Modeliranje u nastavi matematike

Terzić, Danijela

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Danijela Terzić

Modeliranje u nastavi matematike

Diplomski rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Danijela Terzić

Modeliranje u nastavi matematike

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2019.

Sadržaj

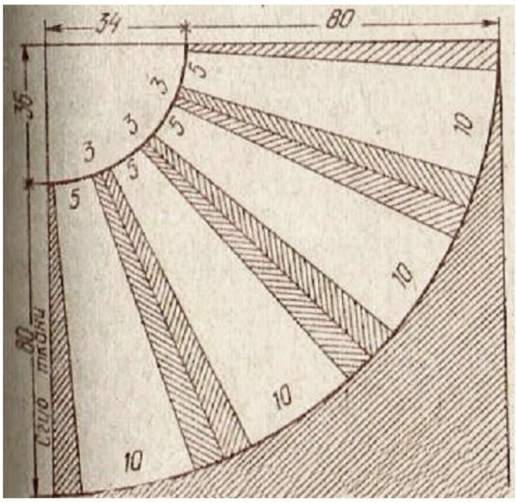
Uvod

Svatko od nas, bili mi toga svjesni ili ne, ima poseban pogled na svijet, posebno na matematiku. Svijet možemo gledati očima matematike na dva načina. Jedan od načina je prepoznavanje matematičkih likova poput trokuta, kvadrata ili drugih geometrijskih objekata u svijetu koji nas okružuju. Mnogi tehnički proizvodi, pa čak i biljke i životinje sastoje se od takvih oblika. Drugi način se odnosi na uočavanje privlačnih oblika kao što je uzorak na predmetu ili strukturi biljke koji može privući pozornost i stvoriti interes. Na primjer ako promatramo kristal sastavljen od struktura u obliku šesterokuta, zapitamo se možemo li stvoriti kristal tako da daje strukturu koju želimo i hoće li nam to omogućiti da napravimo industrijski dijamant. Vidjeti svijet na ovaj način, osim što pruža zanimljivu sliku svijeta i postavlja izazove mnogim tehnologijama i znanostima, čak je i zabavno.

Ako znamo nešto o matematici, mozak će prepoznati matematiku u podacima koje opažaju oči kao kada vidimo saće, prepoznat ćemo skup šesterokutnih stanica ili ćelija koje su poredane jedna do druge. Znatiželja nas dovodi da se zapitamo zašto pčele grade saće takvog oblika i je li možda drugi geometrijski lik bolji. No, detaljnija matematička analiza pokazuje da su šesterokuti savršeni za to jer takav oblik omogućava maksimalnu iskorištenost prostora. Ista stvar se događa i sa šivanjem odjeće. Oblik koji se mora izrezati iz tkanine (materijala) da bi se pretvorio na primjer u suknju u matematičkom pogledu je krnji stožac. Većina ljudi u svojim svakodnevnim poslovima primjenjuje matematiku na skriveni način, bez izravnog navođenja i nesvjesno što nas dovodi i do onoga čime ćemo se baviti u ovom radu, matematičkog modeliranja problema iz svakodnevnog života u nastavi.

Većina nastavnika matematike razmišlja primijeniti matematiku temeljenu na stvarnom problemu na svojim školskim satima, ali je problem što uglavnom ne znaju na koji način to učiniti. Uključivanje primijenjene matematike u nastavu potiče i razvoj novog načina razmišljanja o matematičkom obrazovanju. Pod pojmom primijenjene matematike u nastavi smatramo izraz koji koristimo za opis matematičkog obrazovanja temeljenog na problemu iz svakodnevnog života, tj. modeliranje u nastavi matematike. Prije svakog modeliranja mora postojati odluka tj. želja da se nešto promijeni, bolje shvati ili da se sredstva ulože u učinkovitiju uporabu što može poslužiti i kao motivacija za donošenje odluke.

(a) Saće [14]



(b) Uzorak za šivanje suknje s naborima ([22])

Slika 1

U radu ćemo se osvrnuti na matematičko modeliranje i kako ga primijeniti u nastavi. Već u prvom poglavlju ovog diplomskog rada ući ćemo se u svijet modeliranja i upoznati se s osnovnim pojmovima.

U drugom poglavlju bavit ćemo se učeničkom slikom o matematici te kako ju poboljšati. Osim toga navest ćemo i kako motivirati nastavnike kako bi svi koristili primijenjenu matematiku na nastavi te navesti nekoliko savjeta za nastavnike.

Posljednje poglavlje ovog rada iskoristit ćemo kako bismo pokazali način rješavanja zadataka izvedenih iz svakodnevnog života. Detaljnije ćemo pokazati jedan primjer jednostavnog problema matematičkog modeliranja koji treba odrediti odgovarajuću tarifu za mobilni uređaj na temelju stvarnih podataka.

1 Matematičko modeliranje

U ovom poglavlju definirat ćemo što je to model, matematičko modeliranje i navesti pristupe matematičkom modeliranju te objasniti proces modeliranja. Upoznat ćemo se s načinom pristupanja modeliranju svakodnevnih problema uvodeći ga u svijet matematike i pretvarajući u matematičku okolinu.

1.1 Model i modeliranje

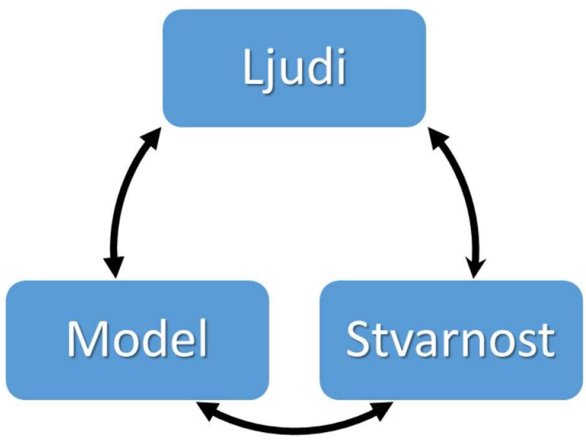
Rješavanje različitih zadataka ili razumijevanje dokaza u matematici ne bi bilo moguće bez poznavanja potrebne teorije. Tako i ovdje, da bismo shvatili što je to modeliranje, prvo ćemo objasniti što je to model. Modeli opisuju naša uvjerenja o tome kako svijet funkcionira tj. više mislimo na neki uzorak koji možemo zapisati matematičkim jezikom. Kako je matematika dosta precizna to nam pomaže da formuliramo ideje, ali također na raspolaganju imamo sve rezultate koje su matematičari godinama dokazivali i računala koja možemo koristiti za izvođenje računa što su samo neke od prednosti. Matematički modeli mogu biti linearni i nelinearni, deterministički i stohastički, statistički i dinamički, diskretni i kontinuirani, deduktivni, induktivni i plivajući (vidi [16]).

Matematičko modeliranje možemo promatrati kao proces oblikovanja stvarnog problema u matematički model te vraćanje nazad. Žakelj [25] ističe da je matematičko modeliranje u školi primjer integriranog učenja koje je umetnuto u opće ciljeve i kompetencije predmeta matematike te definira matematičko modeliranje kao pronalaženje i testiranje matematičkog modela za neki realan problem. Prema Magdiću [16] matematičko modeliranje je proces primjene matematike na realni sustav radi mogućnosti spoznavanja potrebnih informacija te također tvrdi da se modeliranjem ne mora riješiti problem, ali da će se pojasniti promatrani problem.

Postoje nekoliko pristupa matematičkom modeliranju. Jedan on njih je empirijski pristup koji koristimo kako bi odredili odnos među veličinama na temelju dostupnih podataka. Matematičku ovisnost među varijablama najčešće prikazujemo u koordinatnom sustavu. Drugi pristup je simulacijski koji koristimo ako znamo opisati dio pojave na temelju danih podataka. Ovaj pristup podrazumijeva korištenje računalnih programa. Sljedeći pristup se odnosi na uspostavljanje veza među mjernim jedinicama i naziva se dimenzijski pristup. Teorijski pristup koristimo kada na temelju poznatih informacija, dani problem možemo povezati s matematičkim pojmovima. Navest ćemo još dva poznatija pristupa, a to su deterministički i stohastički. Deterministički pristup za modeliranje koristi jednadžbe ili skup jednadžbi ili predviđanje nekog događaja, dok stohastički za razliku od determinističkog pri korištenju jednadžbi uzima u obzir i vjerojatnost da će se neki događaj ostvariti.

1.2 Modeliranje kao ciklički proces

Već smo naglasili kako je modeliranje ciklički proces u kojem svakodnevni problem zapisujemo na matematički način. Iako postoji mnogo različitih prihvaćenih ciklusa modeliranja pogledajmo jedan na Slici 2. i uočimo da svi mi kontinuirano koristimo matematičke modele u rješavanju svakodnevnih problema te da je ovom slikom prikazana međuovisnost između ljudi, stvarnosti i modela. Stvarajući modele mijenjamo stvarnost, ali isto tako stvarnost utječe na nas i modele koji ju navodno opisuju. Na primjer, ako planiramo do kafića koji je iza ugla, ne moramo razmišljati o načinu kako doći do njega, ruta već postoji u našem sjećanje kao model. Ali ako idemo negdje prvi put, kao što je to do novootvorenog trgovačkog centra na izlazu iz grada, onda će nam trebati karta koja predstavlja model i pomoću koje ćemo shvatiti kako doći do tamo. Ako tamo trebamo kupiti novu haljinu, možda već imamo model haljine koju smo vidjeli na reklami ili u časopisu.



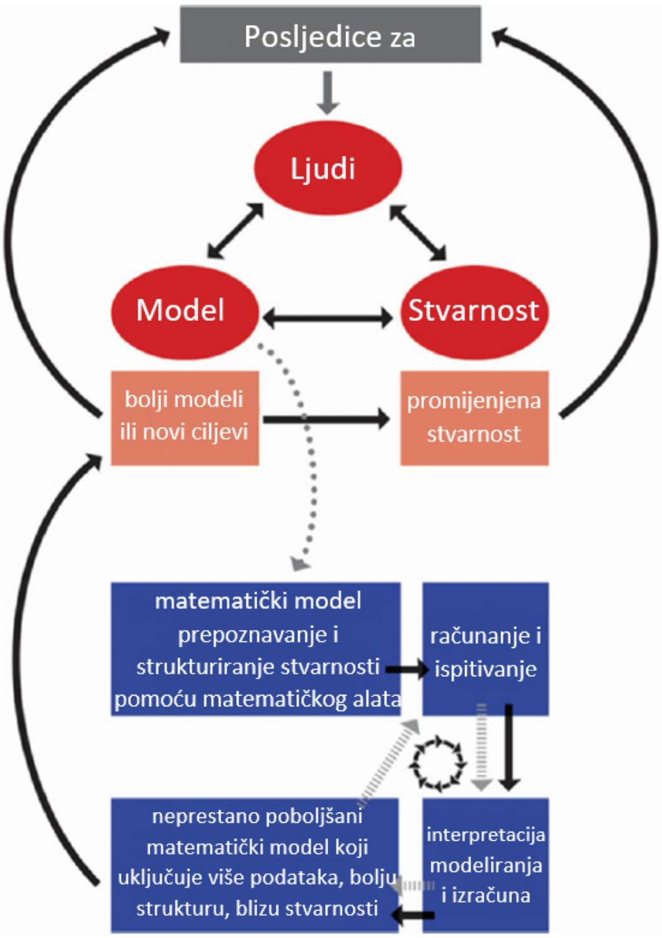
Slika 2: Modeliranje kao ciklički proces

Na način na koji opažamo stvarnost utječu već postojeći modeli. Kao što na primjer u šetnji kada vidimo različite biljke i životinje prepoznajemo ih kao listopadno ili crnogorično drveće, cvijeće, ptice i tada koristimo naše znanje iz biologije ili opće kulture o poznavanju biljaka i životinja što nekad ne mora ni biti točno.

Uočimo kako postoji i strelica koja ide od modela prema ljudima što znači da i modeli utječu na ljude jer nam pomažu da neke stvari shvatimo na ispravan način. Upravo je medicina primjer kako su vizualni modeli organa, bakterija ili gena doveli do velikog napretka u terapiji i dijagnosticiranju bolesti. Jedan element ciklusa smo i mi ljudi koji imamo drugačiji pogled na stvarnost i međusobno različitu sliku stvarnosti kao što trgovac robom ima drugačiji pogled na kukuruz od poljoprivrednika koji će zaraditi na njemu. Ljudi se kreću unutar okvira društvene, ekonomske, ekološke i osobne stvarnosti, dok s druge strane, pokušavajući procijeniti i poboljšati svoju situaciju sami utječu na njega, a time i na stvarnost. Ovime smo potkrijepili da postoji i veza između stvarnosti i ljudi. No, nigdje dosad nije spomenuta matematika. Matematika, odnosno matematičko modeliranje da budemo precizniji, dana je u istraživanju. Istraživački izvještaji iz različitih područja znanosti sadrže matematičke formule i pozivaju se na korištenu matematiku kako bi opravdali svoje rezultate i ispravnost korištenih metoda u istraživanju.

Poboljšat ćemo sliku ciklusa modeliranja proširenjem komponente modela gledajući ga kroz povećalo, kako bi bolje vidjeli ulogu matematike u modeliranju (*Slika 3*). Želimo postaviti matematički model izdvajajući podatke i strukture onih aspekata stvarnosti koje smo željeli promijeniti. Uočimo da ovdje nije prikazana jednosmjerna struktura odozgo prema dolje prema kojoj možemo modelirati stvarnost po svojoj želji, ovdje su veze višestruke. Kada odaberemo aspekte stvarnosti koje želimo uzeti u obzir, moramo prvo odrediti one koje se mogu opisati matematičkim izrazima jer su emocije, psihološki čimbenici i pojedinačno ljudsko ponašanje nepredvidivi i mogu pokazati vidljivost ograničenja smislenog matematičkog modeliranja. No, na kraju naše matematičko znanje će odrediti što je pogodno staviti u matematičke pojmove. Primijetimo kako je na Slici 3. nekoliko ciklusa te bi ona trebala prikazivati dinamiku modela.

