zaključujemo da je

$$N^{-1} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\lambda_k} I_k, \qquad \text{za} \quad \lambda_k \neq 0.$$

Također, za svaki $p \in \mathbb{N}$ je

$$N^p = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^p I_k,$$

pa tvrdnja slijedi.

Označimo $X_k = I_k X$ i uzmimo proizvoljan $x \in X_k$, $x \neq 0$. Kako je

$$I_k x = x,$$

to je

$$Nx = NI_k x = \sum_{k+j=1}^{m'} \lambda_j I_j I_k x = \lambda_k I_k x = \lambda_k x,$$

iz čega slijedi da je x svojstveni vektor operatora N. Dakle, postoji $\lambda \in \Phi$ takav da je

$$Nx = \lambda x. \tag{2}$$

Nadalje, možemo pisati

$$x = Ix = \sum_{k=1}^{m'} I_k x. \tag{3}$$

Iz (2) i (3) slijedi

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{m'} NI_k x = \lambda \sum_{k=1}^{m'} I_k x \\
\Longrightarrow &\sum_{k=1}^{m'} \lambda_k I_k x = \lambda \sum_{k=1}^{m'} I_k \\
\Longrightarrow &\sum_{k=1}^{m'} (\lambda_k - \lambda) I_k x = 0 \\
\Longrightarrow &\sum_{k=1}^{m'} |\lambda_k - \lambda|^2 |I_k x|^2 = 0 \\
\Longrightarrow &|\lambda_k - \lambda|^2 |I_k x|^2 = 0.
\end{aligned}$$

Kako je $x \neq 0$, to je $I_j x \neq 0$ za barem jedan j. Tada je $\lambda = \lambda_j$, tj. brojevi λ_j u (1) su svojstvene vrijednosti operatora N, a X_k svojstveni potprostor operatora N koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ_k.
Iz toga možemo zaključiti da normalnom operatoru pripada najviše jedna dekompozicija jedinice.

Teorem 3. *Ako je N normalan operator u kompleksnom n-dimenzionalnom prostoru X, onda vrijedi*

1. *Ako je $Nx = \lambda x$, onda je $N^* x = \overline{\lambda} x$.*
2. *Svojstveni potprostori normalnog operatora koji pripadaju različitim svojstvenim vrijednostima među sobom su ortogonalni.*
3. *Prostor X je ortogonalna suma svojstvenih potprostora operatora N.*

Dokaz.

1. *Iz*

$$(N - \lambda I)(N^* - \overline{\lambda} I) = (N^* - \overline{\lambda} I)(N - \lambda I)$$

slijedi

$$\|(N^* - \overline{\lambda} I)x\|_X = \|(N - \lambda I)x\|_X, \qquad \forall x \in X,$$

pa $\quad (N - \lambda I)x = 0 \quad$ *povlači* $\quad (N^* - \overline{\lambda} I)x = 0.$

2. *Neka su λ_1 i λ_2 dvije različite svojstvene vrijednosti te X_1 i X_2 odgovarajući svojstveni potprostori operatora N. Tada vrijedi*

$$Nx_1 = \lambda_1 x_1, \quad i \quad N^* x_2 = \overline{\lambda_2} x_2, \quad \textit{gdje je } x_1 \in X_1 \textit{ i } x_2 \in X_2.$$

Pomnožimo prvu jednakost skalarno zdesna s x_2, a drugu jednakost skalarno slijeva s x_1 i oduzmimo ih. Dobivamo

$$(Nx_1, x_2) - (x_1, N^*x_2) = (\lambda_1 x_1, x_2) - (x_1, \overline{\lambda_2} x_2),$$

odnosno

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0.$$

Budući da je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, to je $(x_1, x_2) = 0$, $\forall x_1 \in X_1$ i $x_2 \in X_2$, iz čega slijedi da su X_1 i X_2 okomiti.

