

# Sparivanja i Pfaffian orijentacije

---

**Tešija, Anita**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2019**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:379252>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-05**



**mathos**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)



Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Diplomski studij matematike, smjer: Financijska matematika i statistika

Anita Tešija  
*Sparivanja i Pfaffian orijentacije*

Diplomski rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Diplomski studij matematike, smjer: Financijska matematika i statistika

Anita Tešija  
*Sparivanja i Pfaffian orijentacije*

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr.sc. Snježana Majstorović

Osijek, 2019.

# Sadržaj

Uvod	1
<b>1 Osnovni pojmovi iz teorije grafova</b>	<b>2</b>
1.1 Neusmjereni grafovi . . . . .	2
1.2 Planarani grafovi . . . . .	5
1.3 Usmjereni grafovi . . . . .	8
<b>2 Sparivanje i savršeno sparivanje</b>	<b>10</b>
<b>3 Pfaffian</b>	<b>16</b>
3.1 Matrica susjedstva i Pfaffian . . . . .	16
3.2 Pfaffian orijentacija . . . . .	20
3.3 Konstrukcija Pfaffian orijentacije . . . . .	26
<b>4 Pravokutna mreža</b>	<b>29</b>
4.1 Ravninska pravokutna mreža . . . . .	30
4.1.1 Ljestve $L(2, n)$ . . . . .	30
4.1.2 Pravokutna mreža $L(m, n)$ . . . . .	32
4.2 Primjer šahovske ploče . . . . .	37
<b>Literatura</b>	<b>41</b>
<b>Sažetak i ključne riječi</b>	<b>42</b>
<b>Title, summary and keywords</b>	<b>42</b>
<b>Životopis</b>	<b>43</b>



## Uvod

Teorija grafova je relativno novo područje matematike. Utemeljio ju je matematičar Leonhard Euler 1735. godine baveći se problemom koji danas nosi naziv "Sedam mostova Königsberga". Taj je problem vrlo brzo postao inspiracija za razvijanje teorije grafova. U sadašnjosti teorija grafova ima mnoge primjene u stvarnom životu, primjerice u računarstvu, fizici, kemiji, biologiji, prometu itd.

Osnovna ideja ovog rada odnosi se na problem prebrojavanja savršenih sparivanja u grafu s naglaskom na primjene u fizici i kemiji. Savršeno sparivanje se u području fizike zove konfiguracija dimera. Dimer je molekula sastavljena od dva monomera. Monomeri su male organske molekule povezane kovalentnim vezama, a tvore polimere tako da se ponavljaju u obliku dugačkog lanca. Mogu biti šećeri ili saharidi, masne kiseline, aminokiseline i nukleotidi. Kemijska svojstva monomera određuju biološke funkcije polimera. Monomeri su jednostavne građe, male molekulске mase i reaktivnih funkcijskih skupina.

U fizici je od posebnog interesa proučavanje grafa pravokutne mreže u smislu pokrivanja dimerima. Pokriti mrežu dimerima znači pronaći broj dimera koji će pokriti sve vrhove pravokutne mreže točno jednom. Osim pravokutne mreže, mogu se proučavati i trokutaste te šesterokutne mreže i sve one mogu biti i beskonačne. Danski fizičar P. Kasteleyn je 1961. godine pronašao broj savršenih sparivanja na ravninskoj kvadratnoj mreži koristeći alate iz linearne algebre kao što su determinante i Pfaffiani matrica.

Upravo će ovaj rad pokazati glavne Kasteleynove rezultate: vezu između savršenog sparivanja i Pfaffiana, odnosno Pfaffian orijentacije. Osim općenitih pojmova za Pfaffian i njegovu orijentaciju, bit će navedeni neki osnovni rezultati o broju savršenih sparivanja na ravninskoj pravokutnoj mreži.

U prvom poglavlju prolazimo kroz osnovne pojmove i tvrdnje iz teorije grafova. Zatim ćemo navesti osnovne pojmove i tvrdnje o sparivanju u grafovima. Treće poglavlje se odnosi na definicije i tvrdnje vezane za Pfaffian te na samu konstrukciju Pfaffian orijentacije. U zadnjem, četvrtom poglavlju, povezat ćemo Pfaffian s ravninskom pravokutnom mrežom te odrediti broj savršenih sparivanja na takvom grafu.

# 1 Osnovni pojmovi iz teorije grafova

## 1.1 Neusmjereni grafovi

Krenimo od same definicije neusmjerenog grafa.

**Definicija 1.** Graf  $G$  je uređena trojka  $G = (V(G), E(G), \psi_G)$  koja se sastoji od nepraznog skupa  $V = V(G)$ , čiji su elementi vrhovi od  $G$ , skupa  $E = E(G)$  disjunktog s  $V(G)$ , čiji su elementi bridovi od  $G$  i funkcije incidencije  $\psi_G$  koja svakom bridu od  $G$  pridružuje neuređeni par vrhova od  $G$ .

Iz prethodne definicije je jasno da može postojati i graf koji će sadržavati samo vrhove. Takav ćemo graf zvati **prazni graf**. Ukoliko graf nije prazan tj. postoje bridovi između nekih ili svih vrhova, onda treba objasniti pojam susjednih vrhova.

Za vrhove  $u$  i  $v$  kažemo da su incidentni s bridom  $e$ , ukoliko je vrh  $u$  jedan kraj, a vrh  $v$  drugi kraj brida  $e$ , odnosno vrijedi  $\psi(e) = \{u, v\}$ . Drugim riječima, vrhovi  $u$  i  $v$  su susjedni.

Ukoliko više bridova spaja dva vrha, govorimo o višestrukim bridovima, a graf koji sadrže takve bridove nazivamo multigraf. Ukoliko jedan brid spaja vrh sa samim sobom, govorimo o petlji, a graf koji sadrži takve bridove zovemo pseudograf. Ukoliko graf nema ni petlji ni višestrukih bridova, onda ga zovemo jednostavnim grafom.

**Definicija 2.** Podgraf  $H$  grafa  $G$ , u oznaci  $H \subseteq G$ , je graf za koji vrijedi  $V(H) \subseteq V(G)$ ,  $E(H) \subseteq E(G)$  i  $\psi_H = \psi_{G|E(H)}$ .

Podgrafeve najčešće dobivamo tako da u grafu  $G$  obrišemo neke vrhove ili neke bridove. Ukoliko uklonimo npr. brid  $e$ , dobivamo podgraf kojeg označavamo s  $G - e$ , a ako uklonimo vrh  $v$ , dobivamo podgraf kojeg označavamo s  $G - v$ .

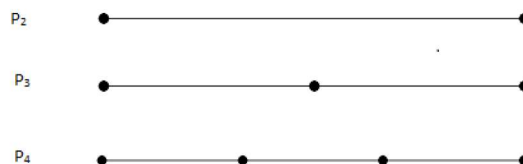
Za podgraf  $H$  grafa  $G$  kažemo da je razapinjujući podgraf od  $G$  ako vrijedi  $V(H) = V(G)$ .

Sljedeći pojam s kojim se bavimo je stupanj vrha. Opisno ćemo ga definirati kao broj sjecišta male kružnice opisane oko vrha s bridovima kojima je taj vrh kraj. U nastavku ćemo definirati šetnju i put u grafu.

**Definicija 3.** Šetnja u grafu  $G$  je konačni niz  $W = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k$  čiji su elementi naizmjenice vrhovi  $v_i$  i bridovi  $e_i$ , pri čemu su krajevi brida  $e_i$  vrhovi  $v_{i-1}$  i  $v_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ .

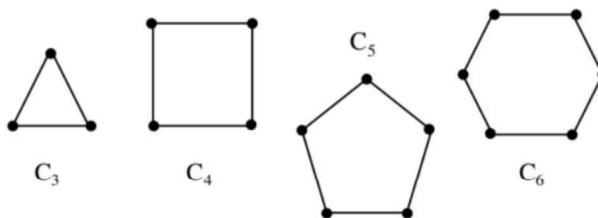
Ukoliko u prethodnoj definiciji stavimo ograničenje na  $W$  tako da nema ponavljanja vrhova, a onda posljedično ni bridova, kažemo da je  $W$  **put** u grafu  $G$ . Sada ćemo navesti nekoliko tipičnih grafova.

- *Put* s  $n$  vrhova  $P_n$  je jednostavan graf definiran s  $V(P_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $E(P_n) = \{v_i v_{i+1} : i = 1, \dots, n - 1\}$ .



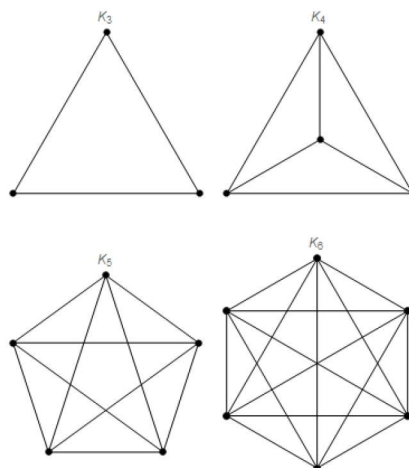
Slika 1: Putovi

- *Ciklus*  $C_n$  s  $n$  vrhova definiran je s  $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  i  $E(C_n) = \{v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{n-1} v_n, v_n v_1\}$ .



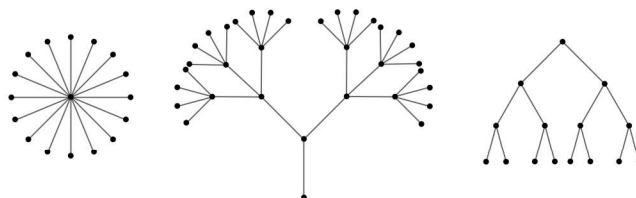
Slika 2: Ciklusi

- *Potpun graf* je jednostavan graf u kojemu je svaki par vrhova spojen s bridom.



Slika 3: Primjeri potpunih grafova

- *Stablo* je povezan aciklički graf. Aciklički graf ili šuma je graf koji ne sadrži cikluse.



Slika 4: Primjeri stabala

Uvid u strukturu grafa je jasan iz njegove geometrijske reprezentacije jedino ako ne sadrži velik broj vrhova i bridova. U suprotnom treba smisliti pametniji način reprezentacije grafa. Za to koristimo specijalne matrice. Jedna takva je matrica susjedstva.

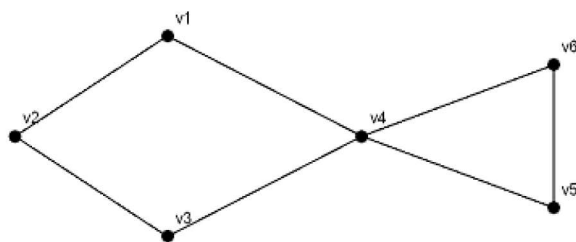
**Definicija 4.** *Neka je  $G$  proizvoljan graf sa skupom vrhova  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Matrica susjedstva  $A(G)$  grafa  $G$  je kvadratna matrica  $n \times n$  s elementima  $a_{ij}$  koji odgovaraju broju bridova između vrhova  $v_i$  i  $v_j$ .*

Matrica susjedstva je simetrična matrica tj.  $a_{ij} = a_{ji}$ , a ukoliko je graf jednostavan, njeni elementi su iz skupa  $\{0, 1\}$ .