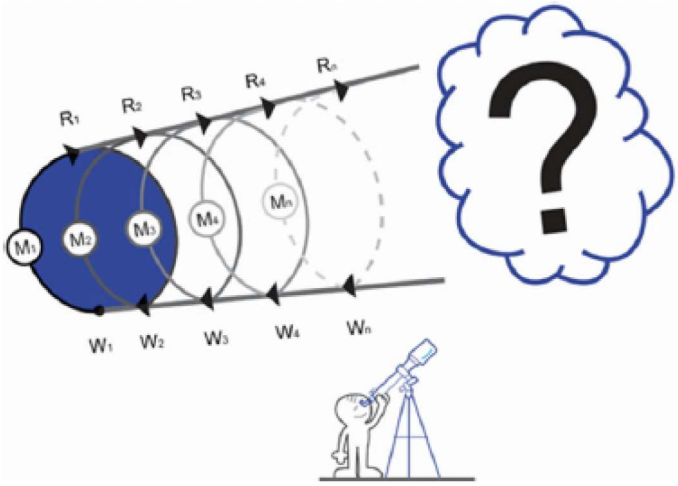
Dobiveni bolji modeli ili novi ciljevi i promijenjena stvarnost trebaju nas podsjetiti kako matematičko modeliranje može potaknuti promjene koje mogu utjecati na ljude. Jedna od mogućih posljedica je nastajanje novih modela. Često se nakon izvršenog modeliranja za prvi model, javljaju dodatna pitanja kako poboljšati model koristeći točnije podatke, više informacija ili ignoriranjem određenih aspekata



Slika 3: Detaljan ciklus modeliranja

početnog modela ili tražimo bolje matematičke modele. Nigdje nije zapisano koliko ciklusa procesa modeliranja moramo napraviti kako bismo postigli zadovoljavajući rezultat ili prije nego što napustimo model zbog nedostatka vremena, metoda ili zbog nekih drugih razloga.

Modeliranje je otvoreni proces te mu se kao takvom ne može predvidjeti kraj (*Slika 4.*). Krećemo od nas ljudi (W_1) koji želimo nešto promijeniti. Postavljajući model (M_1), izazvali smo posljedice koje utječu na stvarnost (R_1). Te posljedice uz moguće druge motivacijske čimbenike vode nas (W_2) do poboljšanih modela (M_2) koji također utječu na stvarnost (R_2). Ne možemo predvidjeti na početku kada ćemo mi (W_n) i na koji način završiti naše napore (kod modela M_n) poboljšavajući naše razumijevanje stvarnosti i samu stvarnost (R_n - posljednji od izmijenjenih koraka stvarnosti).



Slika 4: Modeliranje ciklusa u perspektivi

1.3 Koraci matematičkog modeliranja

Ako pričamo o koracima matematičkog modeliranja većina će odmah pomisliti na sljedeće ([25]):

1. Razumijevanje procesa i identificiranje problema.
2. Oblikovanje pretpostavki i matematička formula:
   (a) identificiranje i klasifikacija varijabli
   (b) pronalaženje veze između varijabli i pomoćnih modela.
3. Postavljanje modela/rješavanje modela.
4. Određivanje valjanosti modela:
   (a) Odnosi li se model na problem?
   (b) Je li model smislen?
   (c) Isprobavanje modela s pomoću realnih podataka.
5. Upotreba (implementacija) modela/interpretacija modela.
6. Poboljšavanje modela.

No, ovdje ćemo se upoznati s još jednim koracima modeliranja sličnim prethodno navedenim, ali s aspekta primijenjene matematike u nastavi. Rijetkost je da učenici imaju pregled svojih matematičkih znanja, da sami planiraju izračune i odluče kojim metodama će se koristiti. Sami nastavnici su upravo ti koji im rijetko dopuštaju stjecanje iskustva obavljanjem takvih aktivnosti jer oni dolaze na sat s unaprijed pripremljenim planom, objašnjavaju novo gradivo, ponavljaju već proučene algoritme ili upućuju učenika na rješavanje određenog problema u njihovim udžbenicima. Pod pripremljenim planom mislimo na pripreme koje nastavnici moraju imati i koje uglavnom provode na isti način bez približavanja stvarnim problemima. Uzmimo u obzir i da ako temu sata odaberemo na način na koji će učenici moći primijeniti vlastito iskustvo, naučit će djelovati na temelju vlastitih odluka što znači da je matematičko obrazovanje pridonijelo razvoju njihovih životnih vještina. Znamo da se ne može svaki sat oblikovati na ovaj način, ali poželjno ih je bar ponekad imati.

Kada odlučimo modelirati neki svakodnevni problem prvo bismo trebali postaviti cilj koji je preduvjet za uspješno modeliranje, iako se on može mijenjati usput nakon analize podataka i početnih izračuna. Mogu se naravno postaviti i neki podciljevi. Postavljanjem pitanja i zapisivanjem odgovora olakšavamo si određivanje cilja, no to nije sasvim jednostavno jer postavljena pitanja se mogu odnositi na budućnost koju nije lako predvidjeti što je tipičan izazov modeliranja. Postavljanje cilja je sastavni dio procesa učenja jer traži preciziranje ciljeva na temelju stečenog znanja. Jasno određeni ciljevi pomažu u donošenju odluke o daljnjem napredovanju modeliranja te olakšavaju prikupljanje i filtriranje podataka potrebnih za njihovo ostvarivanje što nas dovodi i do sljedećeg koraka.

Za modeliranje su nam potrebni podaci i informacije o svakodnevnom problemu. Malo većim istraživanjem dolazimo do mnogobrojnih informacija i detalja koje moramo filtrirati. Želimo sve te informacije razvrstati u dvije skupine: važno i nevažno, a u tome nam pomaže postavljeni cilj modeliranja. Tu se većina učenika nađe u problemima jer trebaju naučiti kako izdvojiti važne informacije iz podataka prikupljenih o svakodnevnom problemu kojeg modeliraju. Navikli su na zadatke u udžbenicima koji ih upućuju u željenom smjeru te im je stoga lakše prevesti tako detaljne i precizne informacije koje imaju u matematički zapis, formulu ili jednadžbu nego preopširne informacije koje dobiju iz stvarnih životnih problema.

Sljedeći korak je postavljanje i rješavanje modela. Kako bismo postavili model trebamo se usredotočiti na ono važno odnosno što je u skladu s ciljem modeliranja što se razlikuje od onoga u udžbenicima gdje je sve već unaprijed određeno. Pri sastavljanju modela moramo paziti da poštujemo fizikalne ili neke druge zakone. Prije postavljanja modela možemo smanjiti razinu složenosti problema i započeti s jednostavnijom verzijom cijelog problema. Razina složenosti stvarnog problema ostaje nepromijenjena. Naknadno je poželjno povećati razinu složenosti kako bismo došli do traženog odgovora.

Nakon rješavanja modela dobili smo odgovor za koji ne možemo tvrditi da je dovoljno dobar te pokazujemo to provjerom u stvarnosti jer se model i razvio iz svakodnevnog problema. Završetak modeliranja nije gotov dobivanjem prvog rezultata nego odlukom koja se temelji na subjektivnoj procjeni više rezultata dobivenih ponavljanjem ciklusa modeliranja. Čim saznamo ono što smo htjeli s odgovarajućim stupnjem preciznosti, završavamo. Stupnjem preciznosti smatramo kompromis između postizanja ciljeva u razumnom vremenskom roku pomoću matematičkih metoda i pouzdanosti dostupnih podataka iz stvarnosti.

Zadnji korak koji provodimo je analiza onoga što smo otkrili. Ako smo dobili odgovor na naš svakodnevni problem, onda shvaćamo da obrazovanje primijenjenom matematikom može rezultirati nekim promjenama na bolje ili gore čime se pokazuje i povezanost matematičkog obrazovanja sa stvarnošću i svakodnevnim životom. Svatko tko pristupa modeliranju svakodnevnog problema mora biti svjestan posljedica i preuzeti odgovornost za njih što je i važan cilj obrazovanja.

Matematičko modeliranje i rješavanje problema iz svakodnevnog života su također dijelovi matematike. Stvarni problem zahtijeva određivanje ciljeva, istraživanje, prikupljanje i filtriranje podataka i na kraju modeliranje. Ovo se ne mora dogoditi samo jednom, to je rad koji je u tijeku i koji će se korak po korak približavati postavljenom cilju.

2 Motivacija za primijenjenu matematiku

Jedna od najvažnijih prednosti poučavanja stvarnih problema je motivacija koju stvaraju nastavnici i učenici promatrajući stvarnost oko sebe i dajući odgovore na probleme iz svakodnevnog života. Pokušat ćemo pobliže objasniti kako promijeniti mišljenje učenika o matematici i stavove nastavnika pri uvođenju primijenjene matematike u nastavu.

2.1 Dugoročno pozitivna slika matematike

Tipično učeničko pitanje na satu matematike je: „Zašto mi to moramo znati?“, na koje im nastavnici odgovaraju da je tako propisano nastavnim planom i programom ili da će to kasnije razumjeti što nije previše prihvaćeno od učenika jer im nedostaje više uvjerljivosti. Teško je dati uvjerljive odgovore za svakog učenika pojedinačno, ali moramo biti svjesni da je nešto pogrešno ako većina učenika ne smatra korisnim svoje obrazovanje u matematici. Još gore je što su takvog razmišljanja i većina odraslih osoba. Mnoga istraživanja su i pokazala da odrasli imaju loše znanje i negativan stav prema matematici što je uzrokovano konvencionalnim obrazovanjem. Loša slika o matematici koja postoji u široj populaciji je zabrinjavajuća i utječe na same nastavnike. Većina nastavnika posvećuje mnogo truda, vremena i energije kako bi što bolje objasnili gradivo koje predaju, ali slika o matematici ostaje nepromijenjena. Maaß, O'Meara, Johnson, O' Donoghue [15] vjeruju da se više matematičkih znanja i vještina mogu naučiti i zadržati na dugoročnoj osnovi uvođenjem malih promjena u sate matematike te da je primijenjena matematika važan korak u tom smjeru. Nastavnici bi mogli zajedno s učenicima rješavati svakodnevne probleme jednom ili dva puta po polugodištu, nema smisla svaki sat odraditi na ovaj način. Ali ovo je samo jedan od mnogih dijelova matematike na koji bi se učenici trebali naviknuti tijekom svojeg matematičkog obrazovanja.

Da bi se promijenilo mišljenje većine o matematici odnosno da bi razumjeli bolje matematiku nužno je njezino veće poznavanje tj. cijeniti da je matematika raznovrsna znanost s više različitih grana i da je povezana s mnogim drugim znanostima, zanimanjima i svakodnevnim životom. Matematika ima dugu povijest i posebnu formalno-aksiomatsku metodologiju za razliku od drugih znanosti. Cilj matematičkog obrazovanja je da učenici upoznaju matematiku zbog njezine jedinstvenosti i mnogostranosti koja će im dati pozitivni pristup matematici. Generativno razumijevanje matematike omogućuje učenicima obnavljanje svojeg znanja i razvijanje vještina rješavanja zadataka. S druge strane, izvođenjem samo matematičkih operacija ograničava se slika matematike i njezina pristupačnost, ali matematika postaje i teže shvatljiva i manje dostupna učenicima. Blum, Galbraith, Henn i Niss [2] ističu da su se ovakva vrsta podučavanja pokazala neučinkovita što dokazuje loša raspoloživost i izvođenje mnogih od onih koji su ih doživjeli. Zalaganjem za uvođenje nečeg novog, kao što je primijenjena matematika u nastavu matematike mora se razmotriti i što bi se izostavilo što dovodi do teške rasprave, ali bar broj sati matematike uglavnom ostaje konstantan. Cilj rasprave je opseg predmeta koji se treba proučiti.

Potrebna je temeljita promjena matematičkog obrazovanja jer do sada nastava matematike nije pokazala željene učinke, unatoč silnom trudu i naporu nastavnika matematike. Prosječna matematička znanja i vještine učenika nisu onakvi kakvi bismo htjeli da budu niti su dugotrajni. Rezultate dosadašnjeg obrazovanja možemo vidjeti kroz različite međunarodne ispite kao što je PISA koji potiču poboljšanje matematičkog obrazovanja diljem svijeta. Podsjetimo se kako sve što radimo uživajući, brzo obavimo. Tako bismo trebali i s matematikom, lako je naučiti ono što nas zanima te se treba više fokusirati na motivaciju i pokušati drugačijim pristupom. Slijed definicija - teorem - dokaz - primjena postaje obeshrabrujući i prisilan za većinu učenika u školama, uglavnom srednjim školama, ali i za studente na fakultetima. Umjesto započimanja nastavne teme ili nastavne jedinice iz matematike definicijom, predlažemo krenuti s motivirajućim i zanimljivim pitanjem ili problemom iz svakodnevnog života.

2.2 Perspektiva nastavnika matematike

Nastavnici postavljaju pitanja o tome kakvu će korist njihovi učenici imati od primijenjene matematike, kakvu korist oni kao nastavnici imaju sudjelovanjem te koliko dodatnog posla će dobiti pa se već dugi niz godina nastoje pronaći odgovori na njihova pitanja i raspravlja se o problemima motivacije kako za nastavnike tako i za učenike. Čak i najbolji argumenti ne mogu promijeniti ponašanje nastavnika iako ih oni prihvaćaju, ali potrebno ih je malo i ohrabriti. Neki nastavnici već primjenjuju primijenjenu matematiku ili ju žele isprobati i naučiti o njoj pa nema potrebe dodatno ih uvjeravati. S druge strane, nastavnici matematike koji godinama predaju na konvencionalan način ne žele sudjelovati u obrazovanju primijenjene matematika bez obzira na argumente.