3. *Neka je X_0 ortogonalna suma svih svojstvenih potprostora operatora N i Y ortogonalni komplement potprostora X_0. Kako je N normalan operator, to je X_0 invarijantan potrostor s obzirom na N i N^*. Nadalje, $\dim Y \geq 1$, pa operator N ima barem jedan svojstveni vektor u Y, tj. postoji $y \in Y, y \neq 0$, takav da je $Ny = \lambda y$. No, y je okomit na sve svojstvene potprostore operatora N, pa mora biti jednak nuli, tj. $y = 0$, što je u kontradikciji s pretpostavkom $y \neq 0$. Dakle, Y je nul-potprostor i $X_0 = X$.*

$\square$

Teorem 4. *U konačnodimenzionalnom kompleksnom unitarnom prostoru svakom normalnom operatoru N pripada jedna i samo jedna dekompozicija jedinice $\{I_1, I_2, \ldots, I_m\}$.*

Dokaz. egzistencija *Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ različite svojstvene vrijednosti operatora N i neka su $X_1, X_2, \ldots, X_m$ odgovarajući svojstveni potprostori. Tada je $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_m$. Označimo s I_k projektor (ortogonalni) koji prostor X projicira na X_k, $k = 1, 2, \ldots, m$. Tada je*

- $I_k^* = I_k \neq 0$,
- $I_k I_j = 0$ *za* $k \neq j$, *jer su* X_k *i* X_j *ortogonalni i*
- $I = \sum_{k=1}^{m} I_k$.

Prema tome je $\{I_1, I_2, \ldots, I_m\}$ dekompozicija jedinice.
Nadalje, iz

$$N = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k I_k$$

i

$$x = \sum_{k=1}^{m} I_k x$$

slijedi

$$Nx = \sum_{k=1}^{m} N I_k x = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k I_k x = \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k I_k \right) x.$$

jedinstvenost *Pretpostavimo da postoje dvije različite dekompozicije jedinice,* $\{I_1, \ldots, I_k\}$ *i* $\{I_1', \ldots, I_k'\}$*, takve da je*

$$N = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k I_k = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k I_k', \qquad \lambda_i \neq \lambda_j, \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Tada vrijedi

$$f(N) = \sum_{k=1}^{m} f(\lambda_k) I_k = \sum_{k=1}^{m} f(\lambda_k) I_k', \qquad f \text{ cijela funkcija.}$$

Kako gornja jednakost vrijedi za svaku cijelu funckiju, za f *možemo uzeti polinom*

$$f_k(\lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_{k-1})(\lambda - \lambda_{k+1}) \ldots (\lambda - \lambda_m)}{(\lambda_k - \lambda_1) \ldots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \ldots (\lambda_k - \lambda_m)},$$

za koji vrijedi $f_k(\lambda_j) = \delta_{kj}$*. Tada slijedi*

$$f_k(N) = I_k = I_k' \qquad \text{za } k = 1, 2, \ldots, m,$$

što je u kontradikciji s pretpostavkom.

□

Teorem 5. *Operator* A *komutira s normalnim operatorom* N *onda i samo onda, ako on komutira s dekompozicijom jedinice operatora* N*.*

Dokaz. *Pretpostavimo da* A *komutira s* N*. Tada* A *komutira s* $N^k, k = 0, 1, 2, \ldots$*. Dakle,* A *komutira i s* $f(N)$*, za svaku cijelu funkciju* f*. Kako je* $I_k = f_k(N)$*, to* A *komutira i s* I_k*. Obratno, ako* A *komutira s* I_k*,* $k = 1, 2, \ldots, m$*, onda* A *komutira i s*

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k I_k,$$

tj. A *komutira s* N*.*

□

Primijetimo da iz $AI_k = I_k A$ i hermitičnosti projektora I_k slijedi da i A^* komutira s I_k, tj. ako operator A komutira s normalnim operatorom N, onda i A^* komutira s N.

