Konvergencija nizova slučajnih varijabli

Nedić, Magdalena

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike i računarstva

Magdalena Nedić

Konvergencija nizova slučajnih varijabli

Završni rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike i računarstva

Magdalena Nedić

Konvergencija nizova slučajnih varijabli

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Dragana Jankov Maširević

Osijek, 2020.

Sažetak

U ovom radu obrađen je dio teorije vjerojatnosti vezan uz konvergenciju nizova slučajnih varijabli, poznat i kao stohastička konvergencija. Riječ je o četiri tipa konvergencije, a to su: konvergencija po distribuciji, konvergencija po vjerojatnosti, konvergencija u srednjem reda p i konvergencija gotovo sigurno. Svaki tip konvergencije detaljno je objašnjen i precizno definiran te su navedeni nužni i dovoljni uvjeti za određivanje konvergencije niza slučajnih varijabli. Također, navedeni rezultati su popraćeni ilustrativnim primjerima ili nekim praktičnim primjenama. Neki od tih primjena su važni rezultati u teoriji vjerojatnosti, kao što su: slabi zakon velikih brojeva, jaki zakon velikih brojeva, centralni granični teorem i slično. Naglasak je stavljen i na veze među pojedinim tipovima konvergencije te na konvergenciju transformirane neprekidne slučajne varijable. Za kraj je važno napomenuti i da je svaki tip konvergencije generaliziran i na primjeru slučajnog vektora.

Ključne riječi

konvergencija, niz slučajnih varijabli, distribucija, vjerojatnost, konvergencija gotovo sigurno, konvergencija u srednjem, zakon velikih brojeva, centralni granični teorem, transformirana slučajna varijabla.

Convergence of sequences of a random variables

Summary

In this paper we deal with a part of probability theory related to the convergence of sequences of random variables. There is four types of convergence, and they are: convergence in distribution, convergence in probability, convergence in mean and almost sure convergence. Each type of convergence is explained in detail and for each type the accompanying theorems and propositions necessary for determining convergence are attached. Also, everything is accompanied by illustrative examples or some practical applications. Some of these applications are important results in probability theory, such as: weak law of large numbers, strong law of large numbers, central limit theorem, etc. Emphasis is also placed on the relationships between individual types of convergence and on the convergence of the transformed continuous random variable. Finally, it is important to note that each type of convergence is generalized on the example of a random vector.

Key words

convergence, sequences of random variables, distribution, probability, almost sure convergence, convergence in mean, law of large numbers, central limit theorem, transformed random variable.

Sadržaj

Uvod

Slučajna varijabla kao i asimptotsko ponašanje niza slučajnih varijabli jedne su od važnijih tema u teoriji vjerojatnosti. Kao važna komponenta u proučavanju nizova slučajnih varijabli smatra se pitanje konvergencije.
Na osnovu različitih načina shvaćanja *udaljenosti* između slučajnih varijabli razvili su se različiti tipovi konvergencije. Neki od najvažnijih i najčešće korištenih u primjeni su:

- konvergencija po distribuciji
- konvergencija po vjerojatnosti
- konvergencija u srednjem reda p
- konvergencija gotovo sigurno ili konvergencija s vjerojatnošću 1.

Konvergencija po distribuciji se smatra najslabijom ali istovremeno i najkorisnijom u primjeni. Njena važnost očituje se i u činjenici da se ona koristi u Centralnom graničnom teoremu. Konvergencija po vjerojatnosti nešto je jača od konvergencije po distribuciji, ali i dalje spada u slabu konvergenciju, te kao njenu najvažniju primjenu navodimo Slabi zakon velikih brojeva. Nadalje, konvergencija u srednjem reda p spada u skupinu jakih konvergencija, dok je konvergencija gotovo sigurno najjači oblik od četiri navedena tipa i sastavni je dio Jakog zakona velikih brojeva.

Prvo poglavlje donosi osnove o nizovima slučajnih varijabli, koje su potrebne za razumijevanje osnovne tematike i za daljnje proučavanje različitih tipova konvergencije.

U poglavljima od 2 do 5 detaljno je objašnjen svaki tip konvergencije te su iskazane i dokazane osnovne tvrdnje. Teorija je također ilustrativno prikazana i kroz primjere u kojima se određuje asimptotsko ponašanje nizova slučajnih varijabli.

Šesto poglavlje obuhvaća slučaj konvergencije neprekidne transformirane slučajne varijable, koju obrađujemo u obliku Mann-Wald teorema.

Naposljetku, u sedmom poglavlju obrađene su različite veze među navedenim tipovima konvergencije te je naglašena razlika u jačini, odnosno koja konvergencija slijedi iz koje. Za kraj, priložen je i grafički prikaz koji objedinjuje svu prethodno navedenu teoriju.

Dakle, svrha ovoga rada je proučiti i pobliže razumijeti različite tipove konvergencije nizova slučajnih varijabli i njihove međusobne odnose te naći primjenu ove teorije na konkretnim primjerima.

1 Nizovi slučajnih varijabli

Za početak, navest ćemo osnovne pojmove iz teorije vjerojatnosti koje je potrebno pobliže poznavati kako bi mogli detaljnije proučavati tematiku ovoga rada.

Definicija 1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ vjerojatnosni prostor. Funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je* ***slučajna varijabla*** *ako $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ za proizvoljni $B \in \mathcal{B}$, tj. $X^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{F}$, gdje je $\mathcal{B}$ σ–algebra Borelovih skupova na $\mathbb{R}$.*

Definicija 2. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ vjerojatnosni prostor. Kažemo da je niz slučajnih varijabli $(X_n, n \in \mathbb{N})$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ ako su sve slučajne varijable X_n, koje pripadaju nizu $(X_n, n \in \mathbb{N})$ funkcije oblika $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$.*

Definicija 3. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ vjerojatnosni prostor pridružen slučajnom pokusu. Funkciju $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ koja svakom ishodu slučajnog pokusa pridružuje uređenu n–torku realnih brojeva $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tj. funkciju $(X_1, X_2, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$, zovemo* ***n-dimenzionalan slučajni vektor*** *ako vrijedi*

$$\{X_1 \leq x_1\} \cap \cdots \cap \{X_n \leq x_n\} \in \mathcal{F}$$

za svaki $x_1 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Definicija 4. *Funkcija distribucije slučajnog vektora $\mathbf{X}$ dimenzije $K \times 1$ je funkcija $F_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^K \to [0, 1]$ definirana sa:*

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_k \leq x_k), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^K,$$

gdje su X_k komponente slučajnog vektora $\mathbf{X}$ (slučajne varijable), a x_k komponente vektora $\mathbf{x}$, za svaki $k = 1, \ldots, K$.

Definicija 5. *Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih varijabli definiranih na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ te neka je F_{X_n} funkcija distribucije općeg člana niza $(X_n, n \in \mathbb{N})$. Kažemo da je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz jednako distribuiranih slučajnih varijabli ako bilo koja dva člana niza imaju istu funkciju distribucije, odnosno ako vrijedi*

$$F_{X_i}(x) = F_{X_j}(x) \quad \forall i, j \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Definicija 6. *Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ slučajne varijable definirane na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ te neka su $F_{X_1}, F_{X_2}, \ldots, F_{X_n}$ pripadne funkcije distribucije. Kažemo da su slučajne varijable $X_1, X_2, \ldots, X_n$ međusobno nezavisne ako vrijedi*

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i),$$

gdje s $\mathbf{X}$ označavamo slučajan vektor čije su komponente $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Definicija 7. *Kažemo da je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli, skraćeno ndj, ako vrijedi:*

- *$X_1, X_2, \ldots$ su međusobno nezavisne*
- *$X_1, X_2, \ldots$ su jednako distribuirane.*

2 Konvergencija po distribuciji

Različiti tipovi konvergencije nizova slučajnih varijabli su bazirani na različitim načinima mjerenja *udaljenosti* između dvije slučajne varijable, tj. određivanju koliko su dvije slučajne varijable *blizu jedna drugoj*. Tako se konvergencija po distribuciji temelji na sljedećoj intuiciji: dvije slučajne varijable su *blizu jedna drugoj* ako su njihove funkcije distribucije *blizu jedna drugoj*.

Konvergencija po distribuciji je najslabiji oblik konvergencije od četiri vrste koje ovdje navodimo, jer se podrazumijeva u svim ostalim vrstama konvergencije. Međutim, konvergencija po distribuciji vrlo se često koristi u praksi. Također, korisnost ovog pristupa je u mogućnosti određivanja odgovarajuće aproksimacije funkcije distribucije ili funkcije gustoće niza nezavisnih jednako distriburanih slučajnih varijabli $(X_n, n \in \mathbb{N})$ kada je n *dovoljno velik* [1].

Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih varijabli. Promotrimo slučajnu varijablu X_n koja pripada navedenom nizu te neka je sa F_n označena njena funkcija distribucije $F_n : \mathbb{R} \to [0,1]$. Ako sada fiksiramo x, vrijednost funkcije distribucije u toj točki je realan broj. Prema tome, za fiksan x dobivamo niz $(F_n(x), n \in \mathbb{N})$ realnih brojeva za koji je lako provjeriti je li konvergentan (primjenom definicije za konvergenciju niza realnih brojeva).

Ako je, za fiksni x, niz $(F_n(x), n \in \mathbb{N})$ konvergentan, njegovu graničnu vrijednost označavamo sa $F_X(x)$.

Niz slučajnih varijabli $(X_n, n \in \mathbb{N})$ će biti konvergentan po distribuciji ako i samo ako je niz realnih brojeva $(F_n(x), n \in \mathbb{N})$ konvergentan za bilo koji izbor x-a (osim za neke *posebne vrijednosti* od x gdje $F_X(x)$ nije neprekidna u x).

Prema tome, iako je riječ o konvergenciji nizova slučajnih varijabli po distribuciji to se zapravo svodi na konvergenciju funkcija distribucije prema graničnoj vrijednosti, koja je u ovom slučaju granična funkcija distribucije.

Definicija 8. *Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih varijabli i $(F_{X_n}, n \in \mathbb{N})$ odgovarajući niz funkcija distribucije. Kažemo da niz slučajnih varijabli $(X_n, n \in \mathbb{N})$* ***konvergira po distribuciji*** *prema slučajnoj varijabli X ako je:*

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x), \qquad \forall x \in C(F_X),$$

gdje je F_X funkcija distribucije od X, a $C(F_X)$ je skup svih točaka neprekidnosti od F_X.

