Barijerne opcije

Zetović, Tina

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Tina Zetović

Barijerne opcije

Diplomski rad

Osijek, 2020.

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Tina Zetović

Barijerne opcije

Diplomski rad

Voditelj: izv.prof.dr.sc. Nenad Šuvak

Osijek, 2020.

Sadržaj

Uvod

Na financijskom tržištu trguje se financijskim instrumentima tj. financijskom imovinom. Financijskom imovinom smatra se sve čime se može trgovati (novac, dionice, zlato, kava, itd.). Financijsku imovinu možemo podijeliti na osnovnu financijsku imovinu i izvedenu financijsku imovinu.

1. Osnovna financijska imovina

   Osnovna financijska imovina dijeli se na nerizičnu i rizičnu financijsku imovinu.

   U nerizičnu financijsku imovinu ubrajamo imovinu čiju buduću vrijednost unaprijed znamo. Npr. stavimo novac na štednju na određeni broj godina uz fiksnu kamatnu stopu i znamo koji iznos ćemo dobiti nakon tog broja godina. Dakle, nerizična financijska imovina je novac u domaćoj valuti, uložen ili posuđen uz konstantnu kamatnu stopu.

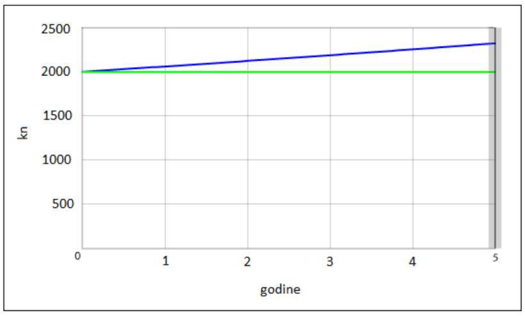
   Neka je C_0 početna vrijednost kapitala, C_t konačna vrijednost kapitala nakon t obračunskih razdoblja te r' konstantna efektivna kamatna stopa. Pogledajmo u sljedećem primjeru je li isplativo štedjeti u banci.

   Primjer. *Neka je početni kapital* $C_0 = 2000$ *kn stavljen na štednju u banku uz ugovoreno vrijeme od* 5 *godina s konstantnom efektivnom godišnjom kamatnom stopom* $r' = 0.03$.

   Postavlja se pitanje kolika je konačna vrijednost kapitala nakon 5 godina, što je lako odrediti kada se radi o sustavu jednostavnog ukamaćivanja. Kapital nakon t ukamaćivanja dan je izrazom:

   $$C_n = C_0(1 + r't).$$

   Uvrstimo li poznate vrijednosti u navedeni izraz dobijemo konačnu vrijednost kapitala nakon 5 godina, koja iznosi 2300 kn. Uočimo da je isplativije novac štedjeti u banci nego kod kuće. Navedeno možemo vidjeti na sljedećem grafičkom prikazu.



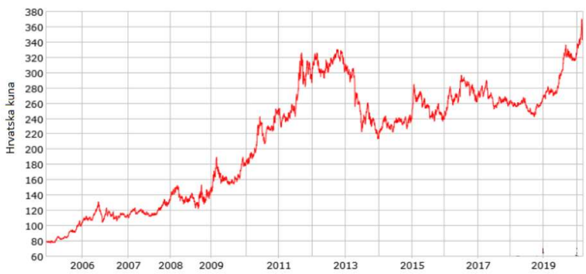
Slika 1: Štednja u banci uz $C_0 = 2000kn$, $t = 5$ godina i $r = 0.03$

U rizičnu financijsku imovinu ubrajamo novac u stranoj valuti (postoji valutni rizik zbog promjene tečaja), korporativne i državne obveznice (vrijednosni papiri koji se emitiraju u nekom trenutku od strane države ili nekih korporacija, no država može postati nesolventna ili korporacije mogu otići u stečaj), zlato (njegova cijena fluktuira), nafta, dionice, itd.

Pogledajmo na konkretnom primjeru fluktuiranje cijene zlata.

Primjer. *Za razliku od većine proizvoda i usluga kojima se cijena periodično mijenja, kod zlata ima smisla pretpostaviti da se cijena mijenja kontinuirano. Cijenu zlata je vrlo teško procijeniti jer ovisi o mnoštvu faktora. Razlog kretanja cijene su ponuda i potražnja na globalnom tržištu koje se sastoji od milijuna sudionika. U globalnom gospodarstvu rastu rizici, to se prije svega odnosi na trgovinske ratove, zbog čega raste opasnost od pritisaka politike na središnje banke. Kada god rastu rizici i počne padati povjerenje u vodeće svjetske valute, raste i potražnja za zlatom.*

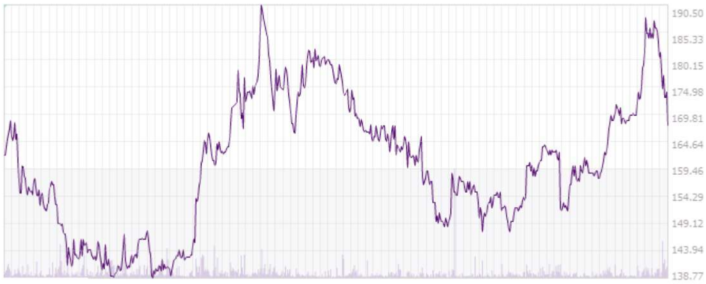
Za vrijeme financijske krize koja je počela 2008. godine, što je više financijskih institucija padalo u probleme, cijena zlata je rasla. Do 2011. godine cijena zlata se udvostručila. Navedeno možemo vidjeti na sljedećem grafičkom prikazu.



Slika 2: Kretanje cijene zlata u kunama po gramu kroz posljednjih 15 godina

Većinom dionica trguje se na burzama. U Republici Hrvatskoj centralno mjesto trgovine vrijednosnim papirima je Zagrebačka burza. U nastavku ćemo vidjeti kretanje cijene dionice za koju su podaci preuzeti s web stranice Zagrebačke burze.

Primjer. *Kretanje cijene dionice teško je predvidjeti jer, kao i cijena zlata, ovisi o mnoštvu faktora. Kretanje cijene dionice Hrvatskog Telekoma kroz posljednjih pet godina možemo vidjeti na sljedećem grafičkom prikazu.*



Slika 3: Kretanje cijene dionice HT-a preuzeto sa Zagrebačke burze

2. Izvedena financijska imovina

   Izvedena financijska imovina (izvedenice) je imovina čija se vrijednost izvodi tj. definira u terminima vrijednosti osnovne financijske imovine. Često se koriste za kontrolu i ograničavanje rizika na financijskom tržištu. Neke jednostavnije izvedenice su forwared i futures ugovori, te opcije.

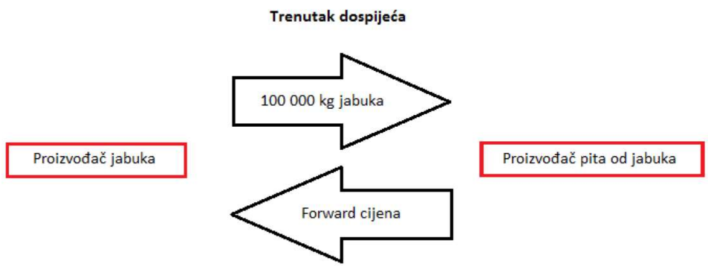
Uzmimo za razmatranje forward ugovor. Forward ugovor je ugovor kojim se jedna strana tj. kupac obvezuje na kupnju, a druga strana tj. prodavatelj se obvezuje na prodaju financijske imovine u trenutku dospijeća T po dogovorenoj forward cijeni ili cijeni izvršenja K.

Pogledajmo na opisnom primjeru kako funkcionira forward ugovor.

Primjer. *Proizvođač jabuka svake godine proizvede sto tisuća kilograma jabuka, koje treba nekome prodati po tržišnoj cijeni. Tržišna cijena je nepredvidiva, što uvelike stvara problem proizvođaču jabuka. Ukoliko je cijena previsoka, primjerice 0.3 \$ po kilogramu, proizvođač nema kome prodati proizvedenu količinu jabuka. Ukoliko je cijena preniska kao primjerice 0.1 \$ po kilogramu, proizvođač ne može pokriti svoje troškove. S druge strane, proizvođač pita od jabuka svake godine mora od nekoga kupiti veliku količinu jabuka. Ukoliko bi kupovao kilogram jabuka po cijeni od 0.3 \$, ne bi mogao pokriti svoje troškove. S cijenom od 0.1 \$ po kilogramu* *bi ostvario značajan profit. Postoji način kako bi proizvođač jabuka i proizvođač pita od jabuka mogli surađivati tj. postići dogovor koji je povoljan za obje strane.*

Mogu sklopiti forward ugovor u kojem se proizvođač jabuka obvezuje na prodaju sto tisuća kilograma jabuka, a proizvođač pita od jabuka na kupnju tih jabuka. Odrede trenutak dospijeća, te cijenu izvršenja tj. forward cijenu koja je pogodna za obje strane.

Pogledajmo navedeni primjer, pojednostavljeno, na sljedećem grafičkom prikazu:



Slika 4: Forward ugovor s forward cijenom po kilogramu jabuka i određenim trenutkom dospijeća između proizvođača jabuka i proizvođača pita od jabuka

Financijsko tržište je bazirano na principu ponude i potražnje. Ako je neka financijska imovina tražena, njezina cijena raste. Tada postoji veći broj kupaca, dok je više prodavatelja ukoliko cijena financijske imovine pada. Razvojem financijskih tržišta omogućen je napredak, ali su i rizici povećani. U radu ćemo se fokusirati na rizične financijske imovine. Njihove vrijednosti u budućnosti su neizvjesne, pa je investitorima ulaganje u njih rizično. Investitori strahuju od potencijalnih gubitaka. Žele na neki način upravljati rizikom i zaštititi se od negativnih posljedica. Jedan od načina upravljanja rizikom je korištenje opcija. Upravo zbog toga će nas u nastavku rada zanimati opcije, te će one kasnije biti detaljnije opisane. Opcije su ugovori čija je svrha direktno upravljanje rizikom. Karakterizirani su nesimetričnim pozicijama kupca i prodavatelja, gdje kupac ima pravo, a prodavatelj ima obvezu kupcu osigurati to njegovo pravo. Pravo kupca (vlasnika) opcije je kupiti (call opcija), odnosno prodati (put opcija) financijsku imovinu po unaprijed dogovorenoj cijeni. Korištenje opcija seže u daleku prošlost.

Najraniji zabilježeni primjer korištenja opcija datira još u vremenu prije Krista. Grčki filozof Aristotel je u svojoj knjizi "Politika", između ostaloga, pisao kako je Tales profitirao u vrijeme berbe maslina. Zanimljivo je da je Tales bio siromašan, nije ga zanimala zarada. No, kada su mu prigovorili zbog siromaštva i rekli kako je filozofija beskorisna, dokazao im je svoju mudrost. Tales je proučavajući zvijezde predvidio dobar urod maslina u narednoj godini. U zimi je povoljno zakupio većinu presa za masline, jer se tada za njih nitko nije interesirao. Točnije, vlasnicima presa za masline je platio određenu svotu novca kako bi si osigurao pravo korištenja tih presa u razdoblju berbe maslina. U narednoj godini, urod maslina je bio iznimno dobar. Vlasnici polja maslina su trebali prese, kako bi tijekom berbe proizvodili maslinovo ulje. Za određenu svotu novca su vlasnici polja iznajmljivali prese od Talesa. Time je Tales bio na dobitku, zaradio je mnogo novca zahvaljujući svojim sposobnostima. Uočimo kako je Tales imao pravo, ali ne i obvezu za iznajmljivanjem presa. To je bila njegova odluka. Koristio je svoje pravo i u određenom razdoblju po određenoj cijeni iznajmljivao prese za masline. Navedeno odgovara osnovnom principu današnje call opcije.

Još jedan primjer opcija iz davnina, točnije iz 17. stoljeća zabilježen je u Nizozemskoj. Primjer je povezan s popularnošću tulipana u to vrijeme. Tulipani su se u Nizozemskoj smatrali statusnim simbolom nizozemske aristokracije. Njihova popularnost se proširila Europom i svijetom, pa je time porasla potražnja za tulipanima. Rastom potraženje je rasla i cijena tulipana. Call i put opcije bile su korištene za zaštitu od rizika rasta ili pada cijena tulipana. Na financijskom tržištu, koje nije bilo stabilno niti dobro regulirano, porasle su cijene call i put opcija. Kako je cijena tulipana dosegla previsoku cijenu, a tržište nije bilo dobro regulirano, prodavatelji tih opcija nisu ispunili svoje obveze i kupci su pretrpjeli ogromne gubitke. Nakon toga, svijetom se proširio negativan stav o korištenju call i put opcija. Korištenje tih opcija se nastavilo, ali u smanjenoj mjeri. U nekim dijelovima svijeta je čak, jedno vrijeme, njihovo korištenje bilo zabranjeno. Primjerice u Europi, Japanu i nekim američkim državama.

Razvoju trgovanja opcijama pridonio je američki ekonomist Rusell Sage, krajem 19. stoljeća. Uočio je povezanost cijene rizične financijske imovine i cijene opcije. Kako još nije bilo reguliranog tržišta, investitori su bili nepovjerljivi prema trgovanju opcijama. Ono je postajalo popularno, ali se to odvijalo vrlo sporo. Trebalo je vremena kako bi investitori prepoznali i shvatili prednosti koje opcije nude. Potreba za reguliranim trgovanjem došla je do vrhunca 1968. godine, no još uvijek su postojale mnoge prepreke. Tek je 1973. godine počelo trgovanje standardiziranim opcijama na Chicago Board of Options Exchange (CBOE). Trgovalo se samo call opcijama, jer je i dalje bilo nedoumica oko isplativosti trgovanja opcijama. Bilo je nejasno i određivanje cijene samih opcija. Tome su pridonijeli, iste godine, profesori Fisher Black i Myron Sholes osmislivši matematički model za vrednovanje opcija u neprekidnom vremenu. Navedeni model precizirao je Robert Cox Merton pa se model naziva Black Sholes Mertonov (BSM) model. Taj se model i danas koristi za određivanje cijene opcija. Upravo je to cilj ovog rada. Pokazat ćemo kako se određuje nearbitražna cijena europske call i put opcije, te europske call i put opcije s barijerom.

Sva financijska imovina, koja pripada pojedincu ili poduzeću, čini njegov portfelj. Glavni razlog sastavljanja portfelja je postizanje željenih financijskih rezultata pomoću strategija trgovanja, uz prihvaćanje određene razine rizika. Arbitražu možemo shvatiti kao istovremenu kupovinu i prodaju nekih financijskih instrumenata u istoj vrijednosti čime se formira portfelj čija je vrijednost uvijek nenegativna i u konačnici s pozitivnom vjerojatnošću donosi zaradu.

Pokazat ćemo kako odrediti cijenu opcije kojom prodavatelj opcije, ali ni kupac opcije ne trpe velike gubitke i ni za koga ne postoji sigurna zarada. Kako nearbitražnu cijenu ne možemo odrediti bez dodatnih uvjeta financijskog tržišta, u radu ćemo nearbitražnu cijenu određivati u kontekstu financijskog tržišta na kojem nema arbitraže odnosno zarade bez rizika. Spomenutim Black Scholes Mertonovim modelom omogućeno nam je odrediti opisanu nearbitražnu cijenu call i put opcija. Black je preminuo 1995. godine, stoga su samo Scholes i Merton 1997. godine nagrađeni Nobelovom nagradom upravo za otkriće te formule.

U nastavku rada koncentrirat ćemo se na europske call i put opcije tj. određivanje nearbitražne cijene tih opcija. Dakle, fokusirat ćemo se na ugovore prema kojima kupac ima pravo kupiti ili prodati rizičnu financijsku imovinu po unaprijed dogovorenoj cijeni u točno određenom vremenskom trenutku u budućnosti, dok prodavatelj opcije ima obvezu kupcu opcije osigurati to njegovo pravo. Kako navedene opcije zasigurno nisu jedine opcije, postavlja se pitanje je li kupovina neke druge opcije isplativija za kupca opcije. Vrsta egzotičnih opcija koja će nam biti posebno zanimljiva su opcije s barijerom tj. barijerne opcije. To su opcije čije postojanje ovisi o kretanju cijene određene rizične financijske imovine odnosno dostizanju određenog nivoa cijene tj. barijere. U radu ćemo se ograničiti na europske barijerne call i put opcije, kako bismo mogli usporediti njihove nearbitražne cijene s nearbitražnim cijenama europskih call i put opcija, te odgovoriti na pitanje što je kupcu opcije isplativije.