Budući da u prikazu operatora N pomoću njegove dekompozicije eksplicitno dolaze svojstvene vrijednosti, tj. točke spektra operatora N, taj prikaz nazivamo **spektralni prikaz** operatora N.

Neka je f funkcija definirana na spektru operatora N s vrijednostima u polju Φ. S

$$f(N) = \sum_{k=1}^{m} f(\lambda_k) I_k$$

definiramo **funkciju operatora** N. Pri tome nije bitno da je f cijela funkcija.

Primjer 2. *U ortonormiranoj bazi* $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ *unitarnog prostora operatoru* U *pripada hermitska matrica*

$$U(e) = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 7 & 6 & -6 \\ 6 & -9 & -2 \\ -6 & -2 & -9 \end{bmatrix}.$$

Želimo naći spektralnu dekompoziciju operatora U, *tj. projektore* I_1, I_2 *i* I_3 *takve da vrijedi* $U = \lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2 + \lambda_3 I_3$, $\lambda_k \in \sigma(U)$, $k = 1, 2, 3$ *i* $\{I_1, I_2, I_3\}$ *je dekompozicija jedinice. Dijagonalizacijom operatora* U *dobivamo novu bazu* $e' = \{e_1', e_2', e_3'\}$, *gdje su* $e_1' = \frac{1}{\sqrt{11}}(3e_1 + e_2 - e_3)$, $e_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 + e_3)$ *i* $e_3' = \frac{1}{\sqrt{22}}(2e_1 - 3e_2 + 3e_3)$. *Prema tome, matrica prijelaza iz baze* e *u bazu* e' *je*

$$T(e) = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{11}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{22}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-3}{\sqrt{22}} \\ \frac{-1}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{22}} \end{bmatrix},$$

a zapis operatora U *u bazi* e' *je*

$$U(e') = T^*(e) U(e) T(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nadalje, ako s I_k *označimo projektor na potprostor razapet vektorom* e_k', $k = 1, 2, 3$, *dobivamo da je*

$$I_1(e') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_2(e') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_3(e') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i vrijedi $I = I_1 + I_2 + I_3$. *Odavde je* $U = I_1 - I_2 - I_3$. *Želimo li zapisati projektore* I_1 ,I_2 *i* I_3 *u bazi* e, *dobivamo*

$$I_1 = T(e) I_1(e') T^*(e) = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 9 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$I_2 = T(e)I_2(e')T^*(e) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$I_3 = T(e)I_3(e')T^*(e) = \frac{1}{22}\begin{bmatrix} 4 & -6 & 6 \\ -6 & 9 & -9 \\ 6 & -9 & 9 \end{bmatrix},$$

pa time i spektralnu dekompoziciju operatora U u kanonskoj bazi prostora

$$U(e) = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 9 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{22}\begin{bmatrix} 4 & -6 & 6 \\ -6 & 9 & -9 \\ 6 & -9 & 9 \end{bmatrix}.$$

4 Cayleyeve transformacije

Definicija 9. *Neka su zadane konstante $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ takve da je $ad - bc \neq 0$.* **Möbiusova transformacija** *je racionalna funkcija kompleksne varijable $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definirana formulom*

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Möbiusova transformacija preslikava jediničnu kružnicu u pravac i obrnuto. Kako iz Teorema 4 slijedi da spektar hermitskog operatora leži na realnoj osi, spektar antihermitskog operatora na imaginarnoj osi i spektar unitarnog operatora na jediničnoj kružnici, Möbiusovom transformacijom možemo povezati te operatore.