Tada F_X zovemo granična funkcija distribucije niza $(X_n, n \in \mathbb{N})$.
To označavamo s

$$(d) \lim_n X_n = X \qquad ili \qquad X_n \xrightarrow{d} X \ \ (n \to \infty).$$

Napomena 1. *Skup $[C(F_X)]^c$ je najviše prebrojiv skup što zaključujemo na osnovu sljedeće propozicije koju čitatelj može pronaći u [1, Propozicija 9.2, str. 257].*

[1] *dovoljno velik* - funkcija distribucije (funkcija gustoće) od $(X_n, n \in \mathbb{N})$ je *blizu* granične funkcije distribucije (gustoće)

Propozicija 1. *Skup svih točaka prekida funkcije distribucije je najviše prebrojiv skup.*

Prema [1, Propozicija 9.2, str. 257] slijedi da ako $X_n \xrightarrow{d} X$ *i* $X_n \xrightarrow{d} Y$*, tada su* X *i* Y *jednako distribuirane tj. vrijedi* $F_X = F_Y$.

Primjer 1. *Neka je zadan niz nezavisnih slučajnih varijabli* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *s funkcijom distribucije:*

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 1 - (1 - \frac{1}{n})^{nx}, & x > 0 \\ 0, & \textit{inače.} \end{cases}$$

Dokažite da $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *konvergira po distribuciji prema* $\varepsilon(1)$*, gdje je* $\varepsilon(1)$ *eksponencijalna distribucija s parametrom* $\lambda = 1$.

Rješenje:

Za $x \leq 0$ *imamo:*

$$F_{X_n}(x) = F_X(x) = 0, \qquad za \;\; n \in \mathbb{N}$$

dok za $x \geq 0$ *dobivamo:*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) &= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{nx}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{nx} \\ &= 1 - e^{-x} = F_X(x), \end{aligned}$$

gdje smo koristili poznati limes

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{c}{n}\right)^{nb} = e^{cb}.$$

Dakle, sada je očito da $X_n \xrightarrow{d} X$ *gdje je* $X \sim \varepsilon(1)$. ∎

Pretpostavimo sada da smo odredili funkciju distribucije F_X, za koju vrijedi da je

$$F_X(x) = \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x), \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}, \;\text{gdje je } F_X \text{ neprekidna.}$$

Kako bi provjerili je li F_X odgovarajuća funkcija distribucije prema kojoj niz slučajnih varijabli $(X_n, n \in \mathbb{N})$ konvergira po distribuciji, možemo provjeriti vrijede li sljedeća četiri svojstva koja svaka funkcija distribucije mora zadovoljavati:

- F_X je (strogo) monotono rastuća funkcija, odnosno:

$$F_X(x_1) \leq F_X(x_2), \qquad \text{ako je } x_1 < x_2$$

- F_X je neprekidna zdesna, tj.

$$\lim_{\substack{t\to x \\ t\geq x}} F_X(t) = F_X(x)$$

- vrijedi $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$
- također je $\lim\limits_{x\to\infty} F_X(x) = 1$.

U praksi nije rijedak slučaj da granična funkcija distribucije bude pridružena degeneriranoj (ili konstantnoj) slučajnog varijabli za koju je $P(X = c) = 1,\ c \in \mathbb{R}$. Tada niz slučajnih varijabli konvergira po distribuciji prema konstanti c. To označavamo s $X_n \xrightarrow{d} c$.
Prethodno navedene tvrdnje vrijede i za niz slučajnih varijabli koje su zadane funkcijom gustoće. Ako imamo niz slučajnih varijabli $(X_n, n \in \mathbb{N})$ koje su definirane pripadnim nizom funkcija gustoće $(f_n, n \in \mathbb{N})$ te ako $X_n \xrightarrow{d} X$ i pripadni niz funkcija gustoće konvergira ka graničnoj funkciji gustoće, tada kako se n povećava, funkcija gustoće od X_n je sve bliže graničnoj funkciji gustoće od X.

Osim klasične definicije konvergencije po distribuciji, Portmanteauova lema [8, Teorem 2.1, str. 16] daje i nekoliko ekvivalentnih načina definiranja konvergencije po distribuciji. Neki od tih pristupa su manje intuitivni ali su jako korisni prilikom dokazivanja drugih tvrdnji, stoga ih u nastavku navodimo.

Lema 1. *Niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ konvergira po distribuciji prema slučajnoj varijabli X ako i samo ako vrijedi jedna od sljedećih tvrdnji:*

- $F_{X_n} \to F_X$ *za sve točke x u kojima je funkcija distribucije F_X neprekidna*
- $\mathbb{E}f(X_n) \to \mathbb{E}f(X)$ *za svaku neprekidnu omeđenu funkciju f*
- $\mathbb{E}f(X_n) \to \mathbb{E}f(X)$ *za svaku omeđenu Lipschitzovu funkciju f*
- $\liminf \mathbb{E}f(X_n) \geq \mathbb{E}f(X)$ *za svaku nenegativnu, neprekidnu funkciju f*
- $\liminf P(X_n \in G) \geq P(X \in G)$ *za svaki otvoreni skup G*
- $\limsup P(X_n \in F) \leq P(X \in F)$ *za svaki zatvoreni skup F.*

Jedna od važnijih prednosti ovog tipa konvergencije je što slučajne varijable ne moraju biti definirane na istom vjerojatnosnom prostoru. Iako se ovaj tip konvergencije smatra kao najslabiji, njegova primjena je jako važna. Upravo jedan od osnovnih rezultata teorije vjerojatnosti, Centralni granični teorem, temelji se na konvergenciji po distribuciji. Stoga ćemo u sljedećem potpoglavlju navesti njegovu tematiku.

2.1 Centralni granični teorem

Centralni granični teorem (CGT) određuje uvjete koji moraju biti zadovoljeni da bi srednja vrijednost uzorka slučajnih varijabli konvergirala prema normalnoj distribuciji, s povećavanjem veličine uzorka. Srednju vrijednost uzorka slučajnih varijabli $(X_n, n \in \mathbb{N})$ označavamo s $\overline{X_n}$ i definiramo na sljedeći način:

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Obzirom da srednju vrijednost uzorka slučajnih varijabli definiramo kao sumu slučajnih varijabli i ona sama je slučajna varijabla te njenu distribuciju aproksimiramo CGT.

Postoji nekoliko verzija centralnog graničnog teorema te ovdje navodimo samo jednu od njih dok neke od ostalih verzija čitatelj može pronaći u [1, Centralni granični problem, str. 506]. U teoriji vjerojatnosti najpoznatiji i najjednostavniji je Lindeberg-Lévy CGT koji se koristi u slučaju da su slučajne varijable nezavisne i jednako distribuirane. Budući da za dokaz ovog teorema koristimo karakteristične funkcije i neka njihova svojstva, najprije ćemo njih definirati.

Definicija 9. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ vjerojatnosni prostor i X slučajna varijabla definirana na njemu sa funkcijom distribucije F_X. Karakteristična funkcija od F_X je funkcija $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definirana izrazom*

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) dF_X(x) + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx) dF_X(x), \ t \in \mathbb{R}.$$

Teorem 1. ***(Teorem o neprekidnosti)*** *Neka je $(F_{X_n}, n \in \mathbb{N})$ niz funkcija distribucije i $(\varphi_{X_n}, n \in \mathbb{N})$ odgovarajući niz karakterističnih funkcija.*

- *Ako $F_{X_n} \xrightarrow{d} F_X$, gdje je F_X funkcija distribucije, tada $\varphi_{X_n}(t) \to \varphi_X(t)$ za sve $t \in \mathbb{R}$, gdje je φ_X karakteristična funkcija od F_X.*
- *Ako za svaki $t \in \mathbb{R}$ postoji $\lim_n \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t)$ i ako je funkcija φ_X neprekidna u $t = 0$, tada je φ_X karakteristična funkcija funkcije distribucije F_X i vrijedi $F_{X_n} \xrightarrow{d} F_X$.*

Dokaz. Vidi [1, Teorem 13.8, str. 480]. □

Teorem 2. ***(Lindeberg-Lévy CGT)*** *Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli takvih da je*

$$\mathbb{E}[X_n] = \mu < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$Var[X_n] = \sigma^2 < \infty, \quad \sigma^2 > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tada vrijedi da

$$\sqrt{n}\left(\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}\right) \xrightarrow{d} Z,$$

gdje je Z standardna normalna slučajna varijabla.

Dokaz. Označimo s $Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$, pri čemu je $\mathbb{E}[Z_i] = 0$ i $Var[Z_i] = 1$.
Sada je

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Z_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \mu}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma} \left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu \right) = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma} \left(n\overline{X_n} - n\mu \right)$$

$$= \sqrt{n} \frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma} = Y_n.$$

Iz prethodnog računa slijedi

$$\varphi_{Y_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{Z_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \varphi^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right), \text{pri čemu je } \varphi \text{ karakteristična funkcija od } Z_i.$$

Dakle, na osnovu Teorema 1 zaključujemo da je dovoljno pokazati da karakteristična funkcija φ_{Y_n} konvergira, odnosno pitamo se

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Y_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = ?$$

Pogledajmo

$$\begin{aligned}
\ln \lim_{n\to\infty} \varphi^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) &= \lim_{n\to\infty} \ln \varphi^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} n \ln \varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \mathbb{E}\left[e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}Z_i}\right]}{\frac{1}{n}} \\
&\overset{L'H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\mathbb{E}\left[e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}Z_i}\right]} \mathbb{E}\left[e^{itZ_i\frac{1}{\sqrt{n}}} \cdot itZ_i\left(-\frac{1}{2}n^{-\frac{3}{2}}\right)\right]}{-\frac{1}{n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)} \left(i\,t \cdot \frac{1}{2}\sqrt{n}\,\mathbb{E}\left[Z_i\,e^{itZ_i\frac{1}{\sqrt{n}}}\right]\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)} \lim_{n\to\infty} \frac{i\,t\,\mathbb{E}\left[Z_i\,e^{itZ_i\frac{1}{\sqrt{n}}}\right]}{2\frac{1}{\sqrt{n}}} \\
&\overset{L'H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{i\,t\,\mathbb{E}\left[Z_i\,e^{itZ_i\frac{1}{\sqrt{n}}} \cdot i\,t\,Z_i\left(-\frac{1}{2}n^{-\frac{3}{2}}\right)\right]}{2\left(-\frac{1}{2}n^{-\frac{3}{2}}\right)} \\
&\overset{\text{linear. očekiv}}{=} n \lim_{n\to\infty} \frac{it\left(-\frac{1}{2}n^{-\frac{3}{2}}\right)\mathbb{E}\left[Z_i\,e^{itZ_i\frac{1}{\sqrt{n}}} \cdot it\,Z_i\right]}{2\left(-\frac{1}{2}n^{-\frac{3}{2}}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{i^2}^{=\text{-}1}\,t^2\,\overbrace{\mathbb{E}\left[Z_i\,e^{itZ_i\frac{1}{\sqrt{n}}}\right]}^{=1}}{2} = -\frac{t^2}{2},
\end{aligned}$$

iz čega odmah slijedi $\varphi_{Y_n}(t) \to e^{-\frac{t^2}{2}}$, pri čemu je $e^{-\frac{t^2}{2}}$ karakteristična funkcija od $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, čime smo pokazali tvrdnju teorema. □

Primjer 2. *Neka je* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *niz nezavisnih Bernoullijevih slučajnih varijabli s parametrom* $p = \frac{1}{2}$. *Slučajne varijable* X_n *poprimaju vrijednosti iz* $R_{X_n} = \{0,1\}$ *te su zadane sljedećom funkcijom gustoće:*

$$f_{X_n}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 0, & x \notin R_{X_n}. \end{cases}$$

Koristeći se Centralnim graničnim teoremom odredite distribuciju srednje vrijednosti prvih 100 članova ovog niza.