Slika 5: Logo od ERME-a

Što se tiče potpore za obrazovanje primijenjene matematike uvijek se može naći na internetu, bar među stranom literaturom. Iako postoje mnoge nacionalne matematičke organizacije i udruge koje pružaju materijale za uporabu u školama dostupne na internetskim stranicama. Jedno takvo društvo je i ERME - *European Society for Research in Mathematics Education* čiji je cilj omogućiti razmjenu informacija kako bi se povećala vidljivost i dostupnost europskih istraživanja o matematičkom obrazovanju kako u Europi tako i u svijetu. Oni organiziraju tematske studije o rješavanju problema, modeliranju i primjeni matematike kao što to radi i ICME - *International Commission on Mathematical Education*, najveća međunarodna konferencija o matematičkom obrazovanju koja se održava svake četiri godine. Ovdje svakako treba spomenuti i ICTMA - *The International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications* organizaciju za promicanje primjene i modeliranja u svim područjima matematičkog obrazovanja - osnovnih i srednjih škola, fakulteta i sveučilišta. ICTMA organizira međunarodnu konferenciju svake dvije godine i odgovorna je za izdavanje kvalitetnih materijala i publikacija o modeliranju iz matematike, uključujući i školsku matematiku. Dodatni materijali za nastavu mogu se naći i na sljedećim online stranicama: *The Stepping Stones*, *MATHmodels.org*, *Teacher package: Mathematical Modelling* i mnoge druge.

Slika 6: ICTMA19 se ove godine održava u Hong Kongu ([13])

Neki nastavnici uživaju podučavajući praktični dio jer s jedne strane ima učenika koji zapravo žele naučiti i motivirani su, dok s druge strane mogu naučiti više o svijetu u kojem žive. Modeliranjem i simulacijom možemo vidjeti kako funkcionira svijet i primijenjena matematika te se postiže da učenici zajedno sa svojim nastavnicima traže odgovore i dolaze do vlastitih zaključaka. No, sve to ima svoju cijenu, a cijena istraživanja i proučavanja zahtijeva dosta dodatnog posla. Nekim nastavnicima ni to nije problem jer je i to dio posla kojeg vole, ali većini nastavnika to predstavlja problem. Novi nastavnici mogu uz svoje pripreme sustavno proučavati i lekcije primijenjene matematike te ih postupno uvoditi u svoju nastavu. Dodatno vrijeme uloženo u pripreme se može nadoknaditi podučavanjem razreda gradiva koje se nalazi u njihovoj zoni udobnosti koja ne zahtijeva puno vremena za pripremu. Ovo predstavlja više napora kod starijih nastavnika koji su smanjili svoje pripreme jer se drže neke svoje rutine. Iako već postoje predložene lekcije utemeljene na stvarnosti, potrebno je uvijek malo vremena i truda da se prikupe informacije o temi i da se prilagode razredu. Međutim, nastavnici moraju biti spremni učiniti nešto pozitivno kako bi zajedno s učenicima proveli zabavne sate matematike.

2.3 Savjeti za nastavnike

U ovom diplomskom radu dat ćemo neke prijedloge koje nastavnici mogu provesti u sklopu svoje nastave.

Dubina ili širina

Nastavnici uglavnom određuju sadržaj koji će obrađivati tijekom nekog razdoblja i utvrđuju koja su rješenja prihvatljiva, iako im to ni ne oduzima puno vremena pogotovo ako još koriste i zadatke iz udžbenika koja sadrže rješenja. Dok s druge strane, potrebno je puno više napora za pripremu sata primijenjene matematike jer se mnoge odluke kao što je provedba još jednog ciklusa modeliranja na osnovu novih pretpostavki ili dobivenim podacima prepuštaju učenicima. Kada bi nastavnik pokušao predvidjeti sva moguća pitanja i ideje učenika te nastojao izračunati sve rezultate, dodatno bi si otežao pripremanje sata. Zato bi bilo bolje da se nastavnici usredotoče na preliminarna razmatranja, a zatim rade zajedno s razredom na modelu pri čemu se mijenja njihova uloga u kojoj nisu više odgovorni na pitanja koja se odnose na sadržaj i ne moraju na njih ni potpuno odgovoriti, već se usredotoče na pomoć u pronalasku pitanja, odgovaranju na njih i pronalasku potrebnim informacija. Za takvu pripremu treba se uzeti u obzir da matematika potrebna za sat mora odgovarati nastavnom planu i programu, ali i da tema bude zanimljiva za učenike, s kojom se oni mogu povezati i pronaći motivaciju. Važno je uz pomoć kurikuluma razmotriti koje su matematičke metode potrebne za bavljenje odabranom temom da se ne bi slučajno dogodilo korištenje matematike koja izlazi izvan školskih razina.

Upotreba postojećih materijala

Iskustva drugih nastavnika i raznovrsni prikladni članci mogu se pokazati izuzetno korisnim za nastavnike matematike koji žele podučavati razrede primijenjenom matematikom. Već smo i naveli neke web stranice na kojima se može pronaći dodatnih materijala za nastavu i prijedloga za trenutni sadržaj sata, ali svaki nastavnik može doći do njih pretraživanjem interneta što mu štedi vrijeme jer za razliku od kretanja od početka, sada mora samo prilagoditi prijedlog vlastitom razredu. Iako i prilagodba može biti dodatni posao, ali tu se mogu uključiti i učenici tako što će na primjer nabaviti trenutne podatke o izabranom prijedlogu. Također bi bilo poželjno kada bi i sami nastavnici koji su uključili primijenjenu matematiku u nastavu podijelili ostalima svoje materijale i iskustva.

Međusobna suradnja nastavnika

I dosada su nastavnici matematike u školama uspješno surađivali bilo da se radi o nastavnicima iz istih ili različitih škola. Svaka suradnja može započeti s nečim manjim pa razvijanjem zajedničkih interesa dolazi do sve bolje i kvalitetne suradnje. Postoje i mnogi kontinuirani edukacijski programi i stručni skupovi za nastavnike koji žele poboljšati matematičko obrazovanje te bi jedna od njihovih tema mogla biti i primijenjena matematika u nastavi koju mogu prezentirati nastavnici koji su je već koristili na nastavi.

Otkrivanje novih problema

Zanima nas do kakvih novih otkrića u matematičkom obrazovanju mogu doći nastavnici zajedno sa svojim učenicima ako su sve definicije i teoremi kojima se bavi matematičko obrazovanje odavno otkriveni i dokazani. Obrazovanje primijenjenom matematikom je tu u prednosti jer uvijek postoje nova otkrića koja mogu biti predstavljena na drugačiji način od načina na koji ga je već netko modelirao. Svaki model stvarnog problema je nova tvorevina, otkriće ili konstrukcija nečega nepoznatog. Samo matematičko modeliranje nije ponavljanje postupaka s poznatim algoritmima već osmišljavanje i oblikovanje svijeta na kreativan način, ali kako su matematička istraživanja nadmašila razinu školske matematike, modeliranje je izgubilo takva obilježja. Stoga i to može biti jedan od razloga zašto se matematika u školama baš i ne čini privlačnom. Kako bi matematiku doživjeli na bolji način odnosno kako bi nešto modelirali, prvo treba odrediti prikladnu temu koja se može naći čitanjem časopisa ili pregledavanjem interneta koji sadrže brojne grafikone ili nekakve statistike pri čemu treba biti i oprezan. Sve vrste medija koriste statističke podatke na način na koji njima odgovara, odnosno pokazivajući ono što je autor teksta htio reći pritom ne koristeći neutralan prikaz stvarnih podataka.

Za korištenje nastavnih materijala iz tiskanih i digitalnih medija, postoje dva dodatna pristupa za pronalaženje odgovarajućih problema u razredu. Jedan od njih se naziva Fermi - problem čije rješenje uključuje množenje niza procjena koje daju točan odgovor, ako su procjene točne. Pogledajmo na sljedećem primjeru:

Primjer 1. *Koliko ljudi na svijetu koristi mobilni telefon u bilo kojoj minuti?*

Rješenje: Pretpostavimo da $\frac{3}{4}$ ljudi u svijetu ima mobilne telefone i da na svijetu ima oko 7 milijardi ljudi. Onda na svijetu ima

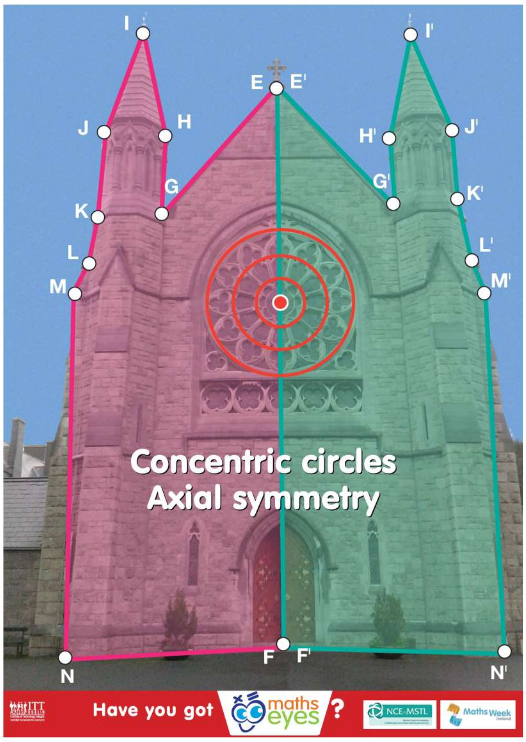
$$7 \cdot 10^9 \cdot \frac{3}{4} = 5.25 \cdot 10^9 = 525 \cdot 10^7$$

ljudi koji koriste mobilni telefon. Ljudi dnevno provedu otprilike 5 sati na mobilnom telefonu što znači da ga koriste $\frac{5}{24}$ minuta u jednom danu. Ako pomnožimo broj ljudi koji imaju mobilne telefone s brojem minuta provedenim na mobilnom telefonu u jednom danu dobit ćemo grubu procjenu koliko ljudi na svijetu koristi mobilni telefon u bilo kojoj minuti.

$$525 \cdot 10^7 \cdot \frac{5}{24} = 1\ 093\ 750\ 000$$

Oko 1 093 750 000 ljudi koristi mobilni telefon tijekom bilo koje minute.

Dakle, krećemo s nekoliko pretpostavki i završimo s nevjerovatno bliskom procjenom pravog odgovora. Ovaj pristup pomaže u treniranju procjenjivanja, ali i nastavnici ga mogu koristiti kao motivaciju. Drugi pristup je koncept matematičkih očiju koji je nastao kao dio istraživanja Irca Terrya Maguirea i koji primjećuje matematiku svugdje oko nas. Na temelju toga je nastalo natjecanje *Maths Eyes Competition* gdje učenici šalju fotografije matematike u svijetu oko njih.



Slika 7: Slika poslana na *Maths Eyes Competition*

Procjena napretka učenika

Nakon uključivanja primijenjene matematike u nastavu, treba provjeriti kako se to odražava na učenike možda čak i povećanjem njihovih kompetencija. Maass i [15] su tijekom potrage za manje vremenski zahtjevnim metodama procjene i načinima preliminarne procjene, naišli na prijedlog koji je razvijen tijekom projekta LEMAMOP (*Learning Opportunities for Mathematical Reasoning, Modelling and Problem Solving*) koji izbjegava preračunavanje ili procjenu prikazanog izračuna već se temelji na pretpostavkama modeliranja. Pokazat ćemo to na sljedećim primjerima.

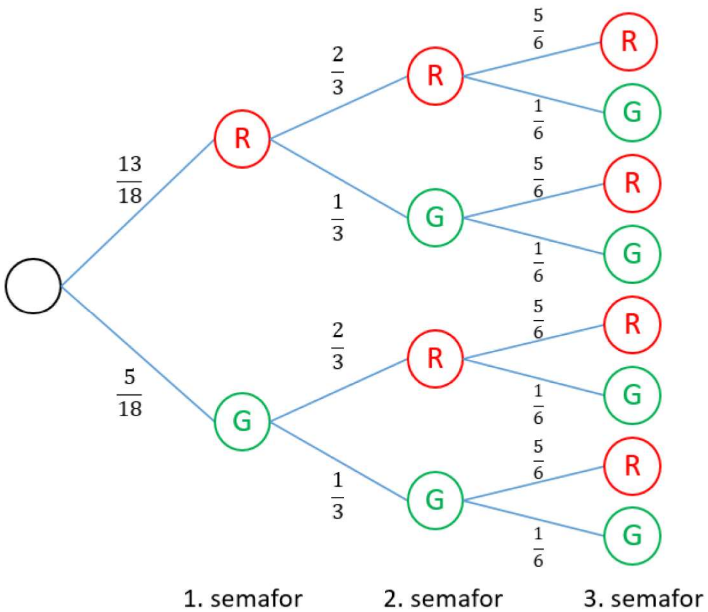
Primjer 2. *Problem sa semaforom*
Petar mora proći tri semafora na putu do škole. Semafori prikazuju zelena i crvena svjetla u različitim trajanjima:

- *1. semafor: 25 s zeleno, 65 s crveno*
- *2. semafor: 30 s zeleno, 60 s crveno*
- *3. semafor: 15 s zeleno, 75 s crveno.*

Izračunajte vjerojatnosti za sljedeće događaje:

- *Petar ne nailazi na crvena svjetla tj. sva svjetla su zelena.*
- *Petar nailazi na 2 crvena i 1 zeleno svjetlo.*

Rješenje: Ovakva situacija se često modelira pomoću dijagrama stabla, ali to je samo jedan od niza mogućih rješenja.



Slika 8: Dijagram stabla

Primjer 3. *Problem bojanja*
Četiri radnika trebaju tri dana da obojaju zidove škole. Koliko dana će trebati ako zidove boja 10 radnika?

Rješenje: Učenik svoje rješenje može dati sljedećom tablicom.