Pogledajmo prvo transformaciju koja povezuje unitarne i hermitske operatore, odnosno preslikava jediničnu kružnicu na realni pravac. Neka je U unitaran operator i

$$\sigma(U) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$$

spektar operatora U, te neka je λ_0 točka jedinične kružnice, $\lambda_0 \notin \sigma(U)$.
Funkcija

$$\mu = f(\lambda) = -i\frac{\lambda + \lambda_0}{\lambda - \lambda_0}$$

je definirana na skupu $\sigma(U)$ i $f(\lambda)$ je realan broj za $|\lambda| = 1$, pa su $f(\lambda_k), \lambda_k \in \sigma(U)$ realni brojevi. Ako prikažemo operator U pomoću pripadne dekompozicije jedinice, tj.

$$U = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k I_k,$$

imamo

$$f(U) = \sum_{k=1}^{m} f(\lambda_k) I_k,$$

iz čega vidimo da je

$$H = f(U)$$

hermitski operator. Budući da λ_0 nije u spektru operatora U, operator H možemo pisati u obliku

$$H = -i(u + \lambda_0 I)(U - \lambda_0 I)^{-1}.$$

Inverzna funkcija funkciji f preslikava realni pravac na jediničnu kružnicu i zadana je s

$$\lambda = g(\mu) = \lambda_0 \frac{\mu + i}{\mu - i}.$$

Tada, ako je

$$H = \sum_{k=1}^{m} h_k I_k$$

spektralni prikaz hermitskog operatora H, djelovanjem funkcije g na H dobivamo

$$g(H) = \sum_{k=1}^{m} g(h_k) I_k.$$

Brojevi $g(h_k)$ su na jediničnoj kružnici, pa je $g(H)$ unitaran operator.
Izrazom

$$U = \lambda_0 (H + iI)(H - iI)^{-1} \tag{4}$$

operator U je direktno zapisan pomoću H.
Općenito, transformacije koje koriste Möbiusovu transformaciju pomoću koje povezuju hermitske i unitarne operatore, oblika

$$(\alpha H + \beta I)(\gamma H + \delta I)^{-1}, \quad (\alpha U + \beta I)(\gamma U + \delta I)^{-1}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C},$$

ako postoje, zovu se **Cayleyeve transformacije**.
Pogledajmo sada vezu između unitarnih i antihermitskih operatora.
Jednakost (4) može se zapisati i ovako

$$V = \overline{\lambda_0} U = (K + I)(K - I)^{-1}, \tag{5}$$

pri čemu je $K = -iH$ antihermiski operator (jednakost vrijedi i u realnom prostoru). Ako je V unitaran, odnosno ortogonalan operator, takav da 1 i -1 nisu u spektru operatora V, onda vrijedi

$$K = -(V + I)(V - I)^{-1} \tag{6}$$

te je K antihermitski, odnosno antisimetrični operator. Provjerimo to:

$$\begin{aligned} K^* &= -\left[(V-I)^{-1}\right]^*(V+I)^* = -(V^*-I)^{-1}(V^*+I) = -(V^{-1}-I)^{-1}(V^{-1}+I) \\ &= -(I-V)^{-1}(I+V) = (V+I)(V-I)^{-1} = -K, \end{aligned}$$

$$V^*V = (K^*+I)(K^*-I)^{-1}(K+I)(K-I)^{-1} = -(I-K)(I+K)^{-1}(I+K)(K-I)^{-1} = I.$$

Prema tome, relacije (5) i (6) su Cayleyeve transformacije u realnim unitarnim prostorima.

5 Poopćenje pojma adjungiranog operatora

Neka je A linearan operator koji djeluje na unitarnom prostoru X i A^* pripadni hermitski adjungirani operator. Tada za operatore A i A^* vrijedi:

$$(Ax, y) = (x, A^*y).$$

Želimo poopćiti pojam hermitski adjungiranog operatora za operatore koji djeluju između dva unitarna prostora. U tu svrhu, neka su X i Y unitarni prostori nad istim poljem, na kojima je zadan skalarni produkt $(x, x')_X$, odnosno $(y, y')_Y$, tim redom. Nadalje, neka je $A \in L(X, Y)$ i $y \in Y$ fiksan. Tada je s $l(x) = (Ax, y)_Y$ definiran linearan funkcional na X te prema teoremu o reprezentaciji linearnog funkcionala (Teorem 2) postoji jedinstveni $y^* \in X$ takav da je $l(x) = (x, y^*)_X, \forall x \in X$. Na taj način je definiran operator $A^* : X \to Y$ za kojeg vrijedi

$$(x, A^*(y))_X = (Ax, y)_y, \quad \forall x \in X, \forall y \in Y.$$

Može se pokazati da je A^* linearan i jedinstven. Prema tome, za svaki operator $A \in L(X, Y)$ postoji jedinstveni operator $A^* \in L(Y, X)$ sa svojstvima:

- $(A^*)^* = A,$
- $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^* \quad za \quad A, B \in L(X, Y), \quad \alpha, \beta \in \Phi,$
- $(BA)^* = A^*B^* \quad za \quad A \in L(X, Y) \quad i \quad B \in L(Y, Z).$

5.1 Matrica adjungiranog operatora

Definicija 10. *Za matricu* $\mathbf{B} = [\beta_{ij}]$ *tipa* $m \times n$ *kažemo da je hermitski adjungirana matrici* $\mathbf{A} = [\alpha_{ij}]$ *tipa* $n \times m$*, ako se* $\mathbf{B}$ *iz* $\mathbf{A}$ *dobije transponiranjem i konjugiranjem, tj. ako vrijedi* $\beta_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$, $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$*. Takvu matricu u zavisnosti od* $\mathbf{A}$ *označavamo s* $\mathbf{A}^*$.

Neka su $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ i $f = \{f_1, \dots, f_m\}$ ortonormirane baze prostora X, odnosno prostora Y. Adjungiranom je operatoru A^* pridružena upravo adjungirana matrica matrici $A(f, e)$, koja pripada operatoru A u paru baza (f, e). Naime, množeći jednakost $Ae_k = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{jk} f_j$ skalarno zdesna s f_i, izrazili smo elemente matrice $A(f, e)$ pomoću skalarnog produkta, tj.

$$\alpha_{ik} = (Ae_k, f_i)_Y, \quad k = 1, \dots, n.$$

Analogno,

$$A^* f_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha^*_{ki} e_k \implies \alpha^*_{ji} = (A^* f_i, e_j)_X.$$

Konačno, iz svojstava skalarnog produkta i adjungiranog operatora imamo

$$\alpha^*_{ji} = (A^* f_i, e_j)_X = (f_i, Ae_j)_Y = \overline{(Ae_j, f_i)_Y} = \overline{\alpha_{ij}}.$$

6 Konstrukcija projektora na područje vrijednosti operatora

Neka je $A \in L(X, Y)$, te neka su potprostori

$$ImA = \{y : y = Ax, x \in X\} \leq Y \text{ i}$$

$$KerA = \{x : Ax = 0, x \in X\} \leq X$$

slika, odnosno **jezgra** operatora A.

Promotrimo vezu između potprostora $KerA$, ImA, $KerA^*$ i ImA^*. Uzmimo proizvoljan $x \in X$ takav da je $x \perp ImA^*$. Tada je $(x, z)_X = 0$, $\forall z \in ImA^*$, tj. $(x, A^* y)_X = 0$, $\forall y \in Y$. Iz toga slijedi

$$(Ax, y)_Y = 0, \quad \forall y \in Y \implies Ax = 0.$$

Dakle, x je iz $KerA$, tj.

$$X = KerA \oplus ImA^* \tag{7}$$

Također, kako je $A = (A^*)^*$, to je

$$Y = KerA^* \oplus ImA. \tag{8}$$

Označimo $Z = ImA$. Neka je P ortogonalni projektor prostora X na potprostor

ImA^*, te neka je operator $A_1 : X \to Z$ zadan s

$$A_1 x = Ax, \quad \forall x \in X.$$

Tada je

$$P = A_1^*(A_1 A_1^*)^{-1} A_1. \tag{9}$$

Kako bismo to dokazali, pogledajmo prvo operator A_1^*. Slike operatora A_1 i A se podudaraju, kao i jezgre, pa uvrštavanjem operatora A_1 u (7) dobivamo