Rješenje:

Niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *je niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Da bi mogli primijeniti Lindeberg-Lévy CGT provjerimo zadovoljava li niz* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *uvjete teorema. Srednja vrijednost niza je:*

$$\mathbb{E}[X_n] = \sum_{x \in R_{X_n}} x\, f_{X_n}(x) = 1 \cdot f_{X_n}(1) + 0 \cdot f_{X_n}(0) = \frac{1}{2} < \infty.$$

Varijancu ćemo dobiti koristeći formulu $\quad Var(X_n) = \mathbb{E}[X_n^2] - \mathbb{E}[X_n]^2.$

Lako je izračunati drugi moment

$$\Longrightarrow \mathbb{E}[X_n^2] = \sum_{x \in R_{X_n}} x^2\, f_{X_n}(x) = 1^2 \cdot f_{X_n}(1) + 0^2 \cdot f_{X_n}(0) = \frac{1}{2}$$

iz čega dobivamo

$$Var(X_n) = \mathbb{E}[X_n^2] - \mathbb{E}[X_n]^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} < \infty.$$

Niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *prema tome zadovoljava uvjete Lindeberg-Lévy CGT, pa ako ga primijenimo na srednju vrijednost prvih 100 članova, tj. na* $\overline{X_n} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i$ *dobivamo aproksimaciju distribucije*

$$\overline{X_n} \sim \mathcal{N}\left(\mathbb{E}[X_n], \frac{Var(X_n)}{n}\right) \Longrightarrow \overline{X_n} \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{400}\right).$$

■

Lindeberg-Lévy CGT nije teorem aproksimacije, odnosno on ne daje informaciju koliko uzorak treba biti *velik* da bi se srednja vrijednost uzorka aproksimirala normalnom distribucijom. Lindbeg-Levyjev CGT tvrdi da se bilo koji slučajni pokus iz realnog svijeta, čiji je konačan ishod rezultat sumacije ili srednje vrijednosti ishoda većeg broja nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli, koje imaju konačno matematičko očekivanje i varijancu, može promatrati kroz približnu normalnu distribuciju. Na primjer, ukupan broj proizvoda s greškom u nekom proizvodnom procesu ili u tvornici može se promatrati kao približno normalno distribuiran sve dok vrijede pretpostavke o nezavisnosti i jednakoj distribuiranosti.
Centralni granični teorem pronalazi brojne primjene u praksi. Glavna primjena mu je odrediti približnu distribuciju u slučaju da je prava distribucija nepoznata ili je s njom teško dalje raditi, što je čest slučaj u statistici.

2.2 Konvergencija po distribuciji niza slučajnih vektora

Obzirom da slučajni vektor, kao uređenu n–torku slučajnih varijabli, možemo shvatiti kao generalizaciju pojma slučajne varijable, logično je zapitati se o pojmu konvergencije niza slučajnih vektora. Konvergencija niza slučajnih vektora također je podijeljena u četiri tipa konvergencije, koja su na neki način slična konvergenciji niza slučajnih varijabli. Konvergencija po distribuciji niza slučajnih vektora gotovo je identična istoimenoj konvergenciji slučajnih varijabli, a jedina razlika je u tome što se funkcije distribucije slučajnih varijabli zamjene s funkcijama distribucije slučajnog vektora.

Definicija 10. *Neka je* $(\mathbf{X}_n, n \in \mathbb{N})$ *niz slučajnih vektora dimenzije* $K \times 1$. *Označimo s* $F_{\mathbf{X}_n}$ *funkciju distribucije slučajnog vektora* X_n, *za svaki* $n \in \mathbb{N}$. *Kažemo da niz* $(\mathbf{X}_n, n \in \mathbb{N})$ *konvergira po distribuciji ako i samo ako postoji funkcija distribucije* $F_{\mathbf{X}}$ *takva da niz* $(F_{\mathbf{X}_n}(x), n \in \mathbb{N})$ *konvergira prema* $F_{\mathbf{X}}$ *za svaku točku* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^K$ *gdje je* $F_{\mathbf{X}}$ *neprekidna. Slučajan vektor* $\mathbf{X}$ *koji ima funkciju distribucije* $F_{\mathbf{X}}$ *nazivamo granicom po distribuciji, dok konvergenciju označavamo sa*

$$\mathbf{X}_n \xrightarrow{d} \mathbf{X}.$$

Napomena 2. *Za ovaj tip konvergencije važno je napomenuti da je konvergencija po distribuciji komponenti slučajnog vektora (slučajnih varijabli) nužan, ali ne i dovoljan uvjet konvergencije po distribuciji slučajnog vektora u cjelini [3, Relations among modes of convergence].*

3 Konvergencija po vjerojatnosti

Ako uspoređujemo konvergenciju po vjerojatnosti s konvergencijom po distribuciji možemo zaključiti da je konvergencija po vjerojatnosti jača. Koncept konvergencije po vjerojatnosti bazira se na sljedećoj intuiciji: dvije slučajne varijable su *blizu jedna drugoj* ako postoji velika vjerojatnost da je njihova razlika jako mala.
Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih varijabli definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Za slučajnu varijablu X i strogo pozitivan realan broj ε, promotrimo sljedeću vjerojatnost:

$$P(|X_n - X| \geq \varepsilon).$$

Intuitivno, za niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ kažemo da je *daleko* od X kada je $|X_n - X| \geq \varepsilon$ pa je prema tome $P(|X_n - X| \geq \varepsilon)$ vjerojatnost da je niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *daleko* od X. Ako $(X_n, n \in \mathbb{N})$ konvergira ka X onda $P(|X_n - X| \geq \varepsilon)$ treba postajati sve manja i manja kako povećavamo n. Drugim riječima, vjerojatnost da je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *daleko* od X trebala bi ići u nulu kako n raste.
Formalno, trebali bi imati

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0.$$

Također, uočavamo da je $P(X_n - X| \geq \varepsilon)$ niz realnih brojeva, pa je gornji limes zapravo limes niza realnih brojeva. Ovaj način proučavanja udaljenosti među slučajnim varijablama vodi nas do sljedeće definicije.

Definicija 11. *Kažemo da niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ slučajnih varijabli* ***konvergira po vjerojatnosti*** *prema slučajnoj varijabli X ako za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0.$$

To označavamo s

$$(P)\lim_{n} X_n = X \quad ili \quad X_n \xrightarrow{P} X \ \ (n \to \infty)$$

te slučajnu varijablu X nazivamo ***vjerojatnosna granica*** *(probability limit).*

Prema sljedećoj propoziciji prethodni limes je jedinstven.

Propozicija 2. *Ako je $(P)\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$ i $(P)\lim\limits_{n\to\infty} X_n = Y$ tada je $P(X \neq Y) = 0$.*

Dokaz. Promotrimo skup $\{X \neq Y\}$ koji možemo raspisati na sljedeći način:

$$\{X \neq Y\} = \{\omega : X(\omega) \neq Y(\omega)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big\{\omega : |X(\omega) - Y(\omega)| \geq \frac{1}{k}\Big\}.$$

Nadalje imamo:

$$P\Big\{\omega : |X(\omega) - Y(\omega)| \geq \frac{1}{k}\Big\} \leq P\Big\{\omega : |X_n(\omega) - Y(\omega)| \geq \frac{1}{2k}\Big\} +$$

$$P\Big\{\omega : |X_n(\omega) - Y(\omega)| \geq \frac{1}{2k}\Big\}, n \in \mathbb{N}$$

te ako na prethodnu jednakost djelujemo s limesom po n, dobivamo:

$$P\Big\{\omega : |X(\omega) - Y(\omega)| \geq \frac{1}{k}\Big\} = 0,\ \ k \in \mathbb{N}.$$

Obzirom da mi imamo uniju takvih vjerojatnosti, iskoristit ćemo svojstvo σ- subaditivnost vjerojatnosti, odnosno:

$$A_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N} \implies P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

uz pomoć kojega zaključujemo da je

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\Big\{\omega : |X(\omega) - Y(\omega)| \geq \frac{1}{k}\Big\}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P\Big\{\omega : |X(\omega) - Y(\omega)| \geq \frac{1}{k}\Big\} = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0.$$

Iz prethodne nejednakosti i nenegativnosti vjerojatnosti slijedi $P(X \neq Y) = 0$. $\square$

Primjer 3. *Neka je Y neprekidna slučajna varijabla koja ima uniformnu distribuciju na intervalu $[0,1]$ tj. $X \sim \mathcal{U}[0,1]$. Tada je poznato da je slika slučajne varijable $R_Y = [0,1]$ i funkcija gustoće*

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & y \in [0,1] \\ 0, & y \notin [0,1]. \end{cases}$$

Definiran je niz slučajnih varijabli $(X_n, n \in \mathbb{N})$ na sljedeći način:

$$X_1 = 1_{\{Y\in[0,1]\}}$$

$$X_2 = 1_{\{Y\in[0,1/2]\}} \quad X_3 = 1_{\{Y\in[1/2,1]\}}$$

$$X_4 = 1_{\{Y\in[0,1/4]\}} \quad X_5 = 1_{\{Y\in[1/4,1/2]\}} \quad X_6 = 1_{\{Y\in[1/2,3/4]\}} \quad X_7 = 1_{\{Y\in[3/4,1]\}}$$

$$X_8 = 1_{\{Y\in[0,1/8]\}} \quad X_9 = 1_{\{Y\in[1/8,2/8]\}} \quad X_{10} = 1_{\{Y\in[2/8,3/8]\}} \quad \dots \qquad X_{15} = 1_{Y\in[7/8,1]}$$

$$X_{16} = 1_{\{Y\in[0,1/16]\}} \quad X_{17} = 1_{\{Y\in[1/16,2/16]\}} \quad X_{18} = 1_{\{Y\in[2/16,3/16]\}} \quad \dots$$

gdje je $1_{Y\in[a,b]}$ indikator funkcija. Treba pronaći, ako postoji, vjerojatnosnu granicu niza slučajnih varijabli $(X_n, n \in \mathbb{N})$.

