Modeliranje pomoću linearne, kvadratne, eksponencijalne i logaritamske funkcije

Lovrenčić, Mihaela

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku

Odjel za matematiku

Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Mihaela Lovrenčić

Modeliranje pomoću linearne, kvadratne, eksponencijalne i logaritamske funkcije

Diplomski rad

Osijek, 2020.

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku

Odjel za matematiku

Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Mihaela Lovrenčić

Modeliranje pomoću linearne, kvadratne, eksponencijalne i logaritamske funkcije

Diplomski rad

Mentorica: izv. prof. dr. sc. Mihaela Ribičić Penava

Osijek, 2020.

Sadržaj

Uvod

Pojam funkcije je jedan od najvažnijih pojmova u matematici. Učenici se postepeno, od sedmoga razreda osnovne škole do trećega razreda srednje škole, susreću s linearnom, kvadratnom, eksponenacijalnom i logaritamskom funkcijom te trigonometrijskim funkcijama. Prije četvrtoga razreda su učenicima pojmovi domene i kodomene apstraktni pa funkcijom smatraju pravilo koje svakom elementu jednoga skupa pridružuje točno jedan element drugoga skupa.

U ovom radu bavit ćemo se sa linearnom, kvadratnom, eksponencijalnom i logaritamskom funkcijom. Za svaku od njih navest ćemo definiciju i osnovna svojstva na način na koji su učenicima srednjih škola, točnije gimnazija i tehničkih škola, prezentirani ti pojmovi. Osim toga, bavit ćemo se modeliranjem pomoću svake od tih funkcija.

Da bismo razumjeli što je to matematičko modeliranje, naprije ćemo reći što označava model u matematici. Matematički model predstavlja neki uzorak koji zapisujemo matematičkim jezikom te ga koristimo za rješavanje matematičkog problema. Pronalaženje i testiranje matematičkih modela za neki realan problem nazivamo matematičko modeliranje. Osim toga, matematičko modeliranje možemo promatrati i kao proces oblikovanja stvarnoga problema u matematički model te vraćanje nazad.

Matematičko modeliranje je važno jer pomoću njega matematička znanja i vještine primjenjujemo u svakodnevnom životu. Međutim, matematičko modeliranje može biti vrlo zahtjevno. Sukladno tome, možemo očekivati kognitivne poteškoće učenika pri rješavanju realnih problema u nastavi matematike. Primjerice, učenici mogu imati poteškoća u primjeni više informacija istovremeno, poteškoća s vizualizacijom, dvosmislenim tumačenjima ideja pri rješavanju, ali i poteškoća u provjeri i interpretaciji rješenja, odnosno modela. Samim time, nastavnici moraju biti svjesni ovih ili nekih drugih poteškoća s kojima se učenici susreću te trebaju nastojati pomoći učenicima kako bi lakše napredovali i prevladali prepreke pri rješavanju problema. Osim kognitivnih poteškoća učenika pri modeliranju u nastavi matematike, u modeliranju postoje i prepreke koje se odnose na izvođenje nastave. Kako su nastavni planovi i programi dosta opterećeni teško je izdvojiti vrijeme za modeliranje. Naime, modeliranje zahtjeva dosta vremena pa ga je teško uklopiti u jedan školski sat. Također, teško je procijeniti reakciju učenika na postavljene probleme te vrijeme koje će im biti potrebno za donošenje ispravnih zaključaka. Veliku ulogu u svemu tome imaju nastavnici. Naime, na njima je da daju dobre primjere za modeliranje te da ih prilagode uzrastu i mogućnostima svakoga učenika.

U matematičkom modeliranju bitno je planiranje jer je pisane ciljeve kojima su dodane aktivnosti za učenike, a potom i za nastavnike lakše ostvariti i evaluirati. Cilj prilikom modeliranja je ostvariti sve po planu, a dobiveni rezultat u usporedbi s onim što smo htjeli ostvariti je mjerilo samoevaluacije. Put za postizanje cilja planiraju nastavnici, dok učenici poboljšavaju svoju matematičku sposobnost za modeliranje stvarnih problema kojima razvijaju ciljeve učenja. S obzirom na to da se u radu bavimo primjerima iz modeliranja koji su namijenjeni učenicima srednjih škola, osvrnut ćemo se na takav oblik modeliranja. Modeliranjem u nastavi od učenika se želi postići da sami formuliraju hipoteze, mijenjaju ili pojednostavljaju pretpostavke te je bitno postići da se svaki od učenika može usredotočiti na cilj problema, transformaciju problema ili preformuliranje pitanja. Očekivanja od učenika su da svaki od njih može prepoznati i imenovati varijable, parametre i konstante, da koristi razne reprezentacije te da razumije važnost koordinatnoga sustava. Osim toga, važno je da učenici mogu povezati matematički rezultat sa stvarnim stanjem određenoga problema i da ocijene model.

Učenici lakše rješavaju realne probleme iz modeliranja ako ih pri tome nastavnici vode kroz problem. Sukladno tome, primjere iz modeliranja pomoću linearne, kvadratne, eksponencijalne i logaritamske funkcije u ovom radu ćemo tako obraditi.

1 Matematičko modeliranje pomoću linearne funkcije

1.1 Definicija i osnovna svojstva linearne funkcije

Razvoj koncepta funkcije započinje u sedmom razredu osnovne škole kada se učenici prvi put susreću s linearnom funkcijom. U nastavku školovanja proširuju svoje znanje o njoj, a posebice u prvom razredu srednje škole. Prije definiranja linearne funkcije, učenici usvajaju pojam linearne jednadžbe i pravca kao njenog grafičkog prikaza te utvrđuju načine dobivanja jednadžbe pravaca. Zatim linearnu funkciju povezuju s jednadžbom pravca. Jednadžbom $Ax + By + C = 0$ određen je pravac u pravokutnom koordinatnom sustavu koju nazivamo implicitni oblik jednadžbe pravca. Nakon što iz te jednadžbe izrazimo y, dobivamo:

$$By = -Ax - C \;\; / : B$$
$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

pri čemu je $B \neq 0$. Nakon uvođenja oznaka $a := -\frac{A}{B}$ i $b := -\frac{C}{B}$, istu jednadžbu možemo zapisati u obliku $y = ax + b$. Tu jednadžbu nazivamo eksplicitni oblik jednadžbe pravca. Iz te jednadžbe jasnije možemo uočiti kako vrijednosti y ovise o vrijednostima x. Kako bismo naglasili tu zavisnost, jednadžbu možemo zapisati u obliku $f(x) = ax + b$. Konačno, dolazimo do definicije linearne funkcije (vidjeti [1]) koja glasi:

Definicija 1.1.1. *Linearna funkcija je pridruživanje kojim nekom realnom broju x pridružujemo realni broj $f(x)$ pri čemu je*

$$f(x) = ax + b, \tag{1}$$

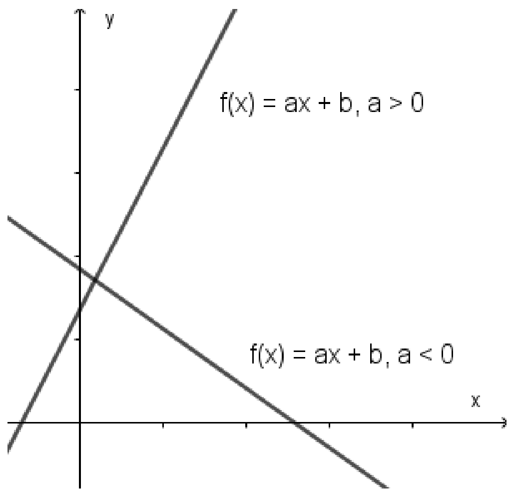
gdje su a i b realni brojevi i $a \neq 0$.

Broj a nazivamo vodeći koeficijent, a b slobodni koeficijent funkcije f. Osim toga, broj x nazivamo argument funkcije f, a $f(x)$ vrijedost funkcije f za zadani argument x.

Nakon što su učenici usvojili definiciju linearne funkcije, susreću se s njezinim grafičkim prikazom. Najprije učenici povezuju parove $(x, f(x))$ koji su zadani pravilom pridruživanja $f(x) = ax + b$ s točkama koordinatne ravnine pri tome pazeći na njihov poredak. Točke koje dobiju na taj način pripadaju jednom pravcu koji nazivamo graf linearne funkcije čija je jednadžba oblika $y = ax + b$.

Kroz različite primjere funkcija i pravaca kao njihovih grafičkih prikaza, učenici uočavaju svojstvo monotonosti kod linearne funkcije (1). Zaključuju da funkcija može biti rastuća i padajuća. Ako je funkcija rastuća, onda se povećanjem argumenta x poveća i vrijednost $f(x)$ pripadne funkcije, a ako je funkcija padajuća, onda se povećanjem argumenta x vrijednost $f(x)$ funkcije f smanji. Osim toga, učenici uočavaju da monotonost funkcije f ovisi i o vodećem koeficijentu a. Ako je koeficijent $a > 0$, onda je funkcija f rastuća, a ako je koeficijent $a < 0$, onda je funkcija f padajuća. Sukladno tome, koeficijent a nazivamo i koeficijent smjera ili nagib funkcije f. Na Slici 1 možemo vidjeti grafički prikaz funkcije f s obzirom na nagib te funkcije. O nagibu funkcije ovisi i brzina rasta i pada funkcije f. Što je nagib $(a > 0)$ veći, pravac je strmiji te funkcija brže raste, a što je nagib $(a < 0)$ manji, pravac je strmiji te funkcija brže pada.

Nakon interpretacije koeficijenta a, učenici interpretiraju koeficijent b. Slobodni koeficijent b je vrijednost funkcije (1) u nuli. Dakle, za $x = 0$ je $f(0) = b$ pa slobodni koeficijent b nazivamo i odsječak na y-osi.



Slika 1: Graf linearne funkcije $f(x) = ax + b$

Osim toga, učenici se susreću i sa pojmom nultočke funkcije.

Definicija 1.1.2. *Nultočka funkcije f je ona vrijednost varijable x za koju je vrijednost funkcije $f(x)$ jednaka nuli, tj. $f(x) = 0$.*

S obzirom na to, nultočku linearne funkcije možemo dobiti nakon što $f(x) = 0$ uvrstimo u (1). Slijedi

$$\begin{aligned} ax + b &= 0 \\ ax &= -b \ / : a \\ x &= -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

1.2 Linearna funkcija u svakodnevnom životu

Linearna funkcija ima vrlo široku primjenu u svakodnevnom životu. Koristi se za predviđanje ili usporedbu koja uključuje stalne promjene. Primjerice, trošak benzina ovisi o broju kupljenih litara. Za fiksnu cijenu benzina, trošak će se linearno povećavati za svaku dodatnu litru. Kada smo već spomenuli benzin, njegova potrošnja ovisi o broju prijeđenih kilometara. Svako vozilo troši određenu količinu benzina na svaki kilometar pa će se količina benzina linearno smanjivati s obzirom na to. Nadalje, visina plaće radnika ovisna je o broju radnih sati. Za fiksnu satnicu, radniku će se plaća linearno smanjivati ili povećavati s obzirom na broj odrađenih sati. Osim navedenih primjera, navest ćemo primjer mjerenja temperature. Naime, temperatura u SAD-u i na Jamajki se još uvijek mjeri u Fahrenheitovim stupnjevima (°F), dok se u ostalim zemljama mjeri u Celzijevim stupnjevima (°C). Te dvije skale su povezane linearnom funkcijom koja je oblika $T(°C) = \frac{T(°F)-32}{1.8}$. Dakako, postoji još mnogo primjera, od kojih se neki mogu vidjeti u [1] i [7], iz kojih se može zaključiti da se linearna funkcija često koristi u svakodnevnom životu.

U nastavku ćemo izdvojiti tri primjera koji se mogu modelirati pomoću linearne funkcije. Obradit ćemo ih na način na koji nastavnici mogu učenicima približiti uporabu linearne funkcije u svakodnevnom životu.

1.2.1 Iznajmljivanje bicikala

Sve više ljudi, osobito turista, koriste bicikl kao jedno od glavnih prijevoznih sredstava. Osim toga, biciklirianje smanjuje stres te je dobro za zdravlje. Sve to je rezultiralo otvaranjem brojnih agencija za iznajmljivanje bicikala. Svaka agencija naplaćuje najam bicikla i svaki dodatni sat vožnje.

Slika 2: Iznajmljivanje bicikala

Činjenica da i neki učenici iznajmljuju bicikl kada odu na odmor može navesti nastavnike da zajedno s učenicima odrede koliki će prihod agencija ostvariti ako je bicikl iznajmila na jedan sat, dva sata, tri sata i četiri sata. Pri tome nastavnik kaže učenicima podatak kako neka agencija iznajmljuje bicikl po cijeni od 10 kuna, a zatim svaki sat vožnje po cijeni od 15 kuna.

Učenici trebaju uočiti kako će agencija odmah u početku ostvariti prihod od 10 kuna jer toliko naplaćuje najam bicikla. Nakon sat vremena će dobiti dodatnih 15 kuna pa je ukupan prihod koji će agencija ostvariti za jedan sat najma bicikla 25 kuna, jer je $10 + 15 = 25$. U odnosu na prihod koji je agencija ostvarila nakon sat vremena, odredit ćemo prihod nakon dva sata i analogno za ostale sate.

$$\begin{aligned} 25 + 15 &= 40 \\ 40 + 15 &= 55 \\ 55 + 15 &= 70. \end{aligned}$$

Dakle, nakon dva sata agencija će ostvariti prihod od 40 kuna, nakon tri sata prihod od 55 kuna, a nakon četiri sata prihod od 70 kuna.
Na temelju prethodno izračunatog, učenici bi trebali uočiti funkciju koju su koristili. Ukoliko ne uspiju, nastavnici ih mogu navesti tražeći od njih da detaljnije raspišu dobivene rezultate za svaki pojedini sat na sljedeći način:

$$\begin{aligned} 25 &= 10 + 15 \\ 40 &= 25 + 15 = 10 + 15 + 15 = 10 + 15 \cdot 2 \\ 55 &= 40 + 15 = 10 + 15 \cdot 2 + 15 = 10 + 15 \cdot 3 \\ 70 &= 55 + 15 = 10 + 15 \cdot 3 + 15 = 10 + 15 \cdot 4. \end{aligned}$$

Sukladno tome, funkcija kojom možemo odrediti prihod agencije nakon t sati dana je sa:

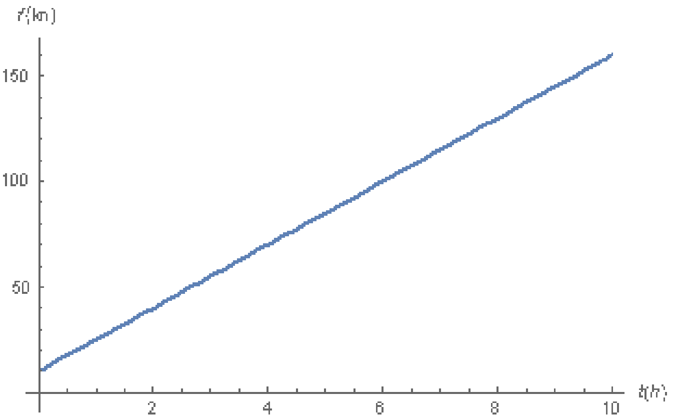
$$f(t) = 15t + 10. \tag{2}$$

Osim toga, učenici iz funkcije (2) na temelju podatka o prihodu koji je agencija ostvarila, mogu odrediti broj sati na koji je agencija iznajmila bicikl. Primjerice, ako je poznato da je agencija ostvarila prihod od 100 kuna, uvrštavanjem u istu dobivamo:

$$\begin{aligned} 100 &= 15t + 10 \\ 15t &= 100 - 10 \\ 15t &= 90 \ \ / : 15 \\ t &= 6. \end{aligned}$$

Dakle, agencija koja je ostvarila prihod u iznosu od 100 kuna, iznajmila je bicikl na 6 sati.

Nadalje, učenici pripadnu funkciju mogu nacrtati u pravokutnom koordinatnom sustavu pri tome pazeći na poredak parova $(t, f(t))$. Nastavnici ih pri tome trebaju upozoriti da uoče kako t ne može biti manji od 0 budući da se radi o satima.



Slika 3: Graf funkcije najma bicikla na t sati

Iz Slike 3 učenici mogu izvesti zaključak o njenoj monotonosti. Kako nagib pravca pripadne funkcije iznosi 15, a on je pozitivan, onda slijedi da je funkcija f rastuća.

1.2.2 Prodaja ulaznica

Mnogi koncerti, opere, mjuzikli, baleti, ali i predstave odvijaju se u koncertnim dvoranama. Međutim, broj sjedećih mjesta u njima je ograničen. U ovisnosti o cijeni ulaznice, svaka dvorana bilježi koliko se ulaznica prodalo, tj. kolika je bila popunjenost dvorane. Činjenica da većina učenika u slobodno vrijeme posjećuje razne koncerte u koncertnim dvoranama, može navesti nastavnike da zajedno s učenicima odrede linearnu funkciju za određivanje broja prodanih ulaznica u ovisnosti o cijeni. Pri tome nastavnik kaže učenicima podatke vezane za koncertnu dvoranu koja ima 1 500 sjedećih mjesta. Naime, ako je koncert u toj dvorani besplatan, onda je popunjena cijela dvorana, a ako je cijena ulaznice 150 kuna, onda je popunjenost te dvorane 60 %.

Nakon što učenici uoče da broj prodanih ulaznica linearno ovisi o cijeni ulaznice, nastavnici ih navode da tu linearnu ovisnost zapišu u općem obliku kao na primjer:

$$P(x) = ax + b, \tag{3}$$

pri čemu je x cijena jedne ulaznice, a $P(x)$ broj prodanih ulaznica, odnosno broj posjetitelja. Iz te funkcije ćemo dobiti linearnu funkciju za određivanje broja prodanih ulaznica u ovisnosti

o cijeni. Sukladno tome, uvrštavanjem poznatih podataka u (3) možemo odrediti parametre a i b.
Ako je koncert besplatan, popunjena je cijela dvorana što znači da je cijena ulaznice jednaka 0 kuna, tj. $x = 0$, a broj posjetitelja jednak je ukupnom broju sjedećih mjesta, tj. $P(0) = 1500$. Sada možemo odrediti parametar b:

$$\begin{aligned} P(0) &= a \cdot 0 + b \\ b &= 1\,500. \end{aligned}$$

Nadalje, ako je cijena 150 kuna, onda je popunjenost koncertne dvorane 60 %, tj. 40 % manja te iznosi

$$1\,500 - 0.4 \cdot 1\,500 = 1\,500 - 600 = 900.$$

Sukladno tome, dobivamo sljedeću jednadžbu:

$$\begin{aligned} P(150) &= a \cdot 150 + b \\ 150a + 1\,500 &= 900 \end{aligned}$$

iz koje možemo odrediti parametar a:

$$\begin{aligned} 150a &= 900 - 1\,500 \\ 150a &= -600 \ \ / : 150 \\ a &= -4. \end{aligned}$$

Konačno, uvrštavanjem izračunatih parametara a i b u (3) dobivamo da je linearna funkcija za određivanje broja prodanih ulaznica u ovisnosti o cijeni oblika:

$$P(x) = -4x + 1\,500. \tag{4}$$

Na temelju dobivene funkcije, učenike može zanimati kolika mora biti cijena ulaznice da se ne proda niti jedna od njih. S obzirom na to, uvrštavanjem $P(x) = 0$ u (4) dobivamo jednadžbu:

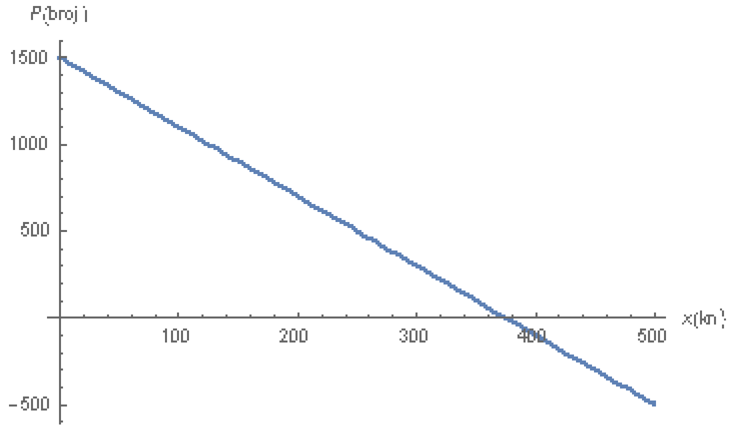
$$-4x + 1\,500 = 0$$

iz koje slijedi

$$\begin{aligned} -4x &= 0 - 1\,500 \\ -4x &= -1\,500 \ \ / : (-4) \\ x &= 375. \end{aligned}$$

Zaključujemo da se za cijenu ulaznice od 375 kuna neće prodati niti jedna od njih.

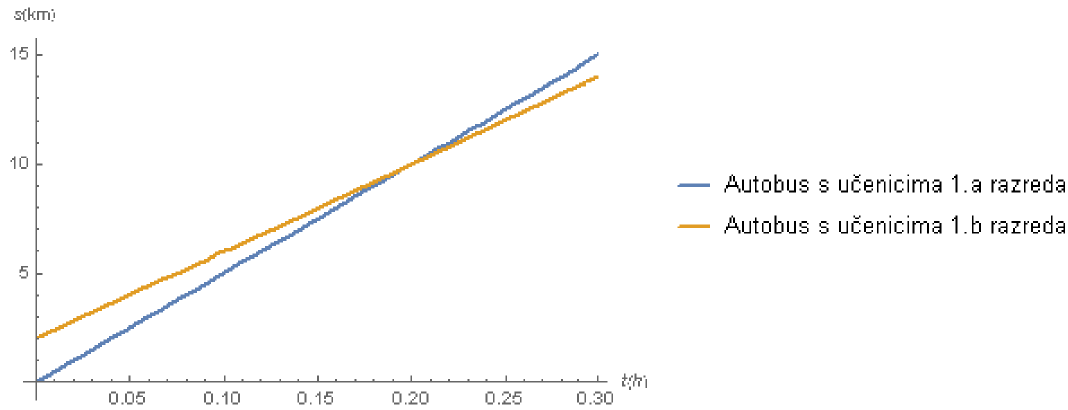
Učenici mogu uočiti da se povećanjem cijene ulaznice smanjuje broj prodanih ulaznica, odnosno posjetitelja u koncertnoj dvorani te na osnovu toga zaključiti da je dobivena funkcija padajuća što možemo vidjeti i na Slici 4.



Slika 4: Graf funkcije prodanih ulaznica u ovisnosti o njihovoj cijeni

1.2.3 Prijeđeni put

Gotovo sve škole organiziraju razne oblike izvanučioničke nastave kao što su izleti i ekskurzije za svoje učenike. Svrha takvoga oblika nastave je ispunjavanje određenih odgojno-obrazovnih ciljeva i zadaća. Kako bi učenici mogli pohađati takav oblik nastave, škola im mora osigurati prijevoz, a to je najčešće autobus. Tijekom putovanja može se pratiti put koji je autobus prešao u ovisnosti o vremenu, ali i brzina kojom je autobus vozio u ovisnosti o vremenu. Pomoću sljedećeg grafičkog prikaza (Slika 5) prikazana je jedna takva ovisnost puta o vremenu koji su autobusi s učenicima 1.a i 1.b razreda neke škole prešli tijekom jednog dijela putovanja na izlet.



Slika 5: Graf puta koji su autobusi s učenicima prešli u ovisnosti o vremenu

Da bi učenici što bolje naučili analizirati grafičke prikaze, nastavnici mogu iskoristiti ovaj primjer te zajedno s njima analizirati isti.

Učenici sa Slike 5 mogu uočiti kako se put koji su autobusi s učenicima prešli mijenja u ovisnosti o vremenu. Budući da su putanje po kojima su se autobusi gibali pravci, a pravac je graf linearne funkcije, učenici mogu zaključiti da je put za oba autobusa linearno ovisan o vremenu. Osim toga, na temelju usvojenoga znanja o gibanju iz fizike, mogu zaključiti kako se radi o gibanju po pravcu. Nagib pravca predstavlja brzinu gibanja, a budući da se brzina tijekom vremena ne mijenja, riječ je o jednolikom gibanju po pravcu o kojem se može detaljnije pročitati u [4].

S obzirom na nagib pravca, učenici mogu uočiti da je nagib pravca koji predstavlja brzinu gibanja autobusa s učenicima 1.a razreda strmiji u odnosu na x-os. Iz toga možemo zaključiti da se taj autobus gibao većom brzinom u odnosu na brzinu drugoga autobusa.

Nadalje, s y-osi koja predstavlja put koji su autobusi prešli, učenici mogu uočiti kako je u trenutku kretanja autobusa s učenicima 1.a razreda sa polazišta, tj. u trenutku $t = 0$, autobus s učenicima 1.b razreda već prešao 2 kilometara. Iz toga možemo zaključiti kako autobusi nisu krenuli u isto vrijeme sa polazišta.

Osim toga, učenici mogu uočiti i da se u određenom trenutku autobusi susretnu, tj. da pređu jednaki put. Da bismo odredili o kojem se trenutku radi, trebamo pogledati presjek pravaca. Pravci se sijeku u točki koju iščitamo sa Slike 5. Vidimo da se radi o točki (0.2, 10) te zaključujemo da će autobusi jednak put od 10 kilometara prevaliti nakon 0.2 sata, tj. nakon $0.2 \cdot 60 = 12$ minuta.

Nakon detaljne analize grafičkoga prikaza, nastavnici mogu navesti učenike i da funkcije sa Slike 5 prikažu analitički. Kako su na početku učenici zaključili da je put za oba autobusa linearno ovisan o vremenu, tu linearnu ovisnost mogu zapisati u općem obliku. Primjerice, funkciju koja predstavlja kretanje autobusa s učenicima 1.a razreda označimo sa:

$$s_1(t) = v_1 t + a, \tag{5}$$

a funkciju koja predstavlja kretanje autobusa s učenicima 1.b razreda sa:

$$s_2(t) = v_2 t + b, \tag{6}$$

pri čemu je t vrijeme, a s_1, odnosno s_2 put koji je autobus s učenicima 1.a, odnosno 1.b razreda prešao.
Najprije ćemo odrediti funkciju s_1. Korištenjem prethodno analiziranih podataka sa Slike 5 vezanih za autobus s učenicima 1.a razreda, možemo odrediti parametre v_1 i a.
U trenutku $t = 0$, uočili smo da je autobus prešao put od 0 km, tj. $s_1(0) = 0$. Sada, iz (5) možemo odrediti parametar a:

$$\begin{aligned} s_1(0) &= v_1 \cdot 0 + a \\ a &= 0. \end{aligned}$$

Nadalje, nakon 0.2 sata, uočili smo da je autobus prešao put duljine 10 km. Sukladno tome, iz (5) dobivamo sljedeću jednadžbu:

$$\begin{aligned} s_1(0.2) &= v_1 \cdot 0.2 + a \\ 0.2v_1 + 0 &= 10 \\ 0.2v_1 &= 10 \end{aligned}$$

iz koje možemo odrediti parametar v_1:

$$\begin{aligned} 0.2v_1 &= 10 \ / : 0.2 \\ v_1 &= 50. \end{aligned}$$

Konačno, uvrštavanjem izračunatih parametara v_1 i a u (5) dobivamo da je funkcija koja predstavlja kretanje autobusa s učenicima 1.a razreda oblika $s_1(t) = 50t$.
Nakon što smo odredili funkciju s_1, preostaje nam odrediti funkciju s_2. Povodom toga trebamo odrediti parametre v_2 i b. Pri tome ćemo koristiti prethodno analizirane podatke sa Slike 5 vezane za autobus s učenicima 1.b razreda.

U trenutku $t = 0$, uočili smo da je autobus prešao put od 2 kilometra, tj. $s_2(0) = 2$. Sada, iz (6) možemo odrediti parametar b:

$$\begin{aligned} s_2(0) &= v_2 \cdot 0 + b \\ b &= 2. \end{aligned}$$

Potom, nakon 0.2 sata, uočili smo da je autobus prešao put duljine 10 km. Sukladno tome, iz (6) dobivamo sljedeću jednadžbu:

$$\begin{aligned} s_2(0.2) &= v_2 \cdot 0.2 + b \\ 0.2v_2 + 2 &= 10 \end{aligned}$$

iz koje možemo odrediti parametar v_2:

$$\begin{aligned} 0.2v_2 &= 10 - 2 \\ 0.2v_2 &= 8 \;\; / : 0.2 \\ v_2 &= 40. \end{aligned}$$

Konačno, uvrštavanjem izračunatih parametara v_2 i b u (6) dobivamo da je funkcija koja predstavlja kretanje autobusa s učenicima $1.b$ razreda oblika $s_2(t) = 40t + 2$.

2 Matematičko modeliranje pomoću kvadratne funkcije

2.1 Definicija i osnovna svojstva kvadratne funkcije

U osmom razredu osnovne škole učenici se prvi put susreću s kvadratnom funkcijom, a detaljnije ju proučavaju u drugom razredu srednje škole. Nakon obrađene cjeline o kvadratnoj jednadžbi upoznaju se s općenitom kvadratnom funkcijom i njezinim grafom. Na samom početku susreću se s definicijom kvadratne funkcije (vidjeti [2]) koja glasi:

Definicija 2.1.1. *Kvadratna funkcija je realna funkcija zadana formulom*

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \tag{7}$$

gdje su a, b i c realni brojevi i $a \neq 0$.

Broj a nazivamo vodeći koeficijent, broj b linearni, a c slobodni koeficijent funkcije f. Budući da za svaki realni broj x možemo odrediti vrijednost funkcije f, kažemo da je ova funkcija definirana za svaki realni broj.

Nakon što su učenici usvojili definiciju kvadratne funkcije, postepeno dolaze do njezinog grafičkog prikaza. Najprije se prisjećaju grafa najjednostavnijega oblika kvadratne funkcije, a to je graf funkcije kvadriranja $f_1(x) = x^2$, s kojim su se susreli u osmom razredu osnovne škole. Nakon toga, učenici otkrivaju i grafove ostalih oblika kvadratne funkcije. Najprije otkrivaju graf funkcije $f_2(x) = ax^2$ čijom se translacijom dobivaju i grafovi ostalih oblika kvadratne funkcije, a to su grafovi funkcija $f_3(x) = ax^2 + c$, $f_4(x) = a(x - x_0)^2$ i $f_5(x) = a(x-x_0)^2+y_0$. Grafovi svih navedenih funkcija su parabole te nam preostaje pokazati i da je graf kvadratne funkcije (7) također parabola. Učenici su prilikom rješavanja kvadratnih jednadžbi naučili kako se kvadratni trinom nadopunjuje do potpunoga kvadrata. Koristeći taj postupak kvadratnu funkciju (7) možemo zapisati u obliku $f_5(x) = a(x-x_0)^2+y_0$ čiji graf učenici znaju nacrtati. Sukladno tome, dobivamo $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$ (cjeloviti izvod postupka može se vidjeti u [2]). Usporedbom jednadžbi slijede vrijednosti brojeva x_0 i y_0 koje iznose $x_0 = -\frac{b}{2a}$ i $y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}$. Povezivanjem s grafom funkcije $f_5(x) = a(x-x_0)^2+y_0$, učenici mogu zaključiti da je graf kvadratne funkcije (7) parabola $y = ax^2+bx+c$ s tjemenom u točki $T(x_0, y_0)$, pri čemu je $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}$, dobivena translacijom grafa funkcije $f_2(x) = ax^2$.

Učenici kroz različite primjere grafičkih prikaza funkcija oblika $f_2(x) = ax^2$ interpretiraju vodeći koeficijent a. Ako je koeficijent $a > 0$, onda je parabola okrenuta prema gore. Nadalje, ako je koeficijent $a < 0$, onda je parabola okrenuta prema dolje. Širina parabole ovisi o apsolutnoj vrijednosti koeficijenta a. Što je ta vrijednost veća, to je graf suženiji prema y-osi.

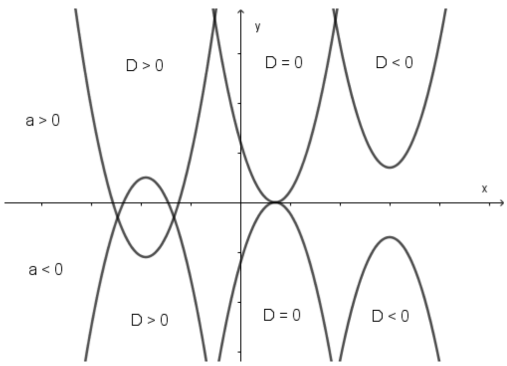
Razmatranjem kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ napisane u obliku $f_5(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$ s obzirom na vodeći koeficijent a, učenici zaključuju o njezinom ekstremu. Funkcija (7) ima ekstrem u točki s apcisom $x_0 = -\frac{b}{2a}$ čija vrijednost iznosi $y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}$. Možemo uočiti da su (x_0, y_0) koordinate tjemena parabole te funkcije. S obzirom na koeficijent a, učenici zaključuju je li ekstrem minimum ili maksimum funkcije. Ako je vodeći koeficijent $a > 0$, onda je ekstrem minimum funkcije, a ako je $a < 0$, onda je ekstrem maksimum funkcije. Osim toga, učenici uočavaju i da monotonost funkcije (7) ovisi o koeficijentu a. Ako je koeficijent $a > 0$, onda je funkcija padajuća na intervalu $\langle -\infty, x_0 \rangle$, a rastuća na $\langle x_0, +\infty \rangle$. Nadalje, ako je koeficijent $a < 0$, onda je funkcija rastuća na intervalu $\langle -\infty, x_0 \rangle$, a padajuća na $\langle x_0, +\infty\rangle$.

Nakon toga, učenici se prisjećaju definicije nultočke funkcije, Definicija 1.1.2. S obzirom na nju, nultočke funkcije (7) dobivamo rješavanjem kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$. Učenici su u cjelini o kvadratnoj jednadžbi naučili da su njezina rješenja:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{8}$$

pri čemu je $D = b^2 - 4ac$ diskriminanta pripadne kvadratne jednadžbe. Također, uočavaju da broj i vrsta rješenja kvadratne jednadžbe ovise o diskriminanti D. Ako je $D > 0$, onda kvadratna jednadžba ima dva realna rješenja. Nadalje, ako je $D = 0$, onda kvadratna jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje. Međutim, ako je $D < 0$, onda kvadratna jednadžba ima dva konjugirano kompleksna rješenja.
Potom, učenici uočavaju da broj nultočaka funkcije (7) ovisi o rješenjima kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$. Budući da rješenja ovise o diskriminanti D, imamo tri mogućnosti. Ako je $D > 0$, onda graf kvadratne funkcije siječe x-os u dvjema točkama pa funkcija ima dvije različite realne nultočke. Nadalje, ako je $D = 0$, onda graf kvadratne funkcije dodiruje x-os u jednoj točki pa funkcija ima jednu dvostruku realnu nultočku. Međutim, ako je $D < 0$, onda graf kvadratne funkcije ne siječe x-os pa funkcija nema niti jednu realnu nultočku.

Na Slici 6 možemo vidjeti grafički prikaz funkcije (7) s obzirom na vodeći koeficijent a i diskriminantu D.



Slika 6: Graf kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$

2.2 Kvadratna funkcija u svakodnevnom životu

Kvadratna funkcija se pojavljuje i primjenjuje u raznim područjima, posebice u području fizike. Primjerice, visina nekoga tijela pri slobodnom padu ovisna je o vremenu te je izražena funkcijom $h(t) = \frac{1}{2}gt^2$, pri čemu je g gravitacijsko ubrzanje i iznosi $g = 9.81$ m/s^2. Budući da je visina proporcionalna s kvadratom vremena, uočavamo da je $h(t)$ kvadratna funkcija. Od slobodnoga pada sastavljena su složena gibanja kao što su vertikalni i horizontalni hitac. S obzirom na to da ćemo horizontalni hitac obraditi u Primjeru 2.2.2, osvrnut ćemo se na vertikalni hitac[1], konkretnije na vertikalni hitac prema gore. U ovom gibanju je visina nekoga tijela kojega bacimo brzinom v_0 vertikalno prema gore ovisna o vremenu te je izražena

[1]Vertikalni hitac je složeno gibanje sastavljeno od jednolikog pravocrtnog gibanja prema gore ili dolje i slobodnog pada.

kvadratnom funkcijom $h(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$. Dakle, tijelo najprije dođe do visine $v_0 t$ jednoliko po pravcu, a zatim za to isto vrijeme t slobodno padne za $-\frac{1}{2}gt^2$. Također, kvadratna funkcija se primjenjuje i u području ekonomije. Primjerice, pomoću kvadratne funkcije mogu se modelirati količina ponude i količina potražnje za nekim proizvodom. Osim toga, mogu se modelirati prihod, trošak i dobit nekoga poduzeća. Jedan takav problem ćemo obraditi u Primjeru 2.2.3. Više primjera iz različitih područja koji se mogu modelirati pomoću kvadratne funkcije može se vidjeti u [2] i [7].

U nastavku ćemo izdvojiti tri primjera koja ćemo obraditi na način na koji nastavnici mogu učenicima približiti uporabu kvadratne funkcije u svakodnevnom životu i drugim područjima kao što su fizika i ekonomija.

2.2.1 Postavljanje ograde

Gotovo oduvijek ljudi ograđuju svoje posjede. Prije su to više činili zbog čuvanja životinja i obilježavanja posjeda, dok danas to više čine zbog sigurnosnih i estetskih razloga. U ovisnosti o tome što žele ograditi, a najčešće su to dvorišta, vrtovi, voćnjaci i slično, ljudi koriste različite vrste ograda. Te ograde mogu biti aluminijske, kamene, betonske, drvene, žive, itd.

Slika 7: Vrtna ograda

S obzirom na to da većina učenika pomaže svojim roditeljima u raznim poslovima pa tako i u postavljanju ograde, nastavnici mogu sljedeći primjer implementirati u nastavi.
Ivanova obitelj želi napraviti vrt pravokutnoga oblika i ograditi ga tako da njegova površina bude najveća moguća. Iz toga razloga, obitelj je kupila drvenu ogradu duljine 200 metara. Nastavnici mogu navesti učenike da odrede koliko će iznositi površina toga vrta.

Učenici trebaju uočiti kako se površina vrta računa kao i površina pravokutnika jer Ivanova obitelj želi napraviti vrt pravokutnoga oblika. Prema tome, površinu vrta računamo po formuli:

$$P = xy, \tag{9}$$

pri čemu sa x označimo širinu vrta, a sa y duljinu. Budući da se ogradom duljine 200 metara žele ograditi sve četiri strane vrta, odnosno pravokutnika, učenici trebaju uočiti da je duljina ograde jednaka opsegu vrta, odnosno pravokutnika. S obzirom na to da opseg pravokutnika računamo po formuli $O = 2x + 2y$, imamo:

$$2x + 2y = 200. \tag{10}$$

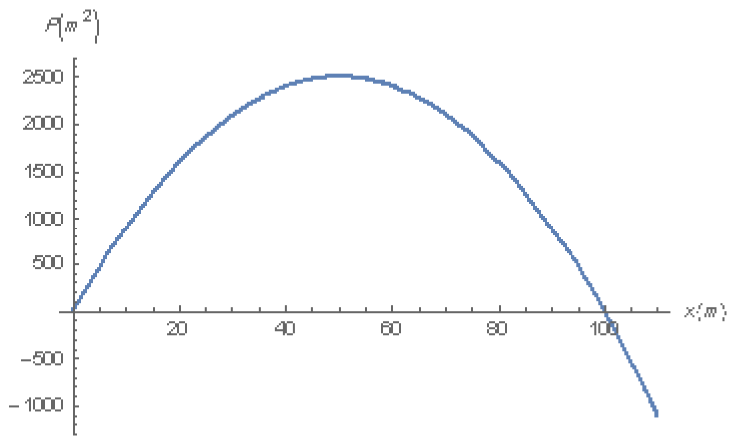
Učenici trebaju uočiti kako iz jednakosti (9) ne mogu odrediti koliko će iznositi najveća moguća površina vrta budući da površina ovisi o dvije nepoznate vrijednosti, x i y. Kako one ovise jedna o drugoj, nastavnici ih navode da površinu vrta prikažu primjerice u ovisnosti o širini vrta x, odnosno da koriste jednakost (10). Stoga slijedi

$$\begin{aligned} 2y &= 200 - 2x \ \ / : 2 \\ y &= 100 - x \end{aligned} \tag{11}$$

čijim uvrštavanjem u (9) dobivamo:

$$\begin{aligned} P &= x \cdot (100 - x) \\ P &= 100x - x^2. \end{aligned}$$

Odavde učenici mogu zaključiti da je površina vrta P kvadratna funkcija koja ovisi o širini vrta x. Na Slici 8 možemo vidjeti grafički prikaz te funkcije.



Slika 8: Graf funkcije površine vrta u ovisnosti o širini x vrta

Sada, učenici mogu uočiti da se problem svodi na određivanje maksimuma kvadratne funkcije $P(x) = 100x - x^2$. Kako je vodeći koeficijent ove funkcije negativan, ona ima maksimum u tjemenu parabole čija vrijednost iznosi

$$\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{(4 \cdot (-1) \cdot 0) - 100^2}{4 \cdot (-1)} = 2\,500.$$

Dakle, najveća moguća površina vrta kojega će Ivanova obitelj moći ograditi iznosi $2\,500\ \mathrm{m}^2$.

Osim toga, učenike može zanimati koliko će iznositi širina x i duljina y toga vrta. Budući da se maksimum kvadratne funkcije $P(x) = 100x - x^2$ postiže u tjemenu s apcisom $-\frac{b}{2a}$, pri čemu je

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{100}{2 \cdot (-1)} = 50,$$

širina toga vrta će iznositi 50 metara. Nadalje, iz jednakosti (11) imamo:

$$y = 100 - 50 = 50,$$

odnosno da će duljina toga vrta iznositi 50 metara. Dakle, širina i duljina vrta kojega Ivanova obitelj želi napraviti su jednake te će vrt biti kvadratnoga oblika.

2.2.2 Bacanje medicinke

U svim osnovnim i srednjim školama u Hrvatskoj, tjelesna i zdravstvena kultura je obavezan predmet koji se temelji na usvajanju teorijskih i motoričkih znanja, vještina i navika. Sve to doprinosi stvaranju pozitivnoga stava prema vježbanju, zdravlju i zdravom načinu života. Jedna od aktivnosti s kojom se učenici susreću na tjelesnoj i zdravstvenoj kulturi je bacanje medicinke. Primjerice, poznato je da je neki učenik horizontalno bacio medicinku sa visine prsa, točnije sa visine $h = 1.6$ m od tla početnom brzinom $v_0 = 12$ km/h. S obzirom na to da se prilikom bacanja medicinke mjeri udaljenost na koju je ona pala, nastavnici ju zajedno s učenicima mogu odrediti pri čemu će otpor zraka zanemariti.

Na temelju usvojenoga znanja o gibanju iz fizike u prvom razredu srednje škole, učenici mogu povezati gibanje medicinke koja je horizontalno bačena početnom brzinom $v_0 = 12$ km/h s horizontalnim hitcem. Prisjećaju se da se pri tom gibanju tijelo giba jednoliko pravocrtno u smjeru x-osi što možemo zapisati kao:

$$x(t) = v_0 t, \tag{12}$$

ali zbog djelovanja sile teže, to tijelo i slobodno pada u negativnom smjeru y-osi sa visine h s koje je bačeno što možemo zapisati kao:

$$y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2, \tag{13}$$

pri čemu je g gravitacijsko ubrzanje i iznosi $g = 9.81$ m/s^2.
Budući da nastavnici zajedno s učenicima žele odrediti udaljenost na koju je medicinka iz primjera pala, učenici mogu uočiti da će ju moći odrediti iz (12) jer x predstavlja prijeđenu udaljenost po horizontalnoj osi. Međutim, kako je vrijeme za koje je ta medicinka pala na tlo nepoznato, učenici najprije njega moraju odrediti. U trenutku pada medicinke na tlo, njezina vertikalna udaljenost od tla je jednaka 0, tj. $y = 0$. Sada, iz (13) možemo odrediti vrijeme za koje je ta medicinka pala na tlo. Imamo:

$$\begin{aligned} 0 &= 1.6 - \frac{1}{2} \cdot 9.81 t^2 \\ 4.905 t^2 &= 1.6 \ \ / : 4.905 \\ t^2 &= 0.3262 \ \ / \sqrt{} \\ t &= \pm 0.57. \end{aligned}$$

Kako vrijeme ne može biti negativan broj, negativno rješenje odbacujemo te dobivamo da je $t = 0.57$ s. Sada su nam sve vrijednosti iz (12) poznate pa možemo odrediti udaljenost na koju je ta medicinka pala. Sukladno tome, imamo:

$$x(0.57) = 12 \cdot 0.57 = 6.84.$$

Zaključujemo da je medicinka koja je horizontalno bačena početnom brzinom $v_0 = 12$ km/h sa visine $h = 1.6$ m, pala na udaljenost $x = 6.84$ m nakon $t = 0.57$ s.

Osim toga, učenike može zanimati kako izgleda putanja po kojoj se ta medicinka gibala. Ukoliko se ne sjećaju općenite jednadžbe putanje kod horizontalnoga hitca, nastavnici ih mogu navesti da izvedu istu. Budući da je vrijeme tijekom jednolikoga pravocrtnoga gibanja i slobodnoga pada isto jer se ta gibanja odvijaju istovremeno, iz jednadžbe (12) možemo izraziti t te ga uvrstiti u (13). Sukladno tome, nakon što iz (12) izrazimo t imamo:

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \ \ / : v_0 \\ t &= \frac{x}{v_0} \end{aligned}$$

čijim uvrštavanjem u (13) dobivamo:

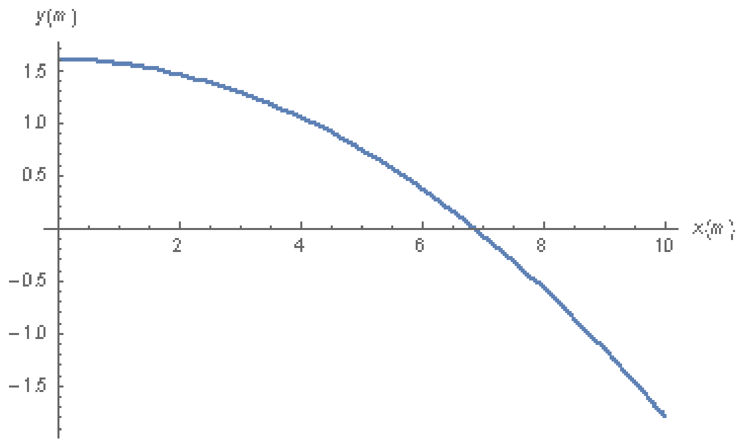
$$y = h - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2$$
$$y = h - \frac{g}{2v_0}x^2. \tag{14}$$

Nakon što smo izveli općenitu jednadžbu putanje kod horizontalnoga hitca, možemo odrediti jednadžbu putanje po kojoj se medicinka iz primjera gibala. Sukladno tome, uvrštavanjem poznatih vrijednosti u (14) dobivamo:

$$y = 1.6 - \frac{9.81}{2 \cdot 12^2}x^2$$
$$y = 1.6 - 0.034x^2.$$

Odavde učenici mogu zaključiti da je vertikalna udaljenost medicinke y od tla kvadratna funkcija koja ovisi o prijeđenoj udaljenosti po horizontalnoj osi, x.

Nadalje, učenici pripadnu funkciju mogu skicirati u pravokutnom koordinatnom sustavu.



Slika 9: Putanja gibanja medicinke $y(x)$

Iz Slike 9 učenici mogu izvesti zaključak da je graf ove funkcije dio parabole koja je okrenuta prema dolje. Osim toga, mogu izvesti zaključak da je maksimalna vertikalna udaljenost y od tla jednaka visini $h = 1.6$ m na kojoj se medicinka nalazila na početku. Sukladno tome, koordinate tjemena parabole su $(0, 1.6)$.

2.2.3 Dobit poduzeća

Svako poduzeće prikazuje uspješnost svoga poslovanja u financijskim izvješćima. Jedno takvo izvješće je izvješće o dobiti koje prikazuje prihode i rashode te njihovu razliku koja predstavlja dobit koju je neko poduzeće ostvarilo u određenom vremenskom razdoblju. Primjerice, poznato je da je neko poduzeće ukupan prihod P i ukupan rashod R za neko razdoblje prikazalo pomoću funkcija $P(Q) = -10Q^2 + 1\,200Q$ i $R(Q) = 200Q + 21\,000$, pri čemu je Q količina proizvoda koju je poduzeće proizvelo. Nastavnici zajedno s učenicima mogu odrediti funkciju dobiti $D(Q)$.

Učenici mogu uočiti da se funkcija dobiti $D(Q)$ može dobiti oduzimanjem funkcije ukupnoga rashoda $R(Q)$ od funkcije ukupnoga prihoda $P(Q)$. Sukladno tome, iz $D(Q) =$

$P(Q) - R(Q)$ dobivamo:

$$\begin{aligned} D(Q) &= -10Q^2 + 1\,200Q - (200Q + 21\,000) \\ D(Q) &= -10Q^2 + 1\,200Q - 200Q - 21\,000 \\ D(Q) &= -10Q^2 + 1\,000Q - 21\,000. \end{aligned} \tag{15}$$

Zaključujemo da je funkcija dobiti kvadratna funkcija čiji je graf parabola okrenuta prema dolje jer je vodeći koeficijent negativan.

Nadalje, učenike može zanimati za koju količinu proizvoda Q poduzeće nije ostvarilo nikakvu dobit D, tj. kada je $D(Q) = 0$. Trebamo uočiti da se pripadni problem svodi na određivanje nultočaka funkcije (15) koje dobivamo rješavanjem kvadratne jednadžbe $-10Q^2 + 1\,000Q - 21\,000 = 0$. Budući da je ta jednadžba djeljiva s 10, nakon dijeljenja dobivamo njezin pojednostavljeni oblik

$$\begin{aligned} -10Q^2 + 1\,000Q - 21\,000 &= 0 \ \ / : 10 \\ -Q^2 + 100Q - 2\,100 &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Sada se problem svodi na rješavanje kvadratne jednadžbe (16). Pomoću formule (8) možemo odrediti njezina rješenja:

$$\begin{aligned} Q_{1,2} &= \frac{-100 \pm \sqrt{100^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2\,100)}}{2 \cdot (-1)} \\ Q_{1,2} &= \frac{-100 \pm \sqrt{10\,000 - 8\,400}}{-2} \\ Q_{1,2} &= \frac{-100 \pm \sqrt{1\,600}}{-2} \\ Q_{1,2} &= \frac{-100 \pm 40}{-2} \end{aligned}$$

odakle je

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{-100 + 40}{-2} \\ Q_1 &= 30 \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} Q_2 &= \frac{-100 - 40}{-2} \\ Q_2 &= 70. \end{aligned}$$

Zaključujemo da su Q_1 i Q_2 nultočke funkcije (15), tj. da poduzeće nije ostvarilo nikakvu dobit prilikom proizvodnje 30 i 70 proizvoda.

Osim toga, učenike može zanimati i za koju je količinu proizvoda Q poduzeće ostvarilo maksimalnu dobit D te koliko je ta dobit iznosila. Treba uočiti da se pripadni problem svodi na određivanje maksimuma kvadratne funkcije (15). Kako je vodeći koeficijent ove funkcije negativan, ona postiže maksimum u tjemenu parabole za

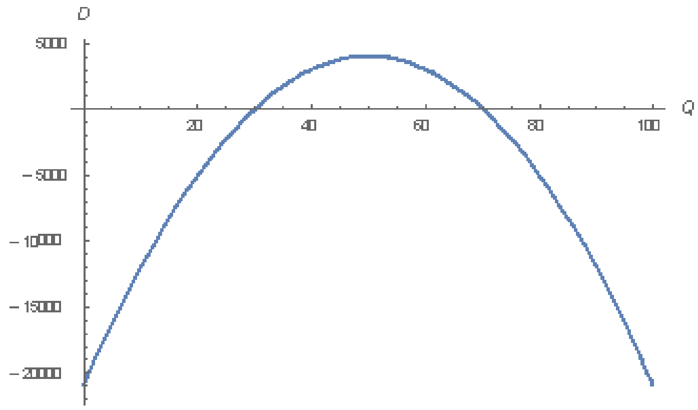
$$-\frac{b}{2a} = -\frac{1\,000}{2 \cdot (-10)} = 50$$

čija vrijednost iznosi:

$$\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{(4\cdot(-10)\cdot(-21\,000))-1000^2}{4\cdot(-10)}=4\,000.$$

Zaključujemo da su $(50, 4\,000)$ koordinate tjemena parabole funkcije (15), tj. da je poduzeće maksimalnu dobit $D(Q)=4\,000$ ostvarilo za količinu $Q=50$.

Nastavnici mogu navesti učenike da funkciju (15) prikažu grafički pomoću prethodnih zaključaka, tj. koordinata nultočaka i tjemena parabole koja je okrenuta prema dolje.



Slika 10: Graf funkcije dobiti $D(Q)$

Iz Slike 10 učenici mogu izvesti zaključak da je dobit pozitivna za količinu proizvoda Q iz intervala $\langle 30, 70\rangle$ te da je u tom slučaju poduzeće poslovalo uspješno. Međutim, za količinu proizvoda Q iz intervala $[0, 30\rangle$ i intervala $\langle 70, \infty\rangle$ je dobit negativna te u tom slučaju poduzeće nije poslovalo uspješno. Za 30 i 70 proizvoda poduzeće nije ostvarilo nikakvu dobit.

3 Matematičko modeliranje pomoću eksponencijalne funkcije

3.1 Definicija i osnovna svojstva eksponencijalne funkcije

Osim s kvadratnom funkcijom, učenici se u drugom razredu srednje škole susreću i s eksponencijalnom funkcijom. Prije definiranja eksponencijalne funkcije, učenici ponavljaju potencije s kojima su se detaljnije upoznali u prvom razredu srednje škole. Pri tome, postupno proširuju skup kojemu pripadaju eksponenti potencija od skupa prirodnih brojeva preko skupa cijelih brojeva do skupa racionalnih brojeva. Nakon ponavljanja potencija čiji je eksponent racionalan broj, učenici su zaključili da ako je a zadana baza, pri čemu je $a > 0$ i $a \neq 1$, a eksponent x bilo koji racionalan broj, onda vrijednost potencije a^x ovisi o racionalnom broju x. Tu ovisnost definirali su kao funkciju koja racionalnom broju x pridružuje vrijednost potencije a^x, $x \mapsto a^x$. Potom su tu funkciju proširili i na realne brojeve te došli do definicije eksponencijalne funkcije (vidjeti [3]) koja glasi:

Definicija 3.1.1. *Neka je $a > 0$ i $a \neq 1$ realan broj. Funkcija*

$$f(x) = a^x \tag{17}$$

definirana za svaki realni broj x zove se eskponencijalna funkcija.

Tijekom ponavljanja potencija, učenici ponavljaju i svojstva potencija koje zadovoljava i eksponencijalna funkcija, a ona glase:

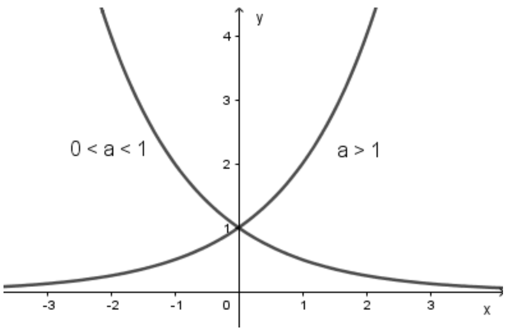
1. $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$,
2. $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$,
3. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$,
4. $a^0 = 1$,

gdje su $a, b > 0$ i $a, b \neq 1$ te x, x_1 i x_2 realni brojevi.

Nakon što su učenici usvojili definiciju i neka svojstva eksponencijalne funkcije, susreću se s njezinim grafičkim prikazom. Učenici se prvo upoznaju s grafovima eksponencijalne funkcije s bazom $a > 1$. Sukladno tome, mogu skicirati graf funkcije $f_1(x) = 10^x$, a potom i graf funkcije $f_2(x) = 2^x$ pomoću izračunatih vrijednosti funkcija za nekoliko proizvoljno odabranih vrijednosti x. Učenici uočavaju da se povećanjem argumenta x povećaju i vrijednosti pripadnih funkcija, tj. da su obje funkcije rastuće. Nakon toga se upoznaju s grafovima eksponencijalne funkcije s bazom $0 < a < 1$. Sukladno tome, učenici mogu skicirati graf funkcije $f_3(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ pomoću izračunatih vrijednosti pripadne funkcije za vrijednosti x koje su uzeli i pri skiciranju grafa funkcije $f_2(x) = 2^x$. Učenici uočavaju da se povećanjem argumenta x vrijednost funkcije smanji, tj. da je funkcija padajuća. Osim toga, uočavaju da je graf funkcije $f_3(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ simetričan grafu funkcije $f_2(x) = 2^x$ s obzirom na y-os. Konačno, učenici zaključuju da monotonost funkcije (17) ovisi o bazi a. Ako je $a > 1$, onda za $x_1 < x_2$ vrijedi $a^{x_1} < a^{x_2}$, gdje su x_1, x_2 realni brojevi, tj. pripadna funkcija je rastuća, a ako je $0 < a < 1$, onda za $x_1 < x_2$ vrijedi $a^{x_1} > a^{x_2}$, gdje su x_1, x_2 realni brojevi, tj. pripadna funkcija je padajuća. Osim toga, učenici bi trebali zaključiti da su općenito grafovi eksponencijalnih funkcija čije su baze recipročni brojevi simetrični s obzirom na y-os.

Osim prethodno navedenoga, učenici mogu doći do još nekih zaključaka. Pri računanju vrijednosti funkcija $f_1(x) = 10^x$, $f_2(x) = 2^x$ i $f_3(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ za nekoliko odabranih vrijednosti x, učenici uočavaju da su te vrijednosti pozitivni realni brojevi i za $x < 0$ i za $x = 0$ te za $x > 0$. Na temelju toga, zaključuju da su vrijednosti $f(x)$ eksponencijalne funkcije (17) pozitivni realni brojevi za svaki realan broj x. Nadalje, učenici uočavaju da sva tri grafa funkcija $f_1(x) = 10^x$, $f_2(x) = 2^x$ i $f_3(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ prolaze točkom $(0, 1)$ te na temelju svojstva 4. zaključuju da graf eksponencijalne funkcije prolazi tom točkom. Osim toga, uočavaju da se grafovi funkcija $f_1(x) = 10^x$ i $f_2(x) = 2^x$ približuju negativnom dijelu x-osi te zaključuju da se grafovi eksponencijalne funkcije s bazom $a > 1$ tako približuju x-osi. Međutim, za graf funkcije $f_3(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ uočavaju da se približuje pozitivnom dijelu x-osi te zaključuju da se grafovi eksponencijalne funkcije s bazom $0 < a < 1$ tako približuju x-osi. Sukladno tome, kažemo da je x-os, odnosno pravac $y = 0$, asimptota grafa eksponencijalne funkcije.
Na taj način učenici mogu sami uz koordinaciju nastavnika izvesti zaključke o svojstvima eksponencijalne funkcije.

Na Slici 11 možemo vidjeti grafički prikaz funkcije (17) s obzirom na bazu a.



Slika 11: Graf eksponencijalne funkcije $f(x) = a^x$

3.2 Eksponencijalna funkcija u svakodnevnom životu

Eksponencijalna funkcija značajna je pri analizi i opisivanju mnogih prirodnih procesa, fizikalnih veličina te ekonomskih i društvenih pojava u realnom životu. Primjerice, pomoću eksponencijalne funkcije može se modelirati rast neke populacije, npr. bakterija, virusa, biljaka, stanovništva i slično, u ovisnosti o vremenu t. Pri tome se uzima da rast populacije nije ograničen hranom, prostorom niti bilo kojim drugim životnim resursom. Sukladno tome, odgovarajući model je oblika $N(t) = N_0 e^{kt}$, pri čemu je N_0 početna vrijednost populacije, a $N(t)$ broj jedinki u populaciji nakon vremena t. Broj k je konstanta koja se uglavnom određuje eksperimentalno. Ako je $k > 0$, onda je funkcija N rastuća, a ako je $k < 0$, onda je funkcija N padajuća. Jedan takav problem ćemo obraditi u Primjeru 3.2.2. Nadalje, pomoću eksponencijalne funkcije može se modelirati i radioaktivnost. Ako je m_0 masa neke radioaktivne tvari, onda je količina te tvari nakon vremena t jednaka $m(t) = m_0 e^{-kt}$, pri čemu je $k = \frac{\ln 2}{T}$. Vrijeme poluraspada T je vrijeme potrebno da se radioaktivnim raspadanjem količina radioaktivne tvari prepolovi. Osim toga, pomoću eksponencijalne funkcije može se modelirati i statički atmosferski tlak na nekoj visini h izrazom $p(h) = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} gh}$. Pri tome je p_0 tlak, a ρ_0 gustoća na referentnom nivou te g gravitacijsko ubrzanje koje iznosi $g = 9.81$ m/s^2. Osim navedenih primjera, modeliranih pomoću eksponencijalne funkcije, više primjera može se vidjeti u [3], [5], [6] i [7].

U nastavku ćemo izdvojiti tri primjera koja ćemo obraditi na način na koji nastavnici mogu učenicima približiti uporabu eksponencijalne funkcije u svakodnevnom životu.

3.2.1 Temperatura kave

Većina ljudi u današnje vrijeme konzumira kavu koja ih održava budnima i poboljšava im koncentraciju. Međutim, svatko od njih voli piti kavu određene temperature. Temperatura kave je najviša kada se skuha. S vremenom se ta početna temperatura kave $T_{pocetna}$ smanjuje prema temperaturi okoline $T_{okoline}$. Zakon po kojem se kava hladi je Newtonov zakon hlađenja te će po njemu temperatura kave nakon vremena t iznositi:

$$T(t) = T_{okoline} + (T_{pocetna} - T_{okoline}) \cdot e^{-kt}, \tag{18}$$

pri čemu je t vrijeme u minutama, a k konstanta. Budući da većina učenika pije kavu, nastavnici zajedno s učenicima mogu riješiti sljedeći primjer.
Ana je skuhala šalicu kave u kuhinji gdje je temperatura konstantna i iznosi 18°C. Temperatura skuhane kave iznosila je 95°C, a temperatura kave nakon 5 minuta iznosila je 35°C. Na temelju toga, nastavnici mogu navesti učenike da odrede zakon hlađenja kave tijekom vremena t pri tim uvjetima.

Učenici iz teksta zadatka mogu uočiti sljedeće poznate veličine:

$$\begin{aligned} T_{okoline} &= 18°C, \\ T_{pocetna} &= 95°C \end{aligned}$$

čijim uvrštavanjem u (18) dobivamo:

$$T(t) = 18 + (95 - 18) \cdot e^{-kt}. \tag{19}$$

Također, učenici trebaju uočiti da moraju izračunati konstantu k iz (19) kako bi odredili zakon hlađenja kave tijekom vremena t pri tim uvjetima. Sukladno tome, iz teksta zadatka poznato nam je da je temperatura kave nakon 5 minuta, $t = 5$, iznosila $T(5) = 35$°C. Uvrštavanjem tih parametara u (19) dobivamo sljedeću jednadžbu:

$$35 = 18 + (95 - 18) \cdot e^{-5k}$$

iz koje možemo odrediti konstantu k:

$$\begin{aligned} 35 - 18 &= (95 - 18) \cdot e^{-5k} \\ 17 &= 77 \cdot e^{-5k} \ \ / : 77 \\ 0.2208 &= e^{-5k} \ \ / \ln \\ \ln(0.2208) &= -5k \ \ / : (-5) \\ k &= 0.302. \end{aligned}$$

Konačno, uvrštavanjem izračunate konstante k u (19) dobivamo da je zakon hlađenja kave tijekom vremena t pri tim uvjetima oblika

$$T(t) = 18 + (95 - 18) \cdot e^{-0.302t}. \tag{20}$$

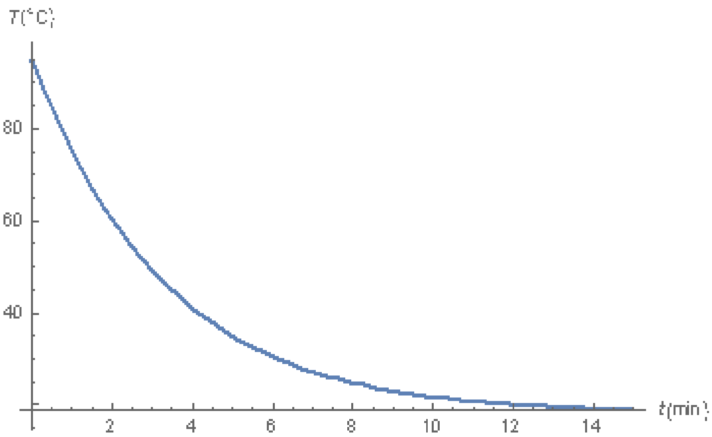
Nadalje, nastavnici mogu otkriti učenicima podatak da Ana najviše voli piti kavu temperature 20°C te ih navesti da odrede nakon koliko vremena će kava dostići tu temperaturu.

Sukladno tome, uvrštavanjem $T(t) = 20°\text{C}$ u (20) dobivamo:

$$\begin{aligned}
20 &= 18 + (95 - 18) \cdot e^{-0.302t} \\
20 - 18 &= (95 - 18) \cdot e^{-0.302t} \\
2 &= 77 \cdot e^{-0.302t} \;\; / : 77 \\
0.026 &= e^{-0.302t} \;\; / \ln \\
\ln(0.026) &= -0.302t \;\; / : (-0.302) \\
t &= 12.08
\end{aligned}$$

odakle zaključujemo da će kava temperaturu od 20°C dostići nakon otprilike 12 minuta.

Osim toga, učenici pripadnu funkciju (20) mogu nacrtati u pravokutnom koordinatnom sustavu. Nastavnici ih pri tome trebaju upozoriti da uoče kako t ne može biti manji od 0 budući da se radi o vremenu.



Slika 12: Graf funkcije hlađenja kave tijekom vremena t

Iz Slike 12 učenici mogu uočiti da se temperatura kave tijekom vremena t smanjuje prema temperaturi od 18°C koja predstavlja temperaturu okoline $T_{okoline}$. Osim toga, učenici mogu uočiti da graf funkcije (20) siječe y-os u točki $(0, 95)$. Ta točka predstavlja temperaturu kave koja iznosi 95°C u početnom trenutku $t = 0$.

3.2.2 Rast stanovništva

Stanovništvo je ukupan broj ljudi koji borave na nekom prostoru. Možemo govoriti o stanovništvu naselja, regija, država, kontinenata ili svijeta. Temeljni izvor za proučavanje stanovništva je popis stanovništva koji provodi svaka država. Jedan od ciljeva popisa stanovništva je dobivanje podataka o broju stanovnika određene države ili područja. Pomoću podataka o broju stanovnika neke države može se opisati rast stanovništva te države u ovisnosti o vremenu. Primjerice, rast stanovništva neke države opisuje se funkcijom koja je oblika:

$$N(t) = 18 \cdot e^{0.005t}, \tag{21}$$

pri čemu je t vrijeme u godinama, a $N(t)$ broj stanovnika u milijunima. Nastavnici zajedno s učenicima mogu odrediti početnu vrijednost broja stanovnika određene države iz primjera.

Učenici trebaju uočiti da početna vrijednost broja stanovnika predstavlja broj stanovnika u početnom trenutku mjerenja, a to je u trenutku $t = 0$. Sukladno tome, uvrštavanjem toga parametra u (21) dobivamo:

$$\begin{aligned} N(0) &= 18e^{0.005\cdot 0} \\ N(0) &= 18e^{0} \\ N(0) &= 18. \end{aligned}$$

Dakle, početna vrijednost broja stanovnika određene države iz primjera iznosi 18 milijuna.

Nadalje, nastavnici mogu navesti učenike da odrede koliko će stanovnika ta država imati za 5 godina. Sukladno tome, uvrštavanjem $t = 5$ u (21) dobivamo:

$$\begin{aligned} N(5) &= 18e^{0.005\cdot 5} \\ N(5) &= 18e^{0.025} \\ N(5) &= 18.46 \end{aligned}$$

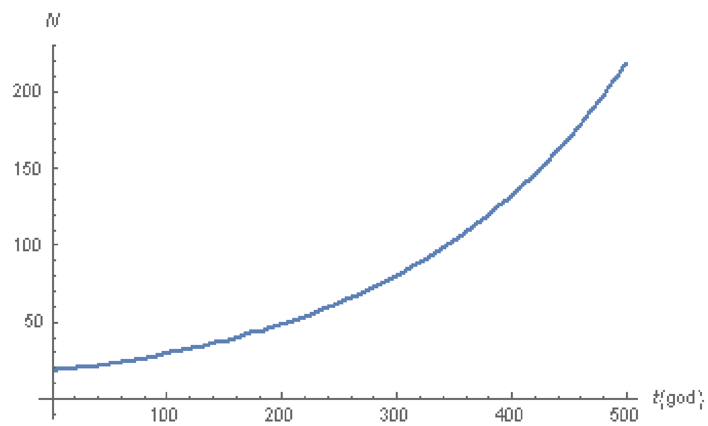
odakle zaključujemo da će ta država nakon 5 godina imati 18.46 milijuna stanovnika.

Osim toga, učenici iz funkcije (21) mogu odrediti za koliko će godina ta država dostići određeni broj stanovnika. Primjerice, nastavnici ih mogu navesti da odrede za koliko će godina broj stanovnika te države iznositi 20 milijuna. Obzirom na to, uvrštavanjem $N(t) = 20$ u istu dobivamo:

$$\begin{aligned} 20 &= 18e^{0.005t} \;\; / : 18 \\ 1.111 &= e^{0.005t} \;\; / \ln \\ \ln(1.111) &= 0.005t \;\; / : 0.005 \\ t &= 21.07. \end{aligned}$$

Dakle, zaključujemo da će ta država za otprilike 21 godinu imati 20 milijuna stanovnika.

Nadalje, nastavnici mogu navesti učenike da pripadnu funkciju (21) prikažu u pravokutnom koordinatnom sustavu. Pri tome ih upozoravaju da uoče kako t ne može biti manji od 0 budući da se radi o vremenu.



Slika 13: Graf funkcije rasta stanovništva neke države u ovisnosti o vremenu t

Iz Slike 13 učenici mogu izvesti zaključak o njenoj monotonosti. Budući da se tijekom vremena broj stanovnika te države povećava, učenici mogu zaključiti da je pripadna funkcija rastuća.

3.2.3 Podizanje kredita

Banka je poslovna organizacija koja ljudima nudi financijske usluge. Među uslugama koje banka nudi su i mogućnost ulaganja te mogućnost posudbe novca. Prilikom ulaganja ili posuđivanja novca određenoga iznosa C_0, većina banaka tom iznosu obračunava kamate više od jednom godišnje. Kada se one obračunavaju n puta godišnje za t godina s kamatnom stopom p, iznos C_0 raste do iznosa C. Sukladno tome, iznos kojim ulagač raspolaže ili dužnik duguje nakon vremena t dan je izrazom:

$$C(t) = C_0 \left(1 + \frac{p}{n}\right)^{nt}. \tag{22}$$

Činjenica da većina obitelji pa tako i obitelji učenika podižu kredit ili štede u banci, može navesti nastavnike da zajedno s učenicima riješe sljedeći primjer. Ako je poznato da je Ivanova obitelj podigla kredit u iznosu od 10 000 kuna na 3 godine uz kamatu od 8 % koja se obračunava 2 puta godišnje, nastavnici zajedno s učenicima mogu odrediti koliko će novca njegova obitelj morati vratiti banci nakon toga vremena.

Slika 14: Kredit u banci

Učenici iz teksta zadatka mogu uočiti sljedeće poznate veličine:

$$\begin{aligned} C_0 &= 10\,000, \\ p &= 8\,\% = 0.08, \\ n &= 2, \\ t &= 3 \end{aligned}$$

čijim uvrštavanjem u (22) možemo odrediti koliko će novca Ivanova obitelj morati vratiti banci nakon 3 godine. Sukladno tome, imamo:

$$\begin{aligned} C(3) &= 10\,000 \left(1 + \frac{0.08}{2}\right)^{2\cdot 3} \\ C(3) &= 10\,000\,(1 + 0.04)^6 \\ C(3) &= 10\,000\,(1.04)^6 \\ C(3) &= 10\,000 \cdot 1.265319 \\ C(3) &= 12\,653.19. \end{aligned}$$

S obzirom na dogovorene uvjete s bankom, Ivanova obitelj će banci morati vratiti iznos od 12 653.19 kuna nakon 3 godine.

Osim toga, nastavnici mogu navesti učenike da odrede koliko iznosi mjesečna rata kredita koju Ivanova obitelj vraća banci. Da bismo to dobili, moramo podijeliti ukupan iznos koji će

Ivanova obitelj vratiti banci tijekom te 3 godine, tj. iznos $C(3)$, sa ukupnim brojem mjeseci tijekom toga vremena. Kako jedna godina ima 12 mjeseci, onda 3 godine imaju $3 \cdot 12 = 36$ mjeseci. Na temelju toga, imamo:

$$\frac{C(3)}{36} = \frac{12\,653.19}{36} = 351.48.$$

Zaključujemo da će Ivanova obitelj banci mjesečno vraćati iznos od 351.48 kuna.

4 Matematičko modeliranje pomoću logaritamske funkcije

4.1 Definicija i osnovna svojstva logaritamske funkcije

Nakon obrade eksponencijalne funkcije, učenici se u drugom razredu srednje škole susreću i s logaritamskom funkcijom. Prije definiranja logaritamske funkcije, učenici se upoznaju s pojmom logaritma. Naime, pri obradi eksponencijalne funkcije (17), učenici su naučili odrediti vrijednost potencije a^x za svaki realni broj x. Obratno, kako bi odredili eksponent x ako im je poznata vrijednost y potencije a^x, učenici usvajaju definiciju logaritma. Međutim, kako je skup svih vrijednosti eksponencijalne funkcije skup pozitivnih realnih brojeva, onda ima smisla promatrati samo logaritme pozitivnih realnih brojeva. Sukladno tome, definicija logaritma pozitivnoga broja (vidjeti [3]) glasi:

Definicija 4.1.1. *Neka je $f(x) = a^x$ eksponencijalna funkcija i neka je y pozitivan broj. Broj x za koji je $a^x = y$ zove se logaritam broja y po bazi a.*

$$a^x = y \iff x = \log_a y. \tag{23}$$

Logaritam pozitivnoga broja y jest eksponent kojim treba potencirati bazu a da bi se dobilo y:

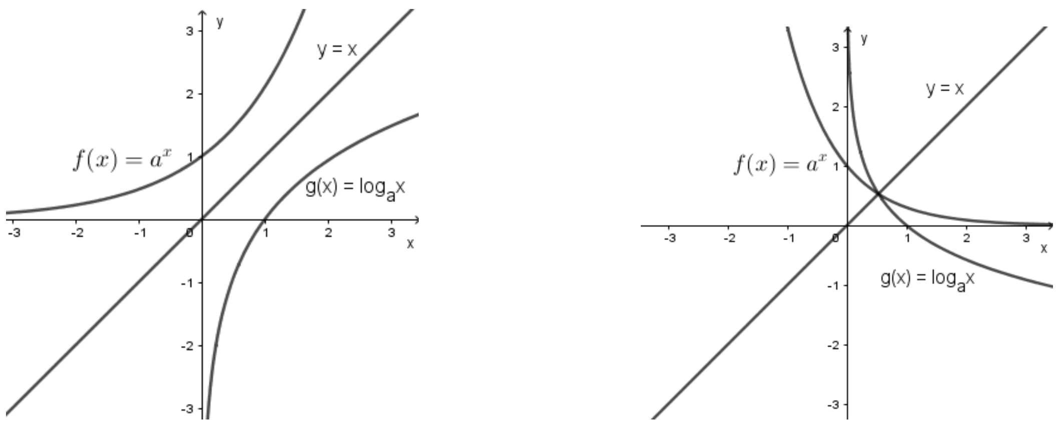
$$a^{\log_a y} = y.$$

Konačno, dolazimo do definicije logaritamske funkcije (vidjeti [3]) koja glasi:

Definicija 4.1.2. *Logaritamska funkcija po bazi a, gdje je $a > 0$ i $a \neq 1$, je pridruživanje $x \mapsto \log_a x$ kojim se pozitivnom realnom broju x pridružuje njegov logaritam. Pišemo:*

$$f(x) = \log_a x. \tag{24}$$

Nakon što su učenici usvojili definiciju logaritamske funkcije, susreću se s njezinim grafičkim prikazom. Učenici prvo skiciraju graf funkcije $f(x) = \log_2 x$ pomoću izračunatih vrijednosti funkcije za nekoliko proizvoljno odabranih vrijednosti x. Usporedbom grafa te funkcije sa grafom funkcije $f_2(x) = 2^x$ s kojim su se ranije susreli, učenici uočavaju da su ta dva grafa sukladna, no da su različito položena u pravokutnom koordinatnom sustavu. Naime, graf funkcije $f_2(x) = 2^x$ smješten je iznad x-osi, a graf funkcije $f(x) = \log_2 x$ smješten je desno od y-osi. Jedan graf iz drugoga možemo dobiti zrcaljenjem prema simetrali prvoga i trećega kvadranta, odnosno prema pravcu $y = x$. Dakle, uzmemo li bilo koju točku (x, y) ravnine koja pripada jednom grafu, onda je njoj simetrična točka prema pravcu $y = x$ točka (y, x) koja pripada drugomu grafu. Upravo ta činjenica objašnjava sukladnost ta dva grafa. Naime, eksponencijalna i logaritamska funkcija su inverzne funkcije, (23). Tako iz grafa jedne od tih funkcija možemo dobiti graf druge zrcaljenjem prema pravcu $y = x$.



(a) $a > 1$ (b) $0 < a < 1$

Slika 15: Graf funkcije $f(x) = a^x$ i funkcije $g(x) = \log_a x$ obzirom na pravac $y = x$

Iz Slike 15 učenici zaključuju da se graf eksponencijalne funkcije proteže iznad cijele x-osi, u prvom i drugom kvadrantu. To opravdava činjenica da je područje definicije eksponencijalne funkcije skup realnih brojeva te da je skup vrijednosti te funkcije skup pozitivnih realnih brojeva. Kako je skup vrijednosti eksponencijalne funkcije područje definicije logaritamske funkcije, graf logaritamske funkcije proteže se desno od y-osi, u prvom i četvrtom kvadrantu. Iz te slike učenici zaključuju i da je skup vrijednosti logaritamske funkcije skup realnih brojeva. Nadalje, iz Slike 15 učenici zaključuju da i monotonost logaritamske funkcije ovisi o bazi a kao i monotonost eksponencijalne funkcije. Ako je $a > 1$, onda za $x_1 < x_2$ vrijedi $\log_a x_1 < \log_a x_2$, gdje su x_1, x_2 pozitivni realni brojevi, tj. pripadna funkcija je rastuća, a ako je $0 < a < 1$, onda za $x_1 < x_2$ vrijedi $\log_a x_1 > \log_a x_2$, gdje su x_1, x_2 pozitivni realni brojevi, tj. pripadna funkcija je padajuća. Iz Slike 15 učenici zaključuju i o asimptoti grafa logaritamske funkcije. Naime, graf logaritamske funkcije s bazom $a > 1$ se približava negativnom dijelu y-osi, dok se graf logaritamske funkcije s bazom $0 < a < 1$ približava pozitivnom dijelu y-osi. Sukladno tome, kažemo da je y-os, odnosno pravac $x = 0$, asimptota grafa logaritamske funkcije. Osim toga, iz Slike 15 učenici zaključuju da općenito graf logaritamske funkcije prolazi točkom $(1, 0)$.

Osim svojstva monotonosti logaritamske funkcije, učenici se susreću i sa svojstvima logaritamske funkcije koja glase:

1. $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$,
2. $\log_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$,
3. $\log_a(x^k) = k \log_a x, \ \ k \in \mathbb{R}$,
4. $\log_a 1 = 0$,
5. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$,

pri čemu je $a > 0$ i $a \neq 1$ te x, x_1 i x_2 pozitivni realni brojevi.

Dodatno, učenici se susreću i sa posebnim oblicima logaritamske funkcije. Jedna od tih funkcija je logaritamska funkcija po bazi 10 jer je standardni sustav u kojemu računamo dekadski. Logaritam po bazi 10 nazivamo dekadski logaritam ili logaritam te ga označavamo sa $\log x$. Nadalje, u primjeni logaritamskih funkcija najvažnija je ona funkcija čija je baza e, gdje je e iracionalan broj s približnom vrijednošću $e = 2.7182818$. Logaritam po bazi e nazivamo prirodni logaritam te ga označavamo sa $\ln x$.

4.2 Logaritamska funkcija u svakodnevnom životu

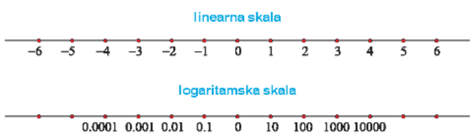
Kao i eksponencijalna funkcija, logaritamska funkcija je značajna pri analizi i opisivanju mnogih prirodnih procesa, fizikalnih veličina te ekonomskih i društvenih pojava u realnom životu. Primjerice, pomoću logaritamske funkcije može se modelirati stupanj zatamnjenosti S stakala tamnih naočala izrazom $S(P) = -\frac{7}{3}\log P + 1$. Pri tome je P prozirnost, odnosno dijelom vidljiva svjetlost koju ta stakla propuštaju. Nadalje, pomoću logaritamske funkcije može se modelirati razina jakosti zvuka izrazom $L(I) = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$. Pri tome je I intenzitet zvuka, a I_0 intenzitet na pragu čujnosti koji iznosi 10^{-12} W/m^2. Više primjera koji se mogu modelirati pomoću logaritamske funkcije može se vidjeti u [3], [5] i [7].

U nastavku ćemo izdvojiti dva primjera koja ćemo obraditi na način na koji nastavnici mogu učenicima približiti uporabu logaritamske funkcije u svakodnevnom životu.

4.2.1 Magnituda potresa

Na svijetu postoje iznenadne okolnosti uzrokovane nepovoljnim vremenskim prilikama, seizmičkim uzrocima i drugim prirodnim uzrocima koje prekidaju normalno odvijanje života, uzrokuju žrtve, štetu ili gubitak imovine te štetu na javnoj infrastrukturi ili okolišu. Takve okolnosti nazivamo prirodne nepogode. Jedna od prirodnih nepogoda je potres. Svaki potres opisuje magnituda i intenzitet ili jačina potresa. Magnituda potresa predstavlja energiju oslobođenu prilikom potresa te se izražava stupnjevima Richterove skale koja ima vrijednosti od 0 do 9. S obzirom na to da učenici žive u Hrvatskoj koja je seizmički aktivno područje, nastavnici jedan takav primjer mogu implementirati u nastavi. Primjerice, poznato je da je u Zagrebu 1880. godine zabilježen potres od 6.3 stupnjeva Richterove skale, $M_{1880} = 6.3$, dok je u ožujku 2020. godine zabilježen potres od 5.5 stupnjeva Richterove skale, $M_{2020} = 5.5$. Nastavnici zajedno s učenicima mogu odrediti koliko je jači bio potres 1880. godine.

Kako bi mogli odrediti koliko je potres 1880. godine bio jači od potresa 2020. godine, nastavnici trebaju učenike upoznati s logaritamskom skalom. Naime, određeni podatci se ponekad grafički prikazuju tako da im se pridruže točke pravca. Pri tome je najčešća skala linerna. Međutim, u nekim slučajevima ta skala nije praktična pa se primjenjuju druge skale kao na primjer logaritamska skala. Logaritamsku skalu možemo dobiti iz linerane tako da svakom broju x linerane skale pridružimo broj 10^x logaritamske.



Slika 16: Linearna i logaritamska skala

S obzirom na to da je Richterova skala logaritamska, povećanje za jedan stupanj znači deset puta jači potres. Sukladno tome, učenici mogu odrediti koliko je potres 1880. godine bio jači od potresa 2020. godine. Najprije ćemo odrediti koliko je stupnjeva potres 1880. godine bio veći od potresa 2020. godine. Sukladno tome, oduzet ćemo magnitudu potresa 2020. godine od magnitude potresa 1880. godine pa imamo:

$$M_{1880} - M_{2020} = 6.3 - 5.5 = 0.8.$$

Budući da povećanje za jedan stupanj znači 10 puta jači potres, onda povećanje za 0.8 stupnjeva znači $10^{0.8} = 6.3$ jači potres. Dakle, zaključujemo da je potres 1880. godine bio 6.3 puta jači od potresa 2020. godine.

Osim toga, nastavnici mogu navesti učenike da odrede magnitudu najjačega potresa u Hrvatskoj koji se dogodio u Dubrovniku 1667. godine, M_{1667}, ako je poznato da je bio 126 puta jači od potresa u Zagrebu 2020. godine. S obzirom na to da nam je poznato da je potres u Dubrovniku bio 126 puta jači od potresa u Zagrebu, iz $10^x = 126$ možemo odrediti za koliko je stupnjeva taj potres bio veći. Sukladno tome, imamo:

$$\begin{aligned} 10^x &= 126 \ /\log \\ \log 10^x &= \log 126 \\ x \cdot \log 10 &= \log 126 \\ x \cdot 1 &= \log 126 \\ x &= 2.1. \end{aligned}$$

Konačno, preostaje nam odrediti koliko iznosi magnituda potresa u Dubrovniku. Budući da su nam poznati podatci da je magnituda potresa u Dubrovniku veća za $x = 2.1$ stupnjeva Richterove skale od magnitude potresa u Zagrebu te da magnituda potresa u Zagrebu iznosi 5.5 stupnjeva Richterove skale, možemo odrediti magnitudu potresa u Dubrovniku. Sukladno tome, slijedi

$$\begin{aligned} M_{1667} &= M_{2020} + x \\ M_{1667} &= 5.5 + 2.1 \\ M_{1667} &= 7.6. \end{aligned}$$

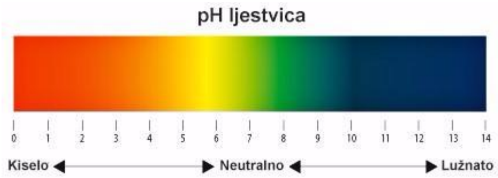
Dakle, zaključujemo da je u Dubrovniku 1667. godine zabilježen potres od 7.6 stupnjeva Richterove skale.

4.2.2 *pH* vrijednost

Većina ljudi po okusu nekih tvari može zaključiti o kiselosti te tvari. Razinu kiselosti tvari određuje koncentracija vodikovih iona u njoj te se izražava pomoću pH vrijednosti. Ako je pH vrijednost neke tvari manja od 7, onda je ta tvar kisela, a ako je pH vrijednost veća od 7, onda je ta tvar lužnata. Međutim, ako je $pH = 7$, onda je ta tvar neutralna. Pomoću funkcije:

$$pH = -\log (H^+), \tag{25}$$

gdje je H^+ koncentracija vodikovih iona, možemo odrediti pH vrijednost neke tvari.



Slika 17: pH ljestvica

Primjerice, poznato je da koncentracija vodikovih iona u mineralnoj vodi iznosi H^+(mineralna voda) $= 1.58 \cdot 10^{-4}$ te da koncentracija vodikovih iona u sodi bikarboni iznosi H^+(soda bikarbona) $= 3.16 \cdot 10^{-9}$. S obzirom na pH vrijednosti, nastavnici zajedno s učenicima mogu prokomentirati kiselost sode bikarbone i mineralne vode.

Učenici prvo mogu donijeti zaključak o kiselosti mineralne vode. Naime, kako je podatak o koncentraciji vodikovih iona u mineralnoj vodi poznat, učenici mogu odrediti njezinu pH vrijednost iz (25). Sukladno tome, uvrštavanjem H^+(mineralna voda) $= 1.58 \cdot 10^{-4}$ u istu dobivamo:

$$\begin{aligned} pH &= -\log(1.58 \cdot 10^{-4}) \\ pH &= 3.8. \end{aligned}$$

Dakle, pH vrijednost mineralne vode iznosi pH(mineralna voda) $= 3.8$. Kako je njezina pH vrijednost manja od 7, učenici mogu zaključiti da je mineralna voda kisela tvar. Nadalje, preostaje nam odrediti pH vrijednost sode bikarbone kako bi mogli zaključiti o kiselosti te tvari. Učenici na temelju podatka o koncentraciji vodikovih iona u sodi bikarboni mogu odrediti njezinu pH vrijednost. Sukladno tome, uvrštavanjem H^+(soda bikarbona) $= 3.16 \cdot 10^{-9}$ u (25) dobivamo:

$$\begin{aligned} pH &= -\log(3.16 \cdot 10^{-9}) \\ pH &= 8.5. \end{aligned}$$

Dakle, pH vrijednost sode bikarbone iznosi pH(soda bikarbona) $= 8.5$. Kako je njezina pH vrijednost veća od 7, učenici mogu zaključiti da je soda bikarbona lužnata tvar.

Osim toga, nastavnici mogu navesti učenike da odrede čija je koncentracija vodikovih iona veća i koliko puta. Budući da su koncentracije vodikovih iona u mineralnoj vodi i sodi bikarboni poznate, na temelju njih možemo odrediti čija je koncentracija veća. Naime, kako je $1.58 \cdot 10^{-4} > 3.16 \cdot 10^{-9}$, možemo zaključiti da je koncentracija vodikovih iona u mineralnoj vodi veća nego u sodi bikarboni. Preostaje nam još odrediti koliko puta je veća. Da bismo to dobili moramo podijeliti koncentraciju vodikovih iona u mineralnoj vodi sa koncentracijom vodikovih iona u sodi bikarboni. Na temelju toga, imamo:

$$\frac{H^+(mineralna\ voda)}{H^+(soda\ bikarbona)} = \frac{1.58 \cdot 10^{-4}}{3.16 \cdot 10^{-9}} = 50\,000.$$

Zaključujemo da je koncentracija vodikovih iona u mineralnoj vodi 50 000 puta veća od koncentracije vodikovih iona u sodi bikarboni.

Zaključak

Primjena matematike u svakodnevnom životu je velika. Naime, ona nije prisutna samo u obrazovanju nego je dio svakodnevice. Konkretno, u ovom radu smo prezentirali široku primjenu linearne, kvadratne, eksponencijalne i logaritamske funkcije. Osim što se pojavljuju u svakodnevnom životu, te funkcije susrećemo i u mnogim drugim znanostima kao što su ekonomija, fizika, geofizika, kemija i slično. Primjeri u ovom radu su obrađeni na način na koji nastavnici mogu učenicima približiti uporabu svake pojedine navedene funkcije. Učenici na tim primjerima mogu uočiti kako im definicije i svojstva pojedinih funkcija pomažu pri rješavanju istih. Samim time, učenici mogu shvatiti važnost učenja i razumijevanja matematike te uvidjeti da je ona prisutna svuda oko nas.

Literatura

[1] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 1, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred gimnazija i tehničkih škola, 2. dio*, Element, Zagreb, 2014.

[2] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 2, udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred gimnazija i tehničkih škola, 1. dio*, Element, Zagreb, 2014.

[3] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 2, udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred gimnazija i tehničkih škola, 2. dio*, Element, Zagreb, 2014.

[4] D. Hrupec, D. Horvat, *Fizika 1 - Pojmovi i koncepti, udžbenik s multimedijskim sadržajem za 1. razred gimnazija, B - inačica*, Neodidacta, Zagreb, 2014.

[5] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika 1*, Gradska tiskara, Osijek, 1998.

[6] N. Roguljić, A. Burazin Mišura, I. Baras, *Eksponencijalna funkcija i njezine primjene u realnom životu*, (URL: `https://hrcak.srce.hr/112930`)

[7] V. Županović, K. Šorić, *Primjenjena matematika podržana računalom*, Diozit, Slavonski Brod, 2016.

Sažetak

Jedan od temeljnih matematičkih pojmova je pojam funkcije koji je značajan unutar same matematike, ali i u njezinoj primjeni. U ovom diplomskom radu posebno se obrađuju četiri elementarne funkcije, to su linearna, kvadratna, eksponencijalna i logaritamska funkcija. Svaka od njih obrađena je na način na koji se učenici u srednjoj školi susreću s istom. Pri tome je za svaku od njih navedena definicija i osnovna svojstva. Osim toga, za svaku od njih dani su i razni primjeri iz svakodnevnog života koji se mogu modelirati pomoću tih funkcija.

Ključne riječi: *Funkcija, linearna funkcija, kvadratna funkcija, eksponencijalna funkcija, logaritamska funkcija*

Summary

One of the most important mathematical concepts is the concept of function, which is significant not only in mathematics itself but also in its application. In this thesis, we discuss four elementary functions – linear, quadratic, exponential and logarithmic function. These functions are explained in the way students are taught in high school. For each function, the definition and basic properties are given. Furthermore, every function is accompanied by various examples from everyday life that can be modeled using described functions.

Keywords: *Function, linear functions, quadratic functions, exponential functions, logarithmic functions*

Životopis

Rođena sam 5. svibnja 1996. godine u Virovitici, Hrvatska. Osnovnu školu "Voćin" u Voćinu završila sam 2011. godine nakon čega sam upisala opću gimnaziju u Srednjoj školi Marka Marulića Slatina, Slatina. Nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku Sveučilišta u Osijeku upisala sam 2015. godine.
Aktivna članica Kulturno umjetničke udruge "Voćin" u Voćinu bila sam od 2006. do 2015. godine te sam 2018. godine završila početni tečaj društvenih plesova u Športsko plesnoj udruzi "Feniks", Osijek.