$$X = KerA_1 \oplus ImA_1^* \quad \Longrightarrow \quad ImA_1^* = ImA^*.$$

Uzmimo proizvoljan $z \in Z$ i $x \in X$. Tada imamo

$$(A_1^* z - A^* z, x)_x = (z, A_1 x)_z - (z, Ax)_z = 0,$$

iz čega slijedi $A_1^* z = A^* z$, $\forall z \in Z$, tj. slike operatora A_1^* i A^* se također podudaraju. Zaključujemo da je A_1^* restrikcija operatora A^* na potprostor Z, odnosno $A_1^* = [A_1 | ImA^*]^*$. Zatim, promotrimo operator $B : Z \to Z$, $B = A_1 A_1^*$. Neka je $z \in Z$. Iz $Bz = 0$ slijedi $(A_1 A_1^* z, z)_Z = 0$, tj. $(A_1^* z, A_1^* z)_X = 0$, odakle je $A_1^* z = 0$. Neka je $x \in X$ takav da je $z = A_1 x$. Tada iz $A_1^* A_1 x = 0$ dobivamo $(A_1 x, A_1 x)_Z = 0$, tj. $z = A_1 x = 0$. Dakle, B je regularan ako je $A \neq 0$.
Označimo sada $P_1 = A_1^*(A_1 A_1^*)^{-1} A_1$, $P_1 : X \to X$. Operator P_1 je hermitski i vrijedi $P_1^2 = P_1$, pa je P_1 projektor u prostoru X. Pokažimo da jednakost (9) vrijedi.

(1) $P_1 x = 0 \implies A_1 P_1 x = BB^{-1} A_1 x = 0 \implies x \in KerA_1$

(2) $x \in KerA_1 \implies P_1 x = 0$

Iz (1) i (2) slijedi da je P_1 projektor na ortogonalni komplement potprostora $KerA_1 = KerA$, tj. ImA^*. Time je dokazano da je $P = P_1$.

6.1 Matrica projektora P

Neka su $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ ortonormirane baze prostora X, odnosno prostora Y, te $A(f, e)$ matrica operatora A u paru ortonormiranih baza (f, e). Nadalje, neka su $j_1, \ldots, j_r$, pri čemu je $r = dim(ImA)$, indeksi takvi da vektori $g_k = Ae_{j_k}$, $k = 1, \ldots, r$, čine bazu u Z. Matricu operatora A_1 u paru baza (e, g), $A_1(e, g)$, dobivamo tako što izrazimo vektor $Ae_j = A_1 e_j$ kao linearnu kombinaciju vektora $g_1, \ldots, g_r$.

Kako za projektor P vrijedi jednakost (9), matrični zapis operatora P u bazi e možemo izraziti pomoću matrica operatora A i A_1:

$$P(e) = [A_1(g,e)]^* \left\{A_1(g,e) \, [A_1(g,e)]^*\right\}^{-1} A_1(g,e).$$

Primjer 3. *Konstruirajmo projektor na područje vrijednosti operatora A kojemu je pridružena matrica*

$$\mathbf{A} = A(f,e) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 3 & 5 & 9 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prvi, drugi i zadnji stupac su nezavisni, a treći stupac jednak je njihovom zbroju, pa je $j_1 = 1$, $j_2 = 2$, $j_3 = 4$ i

$$\mathbf{A_1} = A_1(g,e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \implies \mathbf{A_1}\mathbf{A_1^*} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \implies$$

$$(\mathbf{A_1}\mathbf{A_1^*})^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \implies P(e) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

7 Kvazi inverzni operator

Neka je $A \in L(X,Y)$, pri čemu su X i Y prostori nad istim poljem, te neka su P i Q ortogonalni projektori na ImA^*, odnosno ImA. Kao i u prethodnom poglavlju, neka je A_1 restrikcija operatora A na ImA te za P vrijedi jednakost (9). Definiramo $A^{(-1)} : X \to Y$, **kvazi inverzni operator** operatoru A, kao

$$A^{(-1)} = \begin{cases} PA_1 \left(A_1 A_1^*\right)^{-1} Q & , \quad A \neq 0 \\ 0 & , \quad A = 0. \end{cases}$$