Rješenje:

Opći član niza X_n, kao indikator funkcija može poprimiti samo dvije vrijednosti:

- *može biti 1 s vjerojatnošću*

  $$P(X_n = 1) = P\left(Y \in \left[\frac{j}{m}, \frac{j+1}{m}\right]\right) = \frac{1}{m},$$

  gdje je m cijeli broj koji zadovoljava nejednakost $\frac{n}{2} < m \leq n$, dok je j cijeli broj koji zadovoljava da je $n = m + j$

- *može biti 0 s vjerojatnošću*

  $$P(X_n = 0) = 1 - P(X_n = 1) = 1 - \frac{1}{m}.$$

Prema navedenim nejednakostima, m teži u beskonačno kada n pustimo u beskonačno pa imamo:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 0) = \lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right) = 1.$$

Stoga vjerojatnost da je $X_n = 0$ konvergira u 1 kada n teži u beskonačno. Prema tome, niz slučajnih varijabli $(X_n, n \in \mathbb{N})$ očigledno konvergira po vjerojatnosti u konstantnu slučajnu varijablu $X = 0$, odnosno za svaki $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) &= \lim_{n\to\infty} P(|X_n - 0| > \varepsilon) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(X_n > \varepsilon) \qquad \textit{(zato što je } X_n \textit{ pozitivna)} \\
&= \lim_{n\to\infty} P(X_n = 1) \qquad \textit{(zato što } X_n \textit{ poprima samo 0 ili 1)} \\
&= \lim_{m\to\infty} \tfrac{1}{m} = 0.
\end{aligned}$$

■

3.1 Slabi zakon velikih brojeva

Zakon velikih brojeva ima važnu ulogu u vjerojatnosti i statistici. On tvrdi da ako eksperiment provodimo neovisno veći broj puta, prosječni rezultat koji tada dobijemo trebao bi biti blizu očekivane vrijednosti. Postoje dvije glavne verzije zakona velikih brojeva a to su: Slabi zakon velikih brojeva (SZVB) i Jaki zakon velikih brojeva (JZVB). Razlika između njih se očituje u tipu konvergencije koji se koristi. Slabi zakon velikih brojeva koristi upravo konvergenciju po vjerojatnosti i on je iskazan sljedećim teoremom.

Teorem 3. *(Slabi zakon velikih brojeva) Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da je $\mathbb{E}(X_n) = \mu$ i $Var(X_n) = \sigma^2$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada*

$$\frac{X_1 + ... + X_n}{n} \xrightarrow{P} \mu.$$

Dokaz. Za $n \in \mathbb{N}$ uvedimo oznaku $S_n = X_1 + ... + X_n$. Onda vrijedi da je $\mathbb{E}(S_n) = n\mu$ te zbog nezavisnosti vrijedi i da je $Var(S_n) = n\sigma^2$. Ako sada primijenimo Čebiševljevu nejednakost, odnosno

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}, \ \forall \varepsilon > 0,$$

gdje je $Var(X) = \sigma^2$, dobivamo

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{Var(S_n/n)}{\varepsilon^2} = \frac{Var(S_n)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2},$$

pri čemu prethodni izraz teži u 0 kada n teži u ∞ čime smo pokazali tvrdnju. □

Napomena 3. *Tvrdnja prethodnog teorema vrijedi i uz sljedeću pretpostavku:*
Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli sa (konačnim) zajedničkim očekivanjem $\mathbb{E}(X_n) = \mu$. Tada $n\, S_n \xrightarrow{P} \mu$. Taj rezultat poznat je pod imenom ***Hinčinov slabi zakon velikih brojeva****.*

3.2 Konvergencija po vjerojatnosti niza slučajnih vektora

Konvergencija po vjerojatnosti može se generalizirati i za slučaj kada je riječ o nizu slučajnih vektora.
U tu svrhu promotrimo niz slučajnih vektora $(\mathbf{X}_n, n \in \mathbb{N})$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, gdje je svaki slučajni vektor dimenzije $K \times 1$. Uvjeti konvergencije u osnovici ostaju isti kao i za konvergenciju slučajnih varijabli, ali se u slučaju konvergencije po vjerojatnosti niza slučajnih vektora udaljenost mjeri Euklidskom normom, odnosno:

$$d(\mathbf{X}_n, \mathbf{X}) = ||\mathbf{X}_n - \mathbf{X}|| = \sqrt{[X_{n,1}(\omega) - X_{\cdot,1}(\omega)]^2 + \cdots + [X_{n,K}(\omega) - X_{\cdot,K}(\omega)]^2}.$$

Definicija 12. *Neka je* $(\mathbf{X}_n, n \in \mathbb{N})$ *niz slučajnih vektora na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. *Kažemo da niz* $(\mathbf{X}_n, n \in \mathbb{N})$ ***konvergira po vjerojatnosti*** *prema slučajnom vektoru* $\mathbf{X}$ *definiranom na istom vjerojatnosnom prostoru, ako i samo ako vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} P(||\mathbf{X}_n - \mathbf{X}|| > \varepsilon) = 0, \quad \textit{za proizvoljni} \quad \varepsilon > 0.$$

To označavamo s:

$$\mathbf{X}_n \xrightarrow{P} \mathbf{X} \quad \text{ili} \quad (P) \lim_{n\to\infty} \mathbf{X}_n = \mathbf{X}.$$

Konvergencija niza slučajnih vektora može se promatrati i na sljedeći način.
Neka je $(X_{n,i}, n \in \mathbb{N})$ niz i-te komponente vektora $\mathbf{X}_n$. Može se pokazati da niz slučajnih vektora $(\mathbf{X}_n, n \in \mathbb{N})$ konvergira po vjerojatnosti prema slučajnom vektoru $\mathbf{X}$ ako i samo ako svaki od K nizova slučajnih varijabli $(X_{n,i}, n \in \mathbb{N})$ konvergira po vjerojatnosti.

Propozicija 3. *Neka je* $(\mathbf{X}_n, n \in \mathbb{N})$ *niz slučajnih vektora definiranih na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. *Označimo s* $(X_{n,i}, n \in \mathbb{N})$ *niz slučajnih varijabli dobiven uzimanjem* i*-te komponente svakog slučajnog vektora* $\mathbf{X}_n$. *Niz* $(\mathbf{X}_n, n \in \mathbb{N})$ *konvergira po vjerojatnosti prema slučajnom vektoru* $\mathbf{X}$ *ako i samo ako niz* $(X_{n,i}, n \in \mathbb{N})$ *konvergira po vjerojatnosti prema slučajnoj varijabli* $X_{\cdot,i}$ *(*i*-ta komponenta od* $\mathbf{X}$*) za svaki* $i = 1, 2, \ldots, K$.

4 Konvergencija u srednjem reda p

Koncept na kojem se temelji konvergencija u srednjem vodi se intuicijom da su dvije slučajne varijable *blizu jedna drugoj* ako je kvadrat njihove razlike u prosjeku mali. Dakle, način na koji se ovdje definira udaljenost između niza $(X_n, n \in \mathbb{N})$ i slučajne varijable X je

$$E(|X_n - X|^p),$$

ili, drugim riječima p-ti apsolutni moment razlike X_n i X. Obzirom na vrijednost p koju fiksiramo, postoje dvije vrste konvergencije u srednjem koje se inače promatraju, a to su

- $p = 1$ - konvergencija u srednjem reda 1
- $p = 2$ - konvergencija u srednjem reda 2 koja se još naziva *kvadratna konvergencija u srednjem.*

Definicija 13. *Neka je* $1 < p \leq \infty$ *i neka su* $X_n, X \in L_p(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$. *Kažemo da niz* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ ***konvergira u srednjem reda*** p *prema* X *ako vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|^p) = 0.$$

To označavamo s

$$(m^p) \lim_n X_n = X \quad ili \quad X_n \xrightarrow{m^p} X \ (n \to \infty).$$

Napomena 4. *Za fiksni* p, $1 < p \leq \infty$, *sa* $L_p(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}) = L_p(\Omega)$ *označavamo skup svih slučajnih varijabli definiranih na* Ω *koje imaju konačni* p*-ti apsolutni moment* $E[\,|X^p|\,]$. *Za* $X \in L_p(\Omega)$ *onda vrijedi*

$$||X||_p = (E[\,|X|^p]\,)^{\frac{1}{p}}\,. \tag{1}$$

Zbog nejednakosti Minkowskog imamo da je $L_p(\Omega)$ *vektorski prostor, te je onda s (1) definirana norma na tom vektorskom prostoru, a kako je* $L_p(\Omega)$ *potpun normiran prostor onda je* $L_p(\Omega)$ *Banachov prostor. Prema prethodnom,* m^p*-konvergencija jest konvergencija po normi u Banachovom prostoru* $L_p(\Omega)$.

Primjer 4. *Neka je* $X_n \sim U(0, \frac{1}{n})$. *Pokažite da niz* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *konvergira u srednjem reda* p *prema 0, tj.* $X_n \xrightarrow{m^p} 0$ *za bilo koji* $p \geq 1$.
RJEŠENJE:
Funkcija gustoće niza $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *dana je s:*

$$f_{X_n}(x) = \begin{cases} n, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & inače \end{cases}$$

te imamo

$$E(|X_n - 0|^p) = \int_0^{\frac{1}{n}} x^p n\, dx = \frac{nx^{p+1}}{p+1}\Big|_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{(p+1)n^p}. \tag{2}$$

Ako sada na (2) djelujemo s limesom kada n *teži u* ∞ *imamo:*

$$E(|X_n - 0|^p) = \frac{1}{(p+1)n^p} \to 0$$

za bilo koji $p \geq 1$. ■

4.1 Konvergencija u srednjem reda 2

Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih varijabli definiranih na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ te neka je X slučajna varijabla definirana na istom vjerojatnosnom prostoru. Kažemo da niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ konvergira prema X u srednjem reda 2 ako niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ konvergira ka X suglasno metrici definiranoj na sljedeći način:

$$d(X_n, X) = E[(X_n - X)^2]. \tag{3}$$

Metrika (3) je dobro definirana ako postoji očekivana vrijednost na desnoj strani. Taj uvjet se osigurava zahtijevanjem da su $(X_n, n \in \mathbb{N})$ i X dva puta integrabilne, odnosno $(X_n, n \in \mathbb{N}), X \in L_2(\Omega)$. Intuitivno, za proizvoljnu fiksnu točku ω, kvadrat razlike $(X_n(\omega) - X(\omega))^2$ između dvije realizacije od X_n i X daje mjeru koliko su te dvije realizacije različite, dok srednja kvadratna razlika $E[(X_n - X)^2]$ daje mjeru koliko su u prosjeku različite te dvije realizacije (za različite izbore ω). Ako srednja kvadratna razlika postane sve manja i manja s povećanjem n, tada niz X_n konvergira u X.
Ovaj koncept sažet je u sljedeću definiciju.