Broj radnika	Broj dana
4	3
1	12
10	1.2

Tablica 1

Ovo su primjeri povezivanja matematike sa stvarnošću, što omogućuje dugotrajnije ishode učenja u matematičkom obrazovanju. Susretanjem s ovakvim tipovima zadataka, učenici ne bi više tražili razloge zbog kojih trebaju učiti matematiku, vidi se iz primjera da doprinosi učenju za život. S obzirom da se primjeri mogu riješiti na više načina, na nastavniku je da odluči na koji način će ocijeniti i koje rješenje će priznati.

Nastavnici bi se trebali koncentrirati na procese modeliranja svojih učenika koristeći niz tehnika kao što su ispitivanje, promatranje, prezentacija ili povratna informacija. Formativni pristup vrednovanju usredotočuje se na učenje učenika, dok sumativno vrednovanje usredotočeno je na ocjenjivanje. Sumativni pristup za procjenu napretka učenika podijeljen je na pristup koji se usredotočuje na procese modeliranja i pristup koji se temelji na različitim komponentama kao što je razumijevanje problema, definiranje i rješavanje matematičkog modela, vrednovanje i tumačenje rješenja i analiza rezultata.

3 Zadaci izvedeni iz svakodnevnih pojava

3.1 Najbolja tarifa za mobilni uređaj

3.1.1 Matematičko modeliranje tarifa za mobilni uređaj

Živimo u modernom dobu u kojem svaka osoba ima svoj mobilni uređaj kojeg želi koristi na najbolji mogući način, tj. tako da svoju korištenu tarifu iskoristi maksimalno. Kako bismo mogli modelirati ovaj problem prvo moramo definirati vlastite ciljeve npr. manja potrošnja na računu, odrediti što će biti glavni utjecaj na račun - pozivi, poruke ili mobilni podatkovni promet, dodatne usluge. Cilj ćemo odrediti tako da prikupimo podatke o našoj potrošnji tijekom nekog vremenskog razdoblja i vidimo na što točno najviše trošimo. Većina bi se sad sigurno zapitala koliko daleko treba ići s pregledom računa, ali to ovisi o svakoj osobi pojedinačno. Ukoliko se želite zadržati na svakodnevnoj upotrebi, onda su dovoljni i računi za posljednjih nekoliko mjeseci. U suprotnom morate razmisliti želite li promijeniti trenutnog davatelja usluga, promijeniti mobilni uređaj, promijeniti ugovor i slično. Morate pretpostaviti vaše buduće ponašanje kao korisnika što nije nimalo lako. Iako koristimo razne usluge na mobilnom uređaju, odlučili smo se da nam glavni utjecaj na račun ima jedna od najčešćih korištenih usluga kao što su pozivi.

Pronalazimo tri vrste tarifa[1] za upućivanje poziva: *Neograničena* od 249 kn/mj koja uključuje 5 000 minuta besplatnih poziva izvan mreže i fiksnu cijenu po pozivu (1.09 kn/min) nakon potrošenih besplatnih minuta, *Najbolja L* od 199 kn/mj koja također uključuje isto što i prethodna tarifa i *Najbolja M* od 149 kn/mj koja uključuje 1 000 minuta besplatnih razgovora izvan mreže i fiksnu cijenu (1.09 kn/min) po pozivu nakon potrošnje iskorištenih minuta. Uočimo da prve dvije tarife nude isto za različitu cijenu, ali kasnije ćemo vidjeti da se razlikuju u podatkovnim podacima. Matematičari bi odmah uočili da tarife se mogu zapisati kao po dijelovima linearne funkcije te bi razmišljali o grafu funkcije, analiziranju grafa ili rješavanju linearnih jednadžbi, ali učenicima to neće biti odmah vidljivo jer nisu naviknuti na izdvajanje informacija i podataka iz dosta opsežnih tekstova o tarifama ili računima te im možemo pomoći tako da im predložimo stvaranje tablice vrijednosti i grafikona. Učenike možemo staviti i u grupe (najviše 4) što je korisno i iz pedagoške perspektive. Tijekom njihovog rada možemo uočiti koji se problemi pojavljuju. Svaka grupa bi trebala izračunati mjesečne naknade za sve tarife uz pretpostavku razgovora od 1 h do 84 h mjesečno, umetnuti vrijednosti u tablicu (*Tablica 2*) i izraditi grafikon na temelju tih informacija koji bi trebao izgledati slično ovome dolje (*Slika 9*). Primijetimo da računamo do 84 h zato što su nakon 83 h sve tarife potrošile svoje besplatne minute što bi i sami učenici znali odrediti.

Sati	Neograničena	Najbolja L	Najbolja M
0	249 kn	199 kn	149 kn
1	249 kn	199 kn	149 kn
2	249 kn	199 kn	149 kn
⋮	⋮	⋮	⋮
16	249 kn	199 kn	149 kn
17	249 kn	199 kn	170.8 kn
⋮	⋮	⋮	⋮
83	249 kn	199 kn	4 487.2 kn
84	292.6 kn	242.6 kn	4 552.6 kn

Tablica 2: Cijene pojedinačnih tarifa po iskorištenim satima za pozive

[1] Tarife preuzete s web stranice Hrvatskog Telekoma [10]

Uočimo da svaku ovu tarifu možemo zapisati kao funkciju

$$f_N(x) = \begin{cases} 249, & x \leq 5000 \\ 249 + (x - 5000) \cdot 1.09, & x > 5000, \end{cases}$$

$$f_L(x) = \begin{cases} 199, & x \leq 5000 \\ 199 + (x - 5000) \cdot 1.09, & x > 5000, \end{cases}$$

$$f_M(x) = \begin{cases} 149, & x \leq 1000 \\ 149 + (x - 1000) \cdot 1.09, & x > 1000, \end{cases}$$

pri čemu x predstavlja broj potrošenih minuta poziva, a vrijednost funkcije u x predstavlja cijenu s obzirom na tarife. Funkcija f_N odgovara prvoj tarifi odnosno Neograničenoj, f_L odgovara Najboljoj L, a f_M odgovara Najboljom M. Učenici bi sami trebali shvatiti da njihovi grafikoni zapravo predstavljaju grafove ovih funkcija te bi mogli sami algebarski zapisati funkcije na temelju njihovih grafova.

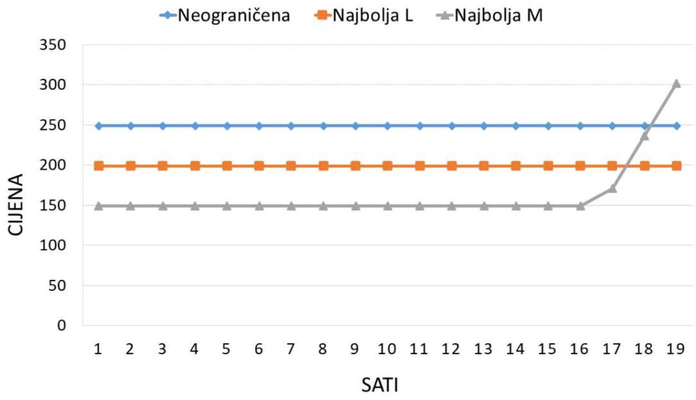
Kao što smo već i naveli, gornje navedene funkcije su po dijelovima linearne funkcije. Ako promatramo samo funkcije f_N i f_M trebali bi uočiti kako se jedna funkcija iz druge može dobiti za određeni pomak tj. $f_N = 50 + f_M$.

Na temelju grafikona možemo zaključiti koja tarifa je najjeftinija s obzirom na trajanje obavljenih poziva, ali učenici možda ne uspiju u tome te im pripomognemo sljedećim pitanjima ([15]):

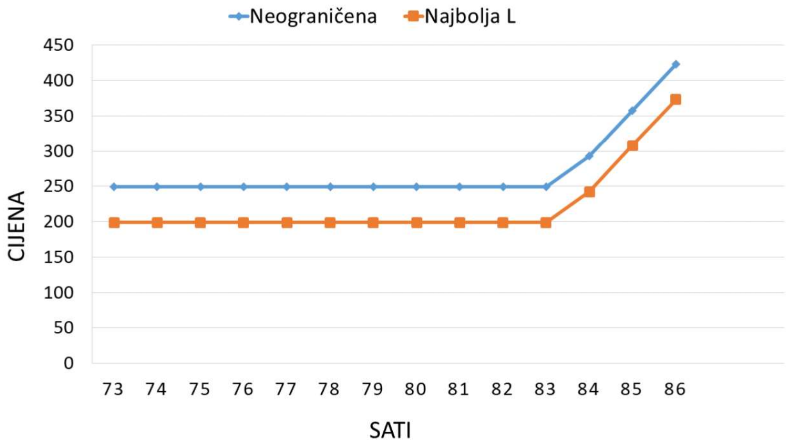
1. Koja je svrha pravljenja tablice i grafikona u ovom modeliranju?
2. Pružaju li nam oni informacije koje tražimo?
3. Koju biste tarifu preporučili na temelju vremena koje se troši na pozive?
4. Pružaju li nam tablica i grafikon dovoljno precizne podatke? Ako ne, kako možemo dobiti preciznije vrijednosti?

Zajedno s učenicima trebamo zaključiti sljedeće:

1. Promatrajući tablicu i grafikon možemo lako odrediti koja je tarifa najbolja za nekoga tko razgovara određeni broj sati na mobilnom uređaju. S druge



(a)



(b)

Slika 9: Grafikon cijena pojedinačnih tarifa po satima

strane, određeno prosječno vrijeme do kojeg možemo doći računajući prosjek prethodno nekoliko mjesečnih računa, nije mjerna jedinica. No, korisnik također može smanjiti svoje pozive na temelju novih informacija ili prijeći na drugu tarifu koja mu bolje odgovara.

2. Naravno da nam pružaju, svakom korisniku je važno odabrati tarifu s najmanjom cijenom za određeno vrijeme razgovora mjesečno koje mu je potrebno.

3. Iz grafikona možemo vidjeti da bi tarifa Najbolja M bila najbolja ukoliko razgovaramo do 17.43 h/mjesečno, nakon 17.43 h/mjesečno trebali bi odabrati tarifu Najbolja L ukoliko u obzir uzimamo samo pozive. Iz Tablice 2 možemo

vidjeti da nikako ne bismo trebali koristiti tarifu Najbolja M ukoliko razgovaramo preko mobilnog uređaja više od 18 sati mjesečno.

4. S obzirom da smo istražili tarife samo jednog operatera mogli bismo zadati učenicima da oni to isto naprave s drugim operaterima kako bi preciznije odredili što najbolje odgovara korisniku. Također, možemo zadati učenicima da sami zamisle neku imaginarnu osobu kao što je npr. menadžer nekog poznatog benda ili prodavač u trgovini te da izračunaju njihov imaginarni trošak.

Pronašli smo tri tarife, usporedili ih koristeći tablicu vrijednosti i grafove njihovih funkcija i odredili koja tarifa je najbolja s obzirom na pozive. Za korisnike koji rijetko pozivaju očiti izbor je tarifa Najbolja M, dok bi ostali trebali razmisliti i o drugim pogodnostima koje nude te tarife, ali ako im je najčešće korištena usluga upravo pozivi onda ako biraju između dvije tarife koje nude isto (što se tiče poziva) najbolji izbor je izabrati onu jeftiniju.

3.1.2 Poboljšanje modela

Promotrimo što bi se dogodilo ukoliko uspijemo prekoračiti dodijeljene besplatne minute razgovora ponuđene u tarifama. Za početak se treba informirati o pravilima zaokruživanja telekomunikacijske kompanije tj. dolazi li do zaokruživanja na kraju mjeseca ili nakon svakog pojedinačnog poziva. Kako bi učenici to shvatili, zabilježit će trajanje svojih zadnjih deset poziva. Pretpostavimo da su nam dostupni sljedeći navedeni podaci u donjoj tablici.

Pozivi	Trajanje
1	2 min 20 s
2	53 s
3	5 min 37 s
4	34 s
5	49 s
6	11 min 37 s
7	1 min 4 s
8	3 min 12 s
9	1 min 22 s
10	6 min 18 s

Tablica 3: Podaci za trajanje poziva

Na temelju ove tablice tražit ćemo učenike da nam kažu koliko su ukupno trajali pozivi i koliko će minuta biti naplaćeno na temelju pravila zaokruživanja telekomunikacijske kompanije.