**Primjer 1.** *Odredimo matricu susjedstva grafa  $H$  prikazanog na sljedećoj slici.*

*Vrh  $v_1$  povezan je s vrhovima  $v_2$  i  $v_4$  s jednim bridom pa u matricu susjedstva u*



Slika 5: Graf  $H$  s vrhovima  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ 

prvi red pišemo na mjesta  $a_{12}$  i  $a_{14}$  broj 1 dok su svi ostali elementi u tom retku 0. Matrica susjedstva grafa  $H$  je

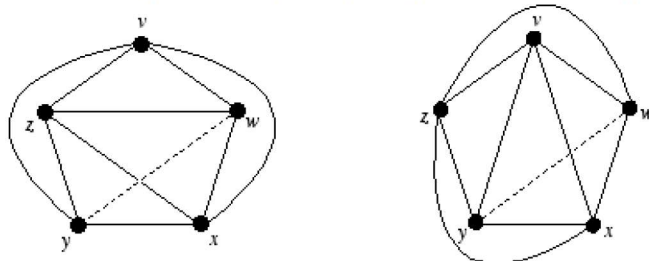
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

## 1.2 Planarani grafovi

Neki grafovi se mogu na vrlo specifičan način smjestiti u ravnini. Primjerice, smještenje grafa može biti tako da mu se bridovi sijeku jedino u vrhovima.

**Definicija 5.** Graf  $G$  je **planaran** ako se može smjestiti u ravninu tako da mu se bridovi sijeku samo u vrhovima. Takva realizacija grafa naziva se **ravninsko smještenje**, a takav graf naziva se **ravninski**.

Od prethodno prikazanih grafova planarni su ciklusi i stabla, dok kod potpunih grafova planarni su samo  $K_2$ ,  $K_3$  i  $K_4$ . Pogledajmo zašto  $K_5$  nije planaran graf.

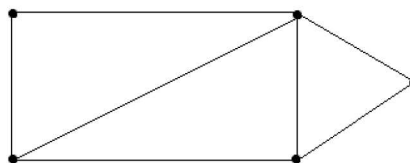
Slika 6: Potpun graf  $K_5$ 

Iz slike 6 uočavamo da kako god smjestili u ravninu  $K_5$ , uvijek će ostati jedan brid koji mora presijecati neke druge bridove.

S planarnim grafom možemo raditi neke specijalne transformacije. Jedna takva zove se dual.

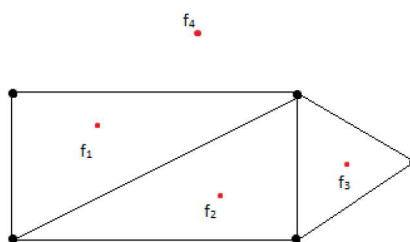
**Dual** grafa  $G$  je multigraf čiji vrhovi odgovaraju dijelovima ravnine koji nastaju pri ravninskom smještenju od  $G$ , a vrhovi su susjedni ako i samo ako dijelovi ravnine imaju zajednički brid. Ovu operaciju ćemo pokazati u primjeru koji slijedi. Ukoliko je graf ravninski, njegovi bridovi dijele ravninu na nekakva područja, a zovemo ih **strane**. Strane ćemo označavati s  $f_1, f_2, \dots$ . U svakom grafu imamo točno jednu stranu koja je neomeđena i zovemo ju **vanjska strana**. Sve ostale strane su omeđene bridovima.

**Primjer 2.** *Odredimo dual grafa  $G$  prikazanog na sljedećoj slici.*



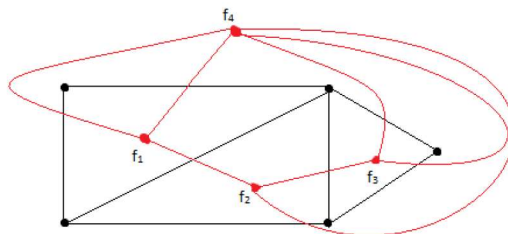
Slika 7: Graf  $G$

*Svakoj strani grafa  $G$  pridružit ćemo točno jedan vrh i označiti ga crvenom bojom.*



Slika 8: Graf  $G$  s pridruženim stranama

Nakon toga spajamo nove vrhove bridovima. Primjerice, strane  $f_1$  i  $f_2$  imaju zajednički brid pa ćemo nacrtati novi brid između vrhova  $f_1$  i  $f_2$  i on će presijecati točno taj zajednički brid. Na isti način spajamo bridovima i preostale strane te dobivamo novi graf obojen crvenom bojom kao na sljedećoj slici.



Slika 9: Graf  $G$  (crna boja) i njegov dual (crvena boja)

Ukoliko je graf konačan, povezan i planaran, onda možemo uspostaviti jednostavnu vezu između njegovih vrhova, bridova i strana.

**Teorem 1.** *Ako je  $G$  povezan planarni graf s brojem bridova  $e$ , brojem vrhova  $n$  i brojem strana  $f$ , tada vrijedi*

$$n - e + f = 2.$$

**Dokaz.** Indukcijom po broju strana  $f$  grafa  $G$ . Ako je  $f = 1$ , tada je svaki brid grafa  $G$  rezni brid pa zbog povezanosti od  $G$  slijedi da je  $G$  stablo. No, u stablu imamo da je  $|E(G)| = |V(G)| - 1$  pa slijedi tvrdnja.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve povezane ravninske grafove s manje od  $f$  strana.

Neka je  $G$  povezan ravninski graf s  $f$  strana,  $f \geq 2$ . Odaberimo  $e \in E(G)$  koji nije rezni brid (takav postoji jer  $G$  nije stablo).

Graf  $G - e$  je povezan ravninski graf sa  $f - 1$  strana jer dvije strane od  $G$  separirane s  $e$  daju zajedno jednu stranu od  $G - e$ . Prema pretpostavci indukcije imamo

$$|V(G - e)| - |E(G - e)| + f(G - e) = 2$$

pa zbog  $|V(G - e)| = |V(G)|$ ,  $|E(G - e)| = |E(G)| - 1$  i  $f(G - e) = f(G) - 1$  slijedi

$$|V(G)| - |E(G)| + f(G) = 2,$$

odnosno,  $n - e + f = 2$ . □

Osim na ravninu, grafove možemo smještati na razne druge plohe vodeći računa o tome da se bridovi smiju sjeći samo u vrhovima.

### 1.3 Usmjereni grafovi

Ukoliko bridovima neusmjerenoga grafa pridružimo smjerove tj. orijentiramo ih, dobit ćemo usmjereni graf.

**Definicija 6.** *Usmjereni graf ili digraf  $D$  je uređena trojka  $(V(D), A(D), \psi(D))$ , koju čini neprazan skup  $V(D)$  koji sadrži vrhove grafa  $D$ , skup  $A(D)$  koji sadrži usmjerene bridove u  $D$  i funkcije incidencije  $\psi_D$  koja svakom usmjerenom bridu  $a$  pridružuje uređeni par vrhova  $u$  i  $v$ .*

Reći ćemo da brid počinje u vrhu  $u$  i završava u vrhu  $v$  ako  $(u, v) \in A(D)$ . Vrh  $u$  ćemo zvati početnim, a vrh  $v$  krajnjim vrhom brida. Ako u usmjerenom grafu  $D$  zanemarimo usmjerenost bridova, dobivamo graf koji sadrži iste vrhove kao i  $D$ , samo s neusmjerenim bridovima. Slično, neusmjerenom grafu  $G$  možemo pridružiti usmjereni graf pa ćemo tako dobiti jednu orijentaciju na  $G$  te ju označiti s  $\vec{G}$ .

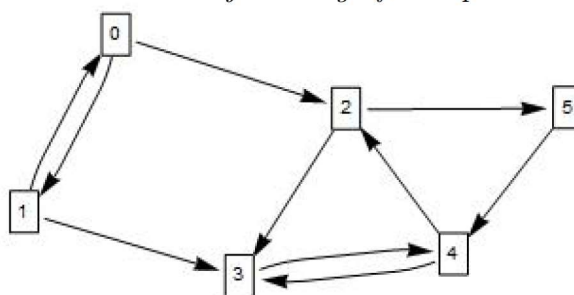
Usmjereni ciklus u  $\vec{G}$  je ciklus s vrhovima  $v_1, \dots, v_n$  i bridovima  $(v_i, v_{i+1})$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$  te  $(v_n, v_1)$ .

**Definicija 7.** *Aciklički usmjereni graf je onaj usmjereni graf koji ne sadrži niti jedan usmjereni ciklus.*

Kao i kod neusmjerenih grafova, i ovdje se pojavljuju neke specifične matrice pridružene usmjerenom grafu  $D$ . Najpoznatija je matrica susjedstva.

**Definicija 8.** *Matrica susjedstva usmjerenog grafa  $D$ , u oznaci  $A(D)$ , je kvadratna  $n \times n$  matrica s elementima  $a_{ij}$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , koji predstavljaju broj usmjerenih bridova kojima je početni vrh  $v_i$ , a krajnji vrh  $v_j$ .*

**Primjer 3.** *Odredimo matricu susjedstva grafa  $G$  prikazanog na sljedećoj slici.*



Slika 10: Usmjereni graf

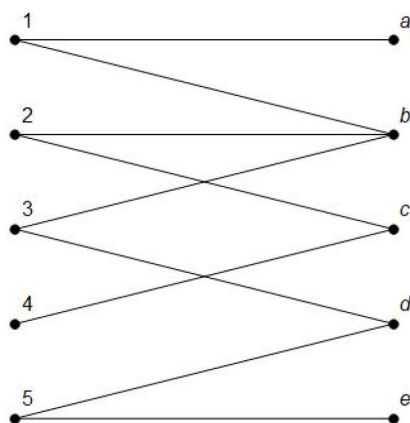


**Rješenje.** Pogledajmo vrh koji je označen brojem 0. Primjećujemo da je on početni vrh bridova koji spajaju 0 i 1 te 0 i 2, zbog toga u matricu upisujemo na mjesto  $a_{02} = 1$  i  $a_{03} = 1$ . Dobivamo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

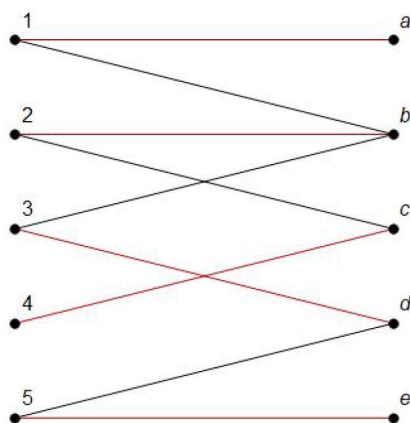
## 2 Sparivanje i savršeno sparivanje

Zamislimo da posjedujemo neku tvrtku koja je izdala 5 natječajja za posao te se na te natječaje prijavilo 5 ljudi. Kandidati za posao su stručni za jedan ili više poslova koji su navedeni na natječajima. Zbog toga ima smisla napraviti graf kojemu su vrhovi kandidati i poslovi, a bridovima spajamo kandidate i poslove za koje je taj kandidat stručan.



Slika 11: Vrhovi označeni s brojevima predstavljaju kandidate, dok vrhovi označeni slovima predstavljaju posao.

Cilj je da svakom kandidatu pridružimo jedan posao, tj. niti jedan vrh koji predstavlja kandidata ne smije biti povezan s više od jednog posla. To ćemo napraviti tako da ćemo na gornjoj slici obojiti brid koji povezuje točno jednog kandidata s točno jednim poslom.



Slika 12: Bridovi obojeni crvenom bojom povezuju točno jednog kandidata s točno jednim poslom

Egzistencija ovakvih bridova je iznimno važna jer u ovom primjeru pokazuje da će svatko tko se prijavio na natječaj dobiti upravo onaj posao za koji je i kvalificiran.

Skup crveno obojenih bridova zvat ćemo savršenim sparivanjem. No, prije toga potrebno je općenito definirati pojam sparivanja u grafu.