Definicija 14. *Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih varijabli definiranih na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ koje su dva puta integrabilne, odnosno $(X_n, n \in \mathbb{N}) \in L_2(\Omega)$. Kažemo da niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ konvergira u srednjem reda 2 ako i samo ako postoji dva puta integrabilna slučajna varijabla X takva da niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ konvergira u X prema metrici $d(X_n, X) = E[(X_n - X)^2]$, tj. da vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} E[(X_n - X)^2] = 0.$$

To označavamo sa

$$(m^2) \lim_n X_n = X \quad \text{ili} \quad X_n \xrightarrow{m^2} X \ (n \to \infty).$$

Sljedeći primjer ilustrira konvergenciju u srednjem reda 2.

Primjer 5. *Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ kovarijantni stacionarni[2] niz slučajnih varijabli takvih da sve slučajne varijable u nizu imaju isto očekivanje μ, istu varijancu σ^2 i kovarijancu 0 jedna s drugom. Definiramo prosječnu vrijednost niza X_n kao: $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ i definiramo konstantnu slučajnu varijablu $X = \mu$. Udaljenost između prosječne vrijednosti niza X_n i X je onda:*

$$d(\overline{X_n}, X) = E[(\overline{X_n} - X)^2] = E[(\overline{X_n} - \mu)^2], \tag{4}$$

ali μ je i očekivana vrijednost od $\overline{X_n}$ što zaključujemo iz

$$E[\overline{X_n}] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu = \frac{1}{n} n\mu = \mu.$$

[2]Niz slučajnih varijabli je kovarijantno stacionaran ako svaki element niza ima isto očekivanje i ako kovarijanca između bilo koja dva elementa u nizu ovisi samo o relativnim pozicijama tih elemenata tj. o tom koliko su međusobno udaljeni, a ne o njihovim apsolutnim pozicijama tj. na kojem mjestu se nalaze u nizu.

Sada iz (4) slijedi:

$$d(\overline{X_n}, X) = E[(\overline{X_n} - \mu)^2] = E[(\overline{X_n} - E[\overline{X_n}])^2] = Var[\overline{X_n}] \tag{5}$$

po definiciji varijance, dok je s druge strane, varijanca od $\overline{X_n}$

$$Var[\overline{X_n}] = Var\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var[X_i] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}. \tag{6}$$

Sada iz (5) i (6) slijedi:

$$d(\overline{X_n}, X) = E[(\overline{X_n} - X)^2] = Var[\overline{X_n}] = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Nadalje, u limesu kada $n \to \infty$ *imamo:*

$$\lim_{n\to\infty} E[(\overline{X_n} - X)^2] = \lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^2}{n} = 0.$$

Dakle, prema definiciji konvergencije u srednjem reda 2 niz $\overline{X_n}$ *konvergira prema konstantnoj slučajnoj varijabli* $X = \mu$. ■

4.2 Veza između konvergencije u srednjem reda 2 i reda 1

Ako je $1 \leq s < p$ onda konvergencija u srednjem reda p povlači konvergenciju u srednjem reda s. Ta tvrdnja je iskazana sljedećim teoremom.

Teorem 4. *Neka je* $1 \leq s < p$. *Ako niz slučajnih varijabli* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *konvergira u srednjem reda* p *prema slučajnoj varijabli* X $[X_n \xrightarrow{m^p} X]$, *onda* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *konvergira u srednjem reda* s *prema slučajnoj varijabli* X $[X_n \xrightarrow{m^s} X]$.

Dokaz. Za dokaz ove tvrdnje koristimo Hölderovu nejednakost [1, Propozicija 10.11, str. 315] koja glasi:

$$E|XY| \leq (E|X|^k)^{\frac{1}{k}}(E|Y|^q)^{\frac{1}{q}}, \tag{7}$$

gdje je $k > 1$ i $q < \infty$ te vrijedi $\frac{1}{k} + \frac{1}{q} = 1$. U Hölderovoj nejednakosti izaberemo sljedeće:

$$X = |X_n - X|^s, \qquad Y = 1, \qquad k = \frac{p}{s} > 1.$$

Kada to uvrstimo u nejednakost (7) dobivamo:

$$E|X_n - X|^s \leq (E|X_n - X|^p)^{\frac{s}{p}}. \tag{8}$$

Sada po pretpostavci da $X_n \xrightarrow{m^p} X$, što po definiciji znači:

$$\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|^p) = 0, \tag{9}$$

iz (8) i (9) zaključujemo:

$$\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|^s) \leq \lim_{n\to\infty}(E|X_n - X|^p)^{\frac{s}{p}} = 0.$$

□

Korolar 1. *Ako* $X_n \xrightarrow{m^2} X$, *onda* $X_n \xrightarrow{m^1} X$.

Veza između konvergencije u srednjem reda 2 i konvergencije u srednjem reda 1 opisana prethodnim korolarom povlači još neke bitne rezultate kao što je tvrdnja sljedećeg teorema.

Teorem 5. *Ako* $X_n \xrightarrow{m^2} X$ *i* $Y_n \xrightarrow{m^2} Y$ *onda* $X_nY_n \xrightarrow{m^1} XY$.

Dokaz. Dokaz provodimo koristeći Cauchy-Schwarz-Bunyakowsky nejednakost [1, Propozicija 10.10, str. 314]:

$$(E[\,|XY|\,])^2 \leq E[X^2] \cdot E[Y^2] \tag{10}$$

i nejednakost Minkowskog [1, Propozicija 10.12, str. 316], koja u teoriji vjerojatnosti glasi:

$$(E[\,|X+Y|^p\,])^{\frac{1}{p}} \leq (E[\,|X|^p\,])^{\frac{1}{p}} + (E[\,|Y|^p\,])^{\frac{1}{p}} \quad \text{za} \quad 1 \leq p < \infty.$$

Dakle, imamo

$$\begin{aligned} E[\ |X_nY_n - XY|\ ] &= E[\ |(X_nY_n - X_nY) + (X_nY - XY)|\ ] \\ &\leq E[\ |X_nY_n - X_nY|\ ] + E[\ |X_nY - XY|\ ] \\ &= E[\ |X_n(Y_n - Y)|\ ] + E[\ |Y(X_n - X)|\ ] \\ &= |E[\ |X_n(Y_n - Y)|\ ] + E[\ |Y(X_n - X)|\ ]\,| \\ &\overset{(10)}{\leq} \sqrt{E[X_n^2]\, E[(Y_n - Y)^2] + E[Y^2]\, E[(X_n - X)^2]} \\ &\leq \sqrt{E[X_n^2]\, E[(Y_n - Y)^2]} + \sqrt{E[Y^2]\, E[(X_n - X)^2]}. \end{aligned}$$

Po pretpostavci znamo da $X_n \xrightarrow{m^2} X$ i da je $Y \in L^2$ pa onda drugi dio gornjeg izraza $\sqrt{E[Y^2]\, E[(X_n - X)^2]} \to 0$, kada $n \to \infty$.
Za prvi dio gornjeg izraza iskoristimo da $Y_n \xrightarrow{m^2} Y$ i iz pretpostavke da $X_n \xrightarrow{m^2} X$ slijedi da $E[X_n^2] \to E[X^2]$ a znamo, po definiciji konvergencije u srednjem reda 2 da je onda $X \in L^2$. Prema tome i $\sqrt{E[X_n^2]\, E[(Y_n - Y)^2]} \to 0$, za $n \to \infty$ iz čega slijedi tvrdnja teorema. □

4.3 Konvergencija u srednjem reda p niza slučajnih vektora

Neka je $(\mathbf{X}_n, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih vektora definiranih na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, gdje svaki vektor $\mathbf{X}_n$ ima dimenziju $K \times 1$. Kažemo da niz $(\mathbf{X}_n, n \in \mathbb{N})$ konvergira u srednjem reda p prema slučajnom vektoru $\mathbf{X}$ definiranom na istom vjerojatnosnom prostoru ako niz $(\mathbf{X}_n, n \in \mathbb{N})$ konvergira prema $\mathbf{X}$ u metrici definiranoj na sljedeći način:

$$\begin{aligned} d(\mathbf{X}_n, \mathbf{X}) &= E(\,||\mathbf{X}_n - \mathbf{X}||^p\,) \\ &= E(|X_{n,1} - X_{\cdot,1}|^p + \cdots + |X_{n,K} + X_{\cdot,K}|^p), \end{aligned}$$

gdje je $||\mathbf{X}_n - \mathbf{X}||$ p – norma razlike između $\mathbf{X}_n$ i $\mathbf{X}$. U obzir se mora uzeti i uvjet da je metrika $d(\mathbf{X}_n, \mathbf{X})$ dobro definirana samo ako postoji očekivanje s desne strane. Dovoljan uvjet da očekivanje postoji je da su sve komponente od $\mathbf{X}_n$ i $\mathbf{X}$ p-integrabilne slučajne varijable. Definicija konvergencije u srednjem za niz slučajnih vektora zasniva se na definiciji za konvergenciju u srednjem za niz slučajnih varijabli, samo se koristi odgovarajuća norma, prethodno definirana.

Definicija 15. *Neka je* $(\mathbf{X}_n, n \in \mathbb{N})$ *niz slučajnih vektora definiranih na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ *čije su komponente* p*-integrabilne slučajne varijable. Kažemo da niz* $(\mathbf{X}_n, n \in \mathbb{N})$ *konvergira u srednjem reda* p *ako i samo ako postoji slučajan vektor* $\mathbf{X}$ *s* p*-integrabilnim komponentama takav da* $(\mathbf{X}_n, n \in \mathbb{N})$ *konvergira prema* $\mathbf{X}$ *u metrici* $d(\mathbf{X}_n, \mathbf{X}) = E(\, ||\mathbf{X}_n - \mathbf{X}||^p\,)$ *takav da vrijedi*

$$\lim_{n \to \infty} E(\, ||\mathbf{X}_n - \mathbf{X}||^p\,) = 0.$$

To označavamo sa $\mathbf{X}_n \xrightarrow{L^p} \mathbf{X}$.
U zapisu konvergencije u obliku $\lim_{n \to \infty} E(\, ||\mathbf{X}_n - \mathbf{X}||^p\,) = 0$ uočavamo kriterij konvergencije koji se koristi, dok se u drugom zapisu $\mathbf{X}_n \xrightarrow{L^p} \mathbf{X}$ ističe da je to konvergencija u L^p prostoru, kao i uvjet da $(\mathbf{X}_n, n \in \mathbb{N})$ i $\mathbf{X}$ moraju imati p-integrabilne komponente.

Napomena 5. *Dovoljan uvjet konvergencije u srednjem reda* p *niza slučajnih vektora je da sve komponente slučajnih vektora konvergiraju u srednjem reda* p*, odnosno da svih* K *nizova slučajnih varijabli konvergira u srednjem reda* p*.*

Propozicija 4. *Neka je* $(\mathbf{X}_n, n \in \mathbb{N})$ *niz slučajnih vektora definiranih na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ *čije su komponente* p*-integrabilne slučajne varijable. Označimo sa* $(X_{n,i}, n \in \mathbb{N}, i = 1, \ldots, K)$ *niz slučajnih varijabli dobivenih uzimanjem i-te komponente svakog slučajnog vektora* $\mathbf{X}_n$*. Niz* $(\mathbf{X}_n, n \in \mathbb{N})$ *konvergira u srednjem reda* p *prema slučajnom vektoru* $\mathbf{X}$ *ako i samo ako niz slučajnih varijabli* $(X_{n,i}, n \in \mathbb{N},\ i = 1, \ldots, K)$ *konvergira u srednjem reda* p *prema slučajnoj varijabli* $X_{\cdot,i}$ *(i-ta komponenta od* $\mathbf{X}$*) za svaki* $i = 1, \ldots, K$*.*

5 Konvergencija gotovo sigurno

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ vjerojatnosni prostor. Kažemo da izjava o slučajnim elementima vrijedi *gotovo sigurno* ako postoji događaj $N \in \mathcal{F}$ s vjerojatnošću $P(N) = 0$ pri čemu izjava vrijedi ako je $\omega \in N^C$. Sinonimi za *gotovo sigurno* su: *gotovo svuda*, *gotovo sve*, *skoro sigurno*, *skoro svuda*.

Promotrimo niz slučajnih varijabli $X_1, X_2, X_3, \ldots$ koji je definiran na uzorku S. Zbog jednostavnosti, pretpostavimo da je S konačan skup pa ga možemo zapisati kao $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$. Svaka slučajna varijabla iz niza $(X_n, n \in \mathbb{N})$ je funkcija sa skupa S na skup realnih brojeva. To možemo pisati kao:

$$X_n(s_i) = x_{ni}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Kada provedemo slučajni eksperiment, jedan od s_i će biti ishod eksperimenta i vrijednosti slučajnih varijabli X_n će biti poznate. Ako je s_j ishod eksperimenta, onda dobivamo sljedeći niz:

$$x_{1j}, x_{2,j}, x_{3,j}, \ldots.$$

Kako je ovo niz realnih brojeva možemo govoriti o konvergenciji. Konvergencija gotovo sigurno definirana je na temelju konvergencije ovakvih nizova. Prije nego što definiramo konvergenciju gotovo sigurno promotrimo sljedeći primjer.

Primjer 6. *Promatramo sljedeći slučajni eksperiment:*
Jednom bacamo pravilan novčić. Prema tome, ovdje skup svih mogućih ishoda ima samo dva elementa, odnosno $S = \{P, G\}$. *Na ovom uzorku definiramo niz slučajnih varijabli* $X_1, X_2, X_3, \ldots$ *na sljedeći način:*

$$X_n(s) = \begin{cases} \frac{n}{n+1}, & s = P \\ \\ (-1)^n, & s = G. \end{cases}$$

a) Za svaki od mogućih ishoda na skupu S *odredite konvergira li niz realnih brojeva.*

b) Odredite $P\{s_i \in S : \lim_{n\to\infty} X_n(x_i) = 1\}$.

Rješenje:

a) Promotrimo prvo niz za $s = P$.
Tada imamo da je $X_n(P) = \frac{n}{n+1}$ *pa niz izgleda ovako:* $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$
Za ovaj niz znamo da konvergira u 1 *kada* $n \to \infty$.
Kada je $s = G$ *niz definiramo kao* $X_n(G) = (-1)^n$ *pa on izgleda ovako:*
$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$
Ovaj niz oscilira između -1 *i* 1 *pa on ne konvergira.*

b) Prema a) dijelu primjera, događaj $\{s_i \in S : \lim_{n\to\infty} X_n(x_i) = 1\}$ *je istinit ako i samo ako je* $s = P$, *pa je onda*

$$P\{s_i \in S : \lim_{n\to\infty} X_n(x_i) = 1\} = P(P) = \frac{1}{2}. \qquad \blacksquare$$

U prethodnom primjeru vidjeli smo da niz $(X_n(s), n \in \mathbb{N})$ konvergira kada je $s = P$ i da ne konvergira kada je $s = G$. Općenito, ako je vjerojatnost da niz $(X_n(s), n \in \mathbb{N})$ konvergira ka $X(s)$ jednaka 1, onda kažemo da niz X_n konvergira gotovo sigurno u X što označavamo sa

$$(g.s.) \lim_n X_n = X \quad \text{ili} \quad X_n \xrightarrow{g.s.} X \, (n \to \infty).$$

Definicija 16. *Kažemo da niz slučajnih varijabli $(X_n, n \in \mathbb{N})$ konvergira* ***gotovo sigurno (g.s.)*** *prema slučajnoj varijabli X, ako je:*

$$P\left\{\omega \in \Omega : X(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)\right\} = 1.$$

Napomena 6. *Limes iz prethodne definicije je (g.s.) jedinstven, odnosno ako $X_n \to X$ i $X_n \to Y$ tada je $X = Y$ (g.s.).*

Ovaj tip konvergencije naziva se još i **jaka konvergencija** zato što se temelji na najjačoj tvrdnji u teoriji vjerojatnosti, a to je da neki događaj ima vjerojatnost 1. Obzirom da u ovom tipu konvergencije događaji za koje X_n konvergira u X imaju vjerojatnost 1 onda intuitivno, događaji u kojima X_n ne konvergira u X imaju vjerojatnost 0.
Koncept gotovo sigurne konvergencije može se promatrati i kao varijacija točkovne konvergencije. Niz slučajnih varijabli $(X_n, n \in \mathbb{N})$ je konvergentan u smislu točkovne konvergencije ako i samo ako je niz realnih brojeva $(X_n(\omega), n \in \mathbb{N})$ konvergentan za svaki $\omega \in \Omega$. Postizanje konvergencije za sve $\omega \in \Omega$ je vrlo strog zahtjev, stoga se on obično relaksira, pri čemu se onda zahtijeva konvergencija niza $(X_n(\omega), n \in \mathbb{N})$ za dovoljno velik podskup od Ω, a ne nužno za svaki $\omega \in \Omega$. Dakle, zahtijeva se da niz realnih brojeva $(X_n(\omega), n \in \mathbb{N})$ bude konvergentan gotovo sigurno. Ako sa F označimo skup svih točaka iz Ω za koji niz $(X_n(\omega), n \in \mathbb{N})$ konvergira, onda komplement tog skupa F^C mora biti dio skupa događaja nulte vjerojatnosti, odnosno

$$F = \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \quad \text{je konvergentan niz}\}$$

$$E \quad \text{je događaj nulte vjerojatnosti}$$

$$F^C \subseteq E.$$

Drugim riječima, konvergencija gotovo sigurno zahtijeva da niz $(X_n(\omega), n \in \mathbb{N})$ konvergira za sve točke $\omega \in \Omega$ osim možda za *mali* skup točaka F^C (koji mora biti dio događaja nulte vjerojatnosti). Opisani pristup sažet je u Cauchyjev kriterij konvergencije gotovo sigurno.

Definicija 17. *Niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ je* ***Cauchyjev gotovo sigurno*** *ako je niz $(X_n(\omega), n \in \mathbb{N})$ Cauchyjev za gotovo sve $\omega \in \Omega$ odnosno ako je*

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \mathbb{E}(|X_n - X_m|^p) = 0.$$

Prethodnu definiciju možemo zapisati i drugačije:

Definicija 18. *Neka je* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *niz slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. *Kažemo da je niz* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ ***Cauchyjev*** *ili* ***fundamentalan gotovo sigurno*** *ako postoji* $E \in \mathcal{F}$, $P(E) = 0$ *takav da za svaki* $\omega \in E^C$ *vrijedi*

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} (|X_n(\omega) - X_m(\omega)|) = 0.$$

Propozicija 5. *Niz slučajnih varijabli* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *konvergira gotovo sigurno prema slučajnoj varijabli* X *ako i samo ako je niz* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *Cauchyjev gotovo sigurno.*

Dokaz. $\Rightarrow$ Pretpostavimo da $X_n \xrightarrow{g.s.} X$. Tada po definiciji postoji događaj E iz skupa svih događaja tako da je $P(E) = 0$ te znamo da onda niz realnih brojeva $X_n(\omega) \to X(\omega)$ za $\omega \in E^C$. Prema tome, $(X_n(\omega), n \in \mathbb{N})$ je Cauchyjev niz realnih brojeva za $\omega \in E^C$ iz čega slijedi da je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ Cauchyjev (g.s.).
$\Leftarrow$ Pretpostavimo da je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ Cauchyjev (g.s.). Tada postoji događaj E iz skupa svih događaja tako da je $P(E) = 0$ te je niz realnih brojeva $(X_n(\omega), n \in \mathbb{N})$ Cauchyjev za $\omega \in E^C$. Onda postoji $\lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega) \in \mathbb{R}$, $\omega \in E^C$. Stavimo da je

$$X(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega), & \omega \in E^C \\ 0, & \omega \in E. \end{cases}$$

Kako niz slučajnih varijabli konvergira u X onda je i X slučajna varijabla [1, Propozicija 8.9, str. 244] i vrijedi $X_n \xrightarrow{g.s.} X$. $\square$

Ponekad je teško dokazati gotovo sigurnu konvergenciju izravno. Stoga je poželjno znati neke dovoljne uvjete za gotovo sigurnu konvergenciju. U nastavku ćemo navesti neke rezultate koji mogu biti korisni prilikom dokazivanja gotovo sigurne konvergencije.