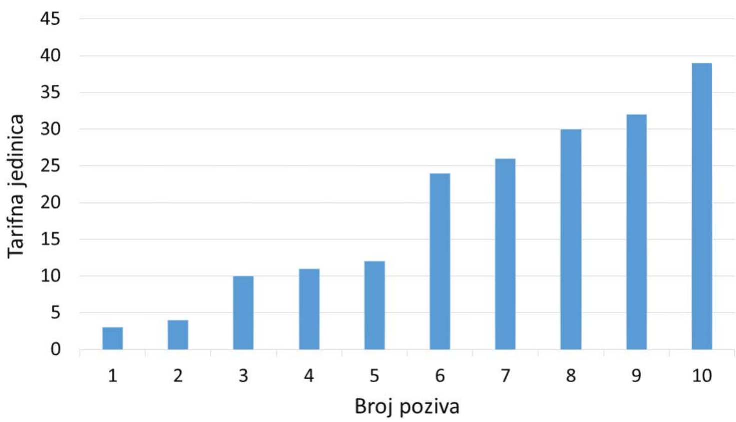
$$140 + 53 + 337 + 34 + 49 + 697 + 64 + 192 + 82 + 378 = 2\,026$$

Zbrajanjem svih poziva dobijemo kako su pozivi trajali 2 026 = 33 min i 46 s. Ukoliko dolazi do zaokruživanja na kraju mjeseca, naplaćuju se 34 minute, a ako se zaokružuje nakon svakog poziva onda se naplaćuje

$$3 + 1 + 6 + 1 + 1 + 12 + 2 + 4 + 2 + 7 = 39$$

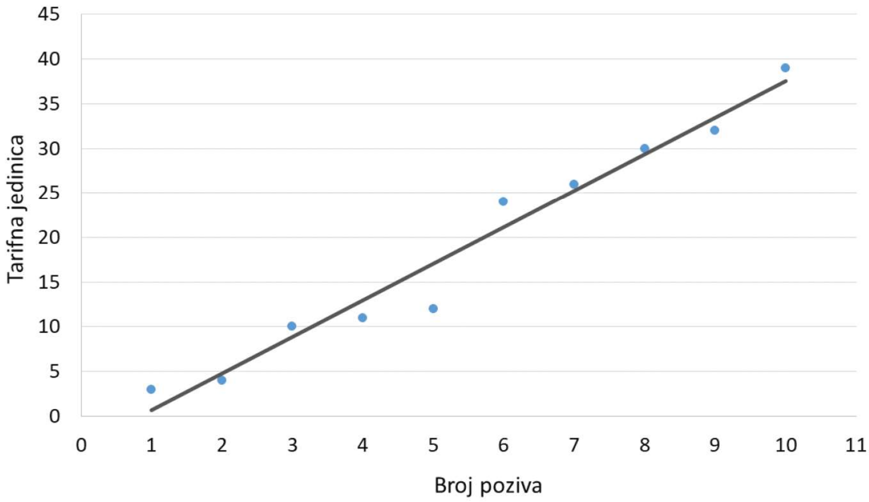
minuta što dovodi i do povećanja računa. Cilj ovog poboljšanog modela je pokazati kako se svakodnevni problem može razviti u matematički koji zahtijeva analizu funkcija što ćemo i pokazati, ali prvo ćemo shvatiti kako pravila zaokruživanja povećavaju račun. Ako imamo dvije osobe koje žele napraviti 10 poziva koji će trajati jednu minutu i jedna osoba uvijek to uspije, dok druga prekine poziv nakon 1 minute i 1 sekunde. Prva osoba će morati platiti 10 minuta razgovora, dok će druga 20 minuta, iako su joj pozivi trajali samo 20 sekundi dulje. Trebamo imati na umu da kraće pozive koji prelaze minutu za nekoliko sekundi plaćamo više nego dulje pozive.

Vratimo se sada na naše podatke iz Tablice 3 i prikažimo ih na grafikonu koji će prikazati naplaćene minute uz pravilo da se zaokruživanje odvija na kraju svakog poziva (što je zapravo i pravilo Hrvatskog Telekoma). Na x-osi su pozivi koji su uzastopno numerirani, a na y-osi su zbrojene naplaćene minute.



Slika 10: Grafikon numeriranih tarifnih jedinica koje se naplaćuju

Pogledajmo što će se dogoditi ako gornju stranicu pravokutnika zamijenimo s točkama i povučemo pravac trend liniju[2] tj. pravac na grafikonu kojeg će te točke pratiti. Za prosječno vrijeme razgovora što iznosi nešto više od 3 s obzirom na Tablicu 3, pravac pokazuje da se mora platiti približno 4 tarifnih jedinica po pozivu. Sada možemo na temelju ovih informacija i informacija o broju obavljenih poziva odlučiti koja je tarifa najjeftinija. Možemo uzeti i generirati 10 slučajnih poziva i analizirati te ćemo shvatiti da redoslijed kojim se pozivi obavljaju nije važno. Razvrstavši ih po njihovom trajanju dobit ćemo linearnu funkciju kao rezultat što olakšava identificiranje troškova ([15]).



Slika 11: Trend linija

Nakon što smo uzeli u obzir i pravilo zaokruživanja poziva nakon potrošenih besplatnih minuta možemo zaključiti da i ono utječe na povećanje ukupnog računa kao i vrijeme razgovora.

3.1.3 Podaci

Pravilo zaokruživanja (za kojeg smo već vidjeli kako utječe na račun), troškovi prilikom sklapanja novog ugovora, novi mobilni uređaj, trajanje ugovora, dostupnost mreže, cijena drugih usluga kao što su poruke ili podatkovni podaci također utječu na račun. Sada ćemo vidjeti kakav utjecaj na račun imaju mobilni podatkovni podaci

[2]Pravac kojim se pokazuje ponašanje skupa podataka kako bi se utvrdilo postojanje određenog uzorka

uz pozive te ćemo samo postaviti matematički model. Ovdje ćemo koristiti funkcije s dvije varijable, jedna varijabla predstavlja pozive, druga varijabla podatkovne podatke, što nije u redovnoj nastavi, no može se napraviti u sklopu dodatne nastave ili na različitim radionicama za one koji žele znati više.
Opet imamo tri tarife preuzete sa web stranice HT-a:

- *Neograničena* - neograničeni internet, 5 000 besplatnih minuta i 1.09 kn/min uz prekoračenje po cijeni od 249 kn,
- *Najbolja L* - 10 GB besplatnog interneta, 5 000 besplatnih minuta i 1.09 kn/min uz prekoračenje po cijeni od 199 kn,
- *Najbolja M* - 5 GB besplatnog interneta, 1 000 besplatnih minuta i 1.09 kn/min uz prekoračenje po cijeni od 149 kn.

Ukoliko korisnik iskoristi definiranu količinu podatkovnog prometa, dolazi do smanjenja brzine prijenosa podataka koja će se primjenjivati sljedeća 24 sata. Nakon isteka tog perioda neće moći koristiti internet do kraja obračunskog razdoblja, osim u slučaju da si aktivira podatkovnu opciju ([10]) što zapravo znači da korisnik ne može nesvjesno povećati račun na temelju podatkovnih podataka. Možemo zapisati gore navedene tarife u algebarskom obliku pa dobivamo

$$
\begin{aligned}
f_N(x,y) &= \begin{cases} 249, \; x \leq 5000 \\ 249 + (x-5000)\cdot 1.09, \; x > 5000 \end{cases} \quad \forall\, y \geq 0,\\
f_L(x,y) &= \begin{cases} 199, \; x \leq 5000 \\ 199 + (x-5000)\cdot 1.09, \; x > 5000 \end{cases} \quad \forall\, y \geq 0,\\
f_M(x,y) &= \begin{cases} 149, \; x \leq 1000 \\ 149 + (x-1000)\cdot 1.09, \; x > 1000 \end{cases} \quad \forall\, y \geq 0.
\end{aligned}
$$

S obzirom na ove podatke ne možemo donijeti ispravnu odluku i zaključili bi isto kao i za pozive, ali mogla bi se gledati potrošnja interneta unazad par mjeseci i po tome odrediti koja je tarifa najbolja. No, što da korisnik i nakon isteka ponuđenih podatkovnih podataka može ih trošiti po nekoj fiksnoj cijeni ili da proširimo trenutni model odlukom o kupnji novog mobilnog uređaja ili promatramo cijene međunarodnih poziva, dobili bi funkcije s više varijabli i njihove prikaze u većim dimenzijama, što nije predviđeno učenicima u srednjoškolskom obrazovanju.

Na kraju možemo zaključiti kako nam je matematika pomogla riješiti svakodnevni problem o izboru mobilne tarife, ali naravno da odluka ovisi i o subjektivnoj procjeni svakog korisnika. Pokazali smo kako se model može dodatno proširiti, ali ostajemo na razini srednjoškolske matematike. Važno je napomenuti i da Hrvatski Telekom, telekomunikacijska kompanija čije smo tarife koristili u modeliranju, obavještava svoje korisnike o isteku besplatnih minuta i podatkovnih podataka te stoga korisnici i sami utječu na svoj račun.

3.2 Kojim putem ići?

Ako želimo putovati negdje gdje dosad nismo bili, koristimo različite navigacijske sustave koji često nude više od jedne moguće rute i tu nam može pomoći matematika pri određivanju najprikladnije rute. Osim što uvijek želimo da dođemo u najkraćem vremenskom razdoblju do određenog mjesta, možemo u obzir uzeti i druge faktore kao što su izbjegavanje plaćanja cestarine i prelazak granice (ukoliko je to moguće), kupnja na putu, uživanje u ljepotama krajolika kojim se prolazi i mnoge druge stvari. Uzimajući to u obzir, modeliranje postaje složenije.

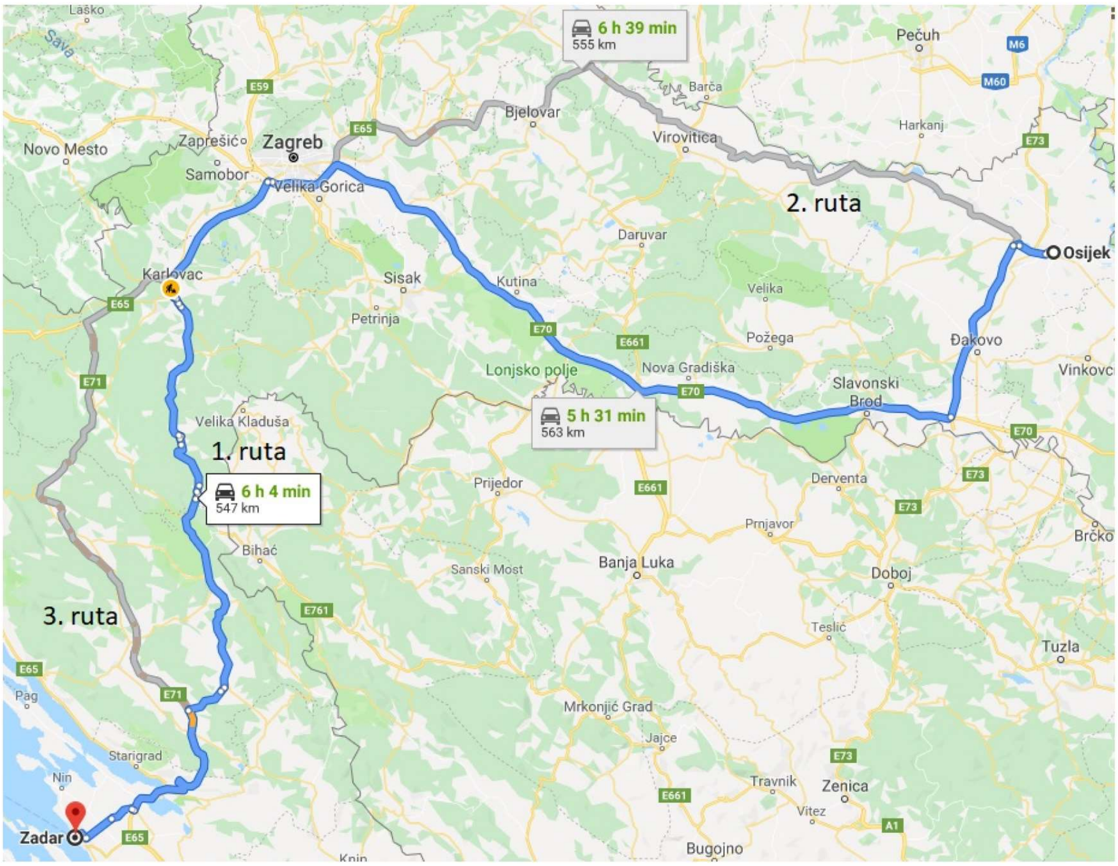
Nastavnici mogu ovakav tip problema dati svojim učenicima da odrede kojim putem će brže stići do određenog mjesta. Većina učenika tijekom školovanja idu na ekskurzije pa se mjesto gdje učenici idu može uzeti kao odredište. U ovom slučaju je nastavnik taj koji je odredio cilj, a to je stići do određenog mjesta u najkraćem vremenu dok će učenici istraživati podatke potrebne za modeliranje. Pretpostavit ćemo da su učenici neke osječke škole odlučili ići u Zadar na ekskurziju i žele odrediti kojim putem će doći najbrže. Kako bi dobili moguće rute puta mogu se koristiti Google Karte [8] koje daju sljedeća tri prijedloga rute (*Slika 12*):

1. Kretati se cestom E73 južno prema Sredancima gdje se prelazi na autocestu A3 do Zagreba prema čvoru Lučko nakon kojeg se treba ići cestom E65 prema Karlovcu. Državnom cestom D1/D6 krećući se prema jugu priključuje se na cestu D522 koja vodi do A1/E71. S autoceste A1 se silazi prema Jadranskoj Magistrali/D8 koja vodi do Zadra.

2. Kretati se cestom E73 u smjeru sjeverozapadu gdje se prelazi na državnu cestu D34 koju treba pratiti do prijelaza na cestu D2 do Đurđevca. U Đurđevcu nastaviti po državnoj cesti D43 u smjeru jugozapada prolazeći cestama D28, D12, D10 do priključenja na cestu E65 koja prolazi kraj Karlovca do ceste

E71/A1. S te ceste se silazi prema Jadranskoj Magistrali/D8 koja vodi prema Zadru.

3. Kretati se cestom E73 južno prema Sredancima gdje se prelazi na autocestu A3/E70 s koje će se prijeći na E65 prema čvoru Lučko. S ceste E65 prijeći na cestu E71/A1 koja vodi do Jadranske Magistrale/D8. Jadranskom Magistralom kretati se u smjeru jugozapada i dolazi se do Zadra.



Slika 12: Prikaz mogućih ruta od Osijeka do Zadra [8]

Nakon pronalaska predloženih ruta, učenici bi trebali detaljno proučiti rute navodeći vrijeme putovanja, prijeđenu udaljenost i probleme na koje možda nailaze na tim rutama. Pogledajmo kako to izgleda na ovom primjeru:

- 1. rutom treba prijeći 547 km do Zadra i prema [8] potrebno je 6 sati i 4 minuta putovanja automobilom i plaća se cestarina što neće biti problem jer uglavnom svi autobusi imaju električnu propusnicu. Ono što bi moglo predstavljati problem su građevinski radovi na cesti prilaz Većeslava Holjevca južno od Karlovca, ali ako se odabere ovaj put, prije polaska se još može provjeriti stanje radova.

- Ova ruta je duga 555 km i putovanje automobilom traje 6 sati i 39 minuta. I ovdje se također plaća cestarina.
- Posljednja ruta je duga 563 km i potrebno je 5 sati i 31 minuta putovanja automobilom te se i ovdje plaća cestarina.