Tako definiran operator zadovoljava sljedeća svojstva: linearan je, $ImA^{(-1)}$=ImA^* i vrijedi

$$A^{(-1)}A = P, \quad AA^{(-1)} = Q.$$

Promotrimo sada sustav

$$\begin{cases} ASA = A \\ SAS = S \\ (SA)^* = SA \\ (AS)^* = AS. \end{cases} \tag{10}$$

Izravnim uvrštavanjem i pomoću relacije (9), možemo vidjeti da je $A^{(-1)}$ jedno rješenje tog sustava. Pokažimo da je i jedinstveno.

Iz prve dvije jednakosti slijedi:

$$SAx = 0 \implies ASAx = 0 \implies Ax = 0 \implies KerA = KerSA.$$

Kako za $z \in ImA$ postoji $x \in X$ takav da je $z = Ax$, imamo

$$ASz = ASAx = Ax = z \implies ImAS = ImA.$$

Primijetimo i da su operatori AS i SA projektori (množenjem prve jednakosti sa S i druge s A dobivamo $(AS)^2 = AS$, odnosno $(SA)^2 = SA$). Nadalje, iz druge dvije relacije slijedi da su ti projektori hermitski pa vrijedi

$$KerA = KerSA \implies SA = P,$$

$$ImA = ImAS \implies Q = AS \quad \text{i}$$

$$Sy = (SAS)y = SQy = 0 \implies S|KerA^* = 0, \quad \text{za } y \in KerA^* \quad (Qy = 0).$$

Konačno, za dva rješenja sustava (10), S_1 i S_2, te $z \in ImA$ imamo

$$S_1 z = S_1 Ax = PX = S_2 Ax = S_2 z, \quad x \in X : z = Ax.$$

Sada jednakost ta dva rješenja slijedi iz činjenice da je $Y = KerA^* \oplus ImA$ i

$$S_1|ImA = S_2|ImA, \quad S_1|KerA^* = S_2|KerA^* = 0.$$

Dakle, sustav (10) možemo smatrati karakterizacijom operatora $A^{(-1)}$.

Opravdajmo naziv kvazi inverzni operator:

- Uvrštavanjem $S = A^{(-1)}$ u (10) zaključujemo da je

$$\left[A^{(-1)}\right]^{(-1)} = A.$$

- Adjungiranjem jednadžbi sustava (10) slijedi

$$\left[A^{(-1)}\right]^* = [A^*]^{(-1)}.$$

- Označimo li $\phi = A^{(-1)}|ImA$ i $\psi = A|ImA^*$, tada je

$$\psi\phi = I_{ImA}, \quad \phi\psi = I_{ImA^*},$$

tj. ϕ i ψ su inverzni izomorfizmi. U slučaju $ImA = Y$ i $ImA^* = X$, operatori A i $A^{(-1)}$ su inverzni izomorfizmi prostora X i Y.

Kvazi inverzni operator definiran je za svaki operator A.

7.1 Kvazi inverzne matrice

Rješenje sustava (10), za pravokutnu matricu $\mathbf{A}$, nazivamo **kvazi inverznom matricom** od $\mathbf{A}$ i označavamo s $\mathbf{A}^{(-1)}$. Također, vrijedi

$$\mathbf{A}^{(-1)} = \mathbf{B_0^*}(\mathbf{B_0}\mathbf{B_0^*})^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{A_0^*}\mathbf{A_0})^{-1}\mathbf{A_0^*},$$

pri čemu, ako je r rang matrice $\mathbf{A}$, $\mathbf{A_0}$ je matrica sastavljena od bilo kojih r nezavisnih stupaca matrice $\mathbf{A}$, a $\mathbf{B_0}$ matrica sastavljena od bilo kojih r nezavisnih redaka matrice $\mathbf{A}$, te je $\mathbf{C}$ matrica r-tog reda koja se u $\mathbf{A}$ nalazi na presjeku stupaca matrice $\mathbf{A_0}$ i redaka matrice $\mathbf{B_0}$.