Teorem 6. *Neka je* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *niz slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. *Ako vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) < \infty, \qquad \forall \varepsilon > 0$$

onda $X_n \xrightarrow{g.s.} X$, *kada* $n \to \infty$.

Dokaz. Po pretpostavci teorema, ako vrijedi da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) < \infty \implies \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$

tj. po definiciji konvergencije po vjerojatnosti to znači da $X_n \xrightarrow{P} X$ $(n \to \infty)$.
Neka je $\varepsilon > 0$. Sada promatramo $P(|X_n - X| \geq \varepsilon)$ za neki $m \in \mathbb{N}$ takav da je $m \geq n$, odnosno vrijedi

$$P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| \geq \varepsilon\}\right)$$
$$\overset{\sigma\text{ -subaditivnost vj.}}{\leq} \sum_{n=m}^{\infty} P(|X_m - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\Longrightarrow \; P(|X_m - X| \geq \varepsilon, \text{ za neki } m \geq n) \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{11}$$

Ako (11) zapišemo ekvivalentno za konvergenciju gotovo sigurno, imamo:

$$\begin{aligned} P(|X_m - X| \geq \varepsilon, \ \forall m \geq n) \ &\leq \ P(|X_m - X| \geq \varepsilon, \text{ za neki } m \geq n) \\ &\leq \sum_{m=n}^{\infty} P(|X_m - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} P(|X_m - X| \geq \varepsilon, \ \forall m \geq n) = 0 \qquad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} P(|X_m - X| < \varepsilon, \ \forall m \geq n) = 1 \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Sada treba pokazati ekvivalenciju:

$$X_n \xrightarrow{g.s.} X \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P(|X_m - X| > \varepsilon, \ \forall m \geq n) = 1, \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Ako pretpostavimo da $X_n \xrightarrow{g.s.} X$, tada za svaki $\varepsilon > 0$ na skupu vjerojatnosti jedan vrijedi:

$$|X_m(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon, \qquad \forall n \geq n_0.$$

Promotrimo sada sljedeće:

$$\begin{aligned} \{X_n \to X\} &= \left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\} \\ &= \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{\omega \in \Omega : |X_m(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon, \quad \forall m \geq n\} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \; P(X_n \to X) = P\left(\bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| < \varepsilon, \quad \forall m \geq n\}\right)$$

(neprekidnost vj. u odnosu na padajuću familiju događaja)

$$= \lim_{\varepsilon>0} P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| < \varepsilon, \quad \forall m \geq n\}\right)$$

(neprekidnost vj. u odnosu na rastuću familiju događaja)

$$= \lim_{\varepsilon>0} \lim_{n\to\infty} P\left\{|X_m - X| < \varepsilon, \quad \forall m \geq n\right\}.$$

1° Pretpostavimo da je desna strana jednaka 1, odnosno:

$$\lim_{\varepsilon>0} \lim_{n\to\infty} P\left\{|X_m - X| < \varepsilon, \quad \forall m \geq n\right\} = 1 \text{ a tada je i } P(X_n \to X) = 1,$$

odnosno $\quad X_n \xrightarrow{g.s.} X \ (n \to \infty)$.

2° Pretpostavimo da je lijeva strana jednaka 1, odnosno:

$$\begin{aligned} 1 = P(X_n \to X) &\leq P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| < \varepsilon, \quad \forall m \geq n\}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(|X_m - X| < \varepsilon, \quad \forall m \geq n), \end{aligned}$$

iz čega slijedi $\quad \lim_{n\to\infty} P(|X_m - X| < \varepsilon, \quad \forall m \geq n) = 1.$

□

Primjer 7. *Neka je niz slučajnih varijabli* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *definiran na sljedeći način:*

$$X_n = \begin{cases} -\frac{1}{n}, & s \text{ vjerojatnošću } \frac{1}{2} \\ \frac{1}{n}, & s \text{ vjerojatnošću } \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Treba pokazati da $X_n \xrightarrow{g.s.} 0$.

Rješenje:

Po Teoremu 6. dovoljno je pokazati da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon) < \infty$.

Ako promotrimo apsolutnu vrijednost općeg člana niza $(X_n, n \in \mathbb{N})$*, dobivamo*

$$|X_n| = \frac{1}{n} \implies |X_n| > \varepsilon \iff n < \frac{1}{\varepsilon}$$

te prema tome slijedi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon) \leq \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor} P(|X_n| > \varepsilon) = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor < \infty.$$ ■

Teorem 6 pruža samo dovoljan uvjet za konvergenciju gotovo sigurno. U slučaju kada imamo da je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon) = \infty$ ne možemo zaključiti konvergira li niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ prema X gotovo sigurno ili ne. Stoga je u sljedećem teoremu naveden nužan i dovoljan uvjet konvergencije gotovo sigurno.

Teorem 7. *Neka je* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *niz slučajnih varijabli te za svaki* $\varepsilon > 0$ *definirajmo skup događaja*

$$A_m = \{|X_n - X| < \varepsilon, \quad \forall n \geq m\}.$$

Tada $X_n \xrightarrow{g.s.} X$ *ako i samo ako za bilo koji* $\varepsilon > 0$ *vrijedi da je* $\lim\limits_{m \to \infty} P(A_m) = 1$.

Dokaz. Vidi [4, Almost sure convergence]. □

5.1 Jaki zakon velikih brojeva

Kako je već spomenuto, konvergencija gotovo sigurno naziva se i jaka konvergencija zato što predstavlja najjači tip konvergencije niza slučajnih varijabli. Kao jedan od najvažnijih primjera u kom se koristi ovaj tip konvergencije navodi se **Jaki zakon velikih brojeva** koji je i dobio naziv jaki baš zbog ovog tipa konvergencije.

Teorem 8. *(Jaki zakon velikih brojeva) Neka je* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli takvih da je* $\mathbb{E}[X_n] = \mu$*. Tada*

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{g.s.} \mu.$$

Dokaz. Dokaz provodimo samo za slučaj kad je $E[X_1^4] = K < \infty$. Neka je
$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ za $n \in \mathbb{N}$.
Pretpostavimo prvo da je $\mu = 0$ te računamo

$$E[S_n^4] = E[(X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)].$$

Razvijanjem desne strane dobit ćemo sljedeće članove: $X_i^4, X_i^3 X_j, X_i^2 X_j^2, X_i^2 X_j X_k$ i $X_i X_j X_k X_l$.
Zbog nezavisnosti i pretpostavke da je $\mu = 0$ imamo:

$$\mathbb{E}[X_i^3 X_j] = \mathbb{E}[X_i^3]\,\mathbb{E}[X_j] = 0,$$

$$\mathbb{E}[X_i^2 X_j X_k] = \mathbb{E}[X_i^2]\,\mathbb{E}[X_j]\,\mathbb{E}[X_k] = 0,$$

$$\mathbb{E}[X_i X_j X_k X_l] = \mathbb{E}[X_i]\,\mathbb{E}[X_j]\,\mathbb{E}[X_k]\,\mathbb{E}[X_l] = 0.$$

Nadalje, za dani i, imat ćemo $\binom{4}{4} = 1$ članova oblika X_i^4 te za dani par $X_i^2 X_j^2$, kada je $i \neq j$, imat ćemo $\binom{4}{2} = 6$ članova oblika $X_i^2 X_j^2$. Dakle, imamo:

$$\mathbb{E}[S_n^4] = n\mathbb{E}[X_i^4] + 6\binom{n}{2}\mathbb{E}[X_i^2 X_j^2] = nK + 6\binom{n}{2}\mathbb{E}[X_i^2]\,\mathbb{E}[X_j^2]$$

$$= nK + 6\binom{n}{2}\mathbb{E}[X_1^2]^2.$$

Iz $\quad 0 \leq Var(X_1^2) = \mathbb{E}[X_1^4] - \mathbb{E}[X_1^2]^2$ zaključujemo da je $\mathbb{E}[X_1^2]^2 \leq K$.
Prema tome, slijedi:

$$\mathbb{E}[S_n^4] \leq nK + 6 \cdot \frac{n(n-1)}{2} K = nK + 3n(n-1)K,$$

odnosno

$$\mathbb{E}\left[\frac{S_n^4}{n^4}\right] \leq \frac{K}{n^3} + \frac{3K}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ako sada promatramo sumu takvih, zaključujemo:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n^4}{n^4}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\frac{S_n^4}{n^4}\right] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{K}{n^3} + \frac{3K}{n^2}\right) < \infty.$$

Specijalno, prema [2, Primjer 4.37, str. 82] imamo:

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n^4}{n^4} < \infty\right) = 1,$$

iz čega možemo zaključiti da

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^4}{n^4} = 0\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0\right) = 1.$$

Uzmimo sada nešto općenitiji slučaj, odnosno da je $\mu \in \mathbb{R}$. Definiramo $Y_n := X_n - \mu$ za $n \in \mathbb{N}$. Onda je $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli takvih da je $\mathbb{E}[Y_n] = 0$.
Ako na niz $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ primjenimo gornji dokaz dobivamo sljedeće:

$$\begin{aligned} P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \mu\right) &= P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{(X_1 - \mu) + \cdots + (X_n - \mu)}{n} = 0\right) \\ &= P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n} = 0\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

5.2 Konvergencija gotovo sigurno niza slučajnih vektora

Neka je $(\mathbf{X}_n, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih vektora definiranih na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, gdje je svaki vektor dimenzije $K \times 1$. Slično kao kod slučajnih varijabli, koncept gotovo sigurne konvergencije niza slučajnih vektora izveden je iz konvergencije po točkama relaksiranjem uvjeta da niz realnih vektora $(\mathbf{X}_n(\omega), n \in \mathbb{N})$ konvergira za svaki $\omega \in \Omega$. Odnosno, niz $(\mathbf{X}_n(\omega), n \in \mathbb{N})$ konvergira prema realnom vektoru $\mathbf{X}(\omega)$ ako i samo ako je

$$\lim_{n\to\infty} ||\mathbf{X}_n(\omega) - \mathbf{X}(\omega)|| = 0,$$

dok je kod konvergencije gotovo sigurno niza slučajnih vektora dovoljno da niz $(\mathbf{X}_n(\omega), n \in \mathbb{N})$ konvergira za gotovo sve $\omega \in \Omega$.