Uočimo da ovakve odluke donosimo svakodnevno bez previše razmišljanja. Možda bi učenici mogli zapitati zašto sad to računaju ako im je ponuđeno približno vrijeme dolaska, tada ih se treba upozoriti kako su informacije koje su pronašli odnose na putovanje automobilom, a oni će kao grupa učenika putovati autobusom kojima će sigurno trebati više vremena. Udaljenost između dva mjesta ostaje ista (ovisno kojim putem išli) putovali automobilom ili autobusom, ali se uvijek može provjeriti koristeći drugi navigacijski sustav ili računanjem udaljenosti koristeći kartu, stoga ćemo prihvatiti predloženu udaljenost i izračunati vrijeme vožnje.

Nastavnici trebaju navesti učenike da trebaju informacije o brzini autobusa ovisno kojom vrstom ceste putuju - autocestom, cestama izvan naselja i cestama u naselju, ali također da i iz pronađenih ruta moraju odrediti približnu duljinu određene vrste ceste. Ograničenja kojih se vozači autobusa moraju držati su ([21]):

- 100 km/h na autocesti
- 80 km/h na cesti izvan naselja
- 50 km/h na cesti u naselju.

Promatrajući naše moguće rute dolazimo do podataka kako se naša prva ruta otprilike sastoji od 347 km autoceste, 175 km ceste izvan naselja i 25 km ceste u naselju. Druga ruta sastoji se od približno 256 km autoceste, 199 km ceste izvan naselja i 100 km ceste u naselju. Posljednja ruta aproksimativno se sastoji od 530 km autoceste, 20 km ceste izvan naselja i 13 km ceste u naselju. Uočimo kako je ovdje autocesta čak 93% cijelog puta.

Sada ćemo izračunati koliko vremena potrošimo na određenu vrstu ceste s obzirom na ograničenu brzinu na toj cesti koristeći proporcionalnost. Učenici mogu to riješiti i na neki drugi način. Pokazat ćemo to na primjeru prve rute u kojoj imamo 347 km autoceste po kojoj bi autobus trebao ići 100 km/h, 175 km ceste izvan naselja po kojoj bi trebao ići 80km/h i 25 km ceste u naselju po kojoj se smije ići 50 km/h.

$$\downarrow \begin{array}{ll} 1\ \text{h} & 100\ \text{km} \\ x\ \text{h} & 347\ \text{km} \end{array} \downarrow$$

Odgovarajuće veličine stavljamo u omjer.

$$\begin{aligned} 1 : x &= 100 : 347 \\ 100\,x &= 347 \ / : 100 \\ x &= 3.47\ \text{h} = 208.2\ \text{min} \end{aligned}$$

Ali rješenje se može dobiti i na drugačiji način računajući prvo da je potrebno $\frac{60}{100} = 0.6$ minuta da se prijeđe jedan kilometar i onda je potrebno $347 \cdot 0.6 = 208.2$ minuta da se prijeđe 347 km.

$$\downarrow \begin{array}{ll} 1\ \text{h} & 80\ \text{km} \\ x\ \text{h} & 175\ \text{km} \end{array} \downarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1 : x &= 80 : 175 \\ 80\,x &= 175 \ / : 80 \\ x &= 2.1875\ \text{h} = 131.25\ \text{min} \end{aligned}$$

$$\uparrow \begin{array}{ll} 1\ \text{h} & 50\ \text{km} \\ x\ \text{h} & 25\ \text{km} \end{array} \uparrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x : 1 &= 25 : 50 \\ 50\,x &= 25 \ / : 50 \\ x &= \frac{1}{2}\ \text{h} = 30\ \text{min} \end{aligned}$$

Na analogan način se izračuna vrijeme i za ostale rute. Sve dobivene rezultate ćemo zabilježiti u Tablici 4. Na temelju dobivenih rezultata potvrdili smo pretpostavku da će autobusu trebati duže vremena nego automobilu, ali i da je treći prijedlog rute najbolja opcija s obzirom na vrijeme. To smo zapravo mogli i očekivati s obzirom da se gotovo cijeli put ide autocestom kojom autobus ide 100 km/h. Nastavnici bi u svojem razredu također trebali prokomentirati rezultate. Možda njihovi učenici dobiju čak bolje rezultate nego što je predloženo te bi se i tome trebalo raspraviti, ali važno je da učenici shvate kako dozvoljena brzina može utjecati na vrijeme vožnje.

Dozvoljena brzina autobusa		
Autocesta	100 km/h	
Cesta izvan naselja	80 km/h	
Cesta u naselju	50 km/h	
1. ruta	**Udaljenost**	**Vrijeme vožnje**
Autocesta	347 km	208.2 min
Cesta izvan naselja	175 km	131.25 min
Cesta u naselju	25 km	30 min
Ukupno	547 km	369.45 min $\approx$ 6 h i 10 min
2. ruta	**Udaljenost**	**Vrijeme vožnje**
Autocesta	256 km	153.6 min
Cesta izvan naselja	199 km	149.25 min
Cesta u naselju	100 km	120 min
Ukupno	555 km	422.85 min $\approx$ 7 h i 3 min
3. ruta	**Udaljenost**	**Vrijeme vožnje**
Autocesta	530 km	318 min
Cesta izvan naselja	20 km	15 min
Cesta u naselju	13 km	15.6 min
Ukupno	563 km	348.6 min $\approx$ 5 h i 49 min

Tablica 4: Rezultati računanja ukupnog vremena vožnje

3.3 Bojanje učionice

Svaka zgrada ili kuća mora se kontinuirano održavati i renovirati pa tako i škole. Što se tiče renoviranja škole, mislimo na bojanje unutrašnjosti škole, učionica i hodnika. Nastavnici bi mogli iskoristiti to i zajedno s učenicima odrediti koliko boje je potrebno da bi se obojala matematička učionica. Pri rješavanju ovog zadatka treba naglasiti učenicima kako je važno da cijeli prostor dobro izmjere jer u slučaju da pogriješe može se kupiti previše ili premalo boje. S druge strane, potrebna im je i informacija da za bojanje površine od jednog kvadratnog metra je potrebno $\frac{1}{7}$ l boje ([5]). Kako bi svi učenici sudjelovali u zadatku poželjno ih je podijeliti u manje grupe.

Nije dovoljno samo izmjeriti širinu, dužinu i visinu učionice koju možemo poistovjetiti sa kvadrom, moraju se također odrediti i površine koje se ne trebaju obojati. Logično je da se drveni pod i predmeti poput prozora, vrata, lustera i slično tome ne bojaju, a da se školske klupe i ormari mogu pomicati. Područje koje se boja može se odrediti oduzimanjem od oplošja učionice površine koje se ne bojaju. Sve to učenici moraju uzeti u obzir. Kako bi se na kraju mogli usporediti rezultati, učenici bi trebali zabilježiti sva mjerenja kao što je navedeno u Tablici 5 za neku učionicu matematike.

	Dimenzija	Površina	Količina	Ukupna površina
Strop = Pod	$8.2\ m \times 5\ m$	$41\ m^2$	1	$41\ m^2$
Zid I	$8.2\ m \times 3\ m$	$26.4\ m^2$	2	$49.2\ m^2$
Zid II	$5\ m \times 3\ m$	$15\ m^2$	2	$30\ m^2$
Vrata	$0.9\ m \times 2.1\ m$	$1.89\ m^2$	1	$1.89\ m^2$
Prozori	$2.1\ m \times 1.45\ m$	$3.045\ m^2$	2	$6.09\ m^2$
Zelena ploča	$1.8\ m \times 1\ m$	$1.8\ m^2$	1	$1.8\ m^2$
Bijela ploča	$1\ m \times 1\ m$	$1\ m^2$	1	$1\ m^2$
Lusteri	$0.595\ m \times 0.595\ m$	$0.354025\ m^2$	4	$1.4161\ m^2$
Prekidači	$0.078\ m \times 0.078\ m$	$6.084 \cdot 10^-3\ m^2$	3	$0.018252\ m^2$
Utičnice	$0.08\ m \times 0.08\ m$	$6.4 \cdot 10^-3\ m^2$	5	$0.032\ m^2$

Tablica 5: Izmjereni objekti u učionici

Dok učenici rade u grupama, nastavnik ih obilazi, prati suradnju i pomaže gdje je njegova pomoć potrebna. Nakon obavljenih svih mjerenja, učenicima preostaje izračunati površinu koja se boja u ovoj učionici pomoću oplošja kvadra ili računajući posebno zidove. U našem slučaju treba se obojati površina od približno 108 m^2 za koju je onda potrebno 15.43 l boje.

$$\begin{aligned} P_{Strop} + P_{Zid\ I} + P_{Zid\ II} - P_{Ostalo} &= 41 + 49.2 + 30 - 12.246352 \\ &= 120.2 - 12.246352 \\ &= 107.953648 \approx 108\ m^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{Ostalo} &= 1.89 + 6.09 + 1.8 + 1 + 1.4161 + 0.018252 + 0.032 \\ &= 12.246352\ m^2 \end{aligned}$$

Na kraju svi učenici trebaju predstaviti svoje rezultate tako da svaka grupa kaže površinu određenog dijela učionice. Svi rezultati će se uspoređivati i ukoliko dođe do razilaženja u rezultatima, svi zajedno će ponoviti mjerenje kako bi došli do točnih podataka. U ovakvom tipu zadatka točnost je iznimno važna i svaka pogreška može značiti dodatne troškove što je dobar primjer učenicima da shvate kako netočna primjena matematike u stvarnom životu ima i posljedice.

3.4 Kofein u tijelu

U današnje vrijeme kava je postala neizbježna potreba većine ljudi, ali i učenika kako bi ih održavala budnim i poboljšala im koncentraciju. No, glavni sastojak kave koji im sve to omogućava je kofein koji se ne nalazi samo u kavi nego i u čokoladi, energetskim napitcima, crnom i zelenom čaju. Sama činjenica da i učenici piju kavu može navesti nastavnike da zajedno s učenicima odrede koliko miligrama kofeina će imati osoba 6 sati nakon ispijanja šalice kave koja sadrži 95 mg kofeina ([4]) ili da odrede nakon koliko sati će osoba imati 10 mg kofeina u tijelu.

Učenici bi trebali prikupiti podatke o količini kofeina u tijelu nakon konzumiranja namirnica koje ga sadrže i samo će otkriti da se količina kofeina nakon otprilike 5 sati smanji na polovinu početnog iznosa ([4]). Znajući to moglo bi im biti teško odrediti količinu kofeina u određenom satu te bi im nastavnici mogli pomoći sljedećim primjerom.

Primjer 4. *Istraživanja su pokazala da se neki vitamini eliminiraju iz krvotoka odrasle osobe brzinom od 40 % na sat. Koliko vitamina će ostati nakon 2 sata ako je osoba u krvotoku imala 300 mg vitamina? Popunite sljedeću tablicu:*

Vrijeme (h)	0	1	2	3	4	5
Vitamin (mg)	300					

Tablica 6

Rješenje: Učenici trebaju shvatiti da im ostaje 60 % vitamina po satu i onda će lako riješiti primjer. Nakon sat vremena u krvotoku će biti $300 \cdot 0.6 = 180$ mg vitamina. U odnosu na količinu vitamina u krvotoku nakon jednog sata odredit ćemo količinu vitamina nakon dva sata te analogno i za ostale sate.

$$180 \cdot 0.6 = 108$$

$$108 \cdot 0.6 = 64.8$$

$$64.8 \cdot 0.6 = 38.88$$

$$38.88 \cdot 0.6 = 23.328$$

Popunjena Tablica 6 izgleda ovako:

Vrijeme (h)	0	1	2	3	4	5
Vitamin (mg)	300	180	108	64.8	38.88	23.328

Tablica 7

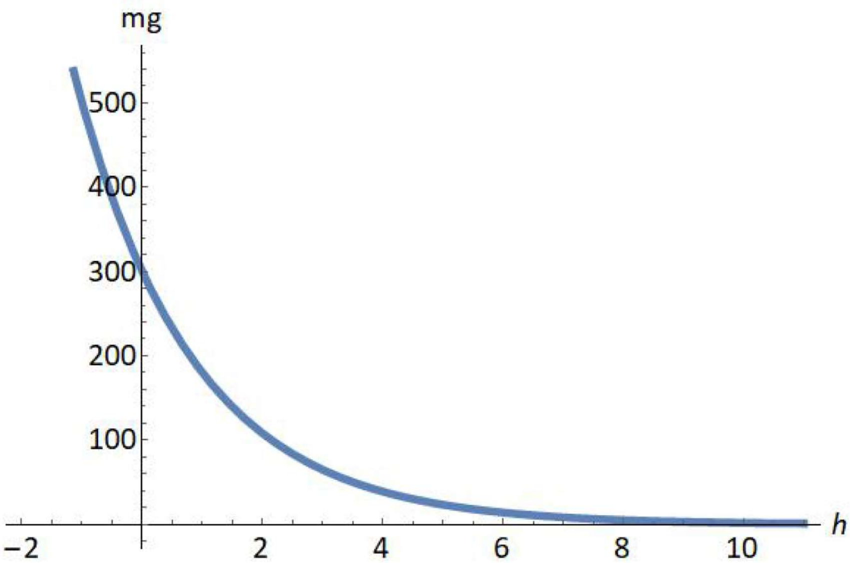
Učenici bi trebali uočiti funkciju koju su stalno koristili, ukoliko ne, nastavnici ih mogu navesti tražeći od njih da raspišu dobivene rezultate pomoću onoga što im je početno zadano u primjeru na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
180 &= 300 \cdot 0.6\\
108 &= 180 \cdot 0.6 = 300 \cdot 0.6 \cdot 0.6 = 300 \cdot 0.6^2\\
64.8 &= 108 \cdot 0.6 = 300 \cdot 0.6^2 \cdot 0.6 = 300 \cdot 0.6^3\\
38.88 &= 64.8 \cdot 0.6 = 300 \cdot 0.6^3 \cdot 0.6 = 300 \cdot 0.6^4\\
23.328 &= 38.88 \cdot 0.6 = 300 \cdot 0.6^4 \cdot 0.6 = 300 \cdot 0.6^5.
\end{aligned}$$

Dakle, količina vitamina u krvotoku nakon t sati dana je sljedećom eksponencijalnom funkcijom

$$f(t) = k_0 \cdot 0.6^t,$$

pri čemu smo početnu vrijednost označili s k_0, tj. $k_0 = 300$ mg.