**Definicija 9.** *Sparivanje  $M$  u multigrafu  $G$  je nezavisan podskup skupa bridova  $E(G)$ , odnosno u  $M$  nema susjednih bridova. Za vrhove koji su incidentni bridovima iz  $M$  kaže se da su **zasićeni** s  $M$ .*

**Savršeno sparivanje** u grafu je sparivanje koje zasićuje sve vrhove.

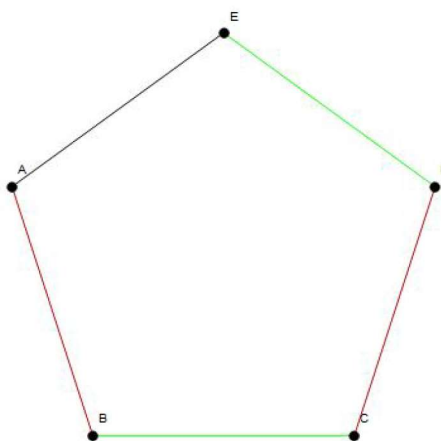
Nemaju svi grafovi savršeno sparivanje. U tom slučaju možemo definirati najveće sparivanje.

**Definicija 10.** *Najveće sparivanje u grafu  $G$  je ono koje sadrži najveći mogući broj bridova iz  $G$ .*

Savršeno sparivanje je ujedno i najveće sparivanje. Nemaju svi grafovi savršeno sparivanje.

Razumljivo je da grafovi s neparnim brojem vrhova nemaju savršeno sparivanje.

**Primjer 4.** *Na sljedećoj slici prikazan je graf s neparnim brojem vrhova.*



Slika 13: Primjer sparivanja na grafu s neparnim brojem vrhova

Plavom i ljubičastom bojom prikazana su dva različita sparivanja, ali niti jedno od njih nije savršeno. U slučaju gdje je sparivanje označeno ljubičastom bojom ostaje nezasićeni vrh  $E$ , dok je u slučaju plavih bridova to vrh  $A$ .

Sada ćemo objasniti još neke pojmove koje imaju veze sa sparivanjem u grafu.

**$M$ –alternirajući put** je put koji naizmjenice sadrži bridove koji su iz  $M$  i one koji nisu iz  $M$ .

**$M$ –uvećani put** je  $M$ –alternirajući put koji počinje i završava u vrhovima koji nisu zasićeni sa sparivanjem  $M$ .

Razne operacije možemo izvoditi nad grafovima, neke su unarne, a neke binarne. Mi ćemo navesti jednu binarnu operaciju koja će igrati određenu ulogu u sparivanju u grafovima, a to je simetrična razlika. No, najprije je potrebno definirati simetričnu razliku dva skupa.

**Simetrična razlika**  $M\Delta N$  skupova  $M$  i  $N$  je skup koji sadrži elemente skupova  $M\setminus N$  i  $N\setminus M$ , odnosno  $M\Delta N = (M\setminus N)\cup(N\setminus M)$ . Na sličan način ćemo definirati simetričnu razliku grafova  $G$  i  $H$ .

**Definicija 11.** Simetrična razlika  $G\Delta H$  grafova  $G$  i  $H$  je podgraf grafa  $G\cup H$  čiji su bridovi iz skupova  $E(G)\setminus E(H)$  i  $E(H)\setminus E(G)$ .

**Lema 1.** Komponente grafa inducirane simetričnom razlikom dvaju savršenih sparivanja su putovi ili ciklusi.

**Dokaz.** Uzmimo graf  $G$  sa skupom vrhova  $V$ , neka dva sparivanja  $M$  i  $N$  u  $G$  te njihovu simetričnu razliku  $M\Delta N$ . Za svaki  $v$  iz  $V(G)$  imamo četiri slučaja:  $v$

je  $M$ -zasićen,  $v$  je  $N$ -zasićen,  $v$  je i  $M$ - i  $N$ - zasićen ili  $v$  nije ni  $M$ - ni  $N$ -zasićen. Dakle, svaki vrh iz skupa  $V(M\Delta N)$  je incidentan s najviše dva brida. Svaka komponenta iz grafa sa skupom vrhova  $V(M\Delta N)$  i skupom bridova  $(M\Delta N)$  je put ili paran ciklus s bridovima iz  $M \setminus N$  i  $N \setminus M$ .  $\square$

Simetrična razlika može biti dobar alat za prepoznavanje savršenog sparivanja u grafu.

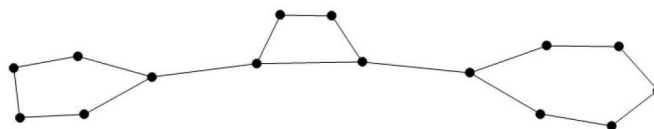
**Primjer 5.** *Stablo  $T = (V, E)$  ima najviše jedno savršeno sparivanje.*

**Rješenje.** Razmotrimo stablo  $T$  s parnim brojem vrhova i pretpostavimo da ono ima dva savršena sparivanja  $M$  i  $N$ . Budući da savršena sparivanja zasićuju sve vrhove u grafu, graf  $(V, M\Delta N)$  sastoji se od parnih ciklusa i izoliranih vrhova. Međutim, stabla na sadrže cikluse pa ih ne sadrži niti  $(V, M\Delta N)$ . Zaključujemo da je  $M\Delta N = \emptyset$ , odakle slijedi  $M = N$ .

**Definicija 12.**  *$K$ -faktor grafa  $G$  je razapinjujući  $k$ -regularni podgraf grafa  $G$ .*

Primjerice, 1-faktor grafa je podgraf koji sadrži nesusjedne bridove. Slično je savršenom sparivanju, ali razlika je u tome što je savršeno sparivanje skup bridova, dok je 1-faktor 1-regularan podgraf početnog grafa.

Neparna komponenta grafa  $G$  je komponenta s neparnim brojem vrhova. Broj neparnih komponentata grafa  $G$  označit ćemo s  $o(G)$ . Sljedeća slika pokazuje primjere neparnih i parnih komponenti grafa  $G$ . Ukoliko uklonimo ciklus s 4 vrha iz grafa, ostat će nam jedna parna i jedna neparna komponenta.



Slika 14: Graf  $G$  s parnim i neparnim komponentama

Neparne komponente imaju veliku ulogu u problemu egzistencije savršenog sparivanja u grafu. Pretpostavimo da graf  $G$  sa skupom vrhova  $V$  ima savršeno sparivanje i neka je  $U \subseteq V$ . Ukoliko postoji savršeno sparivanje, to će implicirati da za svaku neparnu komponentu od  $G - U$  mora postojati brid koji je u sparivanju, a samo mu je jedan kraj u  $U$  (slika 14). S druge strane, svaki vrh u  $U$  bit će incidentan s najviše jednim takvim bridom. Međutim,  $G - U$  može imati najviše  $|U|$  neparnih komponenti. Vrijedi i obrat, a dokazao ga je Tutte.



**Teorem 2** (Tutteov teorem). *Graf  $G$  ima savršeno sparivanje ako i samo ako  $o(G - U) \leq |U|$ , za svaki  $U \subseteq V(G)$ .*  $\square$

Dokaz ovog teorema može se pronaći u [8].

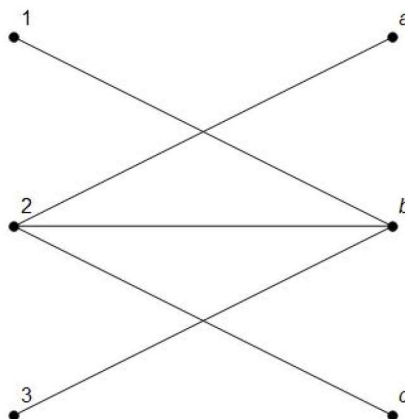
U drugom poglavlju objasnili smo neke vrste grafova, ali nismo naveli što je to bipartitni graf. Zbog toga ćemo sada se osvrnuti i na takve grafove jer će nam biti potrebni u daljnjim rezultatima o sparivanjima.

**Definicija 13.** *Bipartitni graf  $G$  je graf kojemu možemo particionirati skup vrhova  $V$  u dvije particije  $X$  i  $Y$ ,  $V = X \cup Y$ , tako da svaki brid iz  $G$  spaja vrh jedne particije s vrhom druge particije.*

Ako je svaki vrh iz particije  $X$  spojen bridom sa svakim vrhom iz particije  $Y$ , onda takav graf zovemo potpun bipartitan graf i označavamo ga s  $K_{m,n}$ , gdje je  $m = |X|$  a  $n = |Y|$ . Sad ćemo se usredotočiti na bipartitni graf  $G$  s biparticijom  $V = X \cup Y$ . Ako savršeno sparivanje zasićuje svaki vrh iz  $X$ , tada će za svaki  $S \subseteq X$  biti najmanje  $|S|$  vrhova u  $Y$  koji imaju susjede u  $S$ . To je neophodno jer susjedi vrhova iz  $S$  moraju biti izabrani iz  $Y$ . Nadalje, definiramo  $N(S)$  kao skup svih vrhova u  $Y$  koji imaju susjede u  $S$ . Hallov teorem sparivanja formalno će se zapisati na sljedeći način.

**Teorem 3** (Hallov teorem o sparivanju). *Bipartitni graf  $G$  s biparticijom  $(X, Y)$  sarži sparivanje koje zasićuje  $X$  ako i samo ako  $|N(S)| \geq |S|$ , za svaki  $S \subseteq X$ .*  $\square$

Dokaz ovog teorema može se pronaći [5].



Slika 15: Bipartitni graf bez savršenog sparivanja

Ukoliko su skupovi biparticije jednakih kardinalnosti, tj.  $|X| = |Y|$ , onda je Hallov teorem o sparivanju poznat pod nazivom teorem brakova.

Teorem brakova nastao je u prošlosti kada se promatrala skupina ljudi koja je sadržavala jednak broj muškarac i žena, te se htjelo saznati postoji li mogućnost da se jedan muškarac i jedna žena spoje (spare) na temelju kompatibilnosti. Ukoliko je za neki  $k \in \mathbb{N}$ , svaki muškarac kompatibilan s točno  $k$  žena, a svaka žena je kompatibilna s  $k$  muškaraca, savršeno sparivanje mora postojati.

### 3 Pfaffian

Jedan od načina za prebrojavanje savršenih sparivanja u grafu bilo bi "ručno" prebrojavanje svih mogućih kombinacija.

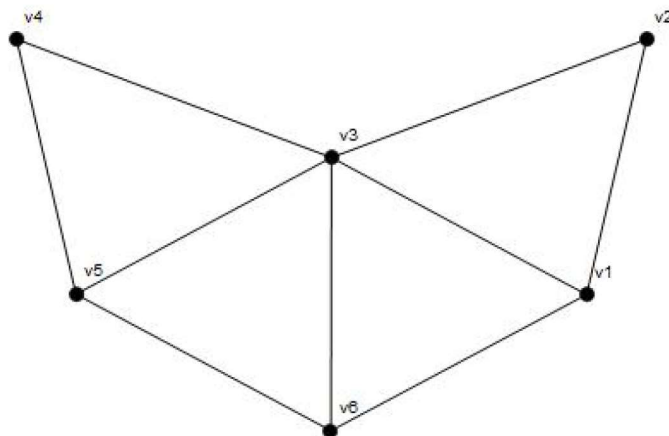
Međutim, to najčešće nije praktično zbog veličine grafa. Zapravo, određivanje broja savršenih sparivanja u grafu je NP-težak problem pa zasad ne postoji učinkoviti algoritam koji će računati broj savršenih sparivanja na općenitim grafovima.

Međutim, ukoliko je graf planaran, tada postoji učinkoviti algoritam koji uključuje tzv. Pfaffian matrice kojim se vrlo lako prebrojavaju sva moguća savršena sparivanja u grafu.