Poglavlje 1

Vanilla opcije

Kako je rečeno u uvodu, opcije su ugovori čija je svrha direktno upravljanje rizikom. Karakterizirani su nesimetričnim pozicijama kupca i prodavatelja, gdje kupac ima pravo, a prodavatelj ima obvezu kupcu osigurati to njegovo pravo. Prodavatelj opcije unaprijed prima cijenu opcije tj. premiju od kupca opcije, a njegova potencijalna obveza nastupa kasnije odnosno prilikom izvršenja opcije. Pravo kupca tj. vlasnika opcije je kupiti ili prodati rizičnu financijsku imovinu po unaprijed dogovorenoj cijeni. Tu unaprijed dogovorenu cijenu nazivamo cijena izvršenja. Opcije možemo podijeliti na vanilla opcije i egzotične opcije.

Vanilla opcije možemo podijeliti na američke call i put te europske call i put opcije. Američke opcije su opcije koje se mogu izvršiti u bilo kojem trenutku do trenutka dospijeća. Europske opcije se razlikuju od američkih opcija upravo po tome kada se mogu izvršiti. Naime, one se mogu izvršiti samo na dan dospijeća. Možemo reći da su američke opcije nešto fleksibilnije od europskih, pa je i njihovo vrednovanje znatno kompliciranije. Njima se nećemo baviti u ovom radu.

Egzotične opcije su ugovori s dodatnim uvjetima, u odnosu na vanilla opcije. Postoje različite egzotične opcije. Vrste egzotičnih opcija su barrier (barijerne), binary, chooser, compound, look back opcije i mnoge druge.

U ovom radu bit će obrađene barijerne opcije i njihovo vrednovanje. One mogu biti američke i europske. Kako je cilj ovog rada pokazati kako se određuje nearbitražna cijena određene opcije, u nastavku rada bit će obrađene europske call i put opcije te njihovo vrednovanje kao podloga za vrednovanje barijernih opcija.

1.1 Europska call opcija

Definicija 1.1. *Europska call opcija je ugovor koji svojem vlasniku daje pravo, ali ne i obvezu, da kupi dogovorenu financijsku imovinu po točno unaprijed dogovorenoj cijeni u točno određenom trenutku u budućnosti.*

Točno dogovorena cijena iz definicije naziva se cijena izvršenja (strike price) opcije i označava se s K, dok se točno određeni trenutak u budućnosti naziva trenutak (vrijeme) dospijeća opcije i označava se s T.

Postavlja se pitanje kada bi i zašto investitor htio postati vlasnikom europske call opcije. Ukoliko investitor očekuje rast cijena rizične financijske imovine na financijskom tržištu, on se želi zaštititi od nepovoljnog kretanja cijena i osigurati si fiksnu cijenu za kupovinu te rizične financijske imovine u budućnosti. Prema tome, kupovina europske call opcije se čini kao dobar izbor za investitora. Kupovinom europske call opcije, od prodavatelja te opcije za iznos koji se naziva premija, investitor postaje vlasnikom europske call opcije. Dakle, vlasnik europske call opcije očekuje rast cijena na tržištu, te višu tržišnu cijenu financijske imovine od cijene izvršenja u trenutku dospijeća opcije. Tada bi vlasnik opcije koristio svoje pravo iz opcije, te kupio financijsku imovinu po nižoj cijeni (cijeni izvršenja) u trenutku dospijeća. Time bi vlasnik opcije profitirao u iznosu razlike tržišne cijene i cijene izvršenja u trenutku dospijeća. U suprotnom, kada bi tržišna cijena u trenutku dospijeća bila niža od cijene izvršenja, vlasnik opcije ne bi koristio svoje pravo jer može kupiti financijsku imovinu po nižoj tržišnoj cijeni. U oba slučaja premija ostaje prodavatelju opcije.

Mogući scenariji za vlasnika europske call opcije

Označimo tržišnu cijenu u trenutku dospijeća s S_T i vrijednost europske call opcije u trenutku izvršenja T s C_T^{CALL}, te razmotrimo moguće scenarije za vlasnika europske call opcije.

Ukoliko je $S_T > K$ tj. tržišna cijena rizične financijske imovine, u trenutku dospijeća, viša od cijene izvršenja tada vlasnik europske call opcije ima dvije mogućnosti. On može kupiti rizičnu financijsku imovinu na financijskom tržištu po cijeni S_T ili po cijeni izvršenja K. Vlasnik europske call opcije će kupiti rizičnu financijsku imovinu po cijeni koja je za njega pogodnija tj. koja ga manje košta. Dakle, on koristi svoje pravo iz ugovora tj. kupuje dogovorenu rizičnu financijsku imovinu po cijeni izvršenja K i time bilježi zaradu u iznosu $S_T - K$.

S druge strane, može se dogoditi scenarij gdje je $S_T \leq K$ tj. tržišna cijena rizične financijske imovine, u trenutku dospijeća, niža ili jednaka cijeni izvršenja. Tada vlasnik europske call opcije ne koristi svoje pravo tj. ne kupuje dogovorenu rizičnu financijsku imovinu po cijeni izvršenja jer ju može kupiti na financijskom tržištu po nižoj cijeni. U ovom slučaju, opcija je vlasniku bezvrijedna.

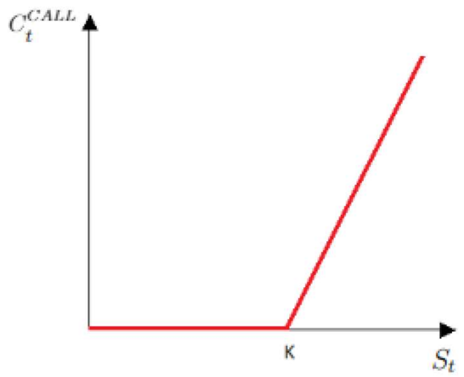
Prema navedenim slučajevima, vrijednost europske call opcije u trenutku izvršenja T je:

$$C_T^{CALL} = \begin{cases} 0 & \text{, ako je } S_T \leq K \\ S_T - K & \text{, ako je } S_T > K \end{cases} .$$

Slijedi da je:

$$C_T^{CALL} = max\ (0\ ,\ S_T - K) = (S_T - K)_+\ .$$

Pogledajmo vrijednost europske call opcije na sljedećem grafičkom prikazu:



Slika 1.1: Europska call opcija s cijenom izvršenja K

Pogledajmo sada na konkretnim primjerima neke od mogućih slučajeva za vlasnika europske call opcije:

Primjer 1.1. *Neka je dan primjer kada investitor očekuje rast cijene određene rizične financijske imovine na financijskom tržištu. Neka je trenutna vrijednost te rizične financijske imovine 300 u nekoj proizvoljnoj valuti. Investitor kupuje europsku call opciju od njezinog prodavatelja i time postaje vlasnikom europske call opcije. Neka je cijena izvršenja iz navedene opcije* $K = 350$*, te neka je dan dospijeća za tri mjeseca. Neka je tržišna cijena razmatrane rizične financijske imovine na dan dospijeća* $S_T = 400$*. Pitamo se je li investitor donio dobru odluku kupivši europsku call opciju i hoće li koristiti svoje pravo.*

Uočimo da je u navedenom primjeru, u trenutku dospijeća, tržišna cijena rizične financijske imovine viša od cijene izvršenja tj. $S_T > K$*. Cijena rizične financijske imovine je rasla do trenutka dospijeća, što je investitor i očekivao. Za njega je navedena situacija pogodna i možemo reći da je donio dobru odluku kupivši europsku call opciju. U trenutku dospijeća on koristi svoje pravo te kupuje rizičnu financijsku imovinu po cijeni izvršenja od 350, dok je u tom trenutku tržišna cijena rizične financijske imovine 400. Time vlasnik opcije bilježi zaradu u iznosu* $S_T - K$*.*

Prodavatelj opcije je dužan vlasniku opcije omogućiti izvršenje njegovog prava, te ono što njemu ostaje je iznos premije koju je njemu vlasnik opcije platio kako bi si osigurao pravo kupnje rizične financijske imovine. Zanemarimo iznos premije za sada.

Primjer 1.2. *Neka je dan primjer kada investitor očekuje rast cijene određene rizične financijske imovine na financijskom tržištu. Neka je trenutna vrijednost te rizične financijske imovine 300 u nekoj proizvoljnoj valuti. Investitor kupuje europsku call opciju od njezinog prodavatelja i time postaje vlasnikom europske call opcije. Neka je cijena izvršenja iz navedene opcije* $K = 400$*, te neka je dan dospijeća za tri mjeseca. Neka je tržišna cijena razmatrane rizične financijske imovine na dan dospijeća* $S_T = 350$*. Pitamo se je li investitor donio dobru odluku kupivši europsku call opciju i hoće li koristiti svoje pravo.*

Uočimo da je u navedenom primjeru, u trenutku dospijeća, tržišna cijena rizične financijske imovine niža od cijene izvršenja tj. $S_T < K$*. Cijena rizične financijske imovine je rasla do trenutka dospijeća, što je investitor i očekivao. No, nije rasla dovoljno visoko prema očekivanjima investitora. Za njega navedena situacija nije pogodna jer može kupiti rizičnu financijsku imovinu po tržišnoj cijeni koja je niža od cijene izvršenja. Prema tome, možemo reći da nije donio dobru odluku kupivši europsku call opciju. U trenutku dospijeća on ne koristi svoje pravo i ne kupuje rizičnu financijsku imovinu po cijeni izvršenja od 400. U ovom slučaju, opcija je vlasniku bezvrijedna i prodavatelju opcije ostaje iznos premije koju je njemu vlasnik opcije platio kako bi si osigurao pravo kupnje rizične financijske imovine.*

Kada bismo promatrali primjer za slučaj kada su, u trenutku dospijeća, tržišna cijena rizične financijske imovine i cijena izvršenja iz opcije jednake mogli bismo reći kako je vlasniku opcije ona bezvrijedna. Vlasnik opcije je zapravo na gubitku jer može kupiti rizičnu financijsku imovinu po tržišnoj cijeni bez korištenja prava iz opcije, a morao je platiti premiju prodavatelju opcije.

1.2 Europska put opcija

Definicija 1.2. *Europska put opcija je ugovor koji svojem vlasniku daje pravo, ali ne i obvezu, da proda dogovorenu financijsku imovinu po točno unaprijed dogovorenoj cijeni u točno određenom trenutku u budućnosti.*

Postavlja se pitanje kada bi i zašto investitor htio postati vlasnikom europske put opcije. Ukoliko investitor očekuje pad cijena rizične financijske imovine na financijskom tržištu, on se želi zaštititi od nepovoljnog kretanja cijena i osigurati si fiksnu cijenu za prodaju te rizične financijske imovine u budućnosti. Prema tome, kupovina europske put opcije se čini kao dobar izbor za investitora. Kupovinom europske put opcije, od prodavatelja te opcije za iznos koji se naziva premija, investitor postaje vlasnikom europske put opcije. Dakle, vlasnik europske put opcije očekuje pad cijena na tržištu, te nižu tržišnu cijenu financijske imovine od cijene izvršenja u trenutku dospijeća opcije. Tada bi vlasnik opcije koristio svoje pravo iz opcije, te prodao financijsku imovinu po višoj cijeni (cijeni izvršenja) u trenutku dospijeća. Time bi vlasnik opcije profitirao u iznosu razlike cijene izvršenja i tržišne cijene u trenutku dospijeća. U suprotnom, kada bi tržišna cijena u trenutku dospijeća bila viša od cijene izvršenja, vlasnik opcije ne bi koristio svoje pravo jer može prodati financijsku imovinu po višoj tržišnoj cijeni. U oba slučaja premija ostaje prodavatelju opcije.

Mogući scenariji za vlasnika europske put opcije

Oznaku za vrijednost europske put opcije u trenutku izvršenja T označimo s C_T^{PUT}, te razmotrimo moguće scenarije za vlasnika europske put opcije.

Ukoliko imamo scenarij gdje je $S_T \geq K$ tj. tržišna cijena rizične financijske imovine, u trenutku dospijeća, viša je ili jednaka cijeni izvršenja vlasnik europske put opcije neće koristiti svoje pravo iz ugovora. Točnije, on neće prodati dogovorenu rizičnu financijsku imovinu po cijeni izvršenja jer ju može prodati po višoj cijeni na financijskom tržištu. U ovom slučaju, opcija je vlasniku bezvrijedna.

S druge strane, može vrijediti da je $S_T < K$ tj. da je tržišna cijena rizične financijske imovine, u trenutku dospijeća, niža od cijene izvršenja. U tom slučaju, vlasnik europske put opcije će iskoristiti svoje pravo tj. prodat će dogovorenu rizičnu financijsku imovinu po cijeni izvršenja i time zabilježiti zaradu u iznosu $K - S_T$.

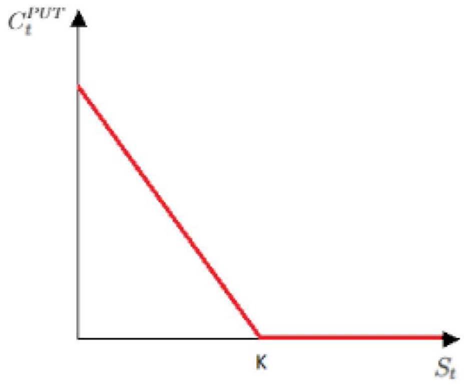
Prema navedenim slučajevima, vrijednost europske put opcije u trenutku izvršenja T je:

$$C_T^{PUT} = \begin{cases} K - S_T \text{, ako je } S_T < K \\ \quad 0 \quad \text{, ako je } S_T \geq K \end{cases}.$$

Slijedi da je:

$$C_T^{PUT} = max\ (\ 0\ ,\ K - S_T\ ) = (\ K - S_T\ )_+\ .$$

Pogledajmo vrijednost europske put opcije na sljedećem grafičkom prikazu:



Slika 1.2: Europska put opcija s cijenom izvršenja K

Pogledajmo na konkretnim primjerima neke od mogućih slučajeva za vlasnika europske put opcije:

Primjer 1.3. *Neka je dan primjer kada investitor očekuje pad cijene određene rizične financijske imovine na financijskom tržištu. Neka je trenutna vrijednost te rizične financijske imovine 400 u nekoj proizvoljnoj valuti. Investitor kupuje europsku put opciju od njezinog prodavatelja i time postaje vlasnikom europske put opcije. Neka je cijena izvršenja iz navedene opcije* $K = 350$*, te neka je dan dospijeća za tri mjeseca. Neka je tržišna cijena razmatrane rizične financijske imovine na dan dospijeća* $S_T = 300$*. Pitamo se je li investitor donio dobru odluku kupivši europsku put opciju i hoće li koristiti svoje pravo iz te opcije.*

Uočimo da je u navedenom primjeru, u trenutku dospijeća, tržišna cijena rizične financijske imovine niža od cijene izvršenja tj. $S_T < K$*. Cijena rizične financijske imovine je padala do trenutka dospijeća, što je investitor i očekivao. Za njega je navedena situacija pogodna i možemo reći da je donio dobru odluku kupivši europsku put opciju. U trenutku dospijeća on koristi svoje pravo te prodaje rizičnu financijsku imovinu po cijeni izvršenja od 350, dok je u tom trenutku tržišna cijena rizične financijske imovine 300. Time vlasnik opcije bilježi zaradu u iznosu* $K - S_T$*.*

Prodavatelj opcije je dužan vlasniku opcije omogućiti izvršenje njegovog prava, te ono što njemu ostaje je iznos premije koju je njemu vlasnik opcije platio kako bi si osigurao pravo prodaje rizične financijske imovine. Zanemarimo iznos premije za sada i u ovom primjeru.

Primjer 1.4. *Neka je dan primjer kada investitor očekuje pad cijene određene rizične financijske imovine na financijskom tržištu. Neka je trenutna vrijednost te rizične financijske imovine 400 u nekoj proizvoljnoj valuti. Investitor kupuje europsku put opciju od njezinog prodavatelja i time postaje vlasnikom europske put opcije. Neka je cijena izvršenja iz navedene opcije $K = 300$, te neka je dan dospijeća za tri mjeseca. Neka je tržišna cijena razmatrane rizične financijske imovine na dan dospijeća $S_T = 350$. Pitamo se je li investitor donio dobru odluku kupivši europsku put opciju i hoće li koristiti svoje pravo iz te opcije.*

Uočimo da je u navedenom primjeru, u trenutku dospijeća, tržišna cijena rizične financijske imovine viša od cijene izvršenja tj. $S_T > K$. Cijena rizične financijske imovine je padala do trenutka dospijeća, no ne intenzitetom kakav je investitor očekivao. Prema tome, za njega navedena situacija nije pogodna i možemo reći da je nije donio dobru odluku kupivši europsku put opciju. U trenutku dospijeća on ne koristi svoje pravo te ne prodaje rizičnu financijsku imovinu po cijeni izvršenja od 350 jer može prodati po tržišnoj cijeni od 300. U ovom slučaju, opcija je vlasniku bezvrijedna. Iako mu je opcija bezvrijedna, platio je premiju prodavatelju.

Kada bismo promatrali primjer za slučaj kada su, u trenutku dospijeća, tržišna cijena rizične financijske imovine i cijena izvršenja iz opcije jednake mogli bismo reći kako je vlasniku opcije ona bezvrijedna. Vlasnik opcije je zapravo na gubitku jer može prodati rizičnu financijsku imovinu po tržišnoj cijeni bez korištenja prava iz opcije, a morao je platiti premiju prodavatelju opcije.

Kako što je već rečeno, investitor mora prodavatelju opcije platiti određeni iznos kako bi kupio opciju i postao njezinim vlasnikom. Dakle, on posjedovanje prava na kupovinu ili prodaju određene rizične financijske imovine plaća u iznosu koji nazivamo premija. Naravno, premija bi trebala biti nekakv razuman iznos za investitora tj. kupca opcije ali i za prodavatelja opcije. Postavlja se pitanje kako odrediti takav iznos. Cilj je da niti jedan od njih ne trpi preveliki gubitak, ali jednako tako da ne postoji sigurna zarada ni za koga. Prema tome, zanima nas nearbitražna cijena opcija tj. iznos premije. Takav iznos ne znamo odrediti bez dodatnih uvjeta financijskog tržišta. U nastavku rada određivat ćemo ga u kontekstu financijskog tržišta na kojem nema arbitraže tj. zarade bez rizika.

U uvodu smo rekli kako su odgovor na to pitanje dali američki ekonomisti Black, Sholes i Merton osmislivši matematički model za vrednovanje opcija u neprekidnom vremenu.

Poglavlje 2

Vrednovanje vanilla opcija

Postoje razne mogućnosti za vrednovanje opcija. Jedna od mogućnosti se oslanja na stohastičko ponašanje cijena rizične financijske imovine. Ponašanje cijena rizične financijske imovine, u kratkom vremenskom razdoblju, osnova je vrednovanja izvedenica. Cijena bilo koje izvedenice funkcija je cijene vezane imovine, rizika i vremena. Promjene cijena rizične financijske imovine ponašaju se kao slučajne varijable. U tom je smislu za vrednovanje opcija najvažnije odrediti stohastički proces koji opisuje ponašanje cijena rizične financijske imovine ili neke druge vezane imovine.

U ovom poglavlju obradit ćemo nearbitražno vrednovanje europskih call i put opcija Blak Scholes Mertonovim modelom koje će nam biti čvrsta podloga za nearbitražno vrednovanje barijernih opcija u nastavku rada. Model se temelji na pretpostavci da je vrijednost rizične financijske imovine modelirana geometrijskim Brownovim gibanjem na financijskom tržištu u neprekidnom vremenu. Potrebno je prije svega uvesti osnovne pojmove i iskazati osnovne teoreme koji će nam biti potrebni pri radu.

2.1 Osnovni pojmovi

Robert Brown, škotski biolog, opisao je gibanje čestica u otopini. S pomoću mikroskopa je otkrio da se čestice peludi u tekućini gibaju "neprekidno nasumce". Matematički model kojim je opisano takvo gibanje nazivamo Brownovim gibanjem ili Wienerovim procesom.

Definicija 2.1. *Standardno Brownovo gibanje ili Wienerov proces* $(B_t,\ t \geq 0)$ *je slučajni proces na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ *koji ima sljedeća svojstva:*

1) $B_0 = 0$ *g.s.*

2) $B_t - B_s \sim N(0,\ t-s)$, $\forall\ t,\ s$ *takve da je* $t > s \geq 0$, *odnosno prirasti Brownovog gibanja na jednako dugim intervalima vremena su jednako distribuirani.*

3) $\forall k,\ 0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{k-1} < t_k$, *prirasti* $B_{t_0},\ B_{t_1} - B_{t_0},\ B_{t_2} - B_{t_1},\ \ldots,\ B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ *su nezavisni.*

Potrebne su nam i nekakve informacije vezane uz taj slučajni proces. Iz tog razloga definiramo pojam filtracije.

Definicija 2.2. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor. Za familju* $\sigma-$*algebri* $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *kažemo da je filtracija ako je ona rastuća familija* $\sigma-$*algebri, odnosno ako vrijedi* $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t,\ \forall\ s \leq t$.

Filtraciju bismo mogli interpretirati kao rastući slijed tj. niz informacija. Prirodna filtracija generirana slučajnim procesom $(X_t, t \geq 0)$ je familija $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ gdje $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s,\ s \in [0,t])$ sadrži sve informacije o slučajnom procesu $(X_t,\ t \geq 0)$ zaključno s trenutkom t. Jedan od takvih primjera je prirodna filtracija Brownovog gibanja definirana s $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s,\ s \in [0,t])$. Informacija u trenutku t sadrži informaciju o Brownovom gibanju do trenutka t.

Iskažimo i dokažimo da je Brownovo gibanje martingal.

Teorem 2.1. *Brownovo gibanje je martingal u neprekidnom vremenu s obzirom na svoju prirodnu filtraciju.*

Dokaz. Vrijedi sljedeće:

- Proces $(B_t, t \geq 0)$ je adaptiran u odnosu na svoju prirodnu filtraciju, tj. za svaki $t \geq 0$ je B_t $\mathcal{F}_t-$izmjeriva slučajna varijabla.

- $B_t \sim N(0,t)$ pa slijedi da je $E[B_t] < \infty$ za svaki $t \geq 0$.

- Neka je $s \in [0,t]$, tada je:

$$\begin{aligned} E[B_t|\mathcal{F}_s] &= E[B_t - B_s + B_s|\mathcal{F}_s] \\ &= E[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] + E[B_s|\mathcal{F}_s] \\ &= E[B_t - B_s] + B_s \\ &= B_s. \end{aligned}$$

Kod dokazivanja posljednjeg svojstva martingalnosti prvo koristimo svojstvo linearnosti uvjetnog očekivanja. Potom uočimo da je prirast Brownovog gibanja nezavisan od $\mathcal{F}_s$, te da je B_s slučajna varijabla koja je $\mathcal{F}_s-$izmjeriva. Znamo da je $E[B_t - B_s] = 0$, pa prema tome u zadnjem koraku dobivamo da je $E[B_t|\mathcal{F}_s] = B_s$.

Dakle, zadovoljena su sva tri svojstva martingala pa slijedi da je Brownovo gibanje martingal s obzirom na svoju prirodnu filtraciju.

$\square$

U uvodnom dijelu rada je rečeno da sva financijska imovina, koja pripada pojedincu ili poduzeću, čini njegov portfelj. Njega čine nerizična i rizična financijska imovina. Neka je promatran vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i filtracija $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in \{0, 1, \dots, T\}\}$. Neka je promatrana jedna nerizična financijska imovina tj. novac u domaćoj valuti. Oznaka za njezinu vrijednost u trenutku $t \geq 0$ je S_t^0. Neka je, uz nju, promatrano $d \in \mathbb{N}$ rizičnih financijskih imovina. Njihova vrijednost u trenutku $t \geq 0$ je vektor $(S_t^1, \dots, S_t^d)$. Vektor $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1, \dots, \varphi^d)$ koji prima vrijednosti iz $\mathbb{R}^{d+1}$ zove se portfelj gdje φ^i označava broj jedinica $i-$te financijske imovine, gdje je $i \in \{0, 1, \dots, d\}$. Uvedemo li vremensku ovisnost imamo portfelj $\varphi_t = (\varphi_t^0, \varphi_t^1, \dots, \varphi_t^d)$ u trenutku $t \geq 0$. U trenutku $t = 0$ investitor kreira portfelj $\varphi_1 = (\varphi_1^0, \varphi_1^1, \dots, \varphi_1^d)$. Njega posjeduje zaključno s trenutkom $t = 1$ kada ga može rebalansirati i time kreirati portfelj φ_2. Dakle, portfelj φ_{t+1} stvoren je u trenutku t na temelju informacija poznatih do trenutka t. Uočimo da je portfelj φ_{t+1} $\mathcal{F}_t-$izmjeriv, a portfelj $\varphi = (\varphi_t, t \in \{0, 1, \dots, T\})$ predvidiv u odnosu na filtraciju $\mathbb{F}$. Spomenuti portfelj φ nazivamo dinamički portfelj ili strategija trgovanja.

Vrijednost dinamičkog portfelja u $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ modeliramo slučajnim varijablama:

$$V_t(\varphi_t) = \sum_{k=0}^{d} \varphi_t^k S_t^k = \langle \varphi_t, S_t \rangle.$$

Dakle, vrijednost portfelja u trenutku t dana je skalarnim produktom slučajnih vektora φ_t i S_t.

Definicija 2.3. *Strategija trgovanja ili dinamički portfelj φ je samofinancirajući ako za sve vremenske trenutke $t \in \{0, 1, \dots, T-1\}$ vrijedi:*

$$\langle \varphi_t, S_t \rangle = \sum_{k=0}^{d} \varphi_t^k S_t^k = \sum_{k=0}^{d} \varphi_{t+1}^k S_t^k = \langle \varphi_{t+1}, S_t \rangle.$$

Definicija 2.4. *Strategija trgovanja ili dinamički portfelj φ je dopustiv ako je:*

1. *φ samofinancirajući*
2. *$V_t(\varphi_t) \geq 0, \ \forall t \in \{0, 1, \ldots, T\}$.*

Dopustiv dinamički portfelj φ je arbitraža ako dodatno vrijedi:

3. *$V_0(\varphi_0) = 0$*
4. *$P(V_T(\varphi_T) > 0) > 0$.*

Nadalje, potrebno je pokazati da Brownovo gibanje zadovoljava Markovljevo svojstvo tj. da je ono Markovljev proces. Njega možemo intuitivno shvatiti kao proces čije vjerojatnosno ponašanje u budućnosti, uvjetno na poznatu sadašnjost, ne ovisi o prošlosti. Za početak definirajmo Markovljevo svojstvo za procese s neprekidnim vremenom.

Definicija 2.5. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Za proces $X = (X_t, t \geq 0)$ na tom vjerojatnosnom prostoru kažemo da je Markovljev ako vrijedi da je:*

$$P(a < X_t \leq b | X_{t_n} = x_n, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \ldots, X_{t_1} = x_1) = P(a < X_t \leq b | X_{t_n} = x_n),$$

za proizvoljne $a, b \in \mathbf{R}$ takve da je $a < b$ i svaki izbor $t_1, \ldots, t_n, t \in T$ takve da je $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t$.

Sljedeću lemu navodimo bez dokaza. Tu ćemo lemu koristiti u dokazu teorema koji će reći da je Brownovo gibanje Markovljev proces.

Lema 2.1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i neka je $\mathcal{G}$ $\sigma-$podalgebra od $\mathcal{F}$. Pretpostavimo da je slučajna varijabla X $\mathcal{G}-$izmjeriva, te da je slučajna varijabla Y nezavisna od $\mathcal{G}$. Neka je $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Borelova funkcija i definirajmo $g(x) = E[h(x, Y)]$. Tada je*

$$E[h(X, Y)|\mathcal{G}] = g(X) \ g.s.$$

Iskažimo i dokažimo teorem koji kaže da je Brownovo gibanje Markovljev proces.

Teorem 2.2. *Neka je $(B_t, t \geq 0)$ Brownovo gibanje i neka je $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ prirodna filtracija za to Brownovo gibanje. Tada je Brownovo gibanje $(B_t, t \geq 0)$ Markovljev proces.*

Dokaz. Neka je $s \in [0,t]$ i $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borelova funkcija. Pokažimo da tada postoji Borelova funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da vrijedi

$$E[f(B_t)|\mathcal{F}_s] = g(B_s) \ g.s.$$

Vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned} E[f(B_t)|\mathcal{F}_s] &= E[f(B_t - B_s + B_s)|\mathcal{F}_s] \\ &= E[h(B_s, B_t - B_s)|\mathcal{F}_s] \\ &= g(B_s) \ g.s. \end{aligned}$$

Pri tome vrijedi da je $h(x,y) = f(x+y)$. Uočimo da je B_s slučajna varijabla koja je $\mathcal{F}_s-$izmjeriva, te da je prirast $B_t - B_s$ slučajna varijabla nezavisna od $\mathcal{F}_s$. Po *Lemi* 2.1. imamo da je

$$E[f(B_t)|\mathcal{F}_s] = g(B_s) \ g.s. \ ,$$

pri čemu je $g(x) = E[h(x, B_t - B_s)] = E[f(x + (B_t - B_s))]$ i time je pokazano Markovljevo svojstvo.

□

Pretpostavimo da cijene rizične financijske imovine zadovoljavaju Markovljevo svojstvo, te da su im prirasti nezavisni. Vrijednosti tj. cijene rizične financijske imovine ne možemo modelirati Brownovim gibanjem jer cijene ne mogu biti negativne, a to povlači da njihove promjene ne mogu biti normalno distribuirane. Iz tog razloga nam treba transformacija Brownovog gibanja kojom možemo modelirati cijene rizične financijske imovine. Odgovarajuću transformaciju nazivamo geometrijskim Brownovim gibanjem, kojeg smo spomenuli u motivaciji na početku ovog poglavlja.

Geometrijsko Brownovo gibanje služi kao model za kretanje cijena rizične financijske imovine. Predložio ga je američki ekonomist Paul Samuelson.

Definicija 2.6. *Neka su $\sigma, \alpha \in \mathbf{R}$ i $\sigma > 0$ te neka je $(B_t, t \geq 0)$ Brownovo gibanje. Geometrijsko Brownovo gibanje je slučajni proces $(S_t, t \geq 0)$ gdje je*

$$S_t = S_0 \ e^{\ \sigma B_t + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t}$$

koji je jako rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe $dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dB_t$.

Ukoliko se cijene rizične financijske imovine modeliraju geometrijskim Brownovim gibanjem pripadni log-povrati su normalno distribuirani, te međusobno nezavisni zbog nezavisnosti prirasta Brownovog gibanja. Imamo sljedeće:

$$\ln \frac{S_{t+dt}}{S_t} = \sigma(B_{t+dt} - B_t) + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)dt \sim N((\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)dt, \sigma^2 dt).$$

Stohastičku diferencijalnu jednadžbu možemo zapisati i u obliku koji nazivamo njezinom naivnom interpretacijom:

$$\frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t} = \alpha dt + \sigma(B_{t+dt} - B_t)$$

gdje s lijeve strane jednakosti imamo relativni povrat u $t + dt$ s obzirom na cijenu u t. Ukoliko izračunamo očekivanje i varijancu na obje strane, uz činjenicu da je $(B_t, t \geq 0)$ Brownovo gibanje, imamo sljedeće:

$$E\left[\frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t}\right] = E[\alpha dt + \sigma(B_{t+dt} - B_t)] = \alpha dt + \sigma E[B_{t+dt} - B_t] = \alpha dt,$$

$$Var\left(\frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t}\right) = Var(\alpha dt + \sigma(B_{t+dt} - B_t)) = \sigma^2 Var(B_{t+dt} - B_t) = \sigma^2 dt.$$

Prema tome, parametre σ i α interpretiramo kao standardnu devijaciju povrata i očekivanu (srednju) stopu povrata. Parametar σ zovemo volatilnost i on ima veliko značenje na financijskom tržištu kao pokazatelj rizika.

Kako je ranije rečeno, cilj nam je odrediti nearbitražnu vrijednost tj. cijenu europske call, odnosno put opcije. Za određivanje nearbitražne cijene opcije, odnosno razumne cijene s kojom bi bili zadovoljni i kupac i prodavatelj opcije potrebne su nam buduće diskontirane vrijednosti. Dakle, cijena opcije koju je potrebno platiti je očekivana diskontirana vrijednost opcije na sadašnje vrijeme uz sve dostupne informacije o financijskom tržištu do sadašnjeg trenutka. Tu cijenu odredit ćemo Black Scholes Mertonovim modelom. Koristit ćemo vjerojatnost neutralnu na rizik ili tzv. ekvivalentnu martingalnu mjeru.

Ako bismo promatrali nerizičnu financijsku imovinu i poznavali efektivnu kamatnu stopu, znali bismo njezine buduće vrijednosti. Međutim, promatramo rizičnu financijsku imovinu čije buduće vrijednosti ne znamo i kao pomoć nam je potrebna vjerojatnost neutralna na rizik. Želimo da se u budućnosti rizična financijska imovina, uvjetno na poznate informacije o njezinoj vrijednosti u svim trenucima uključujući i sadašnji, očekivano ponaša kao nerizična financijska imovina. Kako ćemo promatrati buduće diskontirane vrijednosti, zapravo želimo da se one u smislu očekivanja ponašaju kao nerizična financijska imovina. Prema tome, diskontiranje je potrebno provesti uz vjerojatnost neutralnu na rizik.

Pronalaženje vjerojatnosti neutralne na rizik tj. ekvivalentne martingalne mjere nije jednostavno. Girsanovljev teorem, koji će biti iskazan u nastavku, nam garantira njezino postojanje i daje njezinu definiciju u određenim uvjetima.

Definicija 2.7. *Vjerojatnosna mjera P^* na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ je neutralna na rizik ako za sve $t \in \{0, \dots, T-1\}$ i za sve $i \in \{0, \dots, d\}$ vrijedi:*

$$E^*[\tilde{S}^i_{t+1} | \mathcal{F}_t] = \tilde{S}^i_t$$

tj. ako je s obzirom na P^* slučajni proces diskontiranih cijena financijske imovine $(\tilde{S}_t, t \in \{0, 1, \dots, T\})$, gdje je $\tilde{S}_t = (\tilde{S}^0_t, \dots, \tilde{S}^d_t)$, martingal u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \in \{0, 1, \dots, T\})$.

Ekvivalentno, P^* je neutralna na rizik ako su diskontirane cijene financijske imovine martingali u odnosu na P^*.

Definicija 2.8. *Neka su P i P^* dvije vjerojatnosti na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$. Kažemo da su P i P^* ekvivalentne ako $\forall A \in \mathcal{F}$ takav da je $P(A) = 0$ vrijedi $P(A) = P^*(A)$ i pišemo $P(A) \approx P^*(A)$.*

Dakle, vjerojatnosti P^* i P su ekvivalentne vjerojatnosti jer se podudaraju na skupovima vjerojatnosti nula. Napravit ćemo zamjenu mjere kako bismo omogućili promjenu distribucije slučajne varijable.

Neka je $(\ \Omega,\ \mathcal{F},\ P\ )$ vjerojatnosni prostor te neka je Z nenegativna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\ \Omega,\ \mathcal{F},\ P\ )$ takva da je $E[Z] = 1$. Definiramo $P^* : \mathcal{F} \to [0, 1]$ na sljedeći način:

$$P^*(A) = \int_A Z(\omega) dP = E[I_A Z],\ A \in \mathcal{F}.$$

Tada je P^* vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$. Ako je $P(A) = 0$, onda je i $P^*(A) = 0$. Ako promatramo slučajnu varijablu X na $(\Omega, \mathcal{F})$, možemo računati očekivanje s obzirom na obje navedene vjerojatnosti. Za navedena očekivanja i slučajnu varijablu X vrijedi $E^*[X] = E[XZ]$. Opisana procedura naziva se zamjena mjere.

Iskažimo teorem koji nam garantira postojanje ekvivalentne martingalne mjere u određenim uvjetima.

Teorem 2.3. *(Girsanovljev teorem) Neka je $(B_t, t \in [0,T])$ Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, te neka je $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \in [0,T])$ njegova prirodna filtracija. Tada je proces $(X_t, t \in [0,T])$,*

$$X_t = e^{-qB_t - \frac{1}{2}q^2 t}, \ q \in \mathbf{R}$$

martingal u odnosu na $\mathbb{F}$.

Relacija $P^*(A) = E[X_t I_A]$ za $A \in \mathcal{F}$ definira vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$ koja je ekvivalentna vjerojatnosti P, te je u odnosu na P^* proces $(\tilde{B}_t, t \in [0,T])$, $\tilde{B}_t = B_t + qt$, $q \in \mathbf{R}$ Brownovo gibanje adaptirano na $\mathbb{F}$.

Pogledajmo u nastavku kako se računa cijena europske call opcije pomoću vjerojatnosti neutralne na rizik tj. ekvivalentne martingalne mjere.

2.2 Black Scholes Mertonova formula

Izvest ćemo cijenu europske call opcije u Black Scholes Mertonovom modelu s konstantnom volatilnošću σ i konstantnom kamatnom stopom r. Nearbitražna cijena navedene opcije bila bi očekivana cijena rizične financijske imovine diskontirana na sadašnju vrijednost uz dostupne informacije do sadašnjeg trenutka, odnosno

$$C_t^{CALL} = E^* [\ e^{-r(T-t)}\ C_T^{CALL} \mid \mathcal{F}_t\ ].$$

Iz tog izraza slijedi niz jednakosti:

$$\begin{aligned} C_t^{CALL} &= E^* [\ e^{-r(T-t)}\ (S_T - K)_+ \mid \mathcal{F}_t\ ] \\ &= E^* [\ e^{-r(T-t)}\ (S_0 e^{\sigma B_T + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)T} - K)_+ \mid \mathcal{F}_t\ ] \\ &= E^* [\ e^{-r(T-t)}\ (S_0 e^{\sigma(B_T + B_t - B_t) + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)(T+t-t)} - K)_+ \mid \mathcal{F}_t\ ] \\ &= E^* [\ e^{-r(T-t)}\ (S_t e^{\sigma(B_T - B_t) + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} - K)_+ \mid \mathcal{F}_t\ ]. \end{aligned}$$

Proces cijena rizične financijske imovine S_t je Markovljev proces, jer je transformacija Brownovog gibanja. Dakle, neposredna budućnost procesa neovisna je o prošlosti i ovisi samo o sadašnjosti. Prema tome, S_t ovisi samo o B_t. Kako je $\mathcal{F}_t = \sigma(S_1, S_2, \ldots, S_t)$, dovoljno je uvjetovati na $\sigma(S_t)$ umjesto $\mathcal{F}_t$.

Definirajmo funkciju $c(t,x)$ na sljedeći način:

$$c(t,x) \ = \ E^*[e^{-r(T-t)} \ (\ xe^{\sigma(B_T-B_t)+(\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} - K \ )_+|\mathcal{F}_t].$$

Tada je $c(t,x) = C_t^{CALL}$.

Ukoliko stavimo $\tilde{B} = B_u + \frac{\alpha-r}{\sigma}u$, onda je prema Girsanovljevom teoremu uz $q = \frac{\alpha-r}{\sigma}$ proces $(\tilde{B}_t, t \in [0,T])$ Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P^*)$ gdje je vjerojatnosna mjera zadana s $P^*(A) = E[I_A S_t]$ za $A \in \mathcal{F}$. Vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_u &= B_u + \frac{\alpha-r}{\sigma}u \\
\sigma\tilde{B}_u &= \sigma B_u + (\alpha-r)u \\
\sigma(\tilde{B}_T - \tilde{B}_t) &= \sigma(B_T - B_t) + (\alpha-r)(T-t).
\end{aligned}$$

Prema tome, imamo:

$$c(t,x) \ = \ E^*[(xe^{\sigma(\tilde{B}_T-\tilde{B}_t)-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} - e^{-r(T-t)}K)_+|\mathcal{F}_t].$$

Primjetimo kako se slučajna varijabla u eksponentu nalazi na istom vjerojatnosnom prostoru kao i promatrano matematičko očekivanje, pa se može dalje računati po definiciji matematičkog očekivanja. Uočimo da je ,uz P^*, $\tilde{B}_T - \tilde{B}_t \sim N(0, T-t)$. Stoga je promatrana slučajna varijabla čije je očekivanje potrebno izračunati njezina transformacija. Slijedi:

$$c(t,x) \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} (xe^{\sigma y-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} - e^{-r(T-t)}K)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} e^{-\frac{y^2}{2(T-t)}} dy.$$

Podintegralna funkcija je veća od nule za one $y \in \mathbf{R}$ za koje je:

$$xe^{\sigma y-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} > e^{-r(T-t)}K.$$

Nakon sređivanja izraza, vrijedi:

$$y > -\frac{1}{\sigma}(\ln\frac{x}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)).$$

Ukoliko desnu stranu izraza nazovemo d_2, preostaje nam izračunati

$$c(t,x) \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{-d_2}^{\infty} (xe^{\sigma y-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} - e^{-r(T-t)}K) e^{-\frac{y^2}{2(T-t)}} dy.$$

Korištenjem supstitucije $y = -z$ imamo

$$c(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} x \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{1}{2(T-t)}(z+\sigma(T-t))^2} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} K e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{z^2}{2(T-t)}} dz.$$

Uvedimo sljedeće oznake:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} x \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{1}{2(T-t)}(z+\sigma(T-t))^2} dz \\ I_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} K e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{z^2}{2(T-t)}} dz \end{aligned}$$

Prema tome, imamo $c(t,x) = I_1 - I_2$. U nastavku ćemo izračunati integrale I_1 i I_2, pri čemu ćemo koristiti supstituciju $\frac{z+\sigma(T-t)}{\sqrt{T-t}} = u$:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} x \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{1}{2(T-t)}(z+\sigma(T-t))^2} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} x \int_{-\infty}^{\frac{d_2+\sigma(T-t)}{\sqrt{T-t}}} e^{-\frac{u^2}{2}} \sqrt{T-t}\, du \\ &= x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{d_2+\sigma(T-t)}{\sqrt{T-t}}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= x\, \Phi\left(\frac{d_2+\sigma(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) \\ &= x\, \Phi\left(\frac{d_1}{\sqrt{T-t}}\right) \end{aligned}$$

gdje je Φ funkcija distribucije standardne normalne slučajne varijable, te vrijedi:

$$\begin{aligned} d_2 + \sigma(T-t) &= \frac{1}{\sigma}\left(\ln\frac{x}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma^2(T-t)\right) \\ &= \frac{1}{\sigma}\left(\ln\frac{x}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right) \\ &= d_1. \end{aligned}$$

Izračunajmo integral I_2:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} K e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{z^2}{2(T-t)}} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} K e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\frac{d_2}{\sqrt{T-t}}} e^{-\frac{u^2}{2}} \sqrt{T-t}\, du \\
&= K e^{-r(T-t)} \Phi\left(\frac{d_2}{\sqrt{T-t}}\right).
\end{aligned}$$

Nakon računanja integrala imamo:

$$c(t,x) = x\ \Phi\left(\frac{d_1}{\sqrt{T-t}}\right) - K e^{-r(T-t)} \Phi\left(\frac{d_2}{\sqrt{T-t}}\right).$$

Prema tome, cijenu europske call opcije u trenutku t modeliramo slučajnom varijablom

$$C_t^{CALL} = S_t\ \Phi\left(\frac{d_1}{\sqrt{T-t}}\right) - K e^{-r(T-t)} \Phi\left(\frac{d_2}{\sqrt{T-t}}\right).$$

Vrijednosti europske call opcije i europske put opcije povezuje identitet koji se naziva call-put paritet. On definira njihov odnos za istu financijsku imovinu, isti trenutak dospijeća, te istu cijenu izvršenja. Stoga, izraz za call-put paritet dan je s:

$$\begin{aligned}
C_T^{CALL} - C_T^{PUT} &= (S_T - K)_+ - (K - S_T)_+ \\
&= \begin{cases} S_T - K\,, & S_T > K \\ 0\,, & S_T \le K \end{cases} - \begin{cases} 0\,, & S_T > K \\ K - S_T\,, & S_T \le K \end{cases} \\
&= \begin{cases} S_T - K\,, & S_T > K \\ 0\,, & S_T \le K \end{cases} \\
&= S_T - K.
\end{aligned}$$

U nastavku ćemo, koristeći call-put paritet, odrediti cijenu europske put opcije:

$$
\begin{aligned}
C_t^{CALL} - C_t^{PUT} &= E^*[e^{-r(T-t)}(C_T^{CALL} - C_T^{PUT})|\mathcal{F}_t] \\
&= E^*[e^{-r(T-t)}(S_T - K)|\mathcal{F}_t] \\
&= E^*[e^{-r(T-t)}S_T|\mathcal{F}_t] - E^*[e^{-r(T-t)}K|\mathcal{F}_t] \\
&= S_t - Ke^{-r(T-t)}.
\end{aligned}
$$

Posljednja jednakost slijedi iz toga što je:

$$
\begin{aligned}
E^*[e^{-r(T-t)}S_T|\mathcal{F}_t] &= E^*[S_t e^{\sigma(\tilde{B}_T - \tilde{B}_t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}|\mathcal{F}_t] \\
&= S_t E^*[e^{\sigma(\tilde{B}_T - \tilde{B}_t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}] \\
&= S_t e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} \\
&= S_t.
\end{aligned}
$$

Uočimo da je $e^{\sigma(\tilde{B}_T - \tilde{B}_t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} \sim logN(-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t), \sigma^2(T-t))$ uz vjerojatnosnu mjeru P^*.

Iz dobivenih izraza za call-put paritet i cijene europske call opcije C_t^{CALL}, te korištenje svojstava simetričnosti funkcije gustoće standardne normalne slučajne varijable slijedi izraz za cijenu europske put opcije:

$$
\begin{aligned}
C_t^{PUT} &= C_t^{CALL} - S_t + Ke^{-r(T-t)} \\
&= S_t\Phi\left(\frac{d_1}{\sqrt{T-t}}\right) - Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{d_2}{\sqrt{T-t}}\right) - S_t + Ke^{-r(T-t)} \\
&= -S_t\left(1 - \Phi\left(\frac{d_1}{\sqrt{T-t}}\right)\right) + Ke^{-r(T-t)}\left(1 - \Phi\left(\frac{d_2}{\sqrt{T-t}}\right)\right) \\
&= Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(-\frac{d_2}{\sqrt{T-t}}\right) - S_t\Phi\left(-\frac{d_1}{\sqrt{T-t}}\right).
\end{aligned}
$$

Dobivene izraze nazivamo Black Scholes Mertonovim formulama za određivanje cijena rizične financijske imovine na financijskom tržištu u neprekidnom vremenu. Te će nam formule koristiti kao podloga za vrednovanje barijernih opcija u nastavku rada.

Poglavlje 3

Barijerne opcije

Barijerne opcije (opcije s barijerom) su vrsta egzotičnih opcija na neku financijsku imovinu čija validnost ovisi o kretanju cijena određene financijske imovine odnosno dostizanju određenog nivoa cijene tj. barijere. Svrstavaju se u egzotične opcije jer su složenije od američkih i europskih opcija. Nakon dostizanja barijere opcija će biti važeća ili nevažeća, ovisno o terminima u ugovoru. Možemo reći da je barijera fiksna cijena po kojoj se ugovor aktivira ili deaktivira. Prema tome, razlikujemo dvije vrste barijernih opcija. To su knock-in i knock-out barijerne opcije.

Knock-in barijerna opcija je ugovor koji postaje važeći kada cijena financijske imovine dosegne barijeru. Tada postaje važeća vanilla opcija. S druge strane, knock-out barijerna opcija je ugovor koji prestaje biti važeći kada cijena financijske imovine dosegne barijeru. Dakle, nakon dostizanja barijere ugovor je nevažeći. Prije dostizanja barijere je važeća vanilla opcija.

Postavlja se pitanje zašto bi se investitor odlučio za kupovinu barijerne opcije, a ne vanilla opcije. Glavni razlog je niža cijena premije za barijerne opcije. Naime, dodatak barijere kod opcija povećava rizik za kupca opcije. No, ako kupac opcije vjeruje npr. da će neka rizična financijska imovina čija je trenutna vrijednost 100 u nekoj proizvoljnoj valuti, porasti u narednih šest mjeseci ali da neće doseći razinu višu od 150 on može kupiti barijernu opciju za nižu premiju od vanilla opcije.

Kako je već rečeno barijerne opcije, prije nego cijena financijske imovine dosegne barijeru ili nakon što cijena financijske imovine dosegne barijeru, jesu vanilla opcije. Dakle, prije ili nakon dosezanja barijere opcije mogu biti američke ili europske. Kako smo se ranije u radu ograničili na europske opcije, njih ćemo koristiti i u ovom poglavlju. Imamo četiri kombinacije, prema prethodnoj podjeli barijernih opcija na knock-in i knock-out barijerne opcije, to su knock-in call, knock-out call, knock-in put i knock-out put opcije. S obzirom na odnos barijere i početne vrijednosti financijske imovine razlikujemo down i up barijerne opcije. Kod down opcija barijera je ispod početne vrijednosti financijske imovine, dok je kod up opcija barijera iznad početne vrijednosti financijske imovine. Uočimo, kako zapravo imamo osam kombinacija kod barijernih opcija. To su down-and-in call, up-and-in call, down-and-out call, up-and-out call, down-and-in put, up-and-in put, down-and-out put i up-and-out put opcija. Pogledajmo navedene opcije detaljnije.

3.1 Knock-in call i put barijerne opcije

Knock-in call te put opcije počinju vrijediti nakon što cijena rizične financijske imovine dosegne barijeru. Dok cijena ne dosegne barijeru, opcije su vlasniku nevrijedeće. Možemo reći da su mu opcije beskorisne dok cijena ne dosegne barijeru. Nakon što cijena dosegne barijeru, opcija postaje europska call odnosno put opcija i time vlasnik opcije ima pravo kupiti odnosno prodati rizičnu financijsku imovinu po cijeni izvršenja na dan dospijeća. Ranije smo spomenuli podjelu s obzirom na odnos barijere i početne vrijednosti financijske imovine. Prema tome, razlikujemo sljedeće vrste barijernih opcija:

- down-and-in call i put opcija - barijera je ispod početne vrijednosti rizične financijske imovine
- up-and-in call i put opcija - barijera je iznad početne vrijednosti rizične financijske imovine.

Pogledajmo na konkretnim primjerima neke od navedenih opcija.

Primjer 3.1. *Up-and-in call opcija*

Recimo da investitor očekuje rast cijene određene rizične financijske imovine na financijskom tržištu, do određenog nivoa cijene. On želi kupiti rizičnu financijsku imovinu, no prije svega se želi osigurati od prevelikog rasta cijene. Neka je trenutna tržišna cijena rizične financijske imovine 300 u određenoj valuti. Investitor odlučuje kupiti up-and-in call opciju od njezinog prodavatelja. Neka je barijera postavljena na 400, a cijena izvršenja opcije 350 na dan dospijeća. Pitamo se je li investitor donio dobru odluku kupivši up-and-in call opciju i hoće li koristiti svoje pravo iz te opcije.

Navedena opcija počinje vrijediti nakon što cijena rizične financijske imovine dosegne barijeru od 400. Pretpostavimo da je cijena dosegnula barijeru. Cijena se kretala prema očekivanjima investitora. Sada, vlasniku, opcija postaje vrijedeća europska call opcija i time on ima pravo kupiti rizičnu financijsku imovinu po cijeni izvršenja od 350, na dan dospijeća. Vlasnik opcije koristi svoje pravo i kupuje rizičnu financijsku imovinu *po cijeni izvršenja od 350, dok je njezina tržišna cijena viša. Time vlasnik opcije bilježi zaradu i možemo reći da je donio dobru odluku kupivši up-and-in call opciju. Za posjedovanje prava na kupovinu morao je prodavatelju opcije platiti premiju. Mogao se odlučiti i za kupovinu europske call opcije po višoj premiji, no kako je vjerovao da će cijena porasti samo do određene razine kupio je jeftiniju opciju.*

Da cijena rizične financijske imovine nije dosegnula barijeru, up-and-in call opcija bi vlasniku bila nevrijedeća. Tada bi vlasnik opcije bio na gubitku za iznos premije koju je platio prodavatelju opcije. Za takav slučaj moguća povoljna opcija za investitora bila bi up-and-out call opcija, ovisno o tome kakvim intenzitetom bi rasla cijena rizične financijske imovine. Mogao bi kupiti rizičnu financijsku imovinu na dan dospijeća po cijeni izvršenja ukoliko bi mu to odgovaralo u ovisnosti o tržišnoj cijeni na dan dospijeća. Naravno, riskirao bi i s takvom opcijom.

Primjer 3.2. *Down-and-in put opcija*

Recimo da investitor očekuje pad cijene određene rizične financijske imovine na financijskom tržištu, do određenog nivoa cijene. On želi prodati rizičnu financijsku imovinu, no prije svega se želi osigurati od prevelikog pada cijene. Neka je trenutna tržišna cijena rizične financijske imovine 450 u određenoj valuti. Investitor odlučuje kupiti down-and-in put opciju od njezinog prodavatelja. Neka je barijera postavljena na 400, a cijena izvršenja opcije 350 na dan dospijeća. Neka je tržišna cijena rizične financijske imovine u trenutku dospijeća 300. Pitamo se je li investitor donio dobru odluku kupivši down-and-in put opciju i hoće li koristiti svoje pravo iz te opcije.

Navedena opcija počinje vrijediti nakon što cijena rizične financijske imovine dosegne barijeru od 400 tj. u ovom slučaju dok cijena ne padne ispod 400. Cijena se kretala prema očekivanjima investitora. Sada, vlasniku, opcija postaje vrijedeća europska put opcija i time on ima pravo prodati rizičnu financijsku imovinu po cijeni izvršenja od 350, na dan dospijeća. Vlasnik opcije koristi svoje pravo i prodaje rizičnu financijsku imovinu po cijeni izvršenja od 350, dok je njezina tržišna cijena 300. Time vlasnik opcije bilježi zaradu i možemo reći da je donio dobru odluku kupivši down-and-in put opciju. Za posjedovanje prava na kupovinu morao je prodavatelju opcije platiti premiju. Mogao se odlučiti i za kupovinu europske put opcije po višoj premiji, no kako je vjerovao da će cijena padati samo do određene razine kupio je jeftiniju opciju.

Da cijena rizične financijske imovine nije dosegnula iznos barijere, down-and-in put opcija bi vlasniku bila nevrijedeća. Tada bi vlasnik opcije bio na gubitku za iznos premije koju je platio prodavatelju opcije.

3.2 Knock-out call i put barijerne opcije

Knock-out call odnosno put opcija vrijedi dok cijena rizične financijske imovine ne dosegne barijeru, nakon što cijena dosegne barijeru opcija je nevrijedeća. Prije nego cijena dosegne barijeru ona je europska call odnosno put opcija i time vlasnik opcije ima pravo kupiti odnosno prodati rizičnu financijsku imovinu po cijeni izvršenja na dan dospijeća. Kako kod knock-in call i put barijernih opcija, imamo podjelu s obzirom na odnos barijere i početne vrijednosti financijske imovine. Prema tome, razlikujemo sljedeće vrste barijernih opcija:

- down-and-out call i put opcija - barijera je ispod početne vrijednosti rizične financijske imovine
- up-and-out call i put opcija - barijera je iznad početne vrijednosti rizične financijske imovine

Pogledajmo na konkretnom primjeru jednu od navedenih opcija.

Primjer 3.3. *Up-and-out call opcija*

Recimo da investitor očekuje rast cijene određene rizične financijske imovine na financijskom tržištu, do određenog nivoa cijene. On želi kupiti rizičnu financijsku imovinu, no prije svega se želi osigurati od prevelikog rasta cijene. Neka je trenutna tržišna cijena rizične financijske imovine 200 u određenoj valuti. Investitor odlučuje kupiti up-and-out call opciju od njezinog prodavatelja. Neka je barijera postavljena na 400, cijena izvršenja opcije 300 na dan dospijeća, te tržišna cijena u tom trenutku 350. Pitamo se je li investitor donio dobru odluku kupivši up-and-out call opciju i hoće li koristiti svoje pravo iz te opcije.

Navedena opcija vrijedi sve dok cijena rizične financijske imovine ne dosegne barijeru od 400. Cijena rizične financijske imovine nije dosegnula barijeru. Cijena se kretala prema očekivanjima investitora. Vlasniku je opcija vrijedeća europska call opcija i time on ima pravo kupiti rizičnu financijsku imovinu po cijeni izvršenja od 300, na dan dospijeća. Vlasnik opcije koristi svoje pravo i kupuje rizičnu financijsku imovinu po cijeni izvršenja od 300, dok je njezina tržišna cijena viša. Time vlasnik opcije bilježi zaradu i možemo reći da je donio dobru odluku kupivši up-and-out call opciju. Za posjedovanje prava na kupovinu morao je prodavatelju opcije platiti premiju. Mogao se odlučiti i za kupovinu europske call opcije po višoj premiji, no kako je vjerovao da će cijena porasti samo do određene razine kupio je jeftiniju opciju. Da je cijena rizične financijske imovine dosegnula barijeru, up-and-out call opcija bi vlasniku bila nevrijedeća.

Poglavlje 4

Vrednovanje barijernih opcija

U prethodnom poglavlju izveli smo formule za nearbitražno vrednovanje europskih call i put opcija Black Scholes Mertonovim modelom. Napomenuli smo kako će nam upravo ti izvodi biti podloga za određivanje nearbitražne cijene barijernih opcija. Izvod formule za nearbitražno vrednovanje barijernih opcija prati izvod nearbitražnog vrednovanja europskih call i put opcija. No, ono što je kod barijernih opcija drugačije jest uključivanje barijere. Vrijednosti barijernih opcija mogu se izračunati na analogan način u Black Scholes Mertonovom modelu, kao što je to bilo kod europskih call i put opcija. Prema tome, neka nam i dalje vrijede sve pretpostavke Black Scholes Mertonovog modela.

Promotrimo dvije barijerne opcije koje su istog tipa, ali je jedna knock-in opcija dok je druga knock-out opcija. Neka su to knock-in call opcija i knock-out call opcija. Knock-in call opcija počinje vrijediti nakon što cijena rizične financijske imovine dosegne barijeru i tada postaje europska call opcija. Prije dostizanja barijere ona je nevrijedeća. Knock-out call opcija vrijedi dok cijena rizične financijske imovine ne dosegne barijeru, za to vrijeme ona je europska call opcija. Nakon dosezanja barijere ona je nevrijedeća. Prema tome, možemo uočiti da je knock-out call opcija nevrijedeća dok knock-in call opcija vrijedi i obrnuto. Stoga, vidimo da vrijedi identitet koji nazivamo in-out paritet. Vrijednost europske call opcije jednaka je sumi knock-in call opcije i knock-out call opcije.

Općenito, navedeni identitet nam govori da je vrijednost vanilla opcije jednaka sumi vrijednosti odgovarajućih knock-in i knock-out opcija. Vrijedi:

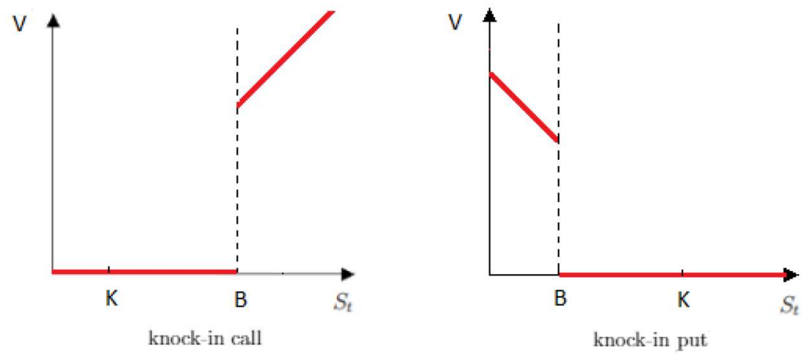
$$\text{Vanilla opcija} = \text{odgovarajuća knock-in opcija} + \text{odgovarajuća knock-out opcija.}$$

Kako barijerne opcije razlikujemo i prema položaju barijere, uz postojeće oznake, uvedimo oznake za vrijednosti barijernih opcija u trenutku t i pogledajmo moguće slučajeve in-out pariteta:

	up(down)-and-out opcija	up(down)-and-in opcija	in-out paritet
call	C_t^{CUO}	C_t^{CUI}	$C_t^{CALL} = C_t^{CUO} + C_t^{CUI}$
call	C_t^{CDO}	C_t^{CDI}	$C_t^{CALL} = C_t^{CDO} + C_t^{CDI}$
put	C_t^{PUO}	C_t^{PUI}	$C_t^{PUT} = C_t^{PUO} + C_t^{PUI}$
put	C_t^{PDO}	C_t^{PDI}	$C_t^{PUT} = C_t^{PDO} + C_t^{PDI}$

Vrijednosti barijernih opcija u trenutku t, pri čemu su K cijena izvršenja i B iznos barijere, prikazane su u nastavku.

Barijerne knock-in call odnosno put opcije su vrijedeće nakon što cijena dosegne iznos barijere, te tada postaju europske call odnosno put opcije. Prije dosezanja cijene barijere te opcije su nevrijedeće. Cijena knock-in call opcije jednaka je cijeni europske call opcije tek kada cijena dosegne iznos barijere B, do tog trenutka njezina je vrijednost jednaka nuli. Isto vrijedi za knock-in put opciju. Označimo s V vrijednost opcije, te pogledajmo navedene grafičke prikaze:



Slika 4.1: Barijerne knock-in call i put opcije

Kako barijerne knock-in call odnosno put opcije razlikujemo i prema položaju barijere, imamo sljedeće vrijednosti opcija:

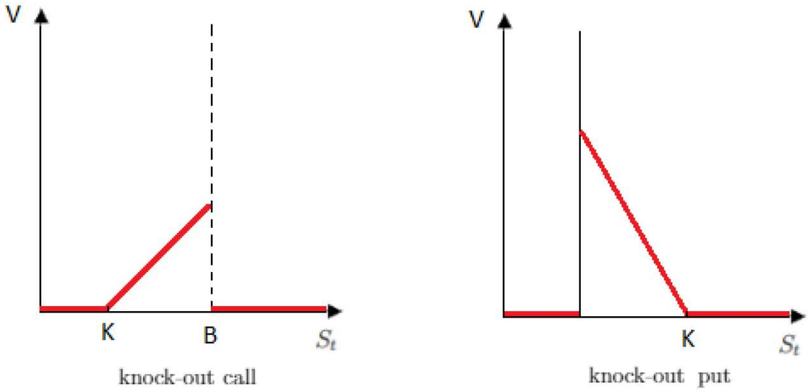
$$C_t^{CUI} = \begin{cases} max(S_t - K, 0) & \text{, ako je } S_t \geq B \text{ za svaki } t \in [0, T] \\ 0 & \text{, inače.} \end{cases}$$

$$C_t^{CDI} = \begin{cases} max(S_t - K, 0)\,, & \text{ako je } S_t \leq B \text{ za svaki } t \in [0,T] \\ \quad 0 & , \text{inače.} \end{cases}$$

$$C_t^{PUI} = \begin{cases} max(K - S_t, 0)\,, & \text{ako je } S_t \geq B \text{ za svaki } t \in [0,T] \\ \quad 0 & , \text{inače.} \end{cases}$$

$$C_t^{PDI} = \begin{cases} max(K - S_t, 0)\,, & \text{ako je } S_t \leq B \text{ za svaki } t \in [0,T] \\ \quad 0 & , \text{inače.} \end{cases}$$

Barijerne knock-out call odnosno put opcije su vrijedeće prije nego cijena dosegne iznos barijere, te su do dostizanja iznosa barijere europske call odnosno put opcije. Njihova vrijednost, prije dosezanja barijere, jednaka je vrijednosti europskih call odnosno put opcija. Nakon dosezanja barijere vrijednost tih opcija jednaka je nuli. Pogledajmo navedeno na grafičkom prikazu:



Slika 4.2: Barijerne knock-out call i put opcije

Kako barijerne knock-out call odnosno put opcije razlikujemo i prema položaju barijere, imamo sljedeće vrijednosti opcija:

$$C_t^{CUO} = \begin{cases} max(S_t - K, 0)\,, & \text{ako je } S_t < B \text{ za svaki } t \in [0,T] \\ \quad 0 & , \text{inače.} \end{cases}$$

$$C_t^{CDO} = \begin{cases} max(S_t - K, 0)\,, & \text{ako je } S_t > B \text{ za svaki } t \in [0,T] \\ \quad 0 & , \text{inače.} \end{cases}$$

$$C_t^{PUO} = \begin{cases} max(K - S_t, 0)\,, & \text{ako je } S_t < B \text{ za svaki } t \in [0,T] \\ \quad 0 & , \text{inače.} \end{cases}$$

$$C_t^{PDO} = \begin{cases} max(K - S_t, 0)\,, \text{ ako je } S_t > B \text{ za svaki } t \in [0, T] \\ \quad 0 \qquad\qquad\quad\;\, , \text{ inače.} \end{cases}$$

Pogledajmo detaljnije knock-in i knock-out call opcije radi određivanja njihovih cijena.

4.1 Vrednovanje barijernih call opcija

Kao što je ranije rečeno, knock-in opcije su opcije koje počinju vrijediti nakon što cijena rizične financijske imovine dosegne iznos barijere, a knock-out opcije su one opcije koje vrijede dok cijena rizične financijske imovine ne dosegne iznos barijere. Iznos barijere može biti ispod početne vrijednosti rizične financijske imovine (down) ili iznad početne vrijednosti rizične financijske imovine (up). Investitor se odlučuje za kupovinu, neke od, barijernih call opcija ukoliko si želi osigurati pravo kupovine rizične financijske imovine po cijeni izvršenja K u trenutku dospijeća T. Dakle, mogućnosti koje imamo su:

- down-and-in i down-and-out call opcija
- up-and-in i up-and-out call opcija

Promotrimo down-and-in call opciju. Njezinu vrijednost u trenutku t označili smo s C_t^{CDI}. Kako je rečeno, može se izračunati slično kao ranije u BSM modelu za europsku call opciju. Opcija počinje vrijediti nakon što cijena rizične financijske imovine dosegne barijeru. U nastavku ćemo pogledati njezinu cijenu kada je:

$$K \geq B.$$

Opcija je nevrijedeća sve dok vrijednost rizične financijske imovine ne dosegne barijeru. Nakon što dosegne barijeru opcija postaje europska call opcija. Vrijednost navedene opcije u trenutku t možemo računati, slično kao ranije, na sljedeći način:

$$C_t^{CDI} \;=\; E^*[e^{-r(T-t)}(S_T - K)_+ \cdot I_{\{S_t \leq B\}} | \mathcal{F}_t],$$

pri čemu je I_A indikator slučajna varijabla na istom vjerojatnosnom prostoru kao proces cijena rizične financijske imovine, takva da je

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1\,, \text{ ako je } \omega \leq B \\ 0\,, \text{ inače.} \end{cases}$$

Slično kao ranije, imamo:

$$
\begin{aligned}
C_t^{CUI} &= E^* \left[\, e^{-r(T-t)} \, (S_0 e^{\sigma B_T + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)T} - K)_+ \cdot I_{\{S_t \le B\}} \mid \mathcal{F}_t \, \right] \\
&= E^* \left[\, e^{-r(T-t)} \, (S_0 e^{\sigma (B_T + B_t - B_t) + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)(T+t-t)} - K)_+ \cdot I_{\{S_t \le B\}} \mid \mathcal{F}_t \, \right] \\
&= E^* \left[\, e^{-r(T-t)} \, (S_t e^{\sigma (B_T - B_t) + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} - K)_+ \cdot I_{\{S_t \le B\}} \mid \mathcal{F}_t \, \right].
\end{aligned}
$$

Uz argumente navedene u prošlom poglavlju, definirajmo funkciju $c(t,x)$ na sljedeći način:

$$
\begin{aligned}
c(t,x) &= E^*[\, e^{-r(T-t)} \, (x e^{\sigma (B_T - B_t) + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} - K)_+ \cdot I_{\{S_t \le B\}} | \mathcal{F}_t \,] \\
&= E^*[\, (x e^{\sigma (B_T - B_t) + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2 - r)(T-t)} - K e^{-r(T-t)})_+ \cdot I_{\{S_t \le B\}} | \mathcal{F}_t \,].
\end{aligned}
$$

Tada je $c(t, S_t) = C_t^{CUI}$.

Ukoliko stavimo $\tilde{B} = B_u + \frac{\alpha - r}{\sigma} u$, onda je prema Girsanovljevom teoremu uz $q = \frac{\alpha - r}{\sigma}$ proces $(\tilde{B}_t, t \in [0,T])$ Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P^*)$ gdje je vjerojatnosna mjera zadana s $P^*(A) = E[I_A S_t]$ za $A \in \mathcal{F}$. Vrijedi sljedeće:

$$
\begin{aligned}
\tilde{B}_u &= B_u + \frac{\alpha - r}{\sigma} u \\
\sigma \tilde{B}_u &= \sigma B_u + (\alpha - r) u \\
\sigma(\tilde{B}_T - \tilde{B}_t) &= \sigma(B_T - B_t) + (\alpha - r)(T - t).
\end{aligned}
$$

Prema tome, imamo:

$$
c(t,x) = E^*[\, (x e^{\sigma(\tilde{B}_T - \tilde{B}_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)} - e^{-r(T-t)} K)_+ \cdot I_{\{S_t \le B\}} | \mathcal{F}_t].
$$

Primjetimo kako se slučajna varijabla u eksponentu nalazi na istom vjerojatnosnom prostoru kao i promatrano matematičko očekivanje. Uočimo da je $\tilde{B}_T - \tilde{B}_t \sim N(0, T-t)$, pa je promatrana slučajna varijabla , čije je očekivanje potrebno izračunati njezina transformacija:

$$
\int_{-\infty}^{\infty} (x e^{\sigma y - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)} - e^{-r(T-t)} K)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi (T-t)}} e^{-\frac{y^2}{2(T-t)}} dy.
$$

Mora vrijediti da je $x \le B$. Nakon određivanja granica integrala, te računanja integrala sličnih integralima u izvodu Black Scholes Mertonove formule dobivamo formulu za nearbitražnu cijenu promatrane opcije, tj.

$$C_t^{CDI} = S_t\left(\frac{B}{S_t}\right)^{2e_1}\Phi(e_2) - Ke^{-r(T-t)}\left(\frac{B}{S_t}\right)^{2e_1-2}\Phi(e_2 - \sigma\sqrt{T-t}),$$

pri čemu su

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{r + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2}, \\ e_2 &= \frac{\ln\left(\frac{B^2}{S_t K}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} + e_1\sigma\sqrt{T-t}. \end{aligned}$$

Koristeći in-out paritet možemo odrediti cijenu down-and-out call opcije na sljedeći način:

$$\begin{aligned} C_t^{CALL} &= C_t^{CDO} + C_t^{CDI} \\ C_t^{CDO} &= C_t^{CALL} - C_t^{CDI} \\ &= S_t\Phi\left(\frac{d_1}{\sqrt{T-t}}\right) - Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{d_2}{\sqrt{T-t}}\right) - S_t\left(\frac{B}{S_t}\right)^{2e_1}\Phi(e_2) + Ke^{-r(T-t)} \\ &\left(\frac{B}{S_t}\right)^{2e_1-2}\Phi(e_2 - \sigma\sqrt{T-t}). \end{aligned}$$

Promotrimo sada up-and-out call opciju. Njezinu vrijednost u trenutku t označili smo s C_t^{CUI}. Iznos barijere je iznad početne vrijednosti rizične financijske imovine. Formula za nearbitražnu cijenu promatrane opcije dana je s:

$$\begin{aligned} C_t^{CUI} &= S_t\Phi(f_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(f_1 - \sigma\sqrt{T-t}) - S_t\left(\frac{B}{S_t}\right)^{2e_1}[\Phi(-e_2) - \Phi(-f_2)] \\ &+Ke^{-r(T-t)}\left(\frac{B}{S_t}\right)^{2e_1-2}[\Phi(-e_2 + \sigma\sqrt{T-t}) - \Phi(f_2 + \sigma\sqrt{T-t})], \end{aligned}$$

pri čemu su

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{B}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} + e_1\sigma\sqrt{T-t}, \\ f_2 &= \frac{\ln\left(\frac{B}{S_t}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} + e_1\sigma\sqrt{T-t}. \end{aligned}$$

Koristeći in-out paritet, analogno kao ranije, možemo odrediti cijenu up-and-out call opcije:

$$\begin{aligned}
C_t^{CALL} &= C_t^{CUI} + C_t^{CUO} \\
C_t^{CUO} &= C_t^{CALL} - C_t^{CUI} \\
&= S_t \Phi\left(\frac{d_1}{\sqrt{T-t}}\right) - Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{d_2}{\sqrt{T-t}}\right) \\
&\quad - S_t\Phi(f_1) + Ke^{-r(T-t)}\Phi(f_1 - \sigma\sqrt{T-t}) + S_t\left(\frac{B}{S_t}\right)^{2e_1}[\Phi(-e_2) - \Phi(-f_2)] \\
&\quad - Ke^{-r(T-t)}\left(\frac{B}{S_t}\right)^{2e_1-2}[\Phi(-e_2 + \sigma\sqrt{T-t}) - \Phi(f_2 + \sigma\sqrt{T-t})].
\end{aligned}$$

4.2 Vrednovanje barijernih put opcija

Kada si investitor želi osigurati pravo prodaje rizične financijske imovine po cijeni izvršenja K u trenutku dospijeća T, jedna od opcija je odlučiti se za kupovinu neke od barijernih put opcija. Mogućnosti su:

- down-and-in i down-and-out put opcija
- up-and-in i up-and-out put opcija.

Kao i kod vrednovanja barijernih call opcija, zanimaju nas nearbitražne cijene barijernih put opcija.

Barijerna down-and-in put opcija počinje vrijediti nakon što cijena rizične financijske imovine dosegne iznos barijere, koji je ispod početne vrijednosti financijske imovine. Formula za nearbitražnu cijenu navedene opcije dana je s:

$$C_t^{PDI} = Ke^{-r(T-t)}\left(\frac{B}{S_t}\right)^{2e_1-2}\Phi(-e_2 + \sigma\sqrt{T-t}) - S_t\left(\frac{B}{S_t}\right)^{2e_1}\Phi(-e_2).$$

Koristeći in-out paritet možemo odrediti cijenu down-and-out put opcije na sljedeći način:

$$
\begin{aligned}
C_t^{PUT} &= C_t^{PDO} + C_t^{PDI} \\
C_t^{PDO} &= C_t^{PUT} - C_t^{PDI} \\
&= Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{-d_2}{\sqrt{T-t}}\right) - S_t\Phi\left(\frac{-d_1}{\sqrt{T-t}}\right) - Ke^{-r(T-t)}\left(\frac{B}{S_t}\right)^{2e_1-2} \\
&\quad \Phi(-e_2+\sigma\sqrt{T-t}) + S_t\left(\frac{B}{S_t}\right)^{2e_1}\Phi(-e_2).
\end{aligned}
$$

Promotrimo sada up-and-in put opciju. Njezinu vrijednost u trenutku t označili smo s C_t^{PUI}. Iznos barijere je iznad početne vrijednosti rizične financijske imovine. Formula za nearbitražnu cijenu promatrane opcije dana je s:

$$
\begin{aligned}
C_t^{PUI} &= -S_t\Phi(-f_1) + Ke^{-r(T-t)}\Phi(-f_1+\sigma\sqrt{T-t}) + S_t\left(\frac{B}{S_t}\right)^{2e_1}[\Phi(e_2)-\Phi(f_2)] \\
&\quad -Ke^{-r(T-t)}\left(\frac{B}{S_t}\right)^{2e_1-2}[\Phi(e_2-\sigma\sqrt{T-t})-\Phi(-f_2-\sigma\sqrt{T-t})].
\end{aligned}
$$

Koristeći in-out paritet, analogno kao ranije, možemo odrediti cijenu up-and-out put opcije.

$$
\begin{aligned}
C_t^{PUT} &= C_t^{PUI} + C_t^{PUO} \\
C_t^{PUO} &= C_t^{PUT} - C_t^{PUI} \\
&= Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{-d_2}{\sqrt{T-t}}\right) - S_t\Phi\left(\frac{-d_1}{\sqrt{T-t}}\right) \\
&\quad +S_t\Phi(-f_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(-f_1+\sigma\sqrt{T-t}) - S_t\left(\frac{B}{S_t}\right)^{2e_1}[\Phi(e_2)-\Phi(f_2)] \\
&\quad +Ke^{-r(T-t)}\left(\frac{B}{S_t}\right)^{2e_1-2}[\Phi(e_2-\sigma\sqrt{T-t})-\Phi(-f_2-\sigma\sqrt{T-t})].
\end{aligned}
$$

4.3 Usporedba cijena vanilla i barijernih opcija

Ranije je rečeno da je niža cijena barijernih opcija u odnosu na vanilla opcije najveći razlog zašto bi se investitor odlučio za kupovinu iste. Nakon određivanja formula za nearbitražno vrednovanje vanilla opcija i barijernih opcija pokazat ćemo na konkretnom primjeru odnos tih cijena. Točnije, bit će izračunate cijene europskih call i put opcija, te barijernih down-and-in put, down-and-out put, up-and-in call i up-and-out call opcija.

Primjer 4.3.1. *Neka je trenutna cijena neke rizične financijske imovine 100 u određenoj valuti. Neka je cijena izvršenja 120, dok je barijere postavljena na 80. Trenutak izvršenja je godinu dana od sadašnjeg trenutka. Iznosi koji se navode u nastavku izračunati su uz* $\sigma = 10\%$ *i* $r = 5\%$. *Dakle, imamo:*

$$\begin{aligned} S_0 &= 100 \\ K &= 120 \\ B &= 80 \\ T &= 1 \\ \sigma &= 0.1 \\ r &= 5\% = 0.05. \end{aligned}$$

U sljedećoj tablici prikazane su cijene navedenih opcija.

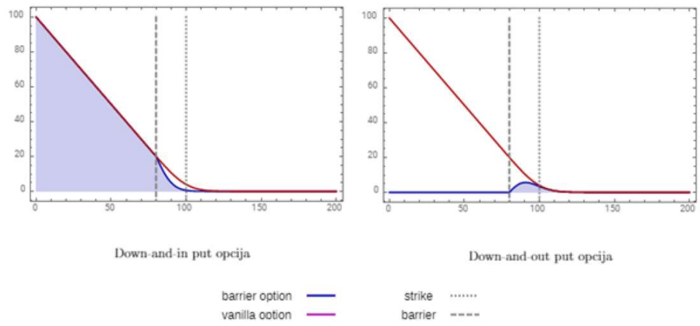
Europska put opcija	14.610
Down-and-in put opcija	0.323
Down-and-out put opcija	14.287

Tablica 4.1: Cijene europske put i barijernih put opcija

Zamislimo scenarij u kojem investitor očekuje pad cijena na tržištu i iz tog razloga si želi osigurati pravo na prodaju rizične financijske imovine po cijeni izvršenja $K = 120$ u trenutku dospijeća koji će biti za točno godinu dana od sadašnjeg trenutka. Da bi stekao to pravo, prodavatelju europske put opcije platit će 14.610 u određenoj valuti. No, ono što se on pita je može li si povoljnije osigurati takvo pravo. Recimo da može, kupovinom drugačije opcije, iako je rizik veći jer se uključuje dodatni uvjet, tj. barijera.

Neke od takvih opcija su down-and-in put opcija i down-and-out put opcija. Ukoliko investitor odluči kupiti down-and-in put opciju, platio bi prodavatelju iznos od 0.323 u određenoj valuti. No, svoje pravo bi mogao koristiti samo ako uvjeti opcije budu zadovoljeni. U suprotnom, opcija je njezinom vlasniku beskorisna. Dakle, opcija vrijedi samo dok je cijena manja ili jednaka od iznosa barijere jer se radi o knock-in opciji. Down-and-out put opcija vrijedi dok cijena rizične financijske imovine ne dosegne iznos barijere. U tom slučaju investitor bi platio 14.287 prodavatelju opcije. Uočavamo kako su cijene barijernih opcija niže od cijene europske put opcije.

Možemo još uočiti da vrijedi in-out paritet. Ukoliko bismo zbrojili cijenu down-and-in put opcije s cijenom down-and-out put opcije, dobili bismo cijenu europske put opcije. Odnos navedenih opcija možemo vidjeti i na sljedećim grafičkim prikazima:



Slika 4.3: Cijene barijernih down-and-in put i down-and-out put opcije

Pogledajmo u sljedećoj tablici što se događa kada raste cijena izvršenja:

Cijena izvršenja K	C_t^{PUT}	C_t^{PDI}	C_t^{PDO}
130	23.727	0.406	23.321
140	33.179	0.488	32.691
150	42.685	0.571	42.114
160	52.197	0.654	51.543

Tablica 4.2: Rast cijene izvršenja - put opcije uz vrijednosti $S_0 = 100, K = 120, B = 80, T = 1, \sigma = 0.1$ i $r = 0.05$

Što je cijena izvršenja veća, veća je i cijena opcije. Dakle, cijena opcije raste s rastom cijene izvršenja. Pogledajmo u sljedećoj tablici što se događa kada cijena izvršenja pada.

Cijena izvršenja K	C_t^{PUT}	C_t^{PDI}	C_t^{PDO}
110	6.809	0.240	6.569
100	1.928	0.158	1.770
90	0.239	0.076	0.164
80	0.008	0.008	0

Tablica 4.3: Pad cijene izvršenja - put opcije uz vrijednosti $S_0 = 100, K = 120, B = 80, T = 1, \sigma = 0.1$ i $r = 0.05$

Smanjenjem cijena izvršenja smanjuje se i cijena navedenih opcija. Uočimo u zadnjem retku tablice da je cijena izvršenja jednka iznosu barijere i da je tada cijena down-and-in put opcije jednaka cijeni europske put opcije, dok down-and-out put opcija uopće nema smisla.

Primjer 4.3.2. *Neka je trenutna cijena neke rizične financijske imovine 100 u određenoj valuti. Cijena izvršenja je 120, a barijera je postavljena na 130. Trenutak izvršenja je godinu dana od sadašnjeg trenutka. Iznosi koji se navode u nastavku izračunati su uz* $\sigma = 10\%$ *i* $r = 5\%$. *Dakle, imamo:*

$$
\begin{aligned}
S_0 &= 100 \\
K &= 120 \\
B &= 130 \\
T &= 1 \\
\sigma &= 0.1 \\
r &= 5\% = 0.05
\end{aligned}
$$

U sljedećoj tablici prikazane su cijene navedenih opcija.

Europska call opcija	0.46
Up-and-in call opcija	0.28
Up-and-out call opcija	0.18

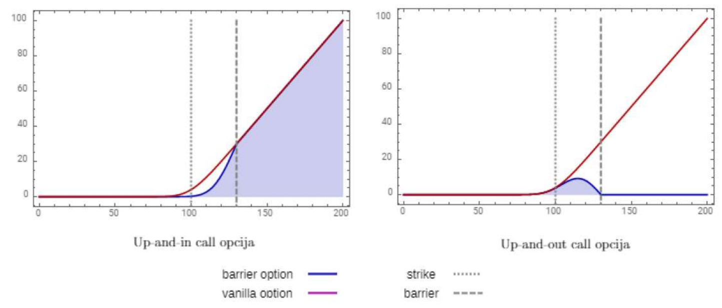
Tablica 4.4: Cijene europske call i barijernih call opcija

Zamislimo scenarij u kojem investitor očekuje rast cijena na tržištu i iz tog razloga si želi osigurati pravo na kupovinu rizične financijske imovine po cijeni izvršenja $K = 120$ u trenutku dospijeća koji će biti za točno godinu dana od sadašnjeg trenutka. Da bi stekao to pravo, prodavatelju europske call opcije platit će 0.46 u određenoj valuti. No, ono što se on pita je može li si povoljnije osigurati takvo pravo. Recimo da može, kupovinom drugačije opcije, iako je rizik veći jer se uključuje dodatni uvjet, tj. barijera.

Neke od takvih opcija su up-and-in call opcija i up-and-out call opcija. Ukoliko investitor odluči kupiti up-and-in call opciju, platio bi prodavatelju iznos od 0.28 u određenoj valuti. No, svoje pravo bi mogao koristiti samo ako uvjeti opcije budu zadovoljeni. U suprotnom, opcija je njezinom vlasniku beskorisna. Dakle, opcija vrijedi samo ako cijena rizične financijske imovine dosegne iznos barijere. Up-and-out call opcija vrijedi dok cijena rizične financijske imovine ne dosegne iznos barijere. U tom slučaju investitor bi platio 0.18 prodavatelju opcije. Uočavamo kako su cijene barijernih opcija niže od cijene europske call opcije.

Možemo, kao i kod barijernih put opcija, uočiti da vrijedi in-out paritet. Ukoliko bismo zbrojili cijenu up-and-in call opcije s cijenom up-and-out call opcije, dobili bismo cijenu europske call opcije.

Odnos navedenih opcija možemo vidjeti i na sljedećim grafičkim prikazima:



Slika 4.4: Cijene barijernih up-and-in call i up-and-out call opcija

Pogledajmo u sljedećoj tablici što se događa kada raste cijena izvršenja:

Cijena izvršenja K	C_t^{CALL}	C_t^{CUI}	C_t^{CUO}
121	0.39	0.26	0.13
122	0.32	0.29	0.09
123	0.27	0.21	0.06

Tablica 4.5: Rast cijene izvršenja - call opcije uz vrijednosti $S_0 = 100, K = 120, B = 130, T = 1, \sigma = 0.1$ i $r = 0.05$

Što je cijena izvršenja veća, cijena opcije je manja. Dakle, cijena opcije se smanjuje s rastom cijene izvršenja. Cijena opcije se povećava sa smanjenjem cijene izvršenja, što možemo vidjeti u sljedećoj tablici:

Cijena izvršenja K	C_t^{CALL}	C_t^{CUI}	C_t^{CUO}
119	0.55	0.30	0.25
118	0.65	0.33	0.32
117	0.77	0.41	0.35

Tablica 4.6: Pad cijene izvršenja - call opcije uz vrijednosti $S_0 = 100, K = 120, B = 130, T = 1, \sigma = 0.1$ i $r = 0.05$

4.4 Primjer na stvarnim podacima

U ovom primjeru promatrat ćemo portfelj koji je kreiran na Virtualnoj burzi u sklopu Zagrebačke burze. Portfelj je sastavljen od 60 dionica tvrtke "Uljanik plovidba d.d." i

80 dionica tvrtke "Atlantska plovidba d.d.". Cijene dionica i vrijednost portfelja promatrani su u razdoblju od 1. siječnja 2017. godine do 20. srpnja 2017. godine. Analizirat ćemo log-povrate i razmatrati mogućnosti modeliranja cijena dionica geometrijskim Brownovim gibanjem. Osim toga, odredit ćemo nearbitražne cijene europske call opcije i barijerne up-and-in call opcije za kupovinu dionica Uljanik plovidbe. Vrijednosti, koje će u nastavku biti navedene, iskazane su u hrvatskim kunama.

Pogledajmo osnovne numeričke karakteristike cijena dionica u sljedećoj tablici:

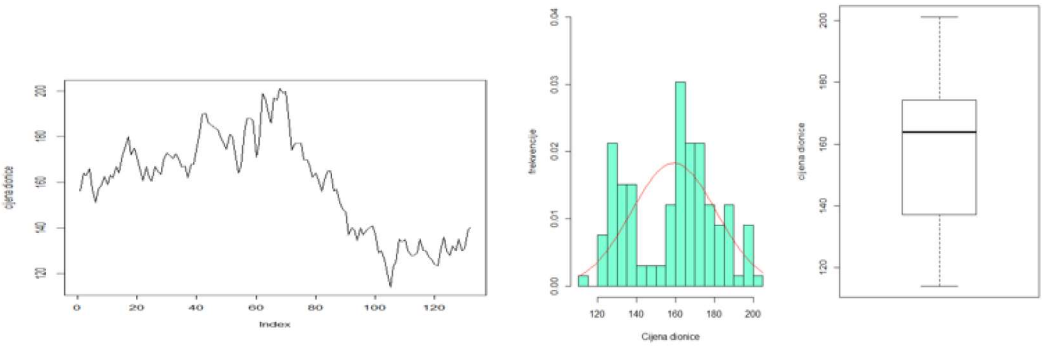
	Minimum	Donji kvartil	Medijan	Aritmetička sredina	Gornji kvartil	Maksimum
Uljanik plovidba d.d.	144	137.4	163.8	159.2	174.1	201.2
Atlantska plovidba d.d.	274	330	383.5	374.2	404.9	479.7

Tablica 4.7: Numeričke karakteristike cijena dionica

Cijene dionica Uljanik plovidbe d.d. kretale su se u rasponu od 144 do 201.2 kune, dok su se cijene dionica Atlantske plovidbe d.d. kretale od 274 do 479.7 kuna.

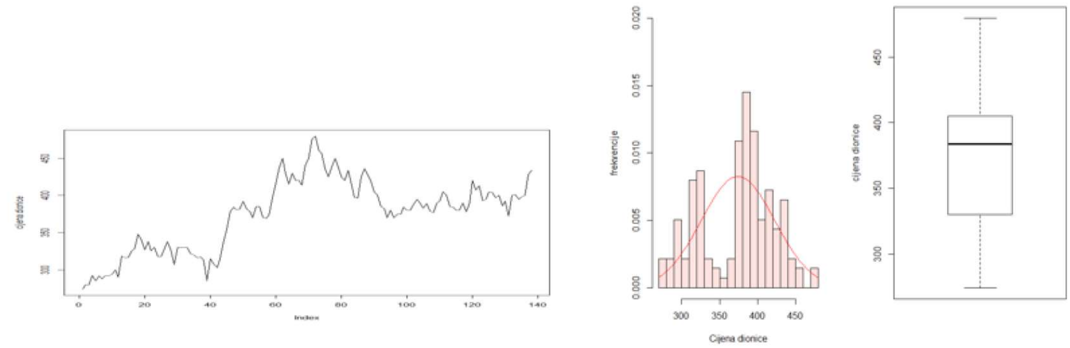
Pogledajmo grafičke prikaze koji su nam korisni za zaključivanje o distribuciji cijena dionica.

Uljanik plovidba d.d.



Slika 4.5: Kretanje cijena dionica, stupčasti i kutijasti dijagram kretanja cijena dionica tvrtke Uljanik plovidba d.d.

Atlantska plovidba d.d.



Slika 4.6: Kretanje cijena dionica, stupčasti i kutijasti dijagram kretanja cijena dionica tvrtke Atlantska plovidba d.d.

Na temelju pripadnih grafičkih prikaza, za cijene dionica obje tvrtke, ne možemo naslutiti ništa o njihovoj distribuciji.

U nastavku ćemo analizirati log-povrate cijena dionica. Diferenciranjem logaritma vrijednosti cijena dionica pokušat ćemo dobiti niz koji ima smisla modelirati slabo stacionarnim procesom.

Pogledajmo osnovne numeričke karakteristike log-povrata cijena dionica u sljedećoj tablici:

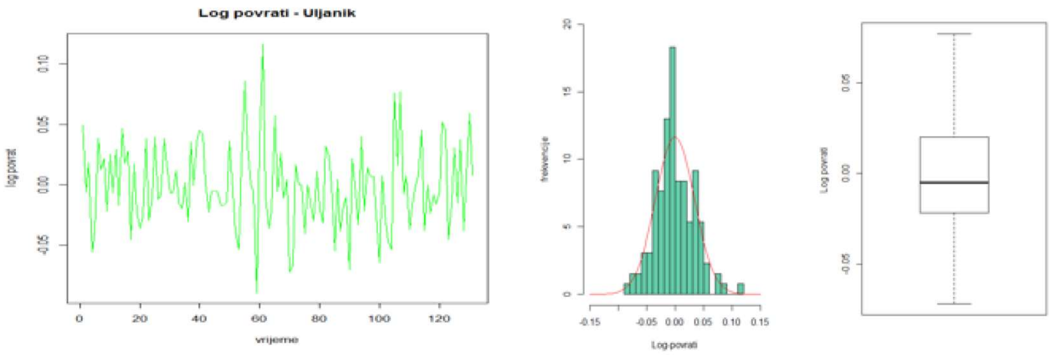
	Minimum	Donji kvartil	Medijan	Aritmetička sredina	Gornji kvartil	Maksimum
Uljanik plovidba d.d.	-0.089390	-0.021720	-0.00517	-0.000825	0.019890	0.116700
Atlantska plovidba d.d.	-0.094130	-0.022060	0.00010	0.003355	0.025200	0.099890

Tablica 4.8: Numeričke karakteristike log-povrata cijena dionica

Log-povrati cijena dionica Uljanik plovidbe d.d. kretale su se u rasponu od -0.08939 do 0.1167 kuna, dok su se cijene dionica Atlantske plovidbe d.d. kretale od -0.09413 do 0.09989 kuna.

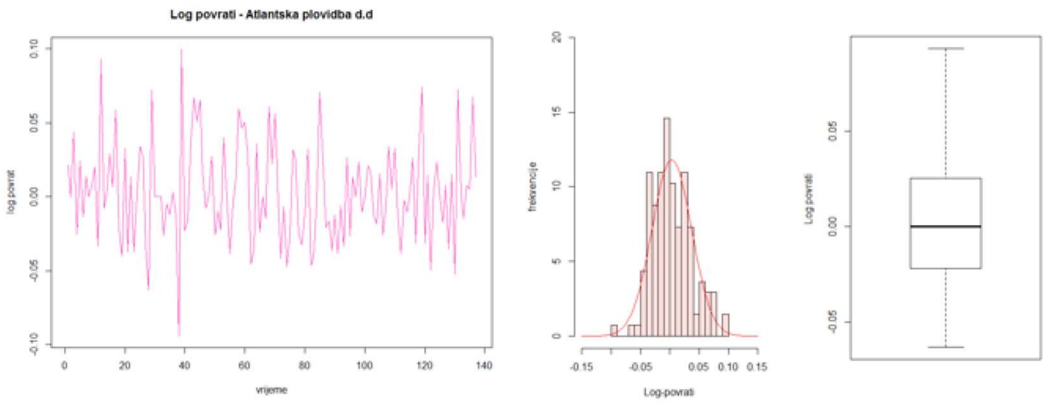
Pogledajmo grafičke prikaze koji su nam korisni za zaključivanje o distribuciji log-povrata cijena dionica.

Uljanik plovidba d.d.



Slika 4.7: Kretanje log-povrata cijena dionica, stupčasti i kutijasti dijagram kretanja log-povrata cijena dionica tvrtke Uljanik plovidba d.d.

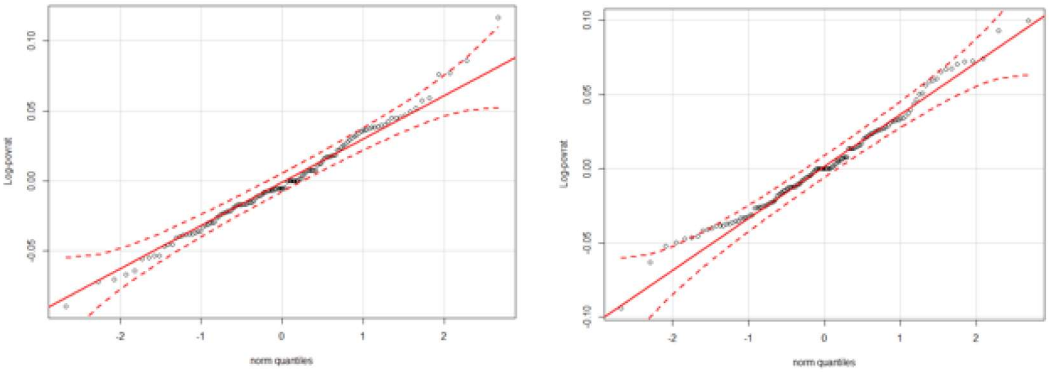
Atlantska plovidba d.d.



Slika 4.8: Kretanje log-povrata cijena dionica, stupčasti i kutijasti dijagram kretanja log-povrata cijena dionica tvrtke Atlantska plovidba d.d.

Kod kretanja log-povrata cijena dionica, za obje tvrtke, možemo uočiti osciliranje oko konstantne vrijednosti bliske nuli, što nam intuitivno govori da su pogodniji za modeliranje slabo stacionarnim procesima od samih vrijednosti cijena dionica.

Pogledajmo qqPlotove na sljedećem grafičkom prikazu:



Slika 4.9: qqPlotovi log-povrata cijena dionica Uljanik plovidbe d.d. i Atlantske plovidbe d.d.

Na qqPlotu log-povrata cijena dionica Uljanik plovidbe d.d. uočavamo da se sve vrijednosti, osim jedne u gornjem desnom kutu, nalaze unutar pouzdanog područja. Na qqPlotu log-povrata cijena dionica Atlantske plovidbe d.d. uočavamo da se sve vrijednosti, osim nekoliko vrlo malih, nalaze unutar pouzdanog područja. Stoga, možemo naslutiti da su log-povrati cijena dionica, obje tvrtke, normalno distribuirani. Slutnja je testirana Shapiro-Wilk testom o normalnosti distribucije i Jarque–Berra testom. Pripadne p-vrijednosti možemo vidjeti u sljedećoj tablici:

Test	Uljanik plovidba d.d.	Atlantska plovidba d.d.
Shapiro-Wilk	0.4141	0.0938
Jarque-Berra	0.1503	0.2083

Tablica 4.9: p-vrijednosti testova za testiranje normalnosti

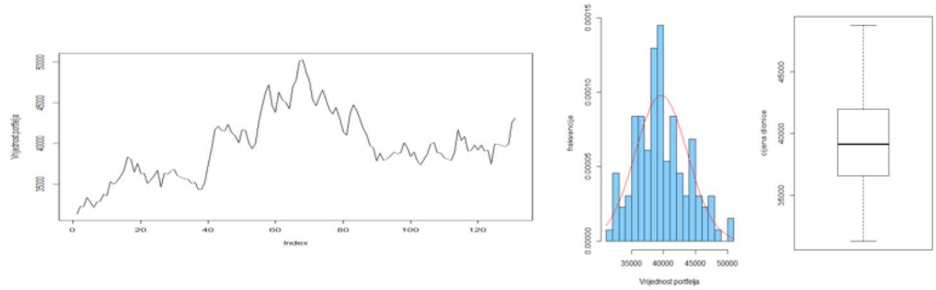
Analiza portfelja

Kako je rečeno na početku primjera, promatrani portfelj se sastoji od 60 dionica tvrtke "Uljanik plovidba d.d." i 80 dionica tvrtke "Atlantska plovidba d.d.". Pogledajmo u sljedećoj tablici numeričke karakteristike portfelja:

	Minimum	Donji kvartil	Medijan	Aritmetička sredina	Gornji kvartil	Maksimum
Portfelj	31286.8	36576	39631.32	39160.1	41973	50316

Tablica 4.10: Numeričke karakteristike vrijednosti portfelja

Pogledajmo grafičke prikaze koji su nam korisni za zaključivanje o distribuciji vrijednosti portfelja:



Slika 4.10: Kretanje vrijednosti portfelja, stupčasti i kutijasti dijagram kretanja vrijednosti portfelja

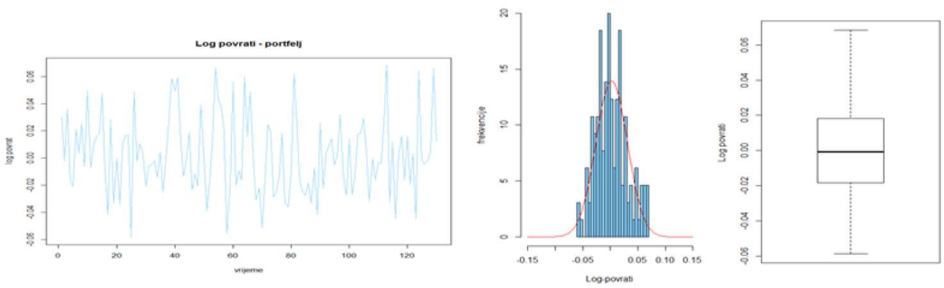
Vrijednost portfelja kretala se od 31286.8 kuna do 50316 kuna. Kod kretanja vrijednosti portfelja možemo uočiti trend rasta sličan kao kod Atlantske plovidbe.

Pogledajmo osnovne numeričke karakteristike log-povrata vrijednosti portfelja u sljedećoj tablici:

	Minimum	Donji kvartil	Medijan	Aritmetička sredina	Gornji kvartil	Maksimum
Portfelj	-0.058600	-0.0179700	0.003467	-0.00075	0.018280	0.06848

Tablica 4.11: Numeričke karakteristike log-povrata vrijednosti portfelja

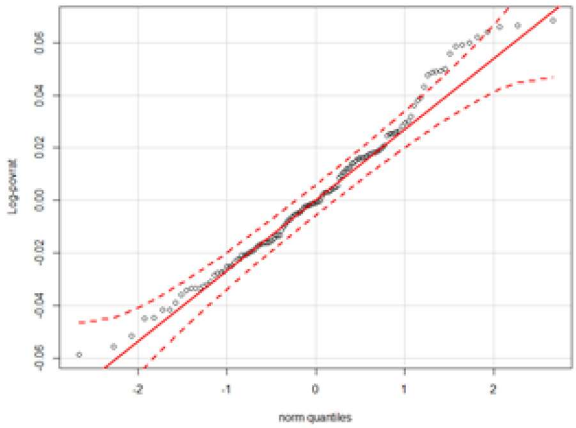
Iz tablice vidimo da se log-povrati vrijednosti portfelja kreću u rasponu od -0.0586 kuna do 0.06848 kuna. Pogledajmo grafičke prikaze koji su nam korisni za zaključivanje o distribuciji vrijednosti:



Slika 4.11: Kretanje log-povrata vrijednosti portfelja, stupčasti i kutijasti dijagram kretanja log-povrata vrijednosti portfelja

Kod kretanja log-povrata vrijednosti portfelja možemo uočiti osciliranje oko konstantne vrijednosti, što nam intuitivno govori da su pogodniji za modeliranje slabo stacionarnim procesima od samih vrijednosti portfelja. Na stupčastom dijagramu možemo uočiti neka odstupanja od normalne distribucije.

Pogledajmo qqPlot na sljedećem grafičkom prikazu:



Slika 4.12: qqPlot log-povrata cijena portfelja

Na qqPlotu log-povrata vrijednosti portfelja uočavamo da se glavnina vrijednosti nalazi unutar pouzdanog područja. Stoga, možemo naslutiti da su log-povrati vrijednosti portfelja normalno distribuirani. Pogledat ćemo p-vrijednosti dobivene Shapiro-Wilk testom o normalnosti distribucije i Jarque–Berra testom. Vrijednosti možemo vidjeti u sljedećoj tablici:

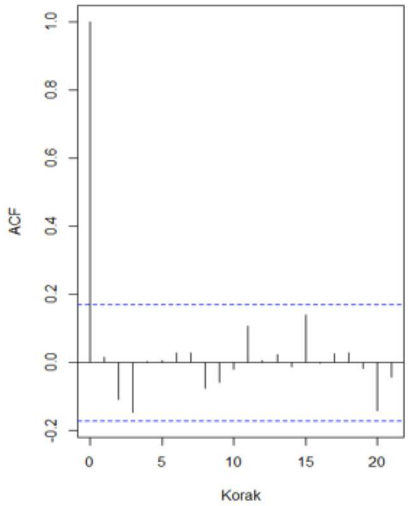
Test	Shapiro-Wilk	Jarque-Berra
p-vrijednost	0.0426	0.183

Tablica 4.12: p-vrijednosti testova za ispitivanje normalnosti log-povrata cijena portfelja

Na razini značajnosti 0.01 ne odbacujemo hipotezu o normalnosti distribucije log-povrata.

Da bi se mogle kupovati europske call i put opcije, čija je nearbitražna cijena modelirana geometrijskim Brownovim gibanjem, pretpostavke o normalnosti i nekoreliranosti moraju biti zadovoljene. Uz dosadašnje procjene i testove, nakon provjere nekoreliranosti, mogli bismo cijene dionica obje tvrtke modelirati geometrijskim Brownovim gibanjem. Izradit ćemo samo model za cijene dionica tvrtke Uljanik plovidbe.

Hipotezu o normalnosti log-povrata cijena dionica te tvrtke smo potvrdili ranije u primjeru. Preostaje nam provjeriti jesu li log-povrati cijena tih dionica nekorelirani. U kontekstu geometrijskog Brownovog gibanja log-povrati su nezavisni, a kako su pod pretpostavkom normalne distribuiranosti nezavisnost i nekoreliranost ekvivalentne, provodimo Ljung-Box test o nekoreliranosti. Neodbacivanje nul-hipoteze o nekoreliranosti sugerira da ih, uz pretpostavku o normalnosti, ima smisla modelirati geometrijskim Brownovim gibanjem. U intuitivnom zaključivanju nam može pomoći i grafički prikaz uzoračke funkcije autokorelacije log-povrata. Autokorelacijska funkcija slabo stacionarnih procesa trebala bi vrlo brzo opadati u nulu. Pogledajmo navedeno na sljedećem grafičkom prikazu:



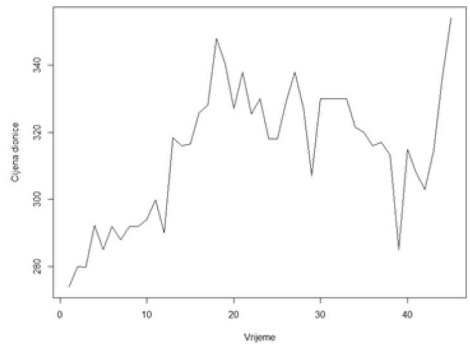
Slika 4.13: Uzoračka funkcija autokorelacije log-povrata cijena dionica tvrtke Uljanik plovidba d.d.

Ljung-Box testom dobivena p-vrijednost iznosi 0.8634. Prema tome, na razini značajnosti 0.05 nemamo razloga odbaciti hipotezu o nekoreliranosti log-povrata.

Cijene dionica promatrane su u razdoblju od 1.1.2017. do 20.7.2017. godine, pri čemu imamo da je početni iznos $S_0 = 156.1$ kuna. Nakon procjene vrijednosti parametara geometrijskog Brownovog gibanja, korištenjem sto trideset i jednog log-povrata dobivenog na temelju podataka u promatranom razdoblju, iz procjene metodom momenata dobivamo da su $\sigma = 0.03433451$ i $\alpha = -0.0002405629$. Prema tome, pretpostavimo da je cijena dionice u trenutku $t \geq 0$ dana izrazom:

$$S_t = 156.1 \cdot e^{0.03433451 \cdot B_t + (-0.0002405629 - \frac{1}{2} \cdot 0.03433451^2) \cdot t}.$$

Pogledajmo na sljedećoj slici kretanje cijena dionica Uljanik plovidbe u razdoblju od 1.1.2017. do 6.3.2017. godine:



Slika 4.14: Kretanje cijena dionica tvrtke Uljanik plovidba d.d. u razdoblju od 1.1.2017. do 6.3.2017.

Uočimo rast cijena dionica Uljanik plovidbe u posljednih par dana. Pretpostavimo da se investitor nada još većem rastu cijena dionica u nadolazećem vremenu. On želi povećati broj tih dionica jer se nada da će zaraditi na njima u budućnosti. Investitor se odlučuju na kupovinu europske call opcije.

Na dan 6.3.2017. godine cijena dionice iznosila je 353.98 kuna. Pretpostavimo da je $T = 32$ tj. da je dan izvršenja 6.4.2017. godine. Neka je cijena izvršenja $K = 270$. Odredit ćemo nearbitražnu cijenu europske call opcije korištenjem Black Scholesovog modela. Uzmimo da je $r = 0.02$. Nearbitražna cijena europske call opcije tada iznosi 84.453 kuna. Očekivanja investitora su se ostvarila i cijena je rasla do dana izvršenja. Na dan izvršenja tržišna cijena iznosila je 414 kuna. Investitor koristi svoje pravo, te kupuje dionicu po cijeni izvršenja od 270 kuna. Na taj način je investitor uštedio $414 - 84.453 - 270 = 59.547$ kuna kupovinom jedne dionice.

Investitor si postavlja pitanje je li si mogao povoljnije osigurati pravo kupovine. Iz tog razloga razmotrit ćemo kupovinu barijerne up-and-in call opcije. Iznos barijere veći je od početnog promatranog iznosa cijene dionice, te je investitoru opcija vrijedeća nakon što cijena dionice dosegne iznos barijere. Neka je barijera postavljena na iznos od 360 kuna i neka su sve ostale vrijednosti jednake kao kod kupovine europske call opcije. Nearbitražna cijena barijerne up-and-in call opcije iznosi 11.4364 kune. Ukoliko se investitor odluči za kupovinu navedene opcije, uštedio bi $414 - 11.4364 - 270 = 132.5636$ kuna kupovinom jedne dionice. Uočavamo značajnu razliku između nearbitražne cijene europske call opcije i barijerne up-and-in call opcije.

4.5 Dvostruke barijerne opcije

Kako smo ranije naveli, jedna vrsta egzotičnih opcija su barijerne opcije. Govorili smo o barijernim opcijama podrazumijevajući postojanje jedne barijere. Postoje i barijerne opcije s dvostrukom barijerom, tj. barijerom odozdo i odozgo. Dakle, jedna barijera je ispod trenutne tržišne cijene rizične financijske imovine, dok je druga barijera iznad te cijene.

Dvostruka barijerna opcija može početi vrijediti nakon što cijena financijske imovine izađe iz intervala barijera ili vrijedi ako cijena financijske imovine ne izađe iz intervala kojeg zatvaraju barijere. Uočimo da i ovdje imamo knock-in i knock-out opcije. Investitori se odlučuju kupiti dvostruku barijernu opciju kada očekuju rast (pad) cijene rizične financijske imovine, ali ne mogu procijeniti intenzitet rasta (pada). Investitori čak ne mogu procijeniti hoće li cijena rizične financijske imovine koja raste u jednom trenutku početi padati i obrnuto. Poticaj investitoru za ulaganje u ovakvu vrstu opcije može biti jeftinija premija. Premija je niža od premije barijernih opcija s jednom barijerom. Ograničimo se na europske dvostruke barijerne opcije i razmotrimo mogućnosti s obzirom na barijere:

- knock-in dvostruka barijerna opcija - ugovor koji postaje važeći kada cijena rizične financijske imovine dosegne barijeru odozdo ili barijeru odozgo. Dok se cijena kreće unutar tog intervala, ona je važeća europska call (put) opcija

- knock-out dvostruka barijerna opcija - ugovor koji je važeći sve dok cijena rizične financijske imovine ne dosegne iznos barijere odozdo ili odozgo. U tom slučaju ona je važeća europska call (put) opcija.

Zamislimo scenarij u kojem investitor očekuje rast cijene rizične financijske imovine. Investitor vjeruje kako cijena neće porasti iznad određenog nivoa. Želi si osigurati pravo kupovine te rizične financijske imovine u budućnosti. Smatra dobrom odlukom kupovinu europske call opcije, no želi poslovati što povoljnije. Odlučuje se za kupovinu europske dvostruke barijerne knock-in call opcije.

Primjer 4.5.1. *Neka je trenutna vrijednost rizične financijske imovine* $S_0 = 100$*, barijera odozdo* $B_1 = 150$*, barijera odozgo* $B_2 = 300$*, cijena izvršenja nakon godinu dana* $K = 200$*, a tržišna cijena u trenutku dospijeća* $S_T = 250$*.*

Cijena rizične financijske imovine je dosegnula B_1*, te je tako postala važeća europska call opcija. Prestaje vrijediti tek kada cijena prijeđe* B_2*. Do trenutka dospijeća se to nije* *dogodilo, što znači da vlasnik opcije može koristiti svoje pravo ukoliko mu to odgovara. U trenutku dospijeća cijena izvršenja niža je od tržišne cijene, pa vlasnik opcije koristi svoje pravo iz ugovora i kupuje rizičnu financijsku imovinu po cijeni izvršenja od 200. Prodavatelju opcije platio je premiju.*

Formule za nearbitražno vrednovanje dvostrukih barijernih opcija ne razmatramo u ovom radu.[1]

[1] Za više informacija pogledati E.G.Haug, Option Pricing Formulas, McGraw-Hill

Sažetak

Na početku rada definirane su i pojašnjene vanilla opcije tj. europska call (put) opcija. Geometrijsko Brownovo gibanje je model za kretanje cijena rizične financijske imovine. Taj je model opisan u drugom poglavlju rada. Nakon uvedenih osnovnih pojmova, potrebnih za rad, izvedena je Black Scholes Mertonova formula za nearbitražno vrednovanje vanilla opcija. Upravo je taj dio rada podloga za vrednovanje barijernih opcija u nastavku. U trećem poglavlju rada predstavljene su europske barijerne opcije, te su pojašnjene na konkretnim primjerima. U četvrtom poglavlju rada predstavljene su formule za njihovo nearbitražno vrednovanje. Kroz primjere uspoređene su cijene vanilla opcija s cijenama barijernih opcija. Na kraju rada kratko su objašnjene dvostruke barijerne opcije.

Ključne riječi

Brownovo gibanje, geometrijsko Brownovo gibanje, Black Scholes Mertonova formula, europska call opcija, europska put opcija, barijerne opcije, knock-in opcije, knock-out opcije

Barrier options

Abstract

In the first part of this diploma thesis the Vanilla options are defined and explained. Geometric Brownian motion is model for a stock price and that model is described in the second part of paper. Necessary theoretical results and Black Scholes Merton formula for the price of the options are presented. That part is important for the price of the barrier options. In the third part of paper, barrier options are explained and some examples are presented. In the fourth part of paper, formulas for the prices of the barrier options are presented. Relation between prices of vanilla options and barrier options are observed. Finally, double barrier options are briefly explained.

Key words

Brownian motion, geometric Brownian motion, Black Scholes Merton formula, European call option, European put option, barrier options, knock-in options, knock-out options

Literatura

[1] Z. VONDRAČEK, *Financijsko modeliranje*, Materijali s predavanja, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2008.

[2] B. BASRAK, *Matematičke financije*, Materijali s predavanja, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2009.

[3] C.N DE PONTE, *Pricing barrier options with numerical methods*, Dissertation submitted in partial fulfilment of the requirements for the degree Master of Science in Applied Mathematics at the Potchefstroom campus of the North-WestUniversity

[4] K.SIN, *Numerical Methods For Derivative Pricing with Application to Barrier Options*, Ontario, Canada, 2010.

[5] J.KALLSEN, *Computational Finance*, Lecture notes, CAU zu Kiel, 2018.

[6] J.BAZ, G.CHACKO, *Financial derivatives: pricing, applications and mathematics*, Cambridge University Press, United States of America, 2004.

[7] E.G.HAUG, *Option Pricing Formulas*, McGraw-Hill, 2007.

[8] INVESTOPEDIA, *https://www.investopedia.com/terms/b/barrieroption.asp*

[9] INVESTOPEDIA, *https://www.investopedia.com/terms/d/doublebarrieroption.asp*

Životopis

Rođena sam 13. kolovoza 1991. godine u Našicama. Pohađala sam Osnovnu školu Matije Gupca u Magadenovcu. Osnovnoškolsko obrazovanje započela sam 1998. godine. Nakon završetka osnovne škole upisala sam III. gimnaziju u Osijeku. Nakon završene srednje škole, 2010. godine upisujem Preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku Sveučilišta J.J.Strossmayera u Osijeku. Za vrijeme studiranja odlazim u Rijeku gdje nastavljam studiranje na Odjelu matematike Sveučilišta u Rijeci. Akademski naziv sveučilišne prvostupnice matematike stekla sam 2015. godine uz mentorstvo dr.sc. Andree Švob i završni rad pod nazivom Primjena kompleksnih funkcija. Iste godine upisala sam diplomski studij matematike u Osijeku, smjer Financijska matematika i statistika. Tijekom diplomskog studija obavila sam kratku praksu u Erste banci u Osijeku. Pedagoško-psihološko-didaktičko-metodičku izobrazbu položila sam 2018. godine na Filozofskom fakultetu u Osijeku, te se iste godine zaposlila u Osnovnoj školi Ante Starčevića u Viljevu, gdje sam odradila pripravnički staž.