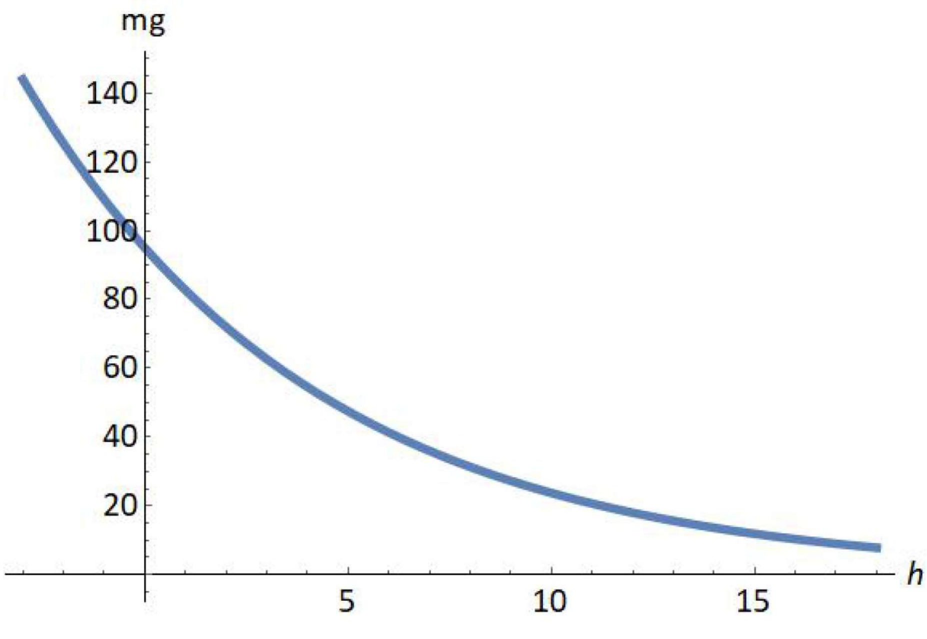
Slika 13: Količina vitamina u krvotoku

Vratimo se na naš početni problem gdje znamo početnu vrijednost ($k_0 = 95$ mg) i smanjenje količine kofeina u tijelu nakon 5 sati. U Primjeru 4 eksponent predstavlja broj sati koji su prošli što možemo generalizirati i u ovom slučaju tako da sate koji su prošli zapišemo pomoću razdoblja od 5 sati. Kako bi učenici lakše shvatili, nastavnici im to mogu prikazati kao cjelinu koja se sastoji od 5 dijelova pri čemu bi na primjer 2 sata bila $\frac{2}{5}$ vremenskog razdoblja, a 10 sati 2 cijela tog vremenskog razdoblja. Količinu kofeina u tijelu možemo prikazati sljedećom eksponencijalnom funkcijom

$$f(t) = k_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5}},$$

pri čemu je $f(t)$ količina kofeina u tijelu nakon t sati. Stoga možemo reći da će osoba popivši šalicu kave imati 41.35 mg kofeina u tijelu nakon 6 sati.

$$f(6) = 95 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{6}{5}} = 41.35$$



Slika 14: Količina kofeina u tijelu

Preostalo je još odrediti nakon koliko sati će osoba ima 10 mg kofeina u tijelu.

$$\begin{aligned}
95 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5}} &= 10 \;/ : 95 \\
\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5}} &= \frac{2}{19} \\
2^{-\frac{t}{5}} &= \frac{2}{19} \\
-\frac{t}{5} &= \log_2 \frac{2}{19} \\
t &= -5 \cdot \log_2 \frac{2}{19} \\
t &= 16.24
\end{aligned}$$

Osoba će nakon 16.24 sati imati 10 mg kofeina u tijelu.

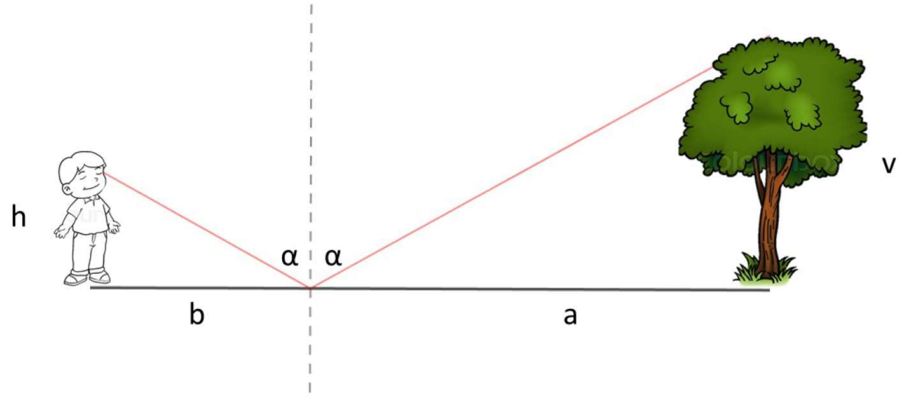
3.5 Izmjeri me ako možeš

Koristeći matematiku možemo vrlo jednostavno odrediti visinu neke zgrade, drveća ili nekog objekta što se na prvu može činiti komplicirano. Nastavnici mogu pokazati učenicima da odrede visinu određenog objekta koristeći sličnost trokuta ili pomoću trigonometrije pravokutnog trokuta. Za rješavanje ovog svakodnevnog problema učenici će boraviti i u prirodi što većina stručnjaka smatra veoma poželjnim u obrazovanju učenika zbog njihovog psihomotornog i fizičkog razvoja.

Kako bi odredili visinu određenog predmeta, na primjer drveta, pomoću sličnosti potrebno nam je džepno ogledalo i traka za mjerenje. Na nekoj udaljenosti od drveta, označimo je s a, postavimo ogledalo na pod i udaljavamo se od njega za b, tj. dok ne ugledamo vrh drveta u ogledalu. Označimo s v visinu drveta koju želimo odrediti, a s h visinu osobe koja gleda u ogledalo, da budemo precizniji visinu do njezinih očiju (*Slika 15*). Nastavnici bi trebali naglasiti učenicima kako je kut pod kojim se zraka odbija od ogledala jednaka kutu njezinog upada s obzirom na okomicu na zrcalo kako bi učenici mogli zaključiti da su dobivena dva pravokutna trokuta slična po KK poučku te da vrijedi:

$$\frac{a}{b} = \frac{v}{h}. \tag{1}$$

Dakle, visina drveta veća je od visine osobe onoliko puta koliko je udaljenost drveta do ogledala veća od udaljenosti ogledala do osobe.



Slika 15: Mjerenje visine pomoću ogledala

Želeći odrediti visinu drveta izmjerili smo sve gore navedeno i dobili sljedeće:

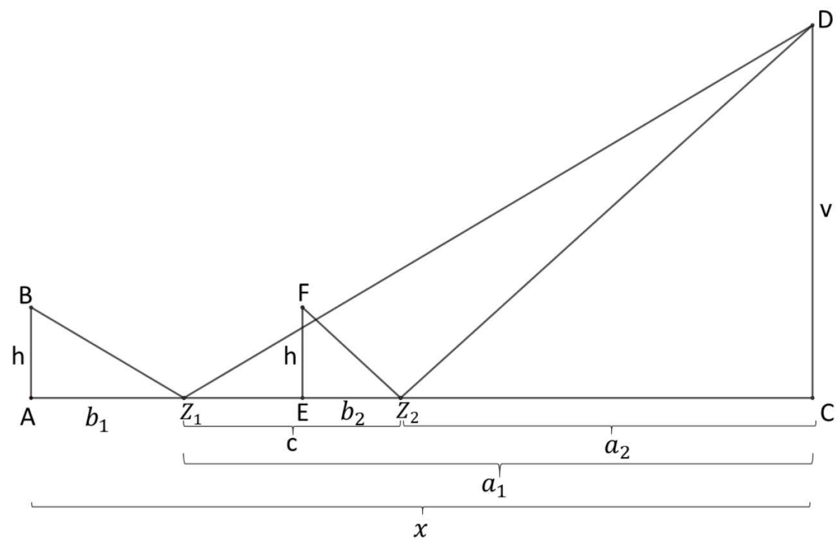
$$a = 20 \text{ m}$$
$$b = 1.8 \text{ m}$$
$$h = 1.60 \text{ m}.$$

Uvrstimo podatke u (1) i dobijemo kako je drvo visoko približno 18 m.

$$v = \frac{a}{b} \cdot h = \frac{20}{1.8} \cdot 1.6 = 17.77 \approx 18 \text{ m}$$

No, u slučaju kada ne možemo izmjeriti udaljenost od podnožja objekta i ogledala, kao na primjer ako želimo odrediti visinu katedrale sv. Petra u Đakovu, tada se naprave dva mjerenja pri čemu se ogledalo postavi na dva različita mjesta. Označimo točkom Z_1 mjesto na kojem je ogledalo za vrijeme prvog mjerenja, Z_2 mjesto za vrijeme drugog mjerenja, točkama A i E položaj mjeritelja tijekom prvog i drugog mjerenja te točkom C podnožje objekta (*Slika 16*). Uvedimo i sljedeće oznake:

$$\overline{AZ_1} = b_1, \qquad \overline{Z_1C} = a_1,$$
$$\overline{EZ_2} = b_2, \qquad \overline{Z_2C} = a_2,$$
$$\overline{AC} = x, \qquad \overline{Z_1Z_2} = c.$$



Slika 16

Postavljanje zadatka, što učenicima može biti problem, mogu napraviti zajedno s nastavnicima, dok određivanje visine mogu i samostalno uočavanjem sličnih trokuta i koristeći proporcionalnost određenih stranica trokuta.

$$\triangle AZ_1B \sim \triangle CZ_1D \Rightarrow \frac{v}{h} = \frac{x - b_1}{b_1}, \text{ pri čemu je } a_1 = x - b_1$$
$$\triangle EZ_2F \sim \triangle CZ_2D \Rightarrow \frac{v}{h} = \frac{x - b_1 - c}{b_2}, \text{ pri čemu je } a_2 = x - b_1 - c$$

Izrazimo x iz obje jednakosti te dobivene vrijednosti izjednačimo.

$$\begin{aligned} x = \frac{vb_1 + hb_1}{h} &= \frac{vb_2 + h(c + b_1)}{h} \\ vb_1 + hb_1 &= vb_2 + h(c + b_1) \\ v(b_1 - b_2) &= h(c + b_1) - hb_1 \\ v &= \frac{h \cdot c}{b_1 - b_2} \end{aligned} \tag{2}$$

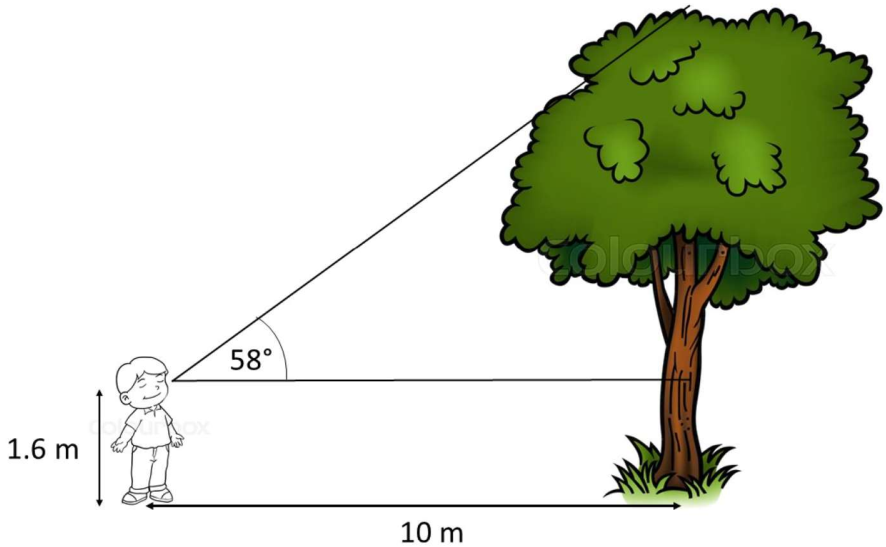
Sada možemo odrediti i visinu katedrale na temelju sljedećih podataka

$$b_1 = 3.38 \text{ m},$$
$$b_2 = 3.303 \text{ m},$$
$$h = 1.60 \text{ m},$$
$$c = 4 \text{ m}.$$

Njihovim uvrštavanjem u (2) dobivamo 83.11 m $\approx$ 84 m ([6]).

Spomenuli smo i da se visina određenog objekta može odrediti pomoću trigonometrije pravokutnog trokuta kako to čine i geodeti. Problem pri određivanju visine na ovaj način nastaje zbog nedostatka teodolita, naprava za mjerenje kutova, ali nastavnicima na ovoj razini dovoljno je upotrijebiti priručnu napravu koju koriste učenici u GLOBE programu kako bi izmjerili kut pod kojim vide vrh stabla ili mogu zajedno s učenicima napraviti svoju napravu ([23]).

Odredimo također i na ovaj način visinu gore spomenutog drveta koji se približno vidi pod kutom od 58°.