7.2 Problem najmanjih kvadrata

Promotrimo jednadžbu $Ax = b$, za $x \in X$ i $b \in Y$. Ako je $A \in L(X)$ regularan, postoji jedinstveno rješenje te jednadžbe dano s $x = A^{-1}b$. U slučaju kada jednadžba $Ax = b$ nije konzistentna, tj. $b \notin ImA$, želimo pronaći vektor $x_0 \in X$ takav da je

$$\|Ax_0 - b\|_Y = \min_{x\in X} \|Ax - b\|_Y.$$

Problem pronalaska takvog vektora naziva se "problem najmanjih kvadrata", a idući teorem govori o tome kako ga riješiti.

Teorem 6. *Neka su X i Y unitarni, konačnodimenzionalni prostori nad istim poljem. Za svaki operator $A \in L(X,Y)$ i svaki vektor $y \in Y$ postoji jedan i samo jedan vektor $A^{(-1)}(y) = x_0 \in X$, takav da je*

(1) $\|Ax - y\|_Y \geq \|Ax_0 - y\|_Y, \quad \forall x \in X,$

(2) $\|x\|_X \geq \|x_0\|_X, \quad \forall x \neq x_0$ *za koje je* $\|Ax - y\|_Y = \|Ax_0 - y\|_Y$ *(ako takvi postoje) i*

(3) preslikavanje $y \mapsto A^{(-1)}(y)$ *je linearan operator s* Y *u* X.

Dokaz. *Označimo* $y_1 = Qy$ *(*Q *je ortogonalni projektor na* ImA*) i* $y_0 = y - y_1$*. Tada je* $Ax - y_1 \in ImA, \forall x \in X$*, tj.* $Ax - y_1 \perp y_0$*, zbog čega slijedi*

$$\|Ax - y\|_Y^2 = \|(Ax - y_1) - y_0\|_Y^2 = \|Ax - y_1\|_Y^2 + \|y_0\|_Y^2.$$

Sada vidimo da je $\|y_0\|_Y = \|y - Qy\|_Y$ *traženi minimum i dostiže se na svakom rješenju sada konzistentne jednadžbe* $Ax = y_1$. *Ukoliko slijeva djelujemo operatorom* $A^{(-1)}$ *imamo*

$$Px = A^{(-1)}y_1 = A^{(-1)}AA^{(-1)}y = A^{(-1)}y, \tag{11}$$

odakle dobivamo

$$x = A^{(-1)}y + (I_Z - P)x', \quad x' \in X.$$

Označimo s Ω *skup svih takvih* $x' \in X$. *To su ujedno i rješenja jednadžbe* $Ax = y_1$. *Tada vrijedi*

$$\min_{x \in X} \|Ax - y\|_Y = \|Ax_0' - y\|_Y = \|y - Qy\|_Y, \quad \forall x_0' \in \Omega.$$

Za $x_0 = A^{(-1)}b$ *i* $x \in \Omega$, $x \neq x_0$ *je* $\|x_0\|_X < \|x\|_X$, *tj.* x_0 *ima najmanju normu među svim elementima iz* Ω.

$\square$

Dakle, upravo kvazi inverzni operator od A omogućuje nalaženje onog vektora $x_0 \in X$ za koga je odstupanje $\|Ax - b\|_Y$ najmanje i koji među svim vektorima s tim svojstvom ima najmanju normu.

Literatura

[1] S. Kurepa, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Zagreb, 1990.

[2] H. Kraljević, *Vektorski prostori*, Osijek, 2008.

[3] D. Bakić, *Linearna algebra*, Zagreb, 2008.