Najprije je potrebno odrediti orijentaciju grafa, a onda mu pridružiti matricu susjedstva. Zatim se uvodi Pfaffian matrice. Orijetacija grafa će biti načinjena na način koji će osigurati da Pfaffian matrice susjedstva broji savršena sparivanja u grafu. Tu orijentaciju ćemo zvati Pfaffian orijentacijom. Kada je Pfaffian orijentacija poznata, prebrojavanje savršenih sparivanja moći će se svesti na određivanje determinante matrice susjedstva. Na taj način, pronađen je algoritam koji u polinomnom vremenu prebrojava savršena sparivanja na posebnim klasama grafova.

#### 3.1 Matrica susjedstva i Pfaffian

Matricu susjedstva neusmjerenog i usmjerenog grafa definirali smo u prvom odjeljku. Prisjetimo se tog pojma na narednom primjeru.



Slika 16: Graf  $G$  s vrhovima  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ .



**Primjer 6.** Matrica susjedstva grafa  $G$  izgleda ovako:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ukoliko u grafu postoji savršeno sparivanje, tada će u matrici susjedstva za savršeno sparivanje stajati točno jedna jedinica u svakom retku i stupcu, računajući svaki brid iz sparivanja dva puta. Primjerice, za savršeno sparivanje  $M = \{v_1v_2, v_4v_5, v_3v_6\}$  u matrici susjedstva na pozicijama  $a_{12} = a_{21}$ ,  $a_{45} = a_{54}$  i  $a_{36} = a_{63}$  imat ćemo jedinice.

Općenito, uzmimo graf  $G$  sa skupom vrhova  $V(G) = \{v_1, \dots, v_{2n}\}$  i pridružimo mu neku orijentaciju  $\vec{G}$ . Svakom bridu  $e$  iz  $\vec{G}$  pridružimo varijablu  $x_e$ . Sada ćemo definirati specijalnu matricu  $B$  orijentiranog grafa  $\vec{G}$ :

$$B(x) = (b_{ij})_{2n \times 2n},$$

gdje je

$$b_{ij} = \begin{cases} x_e & \text{ako } e = (v_i, v_j), \\ -x_e & \text{ako } e = (v_j, v_i), \\ 0 & \text{ako } v_i \text{ i } v_j \text{ nisu susjedni.} \end{cases} \quad (1)$$

Primijetimo da je matrica  $B$  antisimetrična, tj. vrijedi  $B^T = -B$ :

$$B(x) = \begin{bmatrix} 0 & b_{1,2} & \cdots & b_{1,2n-1} & b_{1,2n} \\ -b_{1,2} & 0 & \cdots & b_{2,2n-1} & b_{2,2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -b_{1,2n-1} & -b_{2,2n-1} & \cdots & 0 & b_{2n-1,2n} \\ -b_{1,2n} & -b_{2,2n} & \cdots & -b_{2n-1,2n} & 0 \end{bmatrix}.$$

Jasno je da ima smisla promatrati samo one grafove čiji je broj vrhova paran. Particiju skupa  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  na dvočlane podskupove označit ćemo s

$$\{\{i_1, j_1\}, \dots, \{i_n, j_n\}\}.$$

S  $\Pi$  ćemo označiti skup svih takvih particija, a savršeno sparivanje bit će neki element iz  $\Pi$ .

**Definicija 14.** Pfaffian  $Pf(B)$  matrice  $B(x)$  definirane izrazom (1) je

$$Pf(B) = \sum_{\pi \in \Pi} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{e \in \Pi} b_e, \quad (2)$$

gdje je  $b_e = b_{ij}$ , ako  $i < j$ ,  $i, j = 1, \dots, 2n$ , a predznak  $\operatorname{sgn}(\pi)$  particije  $\pi = \{\{i_1, j_1\}, \dots, \{i_n, j_n\}\}$  definiran je s:

$$\operatorname{sgn}(\pi) := \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n \\ i_1 & j_1 & i_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix} \prod_{k=1}^n \sigma(i_k, j_k), \quad (3)$$

$$\text{gdje je } \sigma(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{ako } i < j, \\ -1 & \text{ako } i > j, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Predznak particije  $\pi$  dobro je definiran. Redoslijed dva broja koji čine par je proizvoljan, kao i redoslijed parova. Dakle, ako se izmjenjuju dva partnera, recimo  $i_3 j_3 \rightarrow j_3 i_3$ , predznak permutacije će se promijeniti, a jedan element matrice mijenja predznak. No, predznak savršenog sparivanja neće biti promijenjen. Zamjenom dva bloka parova predznak permutacije se ne mijenja, a za posljednicu ima zamjenu dva elementa u matrici.

Određivanje predznaka savršenog sparivanja odgovarat će predznacima termina u Pfaffianu.

**Lema 2.** Ako je  $B$  antisimetrična matrica, tada  $\det(B) = (Pf(B))^2$ .

**Dokaz.** Zbog antisimetričnosti matrice  $B$  dobivamo:

$$\det(B) = \det(B^T) = \det(-B) = (-1)^n \det(B).$$

Ukoliko je  $B$  neparnog reda, slijedi  $\det(B) = -\det(B)$  pa njena determinanta iščezava. Mi ćemo se baviti slučajem kada je red od  $B$  paran broj. Koristimo definiciju determinante:

$$\det(B) = \sum_{\pi \in S_{2n}} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{2n} b_{i, \pi(i)} \sigma(i, \pi(i)),$$

gdje je  $b_{i, \pi(i)}$  varijabla pridružena bridu  $\{i, j\}$  i

$$\sigma(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{ako } i < j, \\ -1 & \text{ako } i > j, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases} \quad (4)$$

Kvadrat Pfaffiana ima oblik:

$$\begin{aligned} (Pf(B))^2 &= \left( \sum_{M \in \pi} \operatorname{sgn}(M) \prod_{e \in M} b_e \right) \left( \sum_{N \in \pi} \operatorname{sgn}(N) \prod_{f \in N} b_f \right) \\ &= \sum_{M, N \in \pi} \operatorname{sgn}(M) \operatorname{sgn}(N) \prod_{e \in M} b_e \prod_{f \in N} b_f. \end{aligned}$$

Da bi mogla dokaz leme provesti do kraja, trebamo dokazati da su članovi kvadrata Pfaffiana u bijekciji s članovima determinante.

Promotrimo izraz za determinantu od  $B$ . Permutaciju  $\pi \in S_{2n}$  možemo rastaviti na parne i neparne cikluse. Pretpostavimo da se u rastavu permutacije  $\pi$  pojavljuje neparan ciklus  $(i_1 i_2 \cdots i_{2k+1})$ , gdje je  $k \geq 1$ . Uzmimo onaj neparni ciklus u rastavu koji sadrži najmanji element. Za svaki takav član postoji još jedan član determinante koji sadrži taj ciklus, ali u suprotnom smjeru  $(i_{2k+1} \cdots i_2 i_1)$ , dok ostatak rastava ostaje isti, označimo ga s  $\pi'$ . Vrijedi

$$\prod_{i=1}^{2n} b_{i, \pi(i)} = - \prod_{i=1}^{2n} b_{i, \pi'(i)},$$

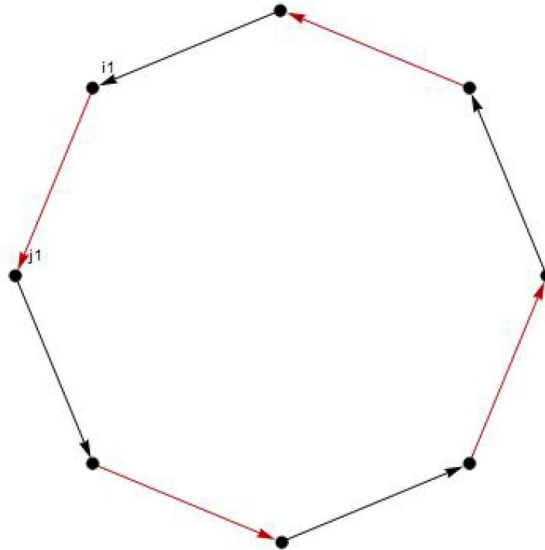
a kako  $\pi$  i  $\pi'$  sadrže cikluse jednakih duljina, dodatno vrijedi  $\operatorname{sgn}(\pi) = \operatorname{sgn}(\pi')$ . Dakle, svi izrazi sadrže barem jedan neparni ciklus u rastavu, te se međusobno poništavaju u parovima.

Preostaje pokazati da su odgovarajući izrazi u  $\det(B)$ , permutacije čiji rastavi sadrže samo parne cikluse, u bijekciji s izrazima iz  $(Pf(B))^2$ . Svaki izraz u kvadratu Pfaffiana ima oblik:

$$\operatorname{sgn}(M) \operatorname{sgn}(N) \prod_{e \in M} b_e \prod_{f \in N} b_f,$$

gdje  $M = \{\{i_1 j_1\} \cdots \{i_n j_n\}\}$  i  $N = \{\{i'_1 j'_1\} \cdots \{i'_n j'_n\}\}$ . Odaberimo  $i_1$  kao bilo koji element skupa  $\{1, 2, \cdots, 2n\}$ . Odmah znamo da je  $j_1$  fiksna buduća da mora biti u paru s  $i_1$ . Neka je taj par element sparivanja  $M$ . Broj  $j_1$  također se pojavljuje u  $N$  pa biramo  $j_1 = i'_1$ . Sada je  $j'_1$  fiksiran, može biti  $i_1$  ili neki drugi broj pa neka je  $j'_1 = i_2$ . Ovakav postupak može se nastaviti do  $j'_r$  koji je jednak  $i_1$ .

Parni ciklus se dobiva pomoću bridova koji se izmjenjuju između sparivanja  $M$  i  $N$ . Dakle,  $M \cup N$  odgovara orijentiranim parnim ciklusima, zauzvrat, odgovara permutacijama samo s parnim ciklusima, vidi sliku 17.



Slika 17: Parni ciklus gdje su crno obojeni bridovi elementi sparivanja  $M$ , a crveni elementi sparivanja  $N$

Predznak od  $M$  je dan s:

$$\operatorname{sgn}(M) = \operatorname{sgn} \left( \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2n \\ i_1 & j_1 & \cdots & j_n \end{pmatrix}}_{\rho_M} \right) \prod_{k=1}^n \sigma(i_k, j_k),$$

a preznak od  $N$  s:

$$\operatorname{sgn}(N) = \operatorname{sgn} \left( \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2n \\ j_1 & j'_1 & \cdots & j'_n \end{pmatrix}}_{\rho_N} \right) \prod_{l=1}^n \sigma(j_l, j'_l).$$

Tvrdimo da je permutacija  $\pi$  u članu determinante jednaka  $\rho_\pi = \rho_N \rho_M^{-1}$ .

$$\rho_N \rho_M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2n \\ j_1 & j'_1 & \cdots & j'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 & j_1 & \cdots & j_n \\ 1 & 2 & \cdots & 2n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & j_1 & \cdots & j_n \\ j_1 & j'_1 & \cdots & j'_n \end{pmatrix} = \rho_\pi.$$

Budući je  $\operatorname{sgn}(\rho_M) = \operatorname{sgn}(\rho_M^{-1})$  i  $\sigma(i, j) \cdot \sigma(j, j') = \sigma(j, j')$ , jer  $i \rightarrow j \rightarrow j'$ , slijedi  $\operatorname{sgn}(\pi) = \operatorname{sgn}(M) \cdot \operatorname{sgn}(N)$  i dokaz leme je gotov.  $\square$

### 3.2 Pfaffian orijentacija

Pfaffian matrice možemo koristiti za prebrojavanje savršenih sparivanja u grafu. Neka je  $G$  graf s  $2n$  vrhova i s proizvoljnom orijentacijom  $\vec{G}$ . Matrica susjedstva od



$\vec{G}$  dana je s:

$$A_s(\vec{G}) = (a_{ij})_{2n \times 2n},$$

gdje je

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ako } (u_i, u_j) \in E(\vec{G}), \\ -1 & \text{ako } (u_j, u_i) \in E(\vec{G}), \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Ovakva matrica je antisimetrična. Definicija Pfaffiana implicira da su članovi u Pfaffianu matrice  $A_s(\vec{G})$  jednaki  $-1$ ,  $1$  ili  $0$ . No, treba imati na umu da su članovi Pfaffiana koji su različiti od nule u bijekciji sa savršanim sparivanjima u grafu.

Kako bi osigurali da Pfaffian daje broj svih savršениh sparivanja s korektnim predznakom, mora postojati takva orijentacija grafa za koju će biti brojani samo oni članovi Pfaffiana koji su istog predznaka. Takva orijentacija zvat će se **Pfaffian orijentacija**.

Pitamo se kada graf ima Pfaffian orijentaciju i kako konstruirati takvu orijentaciju?

Ostatak ovog poglavlja bazirati će se na Kasteleynov rezultat koji govori da svaki planaran graf ima Pfaffian orijentaciju.

Neka je  $G$  usmjereni graf. Ako orijentiramo  $G$  tako da u njemu dobijemo usmjereni ciklus  $C$  parne duljine, onda  $C$  ima jednak (paran) broj usmjerenih bridova kao i ciklus  $C'$  suprotne orijentacije.

**Definicija 15.** *Ako je  $C$  paran neusmjereni ciklus u  $G$ , tada je  $C$  parno orijentiran ukoliko ima paran broj bridova koji slijede usmjerenje. U suprotnom kažemo da je  $C$  neparno orijentiran.*

Za savršeno sparivanje  $M$  grafa  $G$  predznak od  $M$ ,  $sgn(M)$  definiran je na sljedeći način:

$$sgn(M) = sgn \left( \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2n \\ i_1 & j_1 & \cdots & j_n \end{pmatrix}}_{\rho_M} \right) \prod_{k=1}^n \sigma(i_k, j_k), \quad (5)$$

za  $M = \{\{i_1, j_1\}, \dots, \{i_n, j_n\}\}$  gdje je

$$\sigma(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{ako } i \rightarrow j, \\ -1 & \text{ako } j \rightarrow i. \end{cases}$$

**Lema 3.** *Neka je  $\vec{G}$  proizvoljna orijentacija grafa  $G$  i neka su  $M$  i  $N$  bilo koja dva savršena sparivanja od  $G$ . Neka je  $k$  broj parno orijentiranih ciklusa formiranih u  $M \cup N$ . Tada vrijedi*

$$sgn(M) \cdot sgn(N) = (-1)^k.$$

**Dokaz.** Najprije treba uočiti da ako lema vrijedi za jednu orijentaciju, onda vrijedi i za sve ostale orijentacije grafa. Da bismo to pokazali, uzmimo brid  $e$ . Za njega imamo tri mogućnosti:

1.  $e \notin (M \cup N)$ ,
2.  $e \in (M \cap N)$ ,
3.  $e \in E(M) \oplus E(N)$ , tj.  $e$  je brid u ciklusu u kojem alterniraju bridovi iz  $M$  i  $N$ .

Ukoliko promijenimo orijentaciju brida  $e$ , dolazimo do sljedeće situacije: U slučaju (1),  $e$  nije niti u  $M$  niti u  $N$ , što ne utječe na jednadžbu u lemi. Ukoliko se  $e$  nalazi u  $M$  i u  $N$ , predznak svakog sparivanja će se promijeniti, ali vrijednost  $k$  ostaje ista. Ako vrijedi (3), odnosno  $e$  je komponenta alternirajućeg ciklusa, tada će se predznak sparivanja  $M$  promijeniti ukoliko  $e$  promijeni smjer, a  $k$  se mijenja za 1. Budući se orijentacija može odabrati proizvoljno, uzimamo sljedeće: brid  $e$  u slučajevima (1) i (2) orijentiramo proizvoljno. Ukoliko vrijedi (3), orijentiramo  $e$  tako da ciklus postane usmjeren, parno ili neparno.

Drugačije označavanje vrhova od  $G$  utječe na matricu susjedstva  $A(\vec{G})$  tako da stupce i retke permutiramo s nekom permutacijom  $\pi$ . U izrazu za Pfaffian matrice, savršeno sparivanje je pomnožemo s  $\pi$ . Stoga se tvrdnja leme ne mijenja s obzirom na promjenu oznaka vrhova grafa  $G$ .

Označimo vrhove na sljedeći način:

Za brid  $e \in (M \cap N)$  označimo vrhove brojevima tako da je kraj brida jednak početku uvećanom za jedan. Za brid  $e \in E(M) \oplus E(N)$ , odabere se bilo koji brid iz  $M$  i označi se sljedećim neiskorištenim uzastopnim brojevima, opet tako da je kraj brida jednak početku uvećanom za jedan. Ovakav postupak se nastavlja sve dok svi alternirajući ciklusi ne budu označeni.

Sada član Pfaffiana koji odgovara savršenom sparivanju  $M$  sadrži predznak permutacije koja je identiteta, a taj predznak je  $+1$  i svaki član  $a_{mn}$  u produktu je također pozitivan. Pfaffian savršenog sparivanja  $N$  sadrži samo pozitivne  $a_{mn}$ , zbog odabranog označavanja. Dakle, predznak od  $N$  je predznak odgovarajuće permutacije  $\rho$ .

Budući da svaki parni alternirajući ciklus od  $G$  odgovara parnom ciklusu permutacije  $\rho$  i ciklusi su disjunktni, slijedi da  $sgn(N) = (-1)^k$ .  $\square$

**Definicija 16.** *Ciklus  $C$  u grafu  $G$  je lijep ako podgraf  $G - C$  sadrži savršeno sparivanje.*

**Teorem 4.** *Neka je  $G$  graf s parnim brojem vrhova i neka je  $\vec{G}$  orijentacija od  $G$ . Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1.  $\vec{G}$  je Pfaffianova orijentacija.
2. Svako savršeno sparivanje od  $G$  ima isti predznak u odnosu na  $\vec{G}$ .
3. Svaki lijepi ciklus u  $G$  je neparno orijentiran u odnosu na  $\vec{G}$ .
4. Ako  $G$  ima savršeno sparivanje, tada je za neko savršeno sparivanje  $M$  svaki  $M$ -alternirajući ciklus neparno orijentiran u odnosu na  $\vec{G}$ .

**Dokaz.** Prema definiciji Pfaffian orijentacije, (1) implicira (2).

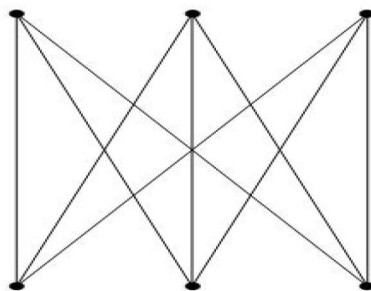
Da bismo pokazali da (2) implicira (3), pretpostavimo da je  $\vec{G}$  Pfaffian orijentacija i neka je  $C$  lijepi ciklus u  $G$ . Neka je  $F$  savršeno sparivanje u  $G - C$  i neka su  $C_1$  i  $C_2$  savršena sparivanja od  $C$ . Definirajmo dva savršena sparivanja  $M$  i  $N$  u  $G$  tako da  $M := F \cup C_1$  i  $N := F \cup C_2$ . Prema (2)  $M$  i  $N$  imaju isti predznak i  $C$  je  $M, N$ -alternirajući ciklus u  $M \cup N$ . Prema lemi 3  $C$  je neparno orijentiran.

Pretpostavimo da je svaki lijepi ciklus u  $G$  neparno orijentiran kao što je navedeno u (3) i neka je  $M$  savršeno sparivanje od  $G$ . Neka je  $C$   $M$ -alternirajući ciklus. Tada je  $M - C$  savršeno sparivanje od  $G - C$ , pa slijedi tvrdnja (4):  $C$  je lijep i neparno orijentiran.

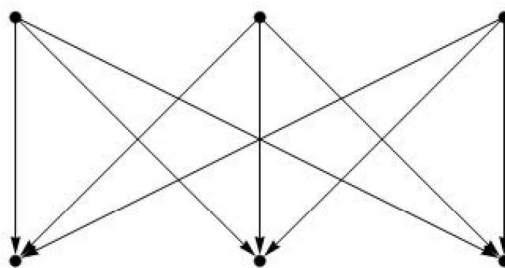
Nadalje, neka je  $M$  savršeno sparivanje u  $G$  i neka je svaki  $M$ -alternirajući ciklus neparno orijentiran. Neka je  $N$  neko drugo savršeno sparivanje od  $G$ . Svaki  $M, N$ -alternirajući ciklus je neparno orijentiran. Prema lemi 3  $M$  i  $N$  imaju isti predznak. Slijedi da je  $\vec{G}$  Pfaffian.  $\square$

Osvrnimo se sada na primjer potpunog bipartitnog grafa  $K_{3,3}$  za koji ćemo pokazati da nema Pfaffian orijentaciju.



Slika 18: Potpun bipartitni graf  $K_{3,3}$ 

**Primjer 7.** Na slici 18 prikazan je potpun graf  $K_{3,3}$ . Lako se ustanovi da taj graf ima 6 savršenih sparivanja. No, nema Pfaffian orijentaciju. To ćemo pokazati u sljedećem primjeru.

Slika 19: Orijetirani potpun bipartitni graf  $\vec{K}_{3,3}$ 

Svaki lijepi ciklus sadrži 4 ili 6 bridova. S odabranom orijentacijom ciklusi su parno orijentirani. Da bi ciklusi bili neparno orijentirani, smjer od neparnog broja bridova iz svakog ciklusa mora biti preokrenut.

Ovaj graf ima 9 ciklusa duljine 4. Svaki brid od  $K_{3,3}$  pojavljuje se 4 puta u tih 9 ciklusa. Ako je  $F \subset E$ , gdje je  $E$  skup bridova od  $K_{3,3}$ , skup obrnuto orijentiranih bridova, tada mora vrijediti  $4 \times |F| = 9 \pmod{2}$  da bismo imali neparan broj orijentiranih bridova u smjeru kazaljke na satu. To je nemoguće.

Stoga ćemo, kada se radi o planarnim grafovima, napraviti orijentaciju u smjeru kazaljke na satu.



**Lema 4.** *Ako je  $\vec{G}$  povezan ravninski digraf takav da svaka vanjska strana, osim one beskonačne, ima neparan broj bridova orijentiranih u smjeru kazaljke na satu, tada u svakom ciklusu broj bridova orijentiranih u smjeru kazaljke na satu je suprotne parnosti u odnosu na broj vrhova u  $\vec{G}$  unutar ciklusa. Stoga je  $\vec{G}$  Pfaffian graf.*

**Dokaz.** Neka je  $C$  bilo koji ciklus u  $\vec{G}$ . Uvodimo sljedeće oznake:

$f$  je broj strana unutar  $C$ ,

$f_1, f_2, \dots$  su strane od  $C$

$c_i$  je broj bridova vanjske strane  $f_i$  orijentirane u smjeru kazaljke na satu

$e$  je broj bridova unutar  $C$

$v$  je broj vrhova unutar  $C$

$k$  je broj bridova od  $C$  koji je jednak broju vrhova u  $C$ .

$c$  je broj bridova od  $C$  orijentiranih u smjeru kazaljke na satu.

Želimo pokazati da su  $c$  i  $v$  suprotne parnosti. Neka je  $G'$  graf dobiven brisanjem svih vrhova koji se nalaze izvan  $C$ . Sjetimo se Eulerove formule:

$$\text{broj vrhova} - \text{broj bridova} + \text{broj strana} = 2$$

Dakle, ukoliko primijenimo Eulerovu formulu na graf  $G'$ , dobivamo:

$$(v + k) - (e + k) + (f + 1) = 2,$$

odnosno

$$v - e + f = 1.$$

Ukoliko je  $c_i$  broj bridova orijentiranih u smjeru kazaljke na satu na rubu strane  $f_i$ , onda je prema pretpostavci, taj broj neparan, budući da unutar strane nema vrhova. Dakle,  $c_i \equiv 1 \pmod{2}$  i  $f \equiv \sum_{i=1}^f c_i \pmod{2}$ . Budući da svaki brid unutar  $C$  brojimo točno jednom u smjeru kazaljke na satu, slijedi  $\sum_{i=1}^f c_i = c + e$ . Eulerova formula daje:

$$f = c + e = c - 1 + f + v \pmod{2},$$

odnosno

$$c - 1 + v = 0 \pmod{2}.$$

Slijedi  $c + v = 1 \pmod{2}$  pa je lema dokazana. Konkretno, ako je  $C$   $M, N$ -alternirajući gdje su  $M$  i  $N$  dva savršena sparivanja od  $G$ , tada broj vrhova unutar  $C$  mora biti paran jer bismo u suprotnom imali kontradikciju s planarnošću. Stoga je broj bridova u  $C$  orijentiranih u smjeru kazaljke na satu neparan. Dakle,  $\vec{G}$  je Pfaffian.  $\square$

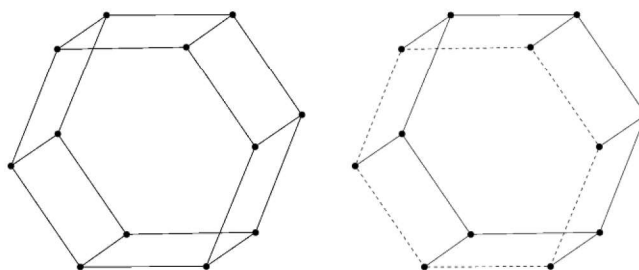
Sljedeći teorem je jedan od važnijih teorema vezanih za Pfaffian orijentacije. Ranih šezdesetih godina fizičar Kasteleyn uveo je pojam Pfaffian orijentacije te je dokazao teorem koji se bazira na planarnosti i veze s Pfaffian orijentacijom.

**Teorem 5** (Kasteleyn). *Svaki planarni graf  $G$  ima Pfaffian orijentaciju.*

**Dokaz.** Koristimo indukciju po broju bridova. Pretpostavimo da je  $G$  povezan. Ako je  $G$  stablo, tada je svaka orijentacija u ovom grafu Pfaffianova. Neka je  $e$  brid u ciklusu  $C$  na rubu beskonačne strane. Graf  $G - e$  ima Pfaffianovu orijentaciju po indukciji. Dodavanjem brida  $e$  grafu  $G - e$  s orijentacijom takvom da strana ima neparan broj bridova orijentiranih u smjeru kazaljke na satu, prema lemi 4 dobiva se rezultat u smislu Pfaffianove orijentacije. Svaki planarni graf ima Pfaffianovu orijentaciju po indukciji.  $\square$

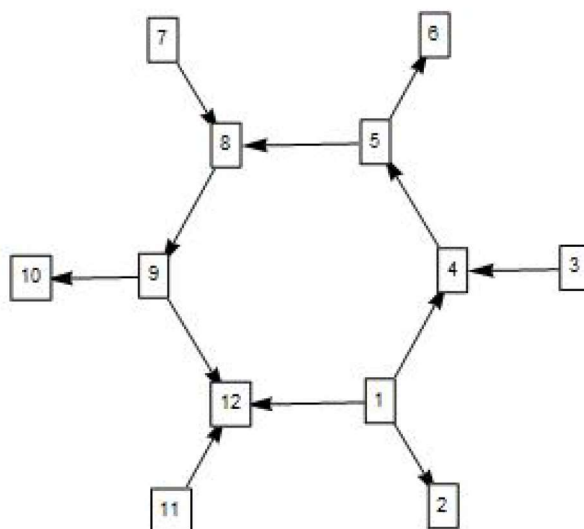
### 3.3 Konstrukcija Pfaffian orijentacije

Lema 4 može se koristiti za konstrukciju Pfaffianove orijentacije u planarnom grafu  $H$ . Najprije treba ukloniti sve bridove koji su rubovi neomeđene strane, slika 20.

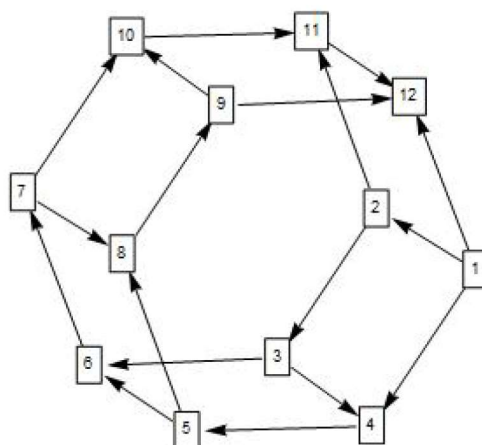


Slika 20: Graf  $H$  (lijevo) i novodobiveni graf  $H'$  nastao od  $H$  uklanjanjem vanjskih bridova (desno)

Zatim se  $H'$  orijentira tako da sve rubne strane grafa (one koje su susjedne s vanjskom stranom) imaju neparan broj bridova orijentiranih u smjeru kazaljke na satu, slika 21.

Slika 21: Orijehtacija na grafu  $H'$ 

Zatim vratimo bridove koje smo ranije uklonili i pridružimo im orijentaciju tako da strane ostanu neparno orijentirane u smjeru kazaljke na satu (slika 22). Sada graf  $H$  ima Pfaffian orijentaciju.

Slika 22: Pfaffian orijentacija grafa  $H$

Uz oznake vrhova kao na slici 22, grafu  $H$  pridružimo matricu susjedstva.

$$A(H) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Uočavamo da vrijedi  $A(H)^\tau = -A(H)$  pa možemo upotrijebiti lemu 2 kako bismo prebrojali sva savršena sparivanja u  $H$ . S obzirom da je  $\det(A(H)) = 400$ , slijedi da  $H$  ima 20 savršenih sparivanja.

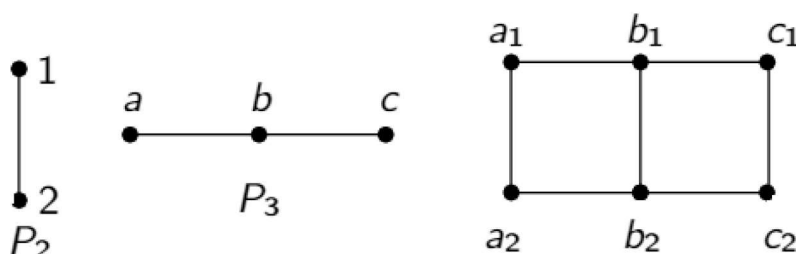
## 4 Pravokutna mreža

Zgodan način za definiranje grafa pravokutne mreže jest preko specijalne binarne operacije nad grafovima koja se zove Kartezijev produkt.

**Definicija 17.** *Kartezijev produkt  $G \square H$  grafova  $G$  i  $H$  je graf sa skupom vrhova  $V(G) \times V(H)$ , a vrhovi  $(u, u')$  i  $(v, v')$  su susjedni u  $(G \square H)$  ako i samo ako vrijedi*

- $u = v$  i  $u'$  je susjed s  $v'$  ili
- $u' = v'$  i  $u$  je susjed s  $v$ .

Ako u produktu koristimo putove  $P_m$  i  $P_n$ , dobivamo graf pravokutne mreže. Uzmimo, primjerice  $P_2$  i  $P_3$ . Kartezijev produkt  $P_2 \square P_3$  prikazan je na sljedećoj slici:



Slika 23: Kartezijev produkt dva puta  $P_2$  i  $P_3$

Ukoliko želimo mrežu dimenzije  $m \times n$ , Kartezijev produkt bit će načinjem od putova  $P_m$  i  $P_n$ .

Kao što smo spomenuli u uvodu, primjena savršenih sparivanja u fizici poznata je kao problem dimera. Taj problem pojavljuje se eksperimentalno kada se dvoatomski plin apsorbira na kristalni supstrat. Dimersko pokrivanje grafa  $G$  je skup rubova koji pokriva sve vrhove točno jednom, tj. svaki je vrh krajnja točka jedinstvenog ruba. Možemo si to predočiti tako da vrhovi grafa  $G$  predstavljaju jedno-valentne atome, pri čemu svaka veza predstavlja točno jedno susjedstvo.

U matematici ovaj problem je poznat kao pokrivanje s domino pločicama. Ukoliko je mreža bipartitna, problem dimera poznat je kao savršeno sparivanje.

Iako ovo nije vrlo realističan model iz fizike, ali dimerski problem ima svojstveni interes kao egzaktno rješivi model koji pokazuje određene tipove prijelaza iz faze u fazu. Poznato je da su fazni prijelazi prilično složeni u našoj okolini pa je zbog toga



svaki aproksimacijski model vrlo vrijedan jer se takvi prijelazi onda mogu analitički proučavati. Problem dimera riješen je 1961.

U ovom poglavlju promatrat ćemo pravokutna mreža dimenzija  $m \times n$ . Koristeći se metodom iz prethodnog poglavlja izvest ćemo izraz za broj dimera na mreži tj. broj savršenih sparivanja na grafu  $P_m \square P_n$ .

## 4.1 Ravninska pravokutna mreža

Sada ćemo promatrati ravninsko smještenje pravokutne mreže dimenzije  $m \times n$  koju ćemo označiti s  $L(m, n)$ .

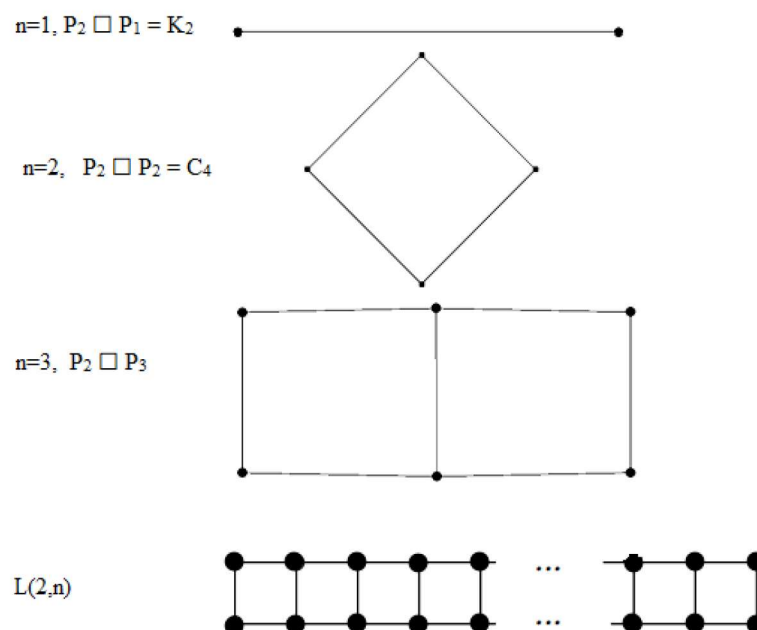
### 4.1.1 Ljestve $L(2, n)$

Prije nego krenemo na općeniti slučaj, pokazat ćemo kako se na vrlo efikasan način može odrediti broj savršenih sparivanja na grafu  $L(2, n)$  koji je u literaturi poznat pod nazivom **ljestve**.

**Definicija 18.** Graf **ljestve** je Kartezijev produkt grafova  $P_2$  i  $P_n$ ,  $(P_2 \square P_n)$ , gdje je  $P_n$  put. Stoga, ljestve su ekvivalent mreže dimenzije  $2 \times n$ .

Naziv ljestve dobile su po tome da neizmjerljivo slične ljestvama, sastoje se od dvije tračnice i  $n$  prečaka između njih.

Pogledat ćemo neke od primjera ljestava na sljedećoj slici.



Slika 24: Primjeri ljestava

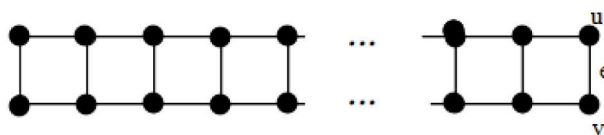
Kao što je vidljivo na slici (24), slučajevi  $n = 1$  i  $n = 2$  redom daju potpun graf i ciklus, dok za nešto veće vrijednosti  $n$ , graf sve više graf nalikuje na ljestve.

Broj savršenih sparivanja ljestava pronaći ćemo koristeći Fibonaccijev niz.

**Fibonaccijev niz** je niz brojeva koji zadovoljavaju sljedeću rekurziju:

$$F(n) = \begin{cases} 0 & \text{ako je } n = 0, \\ 1 & \text{ako je } n = 1, \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{ako je } n > 1. \end{cases} \quad (6)$$

Promotrimo ljestve kao na slici (24), s istaknutim bridom  $e$  i njegovim krajevima  $u$  i  $v$ .

Slika 25: Ljestve s istaknutim bridom  $e$  i njegovim krajevima  $u$  i  $v$

Označimo broj savršenih sparivanja grafa  $L(2, n)$  s  $f(n)$ . Skup svih savršenih sparivanja možemo particionirati na dva skupa:

1. skup čija sparivanja sadrže brid  $e = uv$ . U tom slučaju sparivanja ne mogu sadržavati bridove incidentne s  $u$  i  $v$  pa je ukupan broj takvih sparivanja jednak broju svih savršenih sparivanja na  $L(2, n - 1)$ , tj. jednak je  $f(n - 1)$ .
2. skup čija sparivanja ne sadrže brid  $e = uv$ . Tada svako sparivanje mora sadržavati preostala dva brida incidentna s  $u$  i  $v$ . No, ti bridovi ujedno zasićuju i krajeve različite od  $u$  i  $v$  pa slijedi da je broj takvih sparivanja jednak broju sparivanja grafa  $L(2, n - 2)$ , a taj je  $f(n - 2)$ .

Dakle, ukupan broj savršenih sparivanja zadovoljava rekurziju

$$f(n) = f(n - 1) + f(n - 2).$$

Primijetimo da vrijedi

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 2$$

pa je broj savršenih sparivanja ljestava  $L(2, n)$  jednak  $(n + 1)$ -om članu Fibonaccijevog niza, tj.

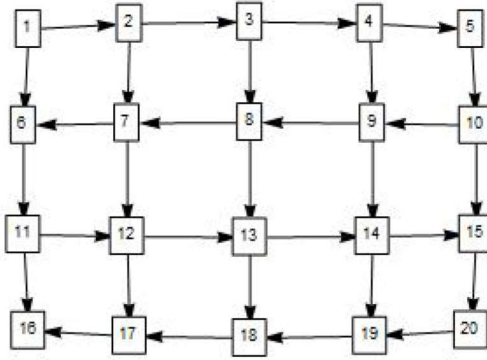
$$f(n) = F_{n+1}.$$

#### 4.1.2 Pravokutna mreža $L(m, n)$

Pfaffian orijentacija u mreži  $L(m, n)$  može biti konstruirana kako je prikazano na slici 26. Ako uzmemo u obzir samo horizontalne bridove zajedno s njihovim krajevima, onda uočavamo da se radi o usmjerenim putovima  $\vec{P}_m$  čija matrica susjedstva  $A$  reda  $m$  izgleda ovako:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{bmatrix}$$





Slika 26: Mreža koja sadrži Pfaffian orijentaciju

**Teorem 6.** Broj savršenih sparivanja  $n_{PM}$  pravokutne mreže  $L(m, n)$  jednak je

$$n_{PM} = 2^{\frac{mn}{2}} \prod_{k=1}^m \prod_{l=1}^n \left( \cos^2 \left( \frac{\pi k}{m+1} \right) + \cos^2 \left( \frac{\pi l}{n+1} \right) \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (7)$$

**Dokaz.** Označimo vrhove u prvom redu mreže s  $1, 2, \dots, m$ , vrhove sljedećeg reda s  $m+1, m+2, \dots, 2m$  itd. Matrica susjedstva  $A_s(\vec{G})$  s pripadnom orijentacijom dana je s

$$A_s(\vec{G}) = \begin{bmatrix} A & I & 0 & \cdots & 0 \\ -I & -A & I & \ddots & \vdots \\ 0 & -I & A & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & I \\ 0 & \cdots & 0 & -I & (-1)^{n-1}A \end{bmatrix},$$

gdje je  $I$  jedinična matrica kojom su opisane vertikalne veze koje povezuju retke. Prilikom množenja prvog blok stupca matrice susjedstva s  $-1$ , zatim trećeg i četvrtog blok retka, zatim četvrtog i petog blok stupca, zatim sedmog i osmog blok retka itd., apsolutna vrijednost determinante matrice se ne mijenja, a dobivena matrica  $M$  dana je s:

$$M = \begin{bmatrix} -A & I & 0 & \cdots & 0 \\ I & -A & I & \ddots & \vdots \\ 0 & I & -A & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & I \\ 0 & \cdots & 0 & I & -A \end{bmatrix}.$$

U nastavku će nam trebati definicija tenzorskog produkta dviju matrica i jedno njegovo svojstvo.

**Definicija 19.** Tenzorski produkt matrica  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$  i  $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{p \times q}$  označavamo s  $A \otimes B$  i definiramo kao blok matricu

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times nq}. \quad (8)$$

**Lema 5.** Za matrice  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{r \times s}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{n \times p}$  i  $D \in \mathbb{R}^{s \times l}$  vrijedi

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD \quad (\in \mathbb{R}^{mr \times pl}).$$

Dokaz leme može se pronaći u [7].

Ukoliko je  $B$  kvadratna matrica reda  $n$  dana s:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

tada se  $M$  može zapisati kao tenzorski produkt:

$$M = -I \otimes A + B \otimes I.$$

Broj savršenih sparivanja mreže  $L(m, n)$  moguće je pronaći koristeći rezultat  $\det(M) = (Pf(M))^2$ . Determinantu matrice  $M$  možemo odrediti pomoću svojstvenih vrijednosti. Neka su  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  svojstvene vrijednosti matrice  $A$  s pripadnim svojstvenim vektorima  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$  i neka  $B$  ima svojstvene vrijednosti  $\mu_1, \dots, \mu_n$  s pripadnim svojstvenim vektorima  $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ . S obzirom da vrijedi

$$\begin{aligned} M(\vec{b}_i \otimes \vec{a}_j) &= (-I \otimes A + B \otimes I)(\vec{b}_i \otimes \vec{a}_j) \\ &= (-I \otimes A)(\vec{b}_i \otimes \vec{a}_j) + (B \otimes I)(\vec{b}_i \otimes \vec{a}_j) \\ &= (-I\vec{b}_i \otimes A\vec{a}_j) + (B\vec{b}_i \otimes I\vec{a}_j) \\ &= -\lambda_j(\vec{b}_i \otimes \vec{a}_j) + \mu_i(\vec{b}_i \otimes \vec{a}_j) \\ &= (\mu_i - \lambda_j)(\vec{b}_i \otimes \vec{a}_j), \end{aligned}$$

matrica  $M$  ima svojstvene vrijednosti  $\mu_i - \lambda_j$  s pripadnim svojstvenim vektorima  $\vec{b}_i \otimes \vec{a}_j$ . Da bismo pronašli svojstvene vrijednosti matrice  $B$ , trebat će nam njen

karakteristični polinom  $p_n(\mu)$  :

$$\begin{aligned}
 p_n(\mu) &= \underbrace{\begin{vmatrix} -\mu & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -\mu & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\mu \end{vmatrix}}_n \\
 &= -\mu \underbrace{\begin{vmatrix} -\mu & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -\mu & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\mu \end{vmatrix}}_{n-1} - \underbrace{\begin{vmatrix} -\mu & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -\mu & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\mu \end{vmatrix}}_{n-2}.
 \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi rekurzija

$$p_n(\mu) = -\mu p_{n-1}(\mu) - p_{n-2}(\mu). \quad (9)$$

Za pronalaženje rješenja rekurzije (9) koristit ćemo Čebiševljeve polinome druge vrste koji zadovoljavaju rekurziju

$$U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0, \quad (10)$$

s početnim uvjetima  $U_0(x) = 0$  i  $U_1(x) = 2x$ .

Eksplicitno,

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sin(\arccos x)}, \quad |x| < 1.$$

Ukoliko u rekurziju (10) stavimo da je  $x = \frac{\mu}{2}$  dobivamo

$$U_n\left(\frac{\mu}{2}\right) = p_n(\mu).$$

Preostaje naći nultočke polinoma  $U_n$ .  $U_n\left(\frac{\mu}{2}\right) = 0$  ako i samo ako

$$\sin\left[(n+1)\arccos\frac{\mu}{2}\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (n+1)\arccos\left(\frac{\mu}{2}\right) = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Slijedi

$$\mu = 2 \cos \frac{k\pi}{n+1}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Nama je potrebno samo prvih  $n$  rješenja pa su svojstvene vrijednosti matrice  $B$  dane s:

$$\mu_k = 2 \cos \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Na sličan način možemo odrediti i svojstvene vrijednosti matrice  $A$ . Izostavljajući detalje, dobivamo  $\lambda_k = 2i \cos(\pi k)/(m+1)$ , gdje je  $k = 1, \dots, m$ . Stoga su svojstvene vrijednosti matrice  $M$  dane s

$$2 \left( \cos \left( \frac{\pi k}{m+1} \right) - i \cos \left( \frac{\pi l}{n+1} \right) \right), \quad k = 1, \dots, m, \quad l = 1, \dots, n.$$

Determinanta matrice  $M$  je produkt tih brojeva. Apsolutna vrijednost determinante dana je s:

$$|\det M| = 2^{mn} \prod_{k=1}^m \prod_{l=1}^n \left( \cos^2 \left( \frac{\pi k}{m+1} \right) + \cos^2 \left( \frac{\pi l}{n+1} \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

pa je teorem dokazan. □

Ako promatramo mreže jako velikih dimenzija, postavlja se pitanje čemu će težiti ukupan broj savršenih sparivanja. Vrijedi sljedeći rezultat.

**Korolar 1.** *Logaritmiranjem jednadžbe (7) i pretvaranjem suma u integrale dobivamo*

$$\begin{aligned} \frac{1}{mn} \ln(n_{PM}) &= \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{4} \frac{1}{mn} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \ln \left( \cos^2 \left( \frac{\pi k}{m+1} \right) + \cos^2 \left( \frac{\pi l}{n+1} \right) \right), \\ \lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{1}{mn} \ln(n_{PM}) &= \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{4} \lim_{m,n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{mn} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \ln \left( \cos^2 \left( \frac{\pi k}{m+1} \right) + \cos^2 \left( \frac{\pi l}{n+1} \right) \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 \\ &+ \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \ln \left\{ \cos^2 \left( \frac{\pi k}{m+1} \right) + \cos^2 \left( \frac{\pi l}{n+1} \right) \right\} d \left( \frac{\pi k}{m+1} \right) d \left( \frac{\pi l}{n+1} \right). \end{aligned} \tag{11}$$

Dokaz se može pronaći u [10]. Može se pokazati da vrijedi

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{1}{mn} \ln(n_{PM}) = \frac{1}{\pi} C \approx 0.29, \tag{12}$$

gdje je  $C = (1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots)$ .

Red koji je u gornjem zapisu označen s  $C$  naziva se Catalanova konstanta i vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \approx 0.915965594$$

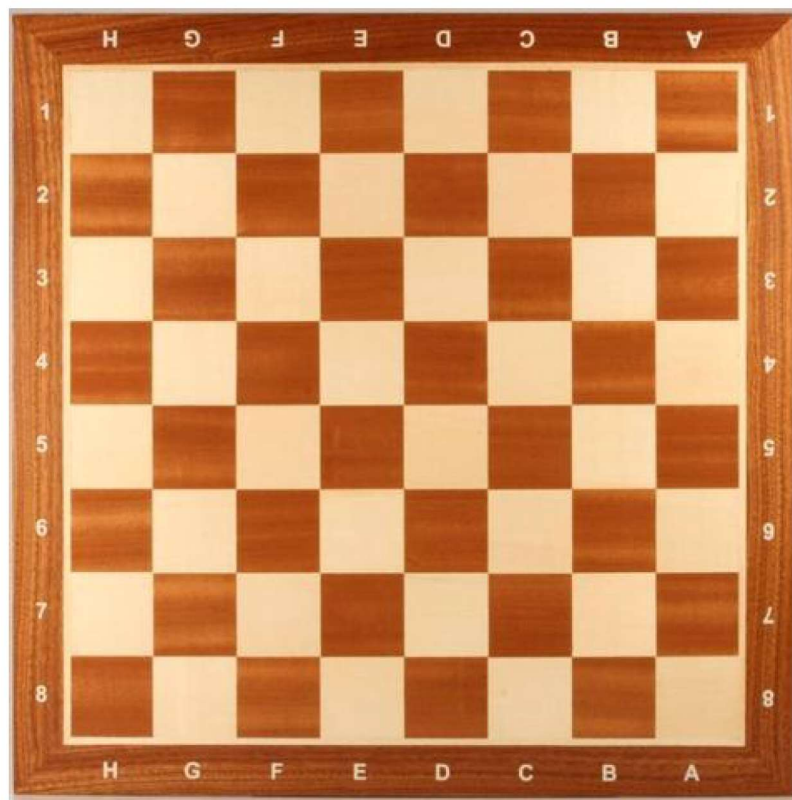
Dakle, asimptotska ocjena za broj savršenih sparivanja mreže  $L(mn)$  za  $m, n \rightarrow \infty$  jest

$$n_{PM} \approx e^{\frac{mnC}{\pi}}.$$

## 4.2 Primjer šahovske ploče

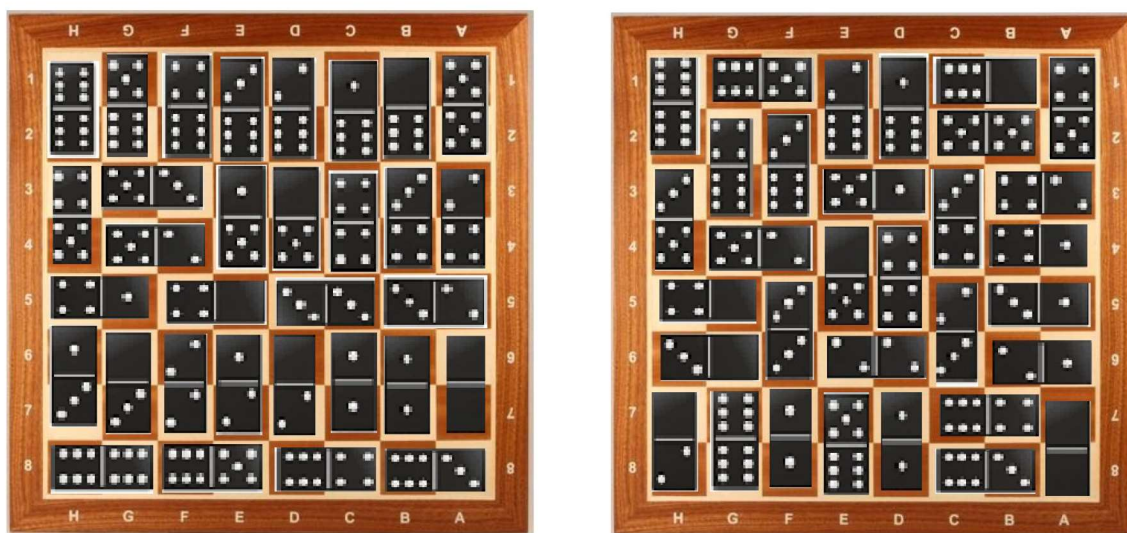
Djevojčica je za ljetne praznike otišla kod bake i djeda na selo, gdje nije imala nikoga od prijatelja. Srećom, u jednoj sobi u kući pronašla je šahovsku ploču. Šahovske figure nije pronašla, ali je zato ugledala 32 pločice domina. Smislila je igru u kojoj je cilj postaviti pločice na kvadratiće šahovske ploče tako da svaka pločica pokriva dva kvadratića i da nema međusobnog preklapanja pločica. Zanimalo ju je na koliko načina to može postići. Hoće li jedno poslijepodne biti dovoljno da djevojčica uspije prebrojati sve moguće načine za pokrivanje ploče domino pločicama?





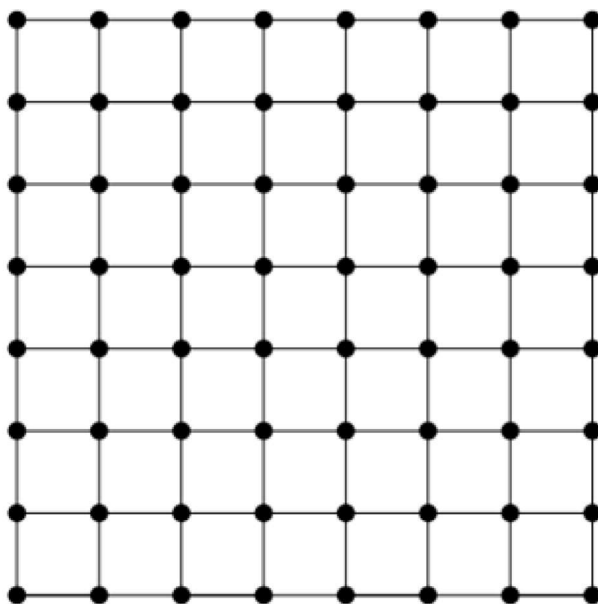
Slika 27: Šahovska ploča.

Gledajući šahovsku ploču i njenih 64 kvadratića, čini se da bi ova igra mogla potrajati i više od jednog popodneva. S puno strpljenja, djevojčica može krenuti s najjednostavnijim konfiguracijama, ali će se kad - tad umoriti.



Slika 28: Načini pokrivanja šahovske ploče s domino pločicama.

Uzmimo da je šahovska ploča graf koji se sastoji od skupa vrhova i skupa bridova kao na slici 29. Vrhovi grafa su točke u sredini kvadrata, a bridovi spajaju dva vrha ako i samo ako su odgovarajući kvadratići susjedni. Oni ujedno predstavljaju moguće položaje domino pločica. Sada samo treba označiti vrhove i pridružiti ovom grafu matricu susjedstva.



Slika 29: Šahovska ploča prikazana kao mrežasti graf

Sada je jasno da pomoću rezultata iz prethodnog pododjeljka možemo vrlo lako izračunati traženi broj. On je 12988816. Dakle, djevojčici bi bilo puno praktičnije pročitati ovaj diplomski rad i dobiti željeni broj!

## Literatura

- [1] E. BECKENBACH, *Applied combinatorial mathematics*, John Wiley and sons, California, 1964.
- [2] A. E. BROUWER, W. H. HAEMERS, *Spectra of graphs*, Springer, Amsterdam, 2011.
- [3] R. DIESTEL, *Graph theory*, Springer, Berlin, 2017.
- [4] N. ELEZOVIĆ, *Linearna algebra*, Element, Zagreb, 2006.
- [5] T. HARJU, *Lecture Notes on Graph Theory*, Department of Mathematics University of Turku, 2011.
- [6] M. JERRUM, *Counting, sampling and integrating: algorithms and complexity, Lectures in mathematics - ETH Zürich*, Birkhäuser, Basel, 2003.
- [7] A. J. LAUB, *Matrix Analysis for Scientists and Engineers*, SIAM, Davis, California, 2005.
- [8] L. LOVÁSZ, M.D. PLUMMER, *Matching theory*, North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [9] F. LU, F. LIN, L. ZHANG, *Enumeration of perfect matchings of a type of quadratic lattice on the torus*, Xiamen University, Xiamen, 2009.
- [10] J. NGUYEN, *Perfect Matchings and Pfaffian Orientation*, Universiteit van Amsterdam, Amsterdam, 2008.
- [11] R. KENYON, *Lecture on Dimers*, Park City math Institute, New Jersey, 2007.
- [12] R. S. VARGA, *Geršgorin and His Circles*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [13] D. VELJAN, *Kombinatorika s teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.
- [14] F. Y. WU, *Dimers on two-dimensional lattices*, International Journal of Modern Physics B Vol.20 No. 32, World Scientific Publishing Company, 2006.



## Sažetak i ključne riječi

**Sažetak.** Pfaffian matrice je u teoriji grafova iznimno važan jer se koristi za prebrojavanje savršenih sparivanja u grafu. Da bi to bilo moguće, nužno je da su grafovi planarni. Zato smo uveli pojam planarnog grafa te pokazali neke osnovne pojmove i tvrdnje o sparivanjima.

Za prebrojavanje savršenih sparivanja, koristili smo vezu između determinante i Pfaffiana matrice  $\det(B) = (Pf(B))^2$  koju je prvi ustanovio Cayley 1849. godine. Kako bi si još olakšali prebrojavanje uvodi se pojam Pfaffian orijentacija, koja naglašava kakva orijentacija mora biti u nekom grafu da bi mogli prebrojavati savršena sparivanja.

Jedna od glavnih primjena Pfaffiana dobiva svoj smisao na pravokutnim mrežama, jer su one primjenjive u fizici, gdje ih koristimo kod problema prelazaka dvoatomske plina u kristalni supstrat.

**Ključne riječi:** sparivanje, savršeno sparivanje, Pfaffian, Pfaffian matrice, orijentacija

## Matching and Pfaffian orientation

**Summary.** Pfaffian of a matrix is in graph theory very important since it is applicable for counting perfect matchings in a graph. To make this possible, graphs have to be planar. Because of that, we introduced notion of a planar graph and some basic terms and theorems on matching.

For counting perfect matching in graphs, we used connection between a determinant of a matrix and its Pfaffian  $\det(B) = (Pf(B))^2$  which was established by Cayley in 1849. To make it even simple to count, we introduced the term Pfaffian orientation. Which highlights what orientation must be in graph for counting perfect matching. The key applications of Pfaffian is in rectangular grids. Because rectangular grids is applicable in physics, where we use them in the problem of the transition two-atom gas in a crystalline substrate.

**Keywords:** matching, perfect matching, Pfaffian, Pfaffian matrices, orientation



## Životopis

Rođena sam u Göppingenu u Njemačkoj 27.10.1991. Osnovnu školu "Antun Gustav Matoš" završila sam u Vinkovcima 2006. godine te nakon toga upisujem gimnaziju Matije Antuna Reljkovića u Vinkovcima, smjer opća gimnazija. Nakon gimnazije 2010. godine upisujem prediplomski studij matematike, te ga završavam 2015. godine, te nakon toga upisujem diplomski studij Financijske matematike i statistike, oba studija su na Sveučilištu Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku. Tijekom studija odradila sam stručnu praksu u Hrvatskoj agenciji za hranu, te sam radila kao učitelj matematike u osnovnoj školi "Antun Gustav Matoš" u Vinkovcima.