Slika 17: Mjerenje visine drveta pomoću trigonometrije pravokutnog trokuta

$$\text{tg } 58^\circ = \frac{x}{10} \Rightarrow x = \text{tg } 58^\circ \cdot 10 = 16$$

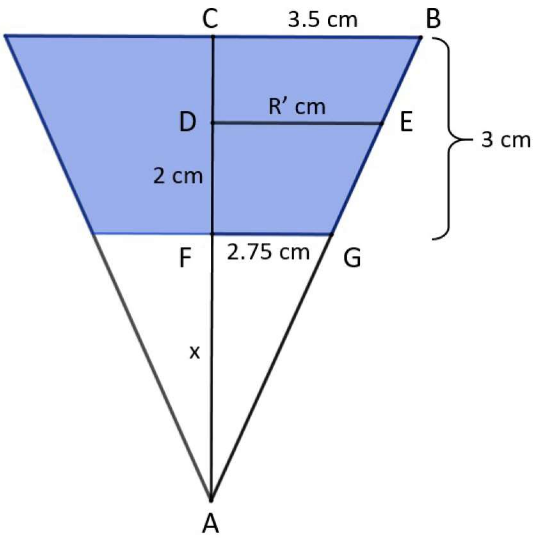
Visina drveta je $x + 1.6 = 17.6$ m ≈ 18 m kako smo već i izračunali. Uočimo kako smo za sva mjerenja dobili približne vrijednosti na što uvelike utječe i preciznost mjerenja.

3.6 Kalup za mafine

Matematiku svakodnevno koristimo u kuhinji, bilo to prebacivanjem iz jedne mjerne jedinice u drugu, računanjem potrebnih količina namirnica ili pri određivanju najboljeg kalupa za određeni kolač, kao na primjer u čemu ispeći mafine ukoliko nemamo kalup za mafine *(Slika 18)*. Većina recepata za mafine daje smjesu za 12 komada mafina koja je dovoljna ako se pune $\frac{2}{3}$ kalupa za mafine koji ima oblik krnjeg stošca ([3]). Ovakav problem učenici mogu riješiti čak i bez pomoći nastavnika određujući prvo količinu smjese pomoću kalupa za mafine. Pretpostavimo da imamo kalup promjera $R = 7$ cm gornjeg kruga i $r = 5.5$ cm donjeg kruga te dubine $v = 3$ cm.

Slika 18: Kalup za mafine

Kako se $\frac{2}{3}$ kalupa napuni smjesom trebamo izračunati volumen krnjeg stošca nepoznatog jednog radijusa R' s visinom $h = 2$ cm kako bi odredili količinu $\frac{1}{12}$ smjese što bi učenici i sami trebali zaključiti. Produživanjem krakova trapeza i pomoću sličnosti trokuta lako odredimo duljinu nepoznatog radijusa R' *(Slika 19)*.



Slika 19: Poprečni presjek kalupa

$$
\begin{aligned}
\triangle AGF \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{2.75}{3.5} &= \frac{x}{x+3} \\
2.75 \cdot (x+3) &= 3.5x \\
2.75x + 8.25 &= 3.5x \\
0.75x &= 8.25 / : 0.75 \\
x &= 11
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\triangle AGF \sim \triangle AED \Rightarrow \frac{2.75}{R'} &= \frac{11}{13} \\
11R' &= 35.75 / : 11 \\
R' &= 3.25
\end{aligned}
$$

Volumen smjese u jednom kalupu iznosi

$$V = \frac{h\pi}{3}(R'^{\,2} + R' \cdot r + r^2) = \frac{2\pi}{3}(3.25^2 + 3.25 \cdot 2.75 + 2.75^2) = 56.67 \text{ cm}^3 \approx 57 \text{ cm}^3,$$

što znači da otprilike u kalup za mafine stane $12 \cdot 56.67 = 680.04$ cm^3 smjese, tj. tolika se količina smjese dobije izvornim receptima.

Svaki učenik može izmjeriti kalupe koje ima kod kuće i odrediti koja količina smjese odgovara kalupu te koji kalup najbolje odgovara za mafine. Pretpostavimo da imamo crni *(Slika 20)*, bijeli *(Slika 21)* i okrugli *(Slika 22)* kalup za kolače.

Slika 20: Crni kalup

Slika 21: Bijeli kalup

Slika 22: Okrugli kalup

Volumen crnog kalupa koji ima oblik krnje piramide je

$$V_c = \frac{4}{3}(40 \cdot 30 + \sqrt{40 \cdot 30 \cdot 35 \cdot 27} + 35 \cdot 27) = 4\,279.86 \text{ cm}^3.$$

U ovom kalupu bi smjesa prekrila dno kalupa u jako tankom sloju te ne bi dobili ono što želimo.

Volumen bijelog kalupa oblika kvadra je

$$V_b = 20 \cdot 15 \cdot 6 = 1\ 800 \text{ cm}^3,$$

što je nešto više od dva puta veće od volumena smjese za mafine te bi smjesa u debelom sloju prekrila dno kalupa i mogli bi smo ispeći dobar kolač u ovom kalupu. Volumen okruglog kalupa je

$$V_o = 13^2 \cdot \pi \cdot 8 = 4\ 247.43 \text{ cm}^3,$$

što je nešto manje od volumena crnog kalupa te ni u ovom ne možemo ispeći dobre mafine.

Zaključak

Primijenjena matematika u nastavi više motivira učenike za rad nego klasični zadaci u udžbenicima. Glavni razlog tomu je što su učenici sami uključeni u cijeli proces modeliranja počevši od prikupljanja podataka do otkrivanja načina rješavanja problema. Modeliranjem svakodnevnog problema učenici stječu dodatna znanja, razvijaju vještine, donose mnogo raznovrsnih odluka i uče se preuzimanju odgovornosti za posljedice svojih djela. Osim toga, učenici bolje razumiju društveni, ekonomski i okolišni razvoj što je samo još dodatan razlog za obrazovanje primijenjene matematike u školama.

Na nastavi su nastavnici ti koji će prilagoditi svakodnevni problem, no kako bi učenicima bio zanimljiv, problem mora biti utemeljen na stvarnosti u životnoj okolini učenika i s najnovijim podacima. Okruženi smo s mnogo informacija koje nam uglavnom pružaju razni mediji poput interneta i reklama. Matematika nam može pomoći u provjeri tih informacija što zahtijeva određeni trud i vrijeme. Učenici sami trebaju shvatiti način na koji će je koristiti za provjeru informacija u čiju istinitost ni sami nisu u potpunosti uvjereni. Većina svakodnevnih problema može se riješiti pomoću matematike, ali konačna odluka ovisi o subjektivnosti i s takvim problemima učenici će se svakodnevno susretati. Kada učenici kroz obrazovanje primijenjene matematike uvide kako je matematika prisutna u svemu, shvatit će važnost učenja i razumijevanja matematike.

Literatura

[1] D. Apatić, *Modeliranje*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Diplomski rad, 2016.

[2] W. Blum, P.L. Galbraith, H.-W. Henn, M. Niss, *Modelling and applications in mathematics education - The 14th ICMI Study*, Springer, New York, 2007.

[3] Ž. Botoš, *Modelirani zadaci u matematici*, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, Diplomski rad, 2014., `www.dmi.uns.ac.rs/site/dmi/download/master/primenjena_matematika/ZofiaBotos.pdf`

[4] K. Cherney, *How Long Does Caffeine Stay in Your System*, 2018., `www.healthline.com/health/how-long-does-caffeine-last`

[5] Color Centar d.o.o., `www.colorcentar.hr/savjet/prirucnik-za-bojanje-zidova`

[6] Katedrala sv. Petra, `www.tzdjakovo.eu/index.php/hr/znamenitosti/muzeji/item/34-katedrala-sv-petra?rid=175`

[7] ERME, `www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/`

[8] Google Karte, `www.google.com/maps/`

[9] M. Halapa, *Zrcalom "mjerimo" visinu*, Bjelovar, `www.halapa.com/odmor/pravipdf/zrcalo.pdf`

[10] *Specifikacija tarifnih modela Najbolja M, L, Neograničena u pokretnoj elektroničkoj komunikacijskoj mreži Hrvatskog Telekoma D.D*, Hrvatski Telekom, 2019., `www.hrvatskitelekom.hr/mobilne-tarife/razgovor-uz-pretplatu`

[11] ICMI, `www.mathunion.org/icmi/organization/icmi-organization`

[12] ICMTA,
www.ictma.net/index.html

[13] ICTMA19,
www.ictma19.org/

[14] *Kako pčele grade saće*,
blog.dnevnik.hr/apikultura/2013/03/1631524480/kako-pcele-grade-sace.html

[15] J. Maass, N. O'Meara, P. Johnson, J. O'Donoghue, *Mathematical Modelling for Teachers, A Practical Guide to Applicable Mathematics Education*, Springer, Cham, 2018.

[16] D. Magdić, *Uvod u matematičko modeliranje*, Prehrambeno-tehnološki fakultet, Sveučilište u Osijeku,
www.ptfos.unios.hr/joomla/modeli/images/files/prezentacije/

[17] B. Marchant, A.K. Serenevy, *Fermi Questions*,
www.math.lsa.umich.edu/WCMTC/Fermi-Questions-Lesson-Plan.pdf

[18] G. Marion, *An Introduction to Mathematical Modelling*, Bioinformatics and Statistics, Scotland,
people.maths.bris.ac.uk/~madjl/course_text.pdf

[19] Maths Eyes,
www.haveyougotmathseyes.com/

[20] P. Mladinić, *Svjetlo, sjena i zrcalo*, Matka **26**(2017/2018), 208-213.

[21] *Ograničenje brzine na cestama*,
gov.hr/moja-uprava/promet-i-vozila/sigurnost-na-cesti/ogranicenje-brzine-na-cestama/312

[22] Puntomarinero,
hr.puntomarinero.com/half-skirt-pattern-for-beginners/

[23] Š. Šuljić, *Primjena trigonometrije u geodeziji*, Matematika i miš **4**(2002/2003), 109-112.

[24] Worth County School District,
`www.worth.k12.ga.us/`

[25] A. Žakelj, *Modeliranje u nastavi matematike*, Matematika i škola **16**(2014/2015), 105-110.

Sažetak

Glavni cilj ovog rada je upoznati čitatelje, posebno nastavnike matematike, s uključivanjem primijenjene matematike u nastavu. Modeliranje problema iz svakodnevnog života u čijem postavljanju aktivno sudjeluju i učenici čini njihova znanja dugotrajnijim i mijenja njihov pristup prema matematici.

Na početku rada definirali smo model i matematičko modeliranje te naveli i različite pristupe matematičkog modeliranja. Objasnili smo proces modeliranja kao ciklički proces u kojem problem iz svakodnevnog života zapisujemo matematičkim jezikom te da modeliranju kao otvorenom procesu ne možemo predvidjeti kraj. Istaknuli smo korake matematičkog modeliranja s aspekta primijenjene matematike u nastavi krenuvši od postavljanja cilja modeliranja koji olakšava filtriranje informacija i podataka do postavljanja i rješavanja modela. Valjanost rješenja provjeravamo i na kraju slijedi analiza.

Zbog uglavnom negativnog stava učenika prema matematici drugo poglavlje ovog rada posvetili smo motivaciji za primijenjenu matematiku u nastavi koja bi kod učenika trebala promijeniti njihovu dosadašnju sliku o matematici. Naveli smo i nekoliko savjeta za nastavnike kako bi smo im olakšali uključivanje primijenjene matematike u nastavu i potaknuli ih na promjene u njihovoj nastavi.

U posljednjem poglavlju rada naveli smo probleme iz svakodnevnog života i opisali moguće načine njihovog rješavanja. Kako bi smo pokazali da se svaki stvarni problem iz života može modelirati, detaljnije smo objasnili odabir odgovarajuće mobilne tarife. Za većinu opisanih problema u radu, ali i za ostale svakodnevne probleme svjesno ili nesvjesno primjenjuje se matematika kako bi se došlo do njihovog rješenja.

Ključne riječi: matematičko modeliranje, proces modeliranja, primijenjena matematika, savjeti za nastavnike matematike, svakodnevni problem iz života

Modeling in math teaching

Summary

The main aim of this paper is to introduce various ways of how applicable mathematics can be incorporated into teaching. It is meant for every reader, but especially for those who are math teachers. When setting a task, it is their job to model the assignment regarding everyday problems and also to actively involve students into the setting and solving of the task, thus making their knowledge more permanent and changing their approach to mathematics

At the beginning of this study, model and mathematical modeling is defined and different approaches to mathematical modeling are introduced. The modeling process is described as a cyclical process in which an everyday life problem is written down in the language of mathematics. Due to the fact that modeling is an open process its end cannot be predicted. Each step of mathematical modeling from the aspect of applicable mathematics in teaching is illustrated and clarified. Starting with the setting of a modeling goal that facilitates the filtering of information and data we progress towards structuring and solving that model. The validity of the solution is checked and finally the analysis follows.

Due to the mostly negative attitude of students towards math, the second chapter of this paper is devoted to the motivation for applicable mathematics in teaching which should change students' previous image of math. Also, several teachers' tips are mentioned to help incorporate applicable mathematics into teaching and encourage teachers to change their teaching methods.

In the last chapter of the paper, problems of everyday life are listed and possible solutions for these problems are shown. To show that every real-life problem can be modeled, the choice of the appropriate phone provider is explained in more detail. For most of the problems described in the paper, but also for other everyday problems, mathematics is consciously or unconsciously applied in order to reach a solution.

Key words: mathematical modeling, modeling process, applicable mathematics, tips for math teachers, everyday life problem

Životopis

Rođena sam 6. kolovoza 1996. godine u Slavonskom Brodu. Živim u Novom Gradu gdje sam pohađala prva četiri razreda osnovne škole u Područnoj školi Novi Grad. Od petog do osmog razreda išla sam u Osnovnu školu „Stjepan Radić" u Oprisavcima. Nakon završenog osnovnoškolskog obrazovanja upisala sam Gimnaziju „Matija Mesić" u Slavonskom Brodu, smjer prirodoslovno-matematička gimnazija. Po završetku gimnazije 2014. godine upisujem Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku.