Konačni napeti bazni okviri

Lovrić, Lucija

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Lucija Lovrić

Konačni napeti bazni okviri

Diplomski rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Lucija Lovrić

Konačni napeti bazni okviri

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2020.

Sadržaj

Uvod

U vektorskom prostoru ključni su pojmovi baze i sustava izvodnica. Sustav izvodnica je skup vektora koji razapinje vektorski prostor, dok pod bazom podrazumijevamo skup linearno nezavisnih vektora čijom se linearnom kombinacijom može na jedinstven način prikazati svaki vektor iz danog vektorskog prostora. Nadalje, postoji posebna klasa baza koja se zove ortonormirana baza čiji su elementi vektorskog prostora $\mathcal{H}$ jedinične duljine i u parovima su okomiti te imaju svojstvo

$$v = \sum_{j=1}^{k} \langle v, e_j \rangle e_j, \qquad \forall v \in \mathcal{H},$$

gdje je $\{e_1, \ldots, e_k\}$ neka ortonormirana baza za vektorski prostor $\mathcal{H}$. Kada bismo uklonili neki vektor iz ortonormirane baze, tada više ne bismo imali skup izvodnica prostora i stoga ne bi bila moguća rekonstrukcija nekih vektora pomoću ostalih vektora iz navedene baze. Kako bi se zaobišao taj problem mogu se koristiti bazni okviri jer kod njih je dopušteno uklanjanje vektora, a ono što ostane nakon uklanjanja novi je skup izvodnica odnosno novi bazni okvir. Također, bazni okviri važni su pri prijenosu signala jer omogućuju stabilan način predstavljanja signala. Ukoliko pri prijenosu signala ($v \in \mathcal{H}$) dođe do nekakvih oštećenja, svaki signal v moći će se rekonstruirati iz koeficijenata baznog okvira. U ovom radu bavit ćemo se općenitim baznim okvirima, te posebno specifičnijim baznim okvirima, napetim baznim okvirima te kanonskim dualnim baznim okvirima, a na kraju ćemo se upoznati s potencijalom baznog okvira.

1. Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju definirat ćemo osnovne pojmove i rezultate koje ćemo koristiti u ovome radu. Najprije, započet ćemo s definicijom vektorskog prostora.

Definicija 1.1. *Neka je V neprazan skup na kojem su zadane binarna operacija zbrajanja $+\colon\ V \times V \to V$ i operacija množenja skalarima iz polja $\mathbb{F}$, $\cdot\colon \mathbb{F} \times V \to V$. Kažemo da je uređena trojka $(V,\ +,\ \cdot)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ ako vrijedi:*

1) $a + (b + c) = (a + b) + c,\ \forall\ a, b, c \in V$;
2) *postoji* $0 \in V$ *sa svojstvom* $a + 0 = 0 + a = a,\ \forall a \in V$;
3) *za svaki* $a \in V$ *postoji* $-a \in V$ *tako da je* $a + (-a) = -a + a = 0$;
4) $a + b = b + a,\ \forall a, b \in V$;
5) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F},\ \forall a \in V$;
6) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F},\ \forall a \in V$;
7) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b,\ \forall \alpha \in \mathbb{F},\ a, b \in V$;
8) $1 \cdot a = a,\ \forall a \in V$.

Neformalno, za skup vektora kažemo da je nezavisan ukoliko jedini način dobivanja 0 je pomoću linearne kombinacije elemenata iz skupa. Precizniji zapis dan je u sljedećoj definiciji.

Definicija 1.2. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $B = \{b_1, b_1, \ldots, b_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, konačan skup vektora iz V. Kažemo da je skup B linearno nezavisan ako vrijedi*

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i b_i = 0 \ \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

U suprotnom kažemo da je skup B linearno zavisan.

Definicija 1.3. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $B \subseteq V$, $B \neq \emptyset$. Linearna ljuska skupa B označava se simbolom $[B]$ i definira kao*

$$[B] = \{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i b_i : \alpha_i \in \mathbb{F},\ b_i \in B,\ k \in \mathbb{N}\}.$$

Dodatno, definira se $[\emptyset] =\ 0$.

Definicija 1.4. *Neka je V vektorski prostor i $B \subseteq V$. Kaže se da je B sustav izvodnica za V (ili da B generira V) ako vrijedi $[B] = V$.*

Nakon što smo definirali osnovne pojmove, sada smo spremni precizno definirati jedan on najvažnijih pojmova u vektorskom prostoru.

Definicija 1.5. *Konačan skup* $B = \{b_1, b_1, \ldots b_k\}$, $k \in \mathbb{N}$ *na vektorskom prostoru* V *se naziva baza za* V *ako je* B *linearno nezavisan sustav izvodnica za* V*.*

Definicija 1.6. *Kaže se da je vektorski prostor* V *konačnodimenzionalan ako postoji neki konačan sustav izvodnica za* V*.*

Definicija 1.7. *Dimenziju konačnodimenzionalnog vektorskog prostora* $V \neq \{0\}$ *definiramo kao broj elemenata baze za* V*. Dodatno, uzimamo da je dimenzija nulprostora* 0*.*

Napomena 1.1. *Dimenziju vektorskog prostora* V *označavat ćemo s* $dimV$*.*

Sada ćemo prikazati svojstva preslikavanja vektorskih prostora koja čuvaju linearne operacije zbrajanja i skalarnog množenja.

Definicija 1.8. *Neka su* V *i* W *vektorski prostori nad istim poljem* $\mathbb{F}$*. Preslikavanje* $S \colon V \to W$ *nazivamo linearan operator ako vrijedi* $S(\alpha x + \beta y) = \alpha Sx + \beta Sy,\ \forall x, y \in V,\ \alpha, \beta \in \mathbb{F}$*.*

Kako bismo iskazali jedan od fundamentalnih teorema u linearnoj algebri precizno ćemo definirati pojmove slike i jezgre operatora.

Definicija 1.9. *Neka je* $S \colon V \to W$ *linearan operator. Potprostori*

$$Ker\ S = \{x \in V : Sx = \ 0\} \leq \ V$$

i

$$Im\ S = \{Sv : v \in V\} \leq \ W$$

zovu se jezgra, odnosno slika operatora S. Kad su V *i* W *konačnodimenzionalni, rang i defekt operatora* S *definiraju se kao brojevi* $r(S) = \ dim(Im\ S)$*, odnosno* $d(S) = dim(Ker\ S)$*.*

Teorem 1.1. *(Teorem o rangu i defektu.) Neka je* $S \colon V \to W$ *linearan operator, te neka je* $dimV < \infty$*. Tada je* $r(S) + d(S) = dimV$*.*

Svaki linearan operator koji je definiran na konačnodimenzionalnom prostoru jedinstveno je određen djelovanjem na bazi, stoga navodimo sljedeću propoziciju.

Propozicija 1.1. *Neka su* V *i* W *vektorski prostori nad istim poljem* $\mathbb{F}$*, neka je* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *baza za* V *i* $(w_1,\ \ldots, w_n)$ *bilo koja uređena* n*-torka iz* W*. Tada postoji jedinstven linearan operator* $S \colon V \to W$ *takav da je*

$$Sv_i = w_i,\ \forall i = 1, \ldots, n.$$

Napomena 1.2. *Možemo promatrati skup* $L(V, W)$ *kao skup svih linearnih operatora s prostora* V *u prostor* W *ako su* V *i* W *vektorski prostori nad istim poljem.*

Nadalje, linearne operatore možemo i matrično zapisati. Neka je $A \in L(V, W)$ linearan operator, pretpostavimo da je $\{v_1, \ldots, v_n\}$ baza za V i $\{w_1, \ldots, w_k\}$ baza za W. Vektore

$Av_1, \ldots, Av_n \in W$ možemo pisati na način

$$Av_j = \sum_{i=1}^{k} a_{ij} w_i, \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Dobivene koeficijente možemo složiti u matricu

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix} \in M_{kn}(\mathbb{F}).$$

Dobivenu matricu nazivamo matrični prikaz operatora A u paru baza (v, w).

Napomena 1.3. *Oznaka $M_{kn}(\mathbb{F})$ predstavlja skup svih matrica s k redaka i n stupaca s koeficijentima iz polja $\mathbb{F}$.*

Sada ćemo uvesti definicije skalarnog produkta te vektorskog prostora na kojem su oni definirani.

Definicija 1.10. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Skalarni produkt na V je preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ koje ima sljedeća svojstva:*

1) $\langle x, x \rangle \geq 0, \ \forall x \in V$;

2) $\langle x, x \rangle = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0$;

3) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle \ \forall x_1, x_2, y \in V$;

4) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \ \forall x, y \in V, \ \forall \alpha \in \mathbb{F}$;

5) *i)* $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \ \forall x, y \in V, \ \mathbb{F} = \mathbb{R}$;
ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \ \forall x, y \in V, \ \mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Napomena 1.4. *Svojstvo (5) za $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ naziva se simetričnost, a za $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ naziva se hermitska simetričnost.*

Napomena 1.5. *Ako imamo $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{F}^n$ tada je $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$, za $x, y \in \mathbb{R}^n$ te $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$ za $x, y \in \mathbb{C}^n$.*

Definicija 1.11. *Vektorski prostor na kojem je definiran skalarni produkt zove se unitaran prostor.*

Također, uvedimo sada još jedan novi vektorski prostor.

Definicija 1.12. *Norma na vektorskom prostoru V nad poljem $\mathbb{F}$ je preslikavanje $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ sa sljedećim svojstvima:*

1) $\|x\| \geq 0, \ \forall x \in V$*;*

2) $\|x\| = 0$ *ako i samo ako* $x = 0$*;*

3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \ \forall \alpha \in \mathbb{F}, \ \forall x \in V$*;*

4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \ \forall x, y \in V$*.*

Uređen par $(V, \ \|\cdot\|)$ naziva se normiran prostor.

Iz sljedeće definicije vidimo kako je svaki unitaran prostor normiran uz uvedenu normu iz sljedeće definicije.

Definicija 1.13. *Neka je V unitaran prostor. Norma na V je funkcija $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ definirana s $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.*

Ukoliko imamo konačnodimenzionalan prostor $\mathbb{F}^n$, na njemu možemo snabdijeti nekoliko primjera normi, a mi ćemo prikazati l-2 normu.

$$(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_2), \ \|(x_1, \ldots, \ x_n)\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}, \ (x_1, \ldots, \ x_n) \in \mathbb{F}^n.$$

Definicija 1.14. *Neka je V unitaran prostor. Kaže se da je vektor $x \in V$ normiran ako je $\|x\| = 1$.*

Sada uvodimo definiciju okomitih vektora.

Definicija 1.15. *Neka je V unitaran prostor. Kaže se da su vektori x, y iz V međusobno okomiti ili ortogonalni (oznaka: $x \perp y$) ako je $\langle x, y\rangle = 0$. Konačan skup vektora $\{e_1, \ldots, e_k\}$ je ortogonalan ako je $e_i \perp e_j$, $\forall i \neq j$. Skup $\{e_1, \ldots, e_k\}$ je ortonormiran ako je ortogonalan i ako je $\|e_i\| = 1$, $\forall i = 1, \ldots, k$.*

Definicija 1.16. *Neka je V unitaran prostor i T potprostor od V. Ortogonalni komplement potprostora V je $T^{\perp} = \{x \in V, \ \langle x, w\rangle = 0$, za svaki $w \in T\}$.*

Definicija 1.17. *Ortonormiran skup $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ u unitarnom prostoru V je ortonormirana baza ako je taj skup ujedno i baza za V.*

Nadalje, prikazat ćemo i poznatu nejednakost Cauchy-Schwarz-Buniakowsky.

Teorem 1.2. *Neka je V unitaran prostor i neka su x i $y \in V$. Tada vrijedi*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \ \|y\|.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako su x i y linearno zavisni.

Sada ćemo uvesti neke operatore na unitarnim prostorima.

Definicija 1.18. *Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i $S \in L(V)$ linearan operator. Operator $S^* \in L(V)$ sa svojstvom $\langle Sx, y\rangle = \langle x, S^*y\rangle$, $\forall x, y \in V$, zove se hermitski adjungiran operator operatoru S.*

Prikažimo i neka svojstva hermitski adjungiranih operatora.

Propozicija 1.2. *Neka su S i T linearni operatori i $\alpha \in \mathbb{F}$. Tada vrijede sljedeća svojstva:*

1) $(S+T)^* = S^* + T^*$;

2) $(\alpha S)^* = \overline{\alpha} S^*$;

3) $(T^*)^* = T$;

4) $(ST^*)^* = T^* S^*$.

Definicija 1.19. *Neka su V i W unitarni prostori takvi da je $dimV = dimW$. Kažemo da je $S \in L(V, W)$ unitaran operator ako vrijedi $\langle Sx, Sy\rangle = \langle x, y\rangle$, $\forall x, y \in V$.*

Kako bismo uveli prostor na kojemu ćemo definirati bazne okvire najprije ćemo uvesti definicije konvergentog niza i Cauchyjevog niza.

Definicija 1.20. *Neka je $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ na normiranom prostoru V.*

1) *Kažemo da niz $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergira prema $x \in V$ i pišemo $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ ako* $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tako da* $n_0 \le n \Rightarrow \|x_n - x\| \le \epsilon$.

2) *Kažemo da je niz $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchyjev ako* $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tako da* $n_0 \le m, n \Rightarrow \|x_m - x_n\| \le \epsilon$.

Bazne okvire ćemo definirati na Hilbertovim prostorima i dani prostor u sljedećim definicijama ćemo označiti s $\mathcal{H}$.

Definicija 1.21. *Kažemo da je normiran prostor potpun ako svaki Cauchyjev niz u njemu konvergira. Potpun unitaran prostor se naziva Hilbertov prostor.*

Korolar 1.1. *Svaki konačnodimenzionalan Hilbertov prostor ima ortonormiranu bazu.*

Fundamentalni rezultat u Hilbertovim prostorima je Parsevalov identitet.

Propozicija 1.3. *(Parsevalov identitet) Ako je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza za $\mathcal{H}$, tada za svaki $x \in \mathcal{H}$ imamo*

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2.$$

Ako je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza za $\mathcal{H}$, tada za svaki $x \in \mathcal{H}$ imamo

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i.$$

Definicija 1.22. *Neka je $P\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ linearan operator, P nazivamo projektor ako je $P^2 = P$. Ako je P hermitski operator nazivamo ga ortogonalani projektor.*

U radu ćemo koristiti i hermitski operator koji je dan sljedećom definicijom.

Definicija 1.23. *Neka je $S\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ linearan operator. Kažemo da je operator S hermitski ako vrijedi $S^* = S$.*

Definicija 1.24. *Neka je $S\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ linearan operator. Kažemo da je operator S pozitivan ako je hermitski i ako vrijedi vrijedi $\langle Sx, x\rangle \geq 0$.*

Definicija 1.25. *Neka je $S\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ linearan operator. Kažemo da je skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ svojstvena vrijednost operatora S ako postoji vektor $x \neq 0$, $x \in \mathcal{H}$ takav da je*

$$Sx = \lambda x.$$

Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora S nazivamo spektar operatora S.

Definicija 1.26. *Neka je $S\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ linearan operator. Vektor $x \neq 0$, $x \in \mathcal{H}$ je svojstveni vektor od S sa svojstvenom vrijednošću λ ako je*

$$Sx = \lambda x.$$

Operator S se može dijagonalizirati ako postoji ortonormirana baza za $\mathcal{H}$ koja se sastoji od svojstvenih vektora od S.

Definicija 1.27. *Neka je $S\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operator. Trag operatora S je*

$$tr(S) = \sum_{i=1}^{n} \langle Se_i, e_i\rangle,$$

gdje je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza za $\mathcal{H}$.

Teorem 1.3. *Ako je S hermitski tada se S može dijagonalizirati.*

Korolar 1.2. *Ako je $S\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operator koji se može dijagonalizirati sa svojstvenim vrijednostima $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ tada je*

$$tr(S) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

2. Napeti bazni okviri

U ovom poglavlju bavit ćemo se sa skupovima vektora koji imaju svojstvo da se svaki vektor x iz $\mathcal{H}$ može zapisati kao

$$x = \sum_{j=1}^{k} \langle x, f_j \rangle f_j,$$

te takva dekompozicija dolazi od onoga što ćemo zvati napeti bazni okviri. Pri čemu je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor dimenzije n, te $(f_j)_{j=1}^k$ niz (skup ili multiskup) vektora, a $(\langle x, f_j \rangle)_{j=1}^k$ je niz koji pripada l_2^k, gdje je $l_2^k := l_2(\{1, 2, \dots, k\})$. Primijetimo da se ovaj prostor podudara sa $\mathbb{R}^k$ ili $\mathbb{C}^k$ sa standarnim skalarnim produktom.

2.1 Definicija baznog okvira

Najprije ćemo definirati općenite bazne okvire, a zatim ćemo pokazati i nekoliko važnih rezultata vezanih za njih.

Definicija 2.1. *Kažemo da je niz vektora $(f_j)_{j=1}^k$ na $\mathcal{H}$ bazni okvir, ako postoje konstante $0 < A \leq B < \infty$ takve da vrijedi*

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{j=1}^{k} |\langle x, f_j \rangle|^2 \leq B\|x\|^2, \ \forall x \in \mathcal{H}.$$

Sljedeće izjave dane su u odnosu na bazni okvir $(f_j)_{j=1}^k$.

1. Konstante A i B zovemo donja i gornja granica baznog okvira, a najveću donju i najveću gornju granicu baznog okvira označavamo s A_{op} i B_{op} te ih nazivamo optimalnim granicama baznog okvira.
2. Vrijednosti $(\langle x, f_j \rangle)_{j=1}^k$ nazivamo koeficijentima baznog okvira vektora x.
3. Budući da je $\mathcal{H}$ konačnodimenzionalan prostor i da je $(f_j)_{j=1}^k$ konačan uočimo da gornja granica baznog okvira uvijek postoji.

Sada ćemo prikazati svojstvo baznih okvira.

Lema 2.1. *Neka je $(f_j)_{j=1}^k$ familija vektora na $\mathcal{H}$. Skup $(f_j)_{j=1}^k$ je bazni okvir na $\mathcal{H}$ ako i samo ako je sustav izvodnica za $\mathcal{H}$.*

Dokaz. $\Longrightarrow$ Primjenom obrata po kontrapoziciji pretpostavimo da $(f_j)_{j=1}^k$ nije sustav izvodnica na $\mathcal{H}$. Tada postoji $x \neq 0$ iz $T^{\perp}$ gdje je T linearna ljuska skupa $(f_j)_{j=1}^k$. Stoga imamo

$\langle x, f_j \rangle = 0$, za sve $j = 1, \dots, k$, pa vrijedi $\sum_{j=1}^k |\langle x, f_j \rangle|^2 = 0$. Dakle, $(f_j)_{j=1}^k$ ne može biti bazni okvir jer ne bi mogao imati pozitivnu donju granicu baznog okvira.

$\Longleftarrow$ Ponovno primjenom obrata po kontrapoziciji pretpostavimo da $(f_j)_{j=1}^k$ nije bazni okvir. Budući da gornja granica uvijek postoji prema, Definiciji 2.1 slijedi da ne postoji donja granica baznog okvira. Tada $\forall n \in \mathbb{N}$ postoji vektor t_n iz prostora $\mathcal{H}$ takav da je $\|t_n\| = 1$ te vrijedi $\sum_{j=1}^k |\langle t_n, f_j\rangle|^2 < \frac{1}{n}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Kako je $(t_n)_{n=1}^\infty$ ograničen niz tada možemo primjeniti Bolzano-Weierstrassov teorem iz kojeg slijedi da $(t_n)_{n=1}^\infty$ ima konvergentan podniz (t_{n_i}) i vrijedi lim $\|t_{n_i} - t\| \to 0$ za $i \to \infty$ gdje je t limes niza (t_{n_i}). Tada imamo

$$0 = \lim_{i\to\infty} \sum_{j=1}^k |\langle t_{n_i}, f_j\rangle|^2 = \sum_{j=1}^k |\langle t, f_j\rangle|^2,$$

dakle imamo $\langle t,\ f_j\rangle = 0$ za sve $j = 1, \ldots, k$, iz čega slijedi da je $t = 0$ ili da $(f_j)_{j=1}^k$ nije sustav izvodnica. Budući da je $\|t\| = 1$ slijedi da $(f_j)_{j=1}^k$ nije sustav izvodnica. $\square$

2.2 Napeti bazni okviri

Definicija 2.2. *Kažemo da je niz $(f_j)_{j=1}^k$ vektora na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ napeti bazni okvir (za $\mathcal{H}$) ako postoji (granica baznog okvira) $A > 0$ takva da,*

$$A\|x\|^2 = \sum_{j=1}^k |\langle x, f_j\rangle|^2, \qquad \forall x \in \mathcal{H}. \tag{1}$$

Kažemo da je $(f_j)_{j=1}^k$ Parsevalov bazni okvir ako je $A = 1$.

Prethodno smo definirali bazni okvir i napeti bazni okvir kao niz, što je standardna definicija ali nije univerzalna, stoga ćemo nadalje o $(f_j)_{j=1}^k$ razmišljati kao o (multi) skupu vektora.
Sljedeća lema daje nam važan rezultat za Parsevalov bazni okvir.

Lema 2.2. *Neka je $(f_j)_{j=1}^k$ familija vektora za $\mathcal{H}$.*

1) Ako je $(f_j)_{j=1}^k$ ortonormirana baza, tada je $(f_j)_{j=1}^k$ Parsevalov bazni okvir.

2) Skup $(f_j)_{j=1}^k$ je Parsevalov bazni okvir, gdje su $\|f_j\| = 1,\ \forall j = 1, 2, \ldots, k$ ako i samo ako je $(f_j)_{j=1}^k$ ortonormirana baza.

Dokaz. 1) Slijedi iz Propozicije 1.3 i Definicije 2.2.

2) $\Longrightarrow$ Trebamo pokazati da je $(f_j)_{j=1}^k$ ortonormirana baza, gdje je $\|f_j\| = 1 \; \forall j = 1, 2, \ldots, k$. Po Parsevalovom svojstvu $\forall j_0 = 1, 2, \ldots, k$ imamo

$$\|f_{j_0}\|^2 = \|f_{j_0}\|^4 + \sum_{j=1,\ j\neq j_0}^{k} |\langle f_{j_0}, f_j \rangle|^2.$$

Budući da je $\|f_{j_0}\|^2 = 1$ slijedi da je

$$\sum_{j=1,\ j\neq j_0}^{k} |\langle f_{j_0}, f_j \rangle|^2 = 0,\ \forall j_0 = 1, 2, \ldots, k.$$

Dakle, $\langle f_j, f_i \rangle = 0,\ j \neq i$. Budući da je $(f_j)_{j=1}^k$ Parsevalov bazni okvir, a posebno i bazni okvir iz Leme 2.1 slijedi da je $(f_j)_{j=1}^k$ sustav izvodnica na $\mathcal{H}$, pa samim time i baza za $\mathcal{H}$.
$\Longleftarrow$ Slijedi iz prve tvrdnje.

$\square$

Lema 2.3. *Neka je $(f_j)_{j=1}^k$ napeti bazni okvir za konačnodimenzionalan prostor $\mathcal{H}$. Tada je*

$$\forall j = 1, 2, \ldots, k, \qquad \|f_j\| \leq \sqrt{A}.$$

Dokaz. Za svaki $1 \leq i \leq k$, imamo sljedeće

$$A\|f_i\|^2 = \sum_{j=1}^{k} \langle f_i, f_j \rangle = \|f_i\|^4 + \sum_{j\neq i}^{k} |\langle f_i, f_j \rangle|^2.$$

Dakle imamo

$$\|f_i\|^4 - A\|f_i\|^2 = -\sum_{j\neq i}^{k} |\langle f_i, f_j \rangle|^2 \leq 0.$$

Iz čega slijedi

$$\|f_i\|^2 - A \leq 0.$$

$\square$

Za razliku od baze, napeti bazni okvir može imati vektore koji se ponavljaju, i to ćemo prikazati u primjeru.

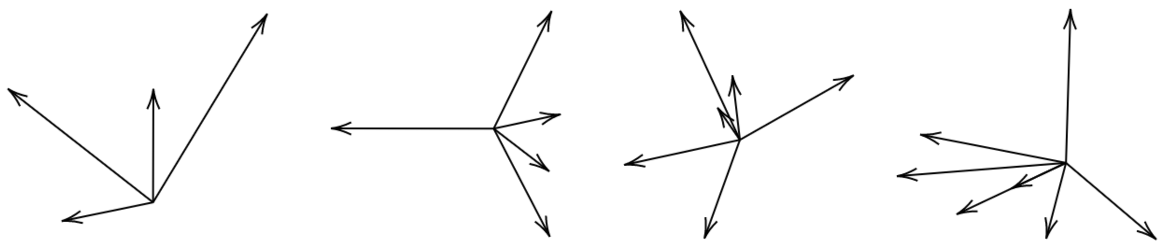
Primjer 2.1. *Niz* $(f_j)_{j=1}^{2k} = (e_1, 0, e_2, 0, \ldots, e_k, 0)$ *je Parsevalov bazni okvir, gdje je* $(e_j)_{j=1}^{k}$ *ortonormirana baza za* $\mathcal{H}$.

Koristeći Propoziciju 1.3 dobivamo

$$\sum_{j=1}^{2k} |\langle x, f_j \rangle|^2 = \sum_{j=1}^{k} |\langle x, e_j \rangle|^2 = \|x\|^2, \qquad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Slijedi $A = B = 1$, *dakle niz* $(f_j)_{j=1}^{2k}$ *je zaista Parsevalov bazni okvir.*

Primjer 2.2.



Slika 1: Primjeri napetih baznih okvira za $n = 4, 5, 6$ i 7 na $\mathbb{R}^2$.

2.3 Unitarno ekvivalentni konačni napeti okviri

U ovom dijelu rada definirat ćemo ekvivalenciju, pod kojom se podrazumijeva da ćemo bilo koja dva skupa koja se sastoje od tri vektora koji imaju jednake kuteve između svaka dva susjedna vektora u prostoru s jednakom normom na $\mathbb{R}^2$, smatrati ekvivalentnima.

Definicija 2.3. *Kažemo da su dva Parsevalova bazna okvira* $(f_j)_{j=1}^{k}$ *na* $\mathcal{H}$ *i* $(g_j)_{j=1}^{k}$ *na* $\mathcal{K}$*, (unitarno) ekvivalentni ako postoji unitaran operator* $U\colon \mathcal{H} \to \mathcal{K}$*, tako da vrijedi* $g_j = Uf_j$, $\forall j = 1, 2, \ldots, k$.

Budući da unitarna transformacija čuva skalarne produkte, unitarno ekvivalentni napeti bazni okviri imaju jednake kuteve između vektora.

Parsevalovi bazni okviri $(e_1, 0)$ i $(0, e_1)$ za jednodimenzionalan vektorski prostor $\mathcal{H}$ nisu ekvivalentni iako sadrže iste elemente. Za ovakve slučajeve, gdje ih je korisno smatrati ekvivalentnim proširit ćemo definiciju.

Definicija 2.4. *Kažemo da su dva Parsevalova konačna bazna okvira $(f_j)_{j\in J}$ za $\mathcal{H}$ i $(g_j)_{j\in K}$ za $\mathcal{K}$ (unitarno) ekvivalentni do na poredak ako postoji bijekcija $\sigma\colon J \to K$, za koje su $(f_j)_{j\in J}$ i $(g_{\sigma_j})_{j\in J}$ unitarno ekvivalentni.*

Napomena 2.1. *Sa J i K označili smo konačne indeksne skupove.*

2.4 Operatori analize, sinteze i operator baznog okvira

Ovi operatori važni su jer određuju operaciju baznog okvira pri analiziranju i rekonstrukciji signala. U ovom dijelu definirat ćemo ih te navesti njihova svojstva i osnovne rezultate.

Definicija 2.5. *Nek je $(f_j)_{j=1}^k$ familija vektora na $\mathcal{H}$. Njegov pridruženi operator analize (transformacijski operator baznog okvira) $V\colon \mathcal{H} \to l_2^k$ definiran je s*

$$Vx := (\langle x, f_j\rangle)_{j=1}^k,\ x \in \mathcal{H},$$

i njegov adjungirani operator, operator sinteze (ili rekonstrukcijski operator) $V^*\colon\ l_2^k \to\ \mathcal{H}$ dan je s

$$V^*(a_j)_{j=1}^k = \sum_{j=1}^k a_j f_j.$$

Lema 2.4. *Neka je $(f_j)_{j=1}^k$ niz vektora na $\mathcal{H}$ s pridruženim operatorom analize V. Vrijedi*

$$\|Vx\|^2 = \sum_{j=1}^k |\langle x, f_j\rangle|^2, \qquad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Nadalje, $(f_j)_{j=1}^k$ je bazni okvir na $\mathcal{H}$ ako i samo ako je V injekcija.

Dokaz. Tvrdnja je direktna posljedica Definicije 2.5 i Definicije 2.1. □

Sljedeća lema daje nam korisna svojstva operatora sinteze.

Lema 2.5. *Neka je $(f_j)_{j=1}^k$ niz vektora na $\mathcal{H}$ i V njegov pridruženi operator analize.*

1) Neka je $(e_j)_{j=1}^k$ kanonska baza za l_2^k. Tada za svaki $j = 1, 2, \ldots, k$ imamo $V^*e_j = V^*Pe_j = f_j$, gdje je $P\colon l_2^k \to\ l_2^k$ ortogonalni projektor na $Im\, V$.

2) Skup $(f_j)_{j=1}^k$ je bazni okvir ako i samo ako je V^* surjekcija.

Dokaz. Vidjeti [7], str.18. □

Bazni okviri se mogu modificirati primjenom invertibilnog operatora. Sljedeća propozicija nam pokazuje učinak pridruženog operatora analize na bazne okvire ali i činjenicu da novi dani niz opet može tvoriti bazni okvir.

Propozicija 2.1. *Neka je $\Psi = (f_j)_{j=1}^k$ niz vektora na $\mathcal{H}$ s pridruženim operatorom analize V_Ψ i neka je $F\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ linearan operator. Tada je operator analize niza $F\Psi = (F_{f_j})_{j=1}^k$ dan s*

$$V_{F_\Psi} = V_\Psi F^*.$$

Nadalje, ako je Ψ bazni okvir za $\mathcal{H}$ i ako je F invertibilan, tada je također $F\Psi$ bazni okvir za $\mathcal{H}$.

Dokaz. Za svaki $f \in \mathcal{H}$ imamo

$$V_{F_\Psi} x = (\langle x,\ F_{f_j}\rangle)_{j=1}^k = (\langle F^* x,\ f_j\rangle)_{j=1}^k = \ V_\Psi F^* x.$$

Time smo dokazali $V_{F_\Psi} = V_\Psi F^*$. Dokaz drugog dijela slijedi iz Leme 2.5. □

Sada ćemo prikazati matrični zapis operatora sinteze i analize. Neka je $(e_i^{'})_{i=1}^k$ kanonska baza za l_2^k i $(e_j)_{j=1}^n$ ortonormirana baza za $\mathcal{H}$. Matrične zapise operatora sinteze i analize prikazat ćemo matricama u ovom paru baza. Njih ćemo označavati također s V^* odnosno V. Tada je

$$V^* = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ f_1 & f_2 & \dots & f_k \\ | & | & & | \end{bmatrix}.$$

Matrični prikaz operatora analize dobije se adjungiranjem matrice operatora sinteze te stoga imamo

$$V = \begin{bmatrix} — & f_1^* & — \\ — & f_2^* & — \\ & \vdots & \\ — & f_k^* & — \end{bmatrix},$$

pri čemu je $f_j^* = \ \overline{f_j}^T,\ \forall j = 1, \dots, k.$

Produkt $S \coloneqq V^*V : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ nazivamo operator baznog okvira. Preciznije ćemo ga definirati u sljedećoj definiciji.

Definicija 2.6. *Neka je $(f_j)_{j=1}^k$ niz vektora na $\mathcal{H}$ s pridruženim operatorom analize V. Tada je pridruženi operator baznog okvira $S\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definiran s*

$$Sx \coloneqq V^*Vx = \sum_{j=1}^{k} \langle x, f_j \rangle f_j, \ x \in \mathcal{H}.$$

Lema 2.6. *Neka je $(f_j)_{j=1}^k$ niz vektora za $\mathcal{H}$ s pridruženim operatorom baznog okvira S. Tada vrijedi*

$$\langle Sx, x \rangle = \sum_{j=1}^{k} |\langle x, f_j \rangle|^2, \qquad \forall \ x \in \mathcal{H}.$$

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz

$$\langle Sx, x \rangle = \langle V^*Vx, x \rangle = \|Vx\|^2$$

i Leme 2.4.

□

Sada ćemo prikazati karakterizaciju matrice operatora sinteze u terminima operatora danog okvira.

Propozicija 2.2. *Neka je $V\colon \mathcal{H} \to l_2^k$ linearan operator i neka je $(e_j)_{j=1}^n$ ortonormirana baza za $\mathcal{H}$ i $(e_i^{'})_{i=1}^k$ kanonska baza za l_2^k te neka je $(\lambda_j)_{j=1}^k$ niz pozitivnih brojeva. Neka je matrica A reda $n \times k$ matrični prikaz operatora V^* u paru baza $(e_i^{'})_{i=1}^k$ i $(e_j)_{j=1}^n$. Tada su sljedeće izjave ekvivalentne:*

1) *$(V^*e_i^{'})_{i=1}^k$ je bazni okvir za $\mathcal{H}$ čiji operator baznog okvira ima svojstvene vektore $(e_j)_{j=1}^n$ pridružene svojstvenim vrijednostima $(\lambda_j)_{j=1}^n$.*
2) *Redovi od A su ortogonalni i kvadrat norme j-tog reda jednak je λ_j.*
3) *Stupci od A čine napeti bazni okvir za $\mathcal{H}$ i $AA^* = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.*

Dokaz. Vidjeti [7], str. 23. □

Operator baznog okvira je pozitivan operator što se vidi iz

$$\langle Sx, x \rangle \geq A\|x\|^2 > 0, \qquad \forall x \in \mathcal{H}, \tag{2}$$

te je i hermitski operator što se može i pokazati s

$$S^* = (V^*V)^* = V^*V = S. \tag{3}$$

Teorem 2.1. *Operator baznog okvira S od $(f_j)_{j=1}^k$ baznog okvira za $\mathcal{H}$ s granicama baznog okvira A i B je pozitivan invertibilan operator koji zadovoljava*

$$AI_{\mathcal{H}} \leq S \leq BI_{\mathcal{H}}.$$

Dokaz. Prethodno smo pokazali već da je S pozitivan (2) i da je hermitski operator (3). Prema Lemi 2.6 imamo

$$\langle Ax, x\rangle = A\|x\|^2 \leq \sum_{j=1}^k |\langle x, f_j\rangle|^2 = \langle Sx, x\rangle = B\|x\|^2 = \langle Bx, x\rangle, \qquad \forall\, x \in \mathcal{H},$$

iz čega slijedi tvrdnja propozicije. □

Propozicija 2.3. *Neka je $(f_j)_{j=1}^k$ bazni okvir za $\mathcal{H}$ s operatorom okvira S i neka je F invertibilni operator za $\mathcal{H}$. Tada je $(Ff_j)_{j=1}^k$ bazni okvir s operatorom baznog okvira FSF^*.*

Dokaz. Vidjeti [7], str. 18. □

Sljedeći teorem nam daje karakterizaciju napetog baznog okvira kao onog napetog baznog okvira čiji operator baznog okvira jednak skalarnom operatoru.

Teorem 2.2. *Neka je $(f_j)_{j=1}^k$ bazni okvir za $\mathcal{H}$. Bazni okvir $(f_j)_{j=1}^k$ je napeti bazni okvir (s granicom baznog okvira A) ako i samo ako njegov odgovarajući operator baznog okvira zadovoljava $S = AI_{\mathcal{H}}$ ili ekvivalentno ako je*

$$x = A^{-1}\sum_{j=1}^k \langle x, f_j\rangle f_j, \qquad \forall\, x \in \mathcal{H}. \tag{4}$$

Dokaz. Najprije zamijetimo da iz $S = AI_{\mathcal{H}}$ slijedi $Sx = AI_{\mathcal{H}}x = Ax$.
$\Longrightarrow$ Kako bismo pokazali da $(f_j)_{j=1}^k$ napeti bazni okvir povlači $S = AI_{\mathcal{H}}$ primijetimo da možemo zapisati

$$\langle Sx, x\rangle = A\langle x, x\rangle, \qquad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Nadalje imamo

$$\langle (S - AI_{\mathcal{H}})x,\ x\rangle = 0, \qquad \forall x \in \mathcal{H},$$

iz čega slijedi $S = AI_{\mathcal{H}}$.
$\Longleftarrow$ Primijeniti ćemo skalarni produkt na obje strane jednakosti (4), stoga slijedi

$$\langle x, x\rangle = A^{-1}\sum_{j=1}^{k}\langle x, f_j\rangle\ \langle f_j, x\rangle, \qquad \forall\ x \in \mathcal{H},$$

što je jednako

$$A\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{k}|\langle x, f_j\rangle|^2,$$

iz čega slijedi prema Definiciji 2.2 da je $(f_j)_{j=1}^{k}$ napeti bazni okvir s granicom baznog okvira A.
□

Sljedeći rezultat nam pokazuje kako su najmanja i najveća vrijednost svojstvenog operatora optimalne granice baznog okvira.

Teorem 2.3. *Neka je $(f_j)_{j=1}^{k}$ bazni okvir s operatorom baznog okvira S i njegovim svojstvenim vrijednostima $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Tada se λ_1 podudara s optimalnom gornjom granicom, a λ_n s optimalnom donjom granicom.*

Dokaz. Neka je $(e_j)_{j=1}^{k}$ ortonormirana baza od $\mathcal{H}$ koju čine svojstveni vektori operatora baznog okvira S sa svojstvenim vrijednostima $(\lambda_j)_{j=1}^{k}$ poredane u padajućem poretku.

Neka je $x \in \mathcal{H}$ fiksan, te $x = \sum_{j=1}^{k}\langle x, e_j\rangle e_j$, tada je $Sx = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\langle x, e_j\rangle e_j$.
Iz Leme 2.6 slijedi

$$\sum_{j=1}^{k}|\langle x, f_j\rangle|^2 = \langle Sx, x\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\langle x, e_j\rangle e_j, \sum_{j=1}^{n}\langle x, e_j\rangle e_j\right\rangle =$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j|\langle x, e_j\rangle|^2 \leq \lambda_1\sum_{j=1}^{n}|\langle x, e_j\rangle|^2 = \lambda_1\|x\|^2.$$

Tada $B_{op} \leq \lambda_1$ (B_{op} označava optimalnu gornju granicu). Za $B_{op} = \lambda_1$ slijedi iz

$$\sum_{j=1}^{k}|\langle e_1, f_j\rangle|^2 = \langle Se_1, e_1\rangle = \langle\lambda_1 e_1, e_1\rangle = \lambda_1.$$

Tvrdnja za $A_{op} = \lambda_n$ pokaže se na sličan način. □

Najljepši mogući primjer napetog baznog okvira je Mercedes-Benz napeti bazni okvir, a sastoji se od tri vektora koji su smješteni u $\mathbb{R}^2$.

Primjer 2.3. *Mercedes-Benz bazni okvir sastoji se od sljedeća tri vektora u* $\mathbb{R}^2$*:*

$$f_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ f_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}, \ f_3 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

Pokazat ćemo da je Mercedes-Benz napeti bazni okvir. Neka je $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *dan formulom*

$$Vx = \begin{bmatrix} \langle x, f_1 \rangle \\ \langle x, f_2 \rangle \\ \langle x, f_3 \rangle \end{bmatrix}.$$

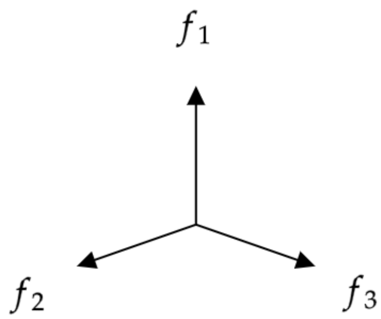
A operator sinteze $V^*\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definiran je s*

$$V^* \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_2 \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{3} a_j f_j = \begin{bmatrix} -(\sqrt{3}/2)a_2 + (\sqrt{3}/2)a_3 \\ a_1 + (-1/2)a_2 - (1/2)a_3 \end{bmatrix}.$$

Operator baznog okvira jednak $S := V^*Vx$ *stoga je, matrični zapis operatora* S *u kanonskoj bazi za* $\mathbb{R}^2$

$$\frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pa prema Teoremu 2.2 slijedi da je $\{f_1, f_2, f_3\}$ *napeti bazni okvir (za* $\mathbb{R}^2$*).*



Slika 2: Mercedes-Benz bazni okvir.

Budući da smo ranije spomenuli kako je operator baznog okvira jednak komponiranju operatora sinteze i operatora analize ukoliko ih komponiramo u suprotnom redoslijedu dobiti ćemo Grammov operator.

Definicija 2.7. *Neka je $(f_j)_{j=1}^k$ bazni okvir za $\mathcal{H}$ s operatorom analize V. Tada operator $G\colon\ l_2^k \to l_2^k$ definiran s*

$$G(a_j)_{j=1}^k = VV^*(a_j)_{j=1}^k = (\sum_{j=1}^k a_j\langle f_j,\ f_i\rangle)_{i=1}^k = \sum_{j=1}^k\ a_j(\langle f_j, f_i\rangle)_{i=1}^k$$

nazivamo Grammov operator baznog okvira $(f_j)_{j=1}^k$.

Matrična reprezentacija Grammmovog operatora baznog okvira $(f_j)_{j=1}^k$ na $\mathcal{H}$ dana je matricom:

$$\begin{bmatrix} \|f_1\|^2 & \langle f_2,\ f_1\rangle & \cdots & \langle f_k,\ f_1\rangle \\ \langle f_1,\ f_2\rangle & \|f_2\|^2 & \cdots & \langle f_k,\ f_2\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle f_1,\ f_k\rangle & \langle f_2,\ f_k\rangle & \cdots & \|f_k\|^2 \end{bmatrix}.$$

Također možemo primijetiti kako vrijedi

$$diag(G) = (\|f_1\|^2, \|f_2\|^2, \dots, \|f_k\|^2).$$

Neka osnovna svojstva Grammovog operatora prikazana su u sljedećem rezultatu.

Propozicija 2.4. *Neka je $(f_j)_{j=1}^k$ bazni okvir s operatorom baznog okvira S i Grammovim operatorom G. Tada vrijedi sljedeće:*

1) Niz vektora $(f_j)_{j=1}^k$ na prostoru $\mathcal{H}$ dimenzije n je Parsevalov bazni okvir ako i samo ako je njegov pridruženi Grammov operator G ortogonalni projektor ranga n.

2) Nenul svojstvene vrijednosti operatora S i G su jednake.

Dokaz. Vidjeti [8], str.108. □

2.5 Konstrukcija napetih baznih okvira

U ovom poglavlju bavit ćemo se konstrukcijom napetih baznih okvira pomoću ortogonalnih projektora.
Sljedeći rezultat nam kaže kako je ortogonalna projekcija Parsevalovog baznog okvira Parsevalov bazni okvir.

Propozicija 2.5. *Neka je P ortogonalni projektor prostora $\mathcal{H}$ na potprostor W i neka je $(f_j)_{j=1}^k$ bazni okvir za $\mathcal{H}$. Tada je $(Pf_j)_{j=1}^k$ bazni okvir za W s istim granicama baznog okvira. Posebno, ako je $(f_j)_{j=1}^k$ Parsevalov bazni okvir za $\mathcal{H}$ i P je ortogonalni projektor prostora $\mathcal{H}$ na W, tada je $(Pf_j)_{j=1}^k$ Parsevalov bazni okvir za W.*

Dokaz. Neka je $x \in W$. Tada imamo $Px = x$. Kako vrijedi da je $(f_j)_{j=1}^k$ bazni okvir, postoje $A, B > 0$ takve da zadovoljavaju

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{j=1}^{k} |\langle x, f_j\rangle|^2 \leq B\|x\|^2, \ \forall x \in \mathcal{H}.$$

Kako vrijedi $P^* = P$ i $Px = x$ imamo sljedeće

$$\langle x, f_j\rangle = \langle Px, f_j\rangle = \langle x, Pf_j\rangle, \ \forall x \in W,$$

te vrijedi

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{j=1}^{k} |\langle x, Pf_j\rangle|^2 \leq B\|x\|^2, \ \forall x \in W.$$

Iz čega slijedi $(Pf_j)_{j=1}^k$ je bazni okvir za W s granicama baznog okvira A i B. Drugi dio slijedi direktno iz tvrdnje. □

Korolar 2.1. *Neka je* $(e_j)_{j=1}^n$ *ortonormirana baza za* $\mathcal{H}$*, i neka je* P *ortogonalni projektor prostora* $\mathcal{H}$ *na potprostor* W*. Tada je* $(Pe_j)_{j=1}^n$ *Parsevalov bazni okvir za* W*.*

Prethodni korolar možemo interpretirati na sljedeći način:
Neka je A unitarna matrica reda $k \times k$, za kvadratnu matricu A kažemo da je unitarna ako vrijedi $AA^* = A^*A = I$. Ukoliko odaberemo n redova iz matrice A tada vektori stupci iz tih redova tvore Parsevalov bazni okvir za $\mathcal{H}$. Sljedeći rezultat poznat je pod nazivom Naimarkov teorem.

Teorem 2.4. *(Naimarkov teorem) Neka je* $k > n$*. Skup* $(f_j)_{j=1}^k$ *je Parsevalov bazni okvir Hilbertovog prostora* $\mathcal{H}$ *dimenzije* n *ako i samo ako postoji veći* k*-dimenzionalni Hilbertov prostor* $K \supset \mathcal{H}$ *i ortonormirana baza* $(e_j)_{j=1}^k$ *za prostor* K *tako da ortogonalni projektor* P *prostora* K *na prostor* $\mathcal{H}$ *zadovoljava* $Pe_j = f_j$*, za sve* $j = 1, 2, \ldots, k$*.*

Dokaz. Vidjeti [6], str.22. □

2.6 Napeti bazni okviri u $\mathbb{R}^2$

Sada ćemo prikazati geometrijski opis napetih baznih okvira u ravnini $\mathbb{R}^2$.

Koristimo polarne koordinate kako bismo opisali bilo koji vektor f iz $\mathbb{R}^2$ $f = \begin{bmatrix} b \ \cos\theta \\ b \ \sin\theta \end{bmatrix}$, gdje

je θ kut koji vektor f zatvara s pozitivnom x-osi.

Iz Teorema 2.2 slijedi da je $(f_j)_{j=1}^k$, gdje je $f_j = \begin{bmatrix} b_j \ \cos\theta_j \\ b_j \ \sin\theta_j \end{bmatrix}$ napeti bazni okvir ako i samo

ako vrijedi $S = AI_{\mathcal{H}}$. Tada je pripadni operator baznog okvira $S = V^*V$ dan matricom

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^k b_j^2 \ \cos^2\theta_j & \sum_{j=1}^k b_j^2 \ \cos\theta_j sin\theta_j \\ \sum_{j=1}^k b_j^2 \ \cos\theta_j sin\theta_j & \sum_{j=1}^k b_j^2 \ \sin^2\theta_j \end{bmatrix},$$

za bazni okvir $(f_j)_{j=1}^k$.

Primjenom trigonometrijskih formula za dvostruki kut vidimo da je $S = AI_{\mathcal{H}}$ ako i samo ako vrijedi sljedeće

$$\sum_{j=1}^k \begin{bmatrix} b_j^2 \ \cos 2\theta_j \\ b_j^2 \ \sin 2\theta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Primjenjujući pravilo trokuta za zbrajanje vektora konstruirat ćemo napeti bazni okvir na $\mathbb{R}^2$.
Ovim se utvrđuje točna korespondencija između napetih baznih okvira za $\mathbb{R}^2$ i nizova vektora dobivenih kvadriranjem duljine i udvostručavanjem kuta svakog vektora. Stoga, izvorni niz

vektora je napeti bazni okvir upravo kada je suma novog niza vektora jednaka 0_v, gdje 0_v označava nulvektor.

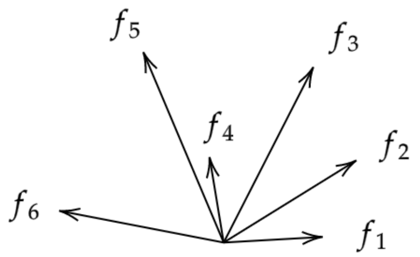
Ukoliko je $f_j = \begin{bmatrix} b_j & \cos\theta_j \\ b_j & \sin\theta_j \end{bmatrix}$ vektor u $\mathbb{R}^2$, tada je njegov pridruženi vektor $\tilde{f}_j = \begin{bmatrix} b_j^2 & \cos 2\theta_j \\ b_j^2 & \sin 2\theta_j \end{bmatrix}$,

kojeg nazivamo dijagram vektor. Stoga ćemo crtati dijagrame u nastavku te ćemo diskutirati zbroj takvih dijagram vektora. U sljedećoj lemi prikazat ćemo rezultat prethodne diskusije.

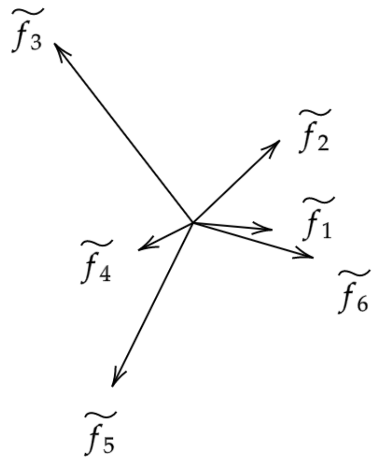
Lema 2.7. *Niz vektora $(f_j)_{j=1}^k$ za $\mathbb{R}^2$, gdje je $k \geqslant 2$, napeti je bazni okvir za $\mathbb{R}^2$ ako vrijedi*

$$\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 + \cdots + \tilde{f}_k = 0_v, \text{ na } \mathbb{R}^2.$$

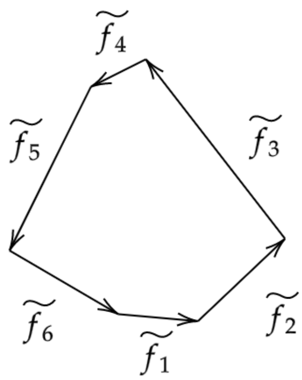
Primjer 2.4.



Slika 3: Ovi vektori čine napeti bazni okvir $\mathbb{R}^2$.



Slika 4: Dijagram vektori najprije prikazani u standarnoj poziciji.



Slika 5: Dijagram vektori prikazani primjenjujući pravilo trokuta za zbrajanje vektora.

3. Dualni bazni okviri

Za prijenos signala važna je rekonstrukcija signala x, a kako bismo to omogućili važni su dualni bazni okviri. U ovome poglavlju definirat ćemo posebno kanonske dualne bazne okvire te prikazati neka njihova osnovna svojstva.

3.1 Rekonstrukcijska formula

Neka je S operator baznog okvira te neka je S^{-1} njegov inverzni operator. Uočimo kako je S^{-1} hermitski, svojstvo koje ćemo koristiti u pokazivanju sljedećih rezultata, što slijedi iz

$$(SS^{-1})^* = (S^{-1})^* S^* = I_{\mathcal{H}}.$$

Budući da je S hermitski, uvrštavanjem u prethodnu jednakost imamo

$$(S^{-1})^* S = I_{\mathcal{H}},$$

djelujući sa S^{-1} s desne strane dobivamo

$$(S^{-1})^* = S^{-1}. \tag{5}$$

Sljedeći rezultat nazivamo i rekonstrukcijskom formulom.

Teorem 3.1. *Neka je $(f_j)_{j=1}^k$ bazni okvir za $\mathcal{H}$ s operatorom baznog okvira S. Tada za svaki $x \in \mathcal{H}$ imamo*

$$x = \sum_{j=1}^{k} \langle x, f_j \rangle S^{-1} f_j = \sum_{j=1}^{k} \langle x, S^{-1} f_j \rangle f_j.$$

Dokaz. Za svaki $x \in \mathcal{H}$ vrijedi

$$x = SS^{-1}x = \sum_{j=1}^{k} \langle S^{-1}x, f_j \rangle f_j = \sum_{j=1}^{k} \langle x, S^{-1} f_j \rangle f_j.$$

U prvoj jednakosti koristili smo $SS^{-1} = I_{\mathcal{H}}$, u drugoj jednakosti koristili smo Definiciju 2.6 te smo u trećoj jednakosti koristili svojstvo (5). Slično se pokaže i $x = \sum_{j=1}^{k} \langle x, f_j \rangle S^{-1} f_j$, za svaki $x \in \mathcal{H}$.

□

Propozicija 3.1. *Neka je $(f_j)_{j=1}^k$ bazni okvir za $\mathcal{H}$ s granicama baznog okvira A i B i operatorom baznog okvira S. Tada je niz $(S^{-1} f_j)_{j=1}^k$ bazni okvir za $\mathcal{H}$ s granicama baznog okvira A^{-1} i B^{-1} i s pridruženim operatorom baznog okvira S^{-1}.*

Dokaz. Vidjeti [7], str.25. □

3.2 Svojstva kanonskog dualnog baznog okvira

Definicija 3.1. *Neka je $(f_j)_{j=1}^k$ bazni okvir za $\mathcal{H}$. Tada $(g_j)_{j=1}^k$ nazivamo dualnim baznim okvirom za $(f_j)_{j=1}^k$ ako zadovoljava*

$$x = \sum_{j=1}^{k} \langle x, g_j \rangle f_j.$$

Kažemo da je $(g_j)_{j=1}^k$ kanonski dualni bazni okvir ako je $g_j = S^{-1} f_j$ za $j = 1, 2, \ldots, k$.

Napomena 3.1. *Dualne bazne okvire koji nisu kanonski dualni bazni okviri često nazivamo i alternativnim dualnim baznim okvirima.*

Sada ćemo prikazati operatore pridružene kanonskim dualnim baznim okvirima. Operator analize pridružen kanonskom dualnom baznom okviru $(g_j)_{j=1}^k$ dan je s $V_g = VS^{-1}$ što slijedi iz

$$V_g x = (\langle x, g_j \rangle)_{j=1}^k = (\langle x, S^{-1} f_j \rangle)_{j=1}^k = (\langle S^{-1} x, f_j \rangle)_{j=1}^k = VS^{-1} x.$$

Definicija 3.2. *Operator baznog okvira pridružen kanonskom dualnom baznom okviru $(g_j)_{j=1}^k$*

$$S_g = V_g^* V_g, \quad S_g x = \sum_{j=1}^{k} \langle x, \ g_j \rangle g_j,$$

nazivamo operator kanonskog dualnog baznog okvira.

Teorem 3.2. *Operator kanonskog dualnog baznog okvira S_g zadovoljava $S_g = S^{-1}$.*

Dokaz. Za svaki $x \in \mathcal{H}$ imamo

$$S_g x = \sum_{j=1}^{k} \langle x, g_j \rangle g_j = \sum_{j=1}^{k} \langle x, S^{-1} f_j \rangle S^{-1} f_j = S^{-1} \sum_{j=1}^{k} \langle S^{-1} x, f_j \rangle f_j = S^{-1} S S^{-1} x = \ S^{-1} x.$$

U prvoj jednakosti primjenili smo Definiciju 3.2, u drugoj Definiciju 3.1, u trećoj (5) i u četvrtoj $SS^{-1} = \ I_{\mathcal{H}}$. □

Nadalje, primijetimo kako je kanonska dualnost recipročna relacija, odnosno ako je $(g_j)_{j=1}^k$ kanonski dualan baznom okviru $(f_j)_{j=1}^k$ tada je i $(f_j)_{j=1}^k$ kanonski dualan baznom okviru $(g_j)_{j=1}^k$.
Sljedeći teorem nam prikazuje kako svaki signal $x \in \mathcal{H}$ možemo rekonstruirati iz koeficijenata baznog okvira koji se mogu izabrati iz skalarnog produkta signala x s elementima kanonskog dualnog baznog okvira.

Teorem 3.3. *Neka su $(f_j)_{j=1}^k$ i $(g_j)_{j=1}^k$ kanonski dualni bazni okviri za $\mathcal{H}$. Svaki signal $x \in \mathcal{H}$ može se prikazati u obliku*

$$x = V^* V_g x = \sum_{j=1}^{k} \langle x, g_j \rangle f_j,$$

$$x = V_g^* V x = \sum_{j=1}^{k} \langle x, f_j \rangle g_j.$$

Nadalje, vrijedi

$$V^* V_g = V_g^* V = I_{\mathcal{H}}.$$

Dokaz. Imamo

$$V^* V_g x = \sum_{j=1}^{k} \langle x, g_j \rangle f_j = \sum_{j=1}^{k} \langle x, S^{-1} f_j \rangle f_j = \sum_{j=1}^{k} \langle S^{-1} x, f_j \rangle f_j = SS^{-1} x = x.$$

Iz navedenog slijedi i $V^* V_g = I_{\mathcal{H}}$. Slično se pokaže i za $V_g^* V = I_{\mathcal{H}}$. □

Definicija 3.3. *Neka je $(f_j)_{j=1}^k$ bazni okvir za $\mathcal{H}$ s operatorom baznog okvira S. Tada je*

odgovarajući kanonski napeti bazni okvir $(S^{-1/2} f_j)_{j=1}^k$, $\forall j = 1, 2, \ldots, k$.

Kako bismo pokazali da je kanonski napeti bazni okvir Parsevalov bazni okvir iskažimo najprije sljedeću lemu.

Lema 3.1. *Svaki hermitski pozitivan ograničen operator $A \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ima jedinstven hermitski pozitivan drugi korijen, odnosno jedinstveni hermitski pozitivan operator B takav da je $A = BB$. Operator B komutira s operatorom A odnosno $BA = AB$.*

Teorem 3.4. *Neka je $(f_j)_{j=1}^k$ bazni okvir za $\mathcal{H}$ s operatorom baznog okvira S. Tada $(S^{-1/2} f_j)_{j=1}^k$ kanonski napeti bazni okvir je Parsevalov bazni okvir, odnosno*

$$x = \sum_{j=1}^{k} \langle x, S^{-1/2} f_j \rangle S^{-1/2} f_j, \ \forall x \in \mathcal{H}.$$

Dokaz. Pokazali smo u (2) i (3) da je S pozitivan i hermitski, stoga je i njegov inverz pozitivan te prema Lemi 3.1 S^{-1} ima pozitivan i hermitski drugi korijen $S^{-1/2}$. Stoga slijedi da

$S^{-1/2}$ komutira sa S^{-1}. Međutim, pokazat ćemo kako $S^{-1/2}$ komutira sa S. Na

$$S^{-1/2}S^{-1} = S^{-1}S^{-1/2}$$

djelujemo s lijeve strane sa S i dobivamo

$$SS^{-1/2}S^{-1} = S^{-1/2}.$$

Djelujemo na prethodnu jednakost s desne strane sa S pa imamo

$$SS^{-1/2} = S^{-1/2}S.$$

Tada vrijedi sljedeće

$$x = S^{-1}Sx = S^{-1/2}S^{-1/2}Sx = S^{-1/2}SS^{-1/2}x =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \langle S^{-1/2}x, f_j \rangle S^{-1/2} f_j = \sum_{j=1}^{k} \langle x, S^{-1/2} f_j \rangle S^{-1/2} f_j.$$

$\square$

Primjer 3.1. *Neka je* $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$ *i neka je bazni okvir* $(f_j)_{j=1}^3$ *dan s*

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (1/\sqrt{2}) \\ (1/\sqrt{2}) \end{bmatrix} \right\}.$$ *Neka je* $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *dan formulom*

$$Vx = \begin{bmatrix} \langle x, f_1 \rangle \\ \langle x, f_2 \rangle \\ \langle x, f_3 \rangle \end{bmatrix}.$$

A operator sinteze $V^* : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definiran je s*

$$V^* \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_2 \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{3} a_j f_j = \begin{bmatrix} a_1 + (1/\sqrt{2})a_2 \\ a_2 + (1/\sqrt{2})a_3 \end{bmatrix},$$

slijedi da je operator baznog okvira $S = V^*V$ *dan matričnim prikazom u kanonskoj bazi za* $\mathbb{R}^2$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Odatle je je S^{-1} dan matricom

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},$$

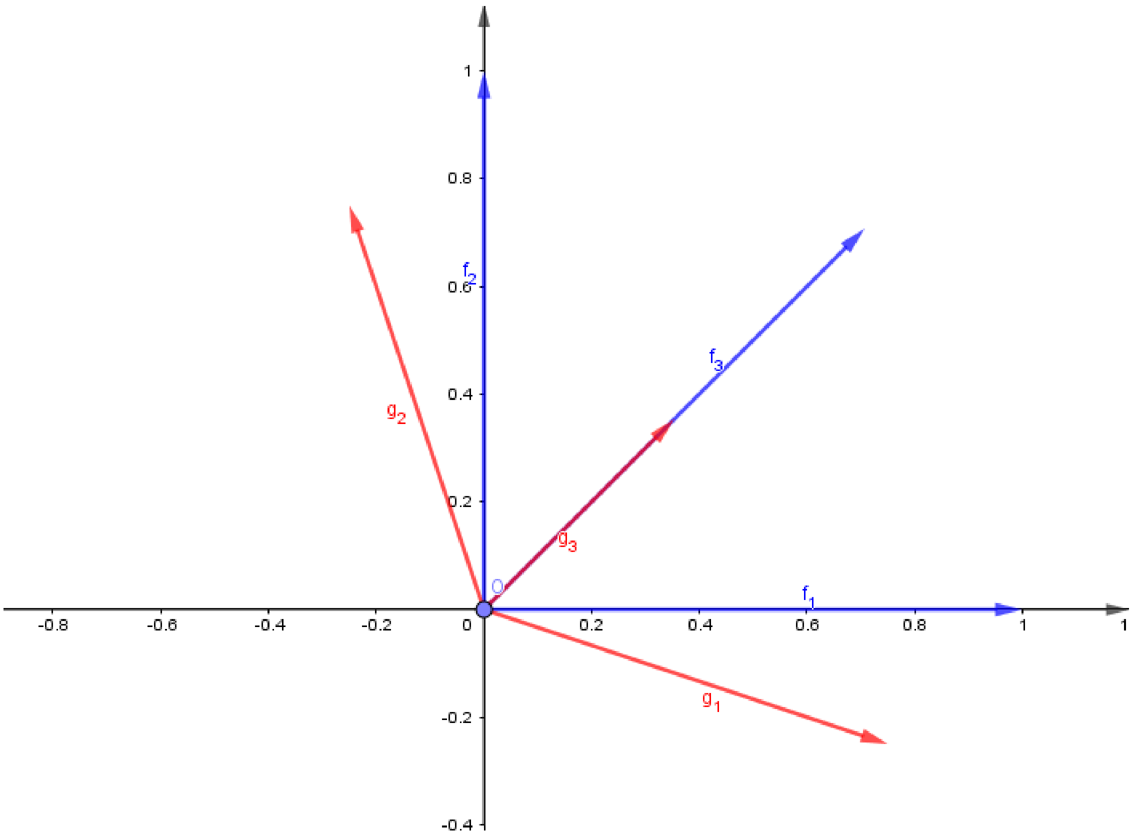
pa je kanonski dualan bazni okvir $(g_1,\ g_2,\ g_3) =\ (S^{-1}f_1,\ S^{-1}f_2,\ S^{-1}f_3)$*, dan s*

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3/4 \\ -1/4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/(2\sqrt{2}) \\ 1/(2\sqrt{2}) \end{bmatrix} \right\}.$$

Reprezentacija $x \in \mathcal{H}$ je dana s

$$x = \sum_{j=1}^{3} \langle x, S^{-1}f_j \rangle f_j.$$

Dani primjer je prikazan i grafički na Slici 6.



Slika 6: Prikaz baznog okvira $(f_j)_{j=1}^3$ označen plavom bojom i kanonski dualan bazni okvir $(g_j)_{j=1}^3$ označen crvenom bojom.

4. Potencijal baznog okvira

U fizici, pojam potencijalne energije definiran je kao energija koju tijelo posjeduje promjenom položaja ili pod nekim elastičnim deformacijama ako su u pitanju elastična tijela. Kažemo da je sustav u ravnoteži ukoliko su sve sile koje djeluju na neki predmet ili drugi sustav jednake nuli. Postoji više vrsta ravnoteža: stabilna, labilna i indiferentna. Predmeti pomaknuti iz položaja labilne ravnoteže sami se ne mogu vratiti u položaj labilne ravnoteže, dok predmeti pomaknuti iz položaja indiferentne ravnoteže ostaju u novom položaju. Ovdje ćemo se posvetiti stabilnoj ravnoteži gdje se predmeti kreću i mijenjaju položaj kako bi potencijalna energija bila minimalna, odnosno vraćaju se u položaj ravnoteže, što će nam biti zanimljivo promatrati. Kao primjer nam može poslužiti elastična opruga koja se nakon razvlačenja vraća u početni položaj ili elekroni u stanju kretanja. U ovome poglavlju definirat ćemo potencijal baznog okvira koji ne odgovara u potpunosti fizikalnom pojmu, ali nam on može dati prikaz kakva konfiguracija vektora daje napeti bazni okvir.

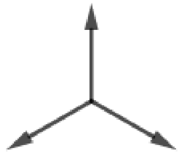
4.1 Definicija potencijala baznog okvira

Kako bismo mogli naslutiti kakva nam je konfiguracija poželjna kako bismo minimizirali potencijal baznog okvira odnosno kada je sustav u ravnoteži, iskažimo sljedeći rezultat za jedinične vektore na $\mathbb{R}^2$.

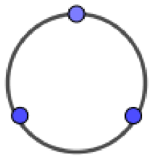
Propozicija 4.1. *Niz* $F = \left(\begin{bmatrix} b_j & \cos\frac{2\pi_j}{k} \\ b_j & \sin\frac{2\pi_j}{k} \end{bmatrix} \right)_{j=0}^{k-1}$ *za* $k \geq 3$, *je napeti bazni okvir za* $\mathbb{R}^2$.

Dokaz. Vidjeti [8] str.132. $\square$

Prethodnu propoziciju možemo interpretirati na sljedeći način: ukoliko imamo na raspolaganju skup od najmanje tri vektora za koji vrijedi da je kut između svaka dva vektora jednak $\frac{2\pi}{k}$, onda on tvori napeti bazni okvir za $\mathbb{R}^2$. Stoga će nas primjer jediničnih vektora iz $\mathbb{R}^2$ motivirati da uzmemo primjer elektrona koji su u ravnoteži ako su jednako raspoređeni na žičanom krugu. Tada možemo reći da elektromagnetski potencijal postiže minimum baš kada konfiguracija elektrona odgovara napetom baznom okviru. Djelovanjem sila privlačenja i odbijanja čini se kako se napeti bazni okviri pojavljuju baš ako su vektori ortogonalni koliko je to moguće. Ukoliko imamo $k \geq n$ vektora na $\mathbb{R}^n$, ako je kut između dva vektora manji od $\frac{\pi}{2}$ tada na njih djeluju sile odbijanja, a kada je kut veći od $\frac{\pi}{2}$ tada na njih djeluju sile privlačenja, stoga konfiguracija za koju potencijalna energija postiže minimum bit će napeti bazni okvir. Samim time osigurat ćemo njihovu egzistenciju te ćemo kasnije proširiti rezultate na bazne okvire čiji elementi imaju duljine različite od jedan.



Slika 7: Ovi vektori čine napeti bazni okvir za $\mathbb{R}^2$.



Slika 8: Elektroni u ravnoteži na žičanom krugu.

Definicija 4.1. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor dimenzije n i neka je $F = (f_j)_{j=1}^k$ skup (jediničnih) vektora iz $\mathcal{H}$. Potencijal baznog okvira za F jednak je*

$$P_F = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k} |\langle f_j, f_i\rangle|^2.$$

Očito je da potencijal baznog okvira ovisi i o broju (k) vektora u skupu. Ukoliko fiksiramo k tada će svaki napeti bazni okvir koji se sastoji od k jediničnih vektora imati isti potencijal baznog okvira na n-dimenzionalnom prostoru $\mathcal{H}$.

Lema 4.1. *Neka je $F = (f_j)_{j=1}^k$ napeti bazni okvir jediničnih vektora na $\mathcal{H}$. Tada je potencijal baznog okvira P_F od F jednak $\frac{k}{n^2}$.*

Dokaz. Neka je S operator sinteze napetog baznog okvira. Prema Teoremu 2.2, $S = AI_{\mathcal{H}}$ te primjenjući trag na danu jednakost imamo

$$tr(S) = tr(AI_{\mathcal{H}}) = nA.$$

Nadalje iz svojstva (3) znamo da je S hermitski, stoga iz Teorema 1.3 slijedi da se S može dijagonalizirati pa možemo primjeniti Korolar 1.2 pa imamo sljedeće

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = tr(S) = tr(AI_{\mathcal{H}}) = nA.$$

S druge strane, zbog Propozicije 2.4 imamo $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = tr(S) = tr(G)$ te vrijedi

$$tr(S) = tr(G) = \sum_{j=1}^{k} \|f_j\|^2 = ka^2,$$

stoga je granica baznog okvira A jednaka $\frac{k^2}{n}$ jer je F napeti bazni okvir jediničnih vektora. Prema Definiciji 2.2 napetog baznog okvira imamo sljedeće

$$\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{k}|\langle f_j, f_i\rangle|^2\right) = \sum_{j=1}^{k} A\|f_j\|^2 = \frac{k^2}{n}.$$

□

Sljedeći rezultat nam govori o tome da ukoliko skup F sadrži barem onoliko vektora koliko je dimenzija prostora $\mathcal{H}$, tada potencijal baznog okvira postiže minimum za F kada je on napeti bazni okvir.

Propozicija 4.2. *Minimalna vrijednost potencijala baznog okvira za skup $k \geq n$ jediničnih vektora $F = (f_j)_{j=1}^{k}$ na n-dimenzionalnom Hilbertovom prostoru je $\frac{k^2}{n}$. Minimum je postignut točno kada vektori tvore napeti bazni okvir za $\mathcal{H}$.*

Dokaz. Iz prethodne leme znamo ukoliko je F napeti bazni okvir tada je pridruženi potencijal $\frac{k^2}{n}$. Preostaje nam pokazati kako je $\frac{k^2}{n}$ donja granica na skupu dostižnih potencijala baznog okvira među takvom kolekcijom F. Također ćemo pokazati da je svaki skup koji postiže $\frac{k^2}{n}$ napeti bazni okvir.
Neka je S operator baznog okvira za $F = (f_j)_{j=1}^{k}$ i neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti od S. Budući da je S pozitivan operator njegove svojstvene vrijednosti su realne i nenegativne te $tr(S)$ jednak je sumi $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$ i jer je S hermitski imamo $tr(SS^*) = tr(S^2)$ te su oni jednaki sumi $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_k^2$.
Neka je V operator analize od F te $S = V^*V$ operator baznog okvira i neka je $G = VV^*$ Grammov operator te iz Propozicije 2.4 imamo $tr(S) = tr(G)$. Dijagonalni elementi matrice G^2 jednaki su $d_{ii} = \sum_{i=1}^{k}|\langle f_j, f_i\rangle|^2$. Koristeći Definiciju 3.2 potencijalnog baznog okvira slijedi

$$P_F = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}|\langle f_j, f_i\rangle|^2 = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}|G_{j,i}|^2 = tr(G^2).$$

Stoga imamo $P_F = tr(G^2) = tr(S^2) = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2$ te možemo minimizaciju potencijala baznog okvira smatrati kao problem minimizacije s n varijabli $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Dijagonalni elementi Grammove matrice za $(f_j)_{j=1}^{k}$ su $\|f_j\|^2 = 1$ stoga vrijedi

$$k = tr(G) = tr(S) = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j. \tag{6}$$

Neka je x vektor na $\mathbb{R}^n$ koji sadrži svojstvene vrijednosti od S, $x=\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{bmatrix}$ i neka je $y=$ $\begin{bmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}$, gdje je $y \in \mathbb{R}^n$.

Iz prethodno pokazanog znamo $\|x\|^2 = P_F$ i $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = k$ (zbog (6)). Koristeći Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjevu nejednakost imamo

$$k = |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\| = \sqrt{P_F}\sqrt{n}$$

gdje jednakost vrijedi ako i samo ako je x u linearnoj ljusci od y. Nadalje, potencijal baznog okvira P_F ima minimalnu vrijednost $\frac{k^2}{n}$ koja se postiže ako i samo ako su svojstvene vrijednosti od S sve jednake $\lambda_j = \frac{k}{n}$, stoga je $S = \frac{k}{n}I$, dakle F je napeti bazni okvir za $\mathcal{H}$. □

Dosada smo promatrali samo jedinične vektore te se možemo zapitati je li moguće promatrati skup nejediničnih vektora. Neka je P_F potencijal baznog okvira definiran kao u Definiciji 3.2., $F = (f_j)_{j=1}^{k}$ je skup vektora na $\mathcal{H}$, te $(a_j)_{j=1}^{k}$ su pripadne norme svakog vektora. Definirajmo $L = \sum_{j=1}^{k} a_j^2$ te i dalje vrijedi $\sum_{j=1}^{k} \|f_j\|^2 = tr(S) = L$.

Propozicija 4.3. *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor dimenzije n. Minimalna vrijednost potencijala baznog okvira za skup $(f_j)_{j=1}^{k}$ od $k \geq n$ vektora na $\mathcal{H}$, i za koji vrijedi $\sum_{j=1}^{k} \|f_j\|^2 = L$, jednaka je $\frac{L^2}{n}$ te minimalna vrijednost se postiže točno kada je F napeti bazni okvir s granicom baznog okvira $\frac{L}{n}$.*

Dokaz. Na isti način kao i za Propoziciju 4.1. □

Propozicija 4.4. *Napeti bazni okvir $(f_j)_{j=1}^{k}$ za n-dimenzionalan prostor $\mathcal{H}$ s granicom baznog okvira A s k vektora i $\|f_j\| = a_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$ postoji ako i samo ako je zadovoljena sljedeća nejednakost:*

$$max\{{a_j}^2\} \leq A = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} a_j^2. \tag{7}$$

Dokaz. Vidjeti [5] str.2. □

Nejednakost (6) naziva se fundamentalna nejednakost te nam prethodni rezultat daje uvjet egzistencije napetog baznog okvira na n-dimenzionalnom prostoru $\mathcal{H}$.

Literatura

[1] Lj. Arambašić, M.Kolarek *Napeti bazni okviri*, Poučak, 77 (2019).

[2] D. Bakić *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[3] D. Bakić, *Normirani prostori*,
URL: https://web.math.pmf.unizg.hr/ bakic/np/NP_17_18.pdf.

[4] P.G. Casazza, The art of frame theory, Taiwanese J. Math. 4 (2000).

[5] P.G. Casazza, M. Fickus, J. Kovačević, M.T. Leon, J.C .Tremain *A Physical Interpretation of Tight Frames*, Appl.Comp. Harmonic Anal. (2006).

[6] P.G. Casazza, R.G. Lynch *A brief introduction to Hilbert space frame theory an its applications*,AMS, 2016.

[7] P.G. Casazza, G. Kutyniok, F. Philipp *An Introduction to Finite Frame Theory. Finite frames Theory and a Applications*,Birkhäuser/Springer, New York, 2013.

[8] D. Han, K. Kornelson, D. Larson, E. Weber *Frames for Undergraduates*, AMS, Providence, 2007.

[9] V. I. Morgenshtern, H. Bölcskei *A short course on frame theory*, ETH Zürich, Switzerland, 2011.

[10] Shayne, F.D. Waldron *An Introduction to Finite Tight frames*, Birkhäuser/Springer, New York, 2017.

Sažetak

U ovome radu predstavljeni su bazni okviri na konačnodimenzionalnom Hilbertovom prostoru. U prvom dijelu detaljnije su proučeni napeti bazni okviri i operatori: analize, sinteze i operator baznog okvira. Nadalje, analizirana je konstrukcija napetih baznih okvira. Zatim su definirani kanonski dualni bazni okviri i njihova svojstva. Na kraju je definiran potencijal baznog okvira i predstavljena su neka njegova svojstva.

Ključne riječi: bazni okviri, napeti bazni okviri, operatori, dualni bazni okviri.

Summary

In this thesis frames on finite Hilbert space were introduced. In the first part, tight frames and operators: analysis, synthesis and frame operator are described in more detail. Furthermore, construction of tight frames is analysed. Then, canonical dual frames and some of their properties are defined. Finally, frame potential is defined and its properties are shown.

Keywords: frames, tight frame, operators, dual frames.

Životopis

Rođena sam 10. srpnja 1993. godine u Mostaru. Osnovnu školu pohađala sam od 2000. do 2008. godine u Širokom Brijegu. Nakon završetka osnovne škole upisujem gimnaziju fra Dominika Mandića u Širokom Brijegu koju završavam 2012. godine. U istoj godini upisujem na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu, preddiplomski studij Matematike. Zatim 2018. dolazim u Osijek te upisujem diplomski studij matematike, smjer Financijska matematika i statistika, Sveučilišta J.J.Strossmayera.