Definicija 19. *Neka je $(\mathbf{X}_n, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih vektora definiranih na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Kažemo da niz $(\mathbf{X}_n, n \in \mathbb{N})$ konvergira gotovo sigurno prema slučajnom vektoru $\mathbf{X}$ definiranom na istom vjerojatnosnom prostoru ako i samo ako niz realnih vektora $(\mathbf{X}_n(\omega), n \in \mathbb{N})$ konvergira prema realnom vektoru $\mathbf{X}(\omega)$ gotovo sigurno.*

To označavamo sa $\mathbf{X}_n \xrightarrow{g.s} \mathbf{X}$.

Napomena 7. *Uvjet iz definicije 19 možemo zapisati i kao:*

$$\mathbf{X}_n \xrightarrow{g.s} \mathbf{X} \iff \exists \text{ događaj nulte vjerojatnosti t.d. je } \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \not\to X(\omega)\} \subset E,$$

gdje je E skup svih događaja s vjerojatnošću nula na vjerojatnosnom prostoru.

Može se pokazati da je gotovo sigurna konvergencija svih komponenti slučajnih vektora, odnosno svih K nizova slučajnih varijabli, nužan i dovoljan uvjet gotovo sigurne konvergencije niza slučajnih vektora.

Propozicija 6. *Neka je $(\mathbf{X}_n, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih vektora definiranih na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Označimo sa $(X_{n,i}, n \in \mathbb{N}, i = 1, \ldots, K)$ niz slučajnih varijabli dobivenih uzimanjem i-te komponente svakog slučajnog vektora $\mathbf{X}_n$. Niz $(\mathbf{X}_n, n \in \mathbb{N})$ konvergira gotovo sigurno prema slučajnom vektoru $\mathbf{X}$ ako i samo ako niz slučajnih varijabli $(X_{n,i}, n \in \mathbb{N})$ konvergira gotovo sigurno prema slučajnoj varijabli $X_{\cdot,i}$ (i-ta komponenta od $\mathbf{X}$) za svaki $i = 1, \ldots, K$.*

6 Konvergencija neprekidne transformirane slučajne varijable

U teoriji vjerojatnosti Teorem o neprekidnom preslikavanju ističe da neprekidne funkcije čuvaju granice čak i ako su njihovi argumenti nizovi slučajnih varijabli. Prema Heineovoj definiciji, neprekidna funkcija (označimo je s g) je ona funkcija koja preslikava konvergentni niz u konvergentni niz, odnosno $X_n \to X \implies g(X_n) \to g(X)$. Teorem o neprekidnom preslikavanju tvrdi da će to također vrijediti i u slučaju kada niz realnih brojeva zamijenimo s nizom slučajnih varijabli i standardnu konvergenciju s tipovima konvergencije nizova slučajnih varijabli.

Teorem 9. ***(Teorem o neprekidnom preslikavanju)*** *Neka su niz slučajnih varijabli $(X_n, n \in \mathbb{N})$ i slučajna varijabla X definirani na metričkom prostoru S. Pretpostavimo da funkcija $g : S \to S'$ (gdje je S' drugi metrički prostor) ima skup točaka prekida D_g takav da je $P(X \in D_g) = 0$. Onda vrijedi:*

$$X_n \xrightarrow{d} X \implies g(X_n) \xrightarrow{d} g(X),$$

$$X_n \xrightarrow{P} X \implies g(X_n) \xrightarrow{P} g(X),$$

$$X_n \xrightarrow{g.s.} X \implies g(X_n) \xrightarrow{g.s.} g(X).$$

Dokaz. Prostori S i S' imaju definirane metrike koje ćemo zbog jednostavnosti označavati s

$$|x - y|, \quad \text{za sve } x, y \in S \quad \text{odnosno} \quad x, y \in S',$$

iako metrike mogu biti proizvoljne, ne nužno Euklidske.

- **Konvergencija po distribuciji**
  Prema Portmanteauovom teoremu [9] konvergencija po distribuciji ekvivalentna je s $\mathbb{E}f(X_n) \to \mathbb{E}f(X)$, za svaku omeđenu neprekidnu funkciju f.
  Dakle, dovoljno je pokazati da $\mathbb{E}f(g(X_n)) \to \mathbb{E}f(g(X))$ za svaku omeđenu neprekidnu funkciju f. Uočavamo da je riječ o kompoziciji dvije neprekidne funkcije
  $F = f \circ g$, pa je i F neprekidna, a obzirom da je f, kao vanjska funkcija kompozicije omeđena, onda je i F omeđena funkcija. Sada imamo $\mathbb{E}F(X_n) \to \mathbb{E}F(X)$ što smo i trebali pokazati.

- **Konvergencija po vjerojatnosti**
  Fiksiramo proizvoljno mali $\varepsilon > 0$. Za proizvoljni $\delta > 0$ promatrajmo skup B_δ definiran kao
  $$B_\delta = \{x \in S | x \notin D_g : \exists y \in S : |x - y| < \delta, |g(x) - g(y)| > \varepsilon\}.$$
  Ovo je skup točaka u kojima je funkcija g neprekidna i za koji u δ okolini točke x postoji točka koja se preslika izvan ε okoline od $g(x)$, pa se po definiciji neprekidnosti ovaj skup smanjuje kako $\delta \to 0$. Prema tome vrijedi: $\lim\limits_{\delta \to 0} B_\delta = \emptyset$.

Sada pretpostavimo da je $|g(X_n) - g(X)| > \varepsilon$. To implicira da je barem jedna od sljedećih tvdnji istinita:

$$|X_n - X| \geq \delta \quad \text{ili} \quad X \in D_g \quad \text{ili} \quad X \in B_\delta.$$

Ako to zapišemo u notaciji vjerojatnosti, imamo:

$$P(|g(X_n) - g(X)| > \varepsilon) \leq P(|X_n - X| \geq \delta) + P(X \in B_\delta) + P(x \in D_g).$$

Prvi element zbroja desne strane konvergira u 0 kada $n \to \infty$ za proizvoljni fiksirani $\delta > 0$ (po definiciji konvergencije po vjerojatnosti). Drugi element ide u 0 kada $\delta \to 0$ (budući da se B_δ smanjuje na prazan skup) te je zadnji element po pretpostavci teorema jednak 0. Dakle, zaključujemo

$$\lim_{n\to\infty} P(|g(X_n) - g(X)| > \varepsilon) = 0,$$

što po definiciji konvergencije po vjerojatnosti znači da $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$.

- **Konvergencija gotovo sigurno**
  Po definiciji neprekidnosti funkcije g vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega) \implies \lim_{n\to\infty} g(X_n(\omega)) = g(X(\omega)),$$

u svakoj točki $X(\omega)$ gdje je funkcija g neprekidna. Prema tome:

$$\begin{aligned} P\left(\lim_{n\to\infty} g(X_n) = g(X)\right) &\geq P\left(\lim_{n\to\infty} g(X_n) = g(X), X \notin D_g\right) \\ &\geq P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X, X \notin D_g\right) = 1, \end{aligned}$$

zato što je presjek dva gotovo sigurna događaja gotovo siguran, pa po definiciji konvergencije (g.s.) zaključujemo da $g(X_n) \xrightarrow{g.s.} g(X)$.

□

Napomena 8. *Prethodni teorem se još naziva i* ***Mann-Wald teorem*** *jer su ga prvi dokazali Henry Mann i Abraham Wald [10].*

7 Veza između različitih vrsta konvergencije nizova slučajnih varijabli

U ovom poglavlju diskutirat ćemo veze između različitih vrsta konvergencije.

7.1 Veza konvergencije po distribuciji i konvergencije po vjerojatnosti

Teorem 10. *Konvergencija po vjerojatnosti povlači konvergenciju po distribuciji.*

Dokaz. Pretpostavimo da niz slučajnih varijabli $(X_n, n \in \mathbb{N})$, definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, konvergira po vjerojatnosti prema slučajnoj varijabli X, odnosno $X_n \xrightarrow{P} X$. Označimo s $(F_n, n \in \mathbb{N})$ funkcije distribucije od $(X_n, n \in \mathbb{N})$ i s F funkciju distribucije od X te neka je $x \in C_F$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\begin{aligned} F_n(x) = P(X_n \leq x) &\leq P(X_n \leq x, X \leq x + \varepsilon) + P(X_n \leq x, X > x + \varepsilon) \\ &\leq P(X \leq x + \varepsilon) + P(X - X_n > \varepsilon) \\ &\leq P(X \leq x + \varepsilon) + P(|X - X_n| > \varepsilon). \end{aligned}$$

Dakle, imamo

$$\limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leq F(x + \varepsilon),$$

dok je s druge strane

$$\begin{aligned} F(x - \varepsilon) &= P(X \leq x - \varepsilon) \\ &= P(X \leq x - \varepsilon, X_n \leq x) + P(X \leq x - \varepsilon, X_n > x) \\ &\leq P(X_n \leq x) + P(X_n - X > \varepsilon) \\ &\leq P(X_n \leq x) + P(|X_n - X| > \varepsilon). \end{aligned}$$

Sada je

$$F(x - \varepsilon) \leq \liminf_{n\to\infty} F_n(x).$$

Kada sumiramo dobiveno, slijedi:

$$F(x - \varepsilon) \leq \liminf_{n\to\infty} F_n(x) \leq \limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leq F(x + \varepsilon).$$

Kada pustimo da $\varepsilon \to 0$ i kada uzmemo u obzir da je F neprekidna funkcija, onda diretno slijedi da $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$, odnosno $X_n \xrightarrow{d} X$. □

Na osnovu Teorema 10 znamo da konvergencija po vjerojatnosti povlači konvergenciju po distribuciji, ali obrat tog teorema ne vrijedi. To ćemo ilustrirati sljedećim primjerom.

Primjer 8. *Neka je*

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

te neka je $X_n = X$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$*. Nadalje, ako označimo s* $Y = 1 - X$ *onda očito niz* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *konvergira po distribuciji ka* Y *tj.* $X_n \xrightarrow{d} Y$*.*
S druge strane, za $n \in \mathbb{N}$ *i* $0 < \varepsilon < 1$ *imamo:*

$$P(|X_n - Y| > \varepsilon) = P(|2X - 1| > \varepsilon) = 1 > 0.$$

Prema tome nemamo konvergenciju po vjerojatnosti. ■

Dakle, konvergencija po distribuciji i konvergencija po vjerojatnosti nisu ekvivaletne, ali postoji izuzetak koji je opisan sljedećim teoremom.

Teorem 11. *Neka niz slučajnih varijabli* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *definiranih na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ *konvergira po distribuciji prema* $c \in \mathbb{R}$*. Tada* $X_n \xrightarrow{P} c$*.*

Dokaz. Označimo naprije s $(F_n, n \in \mathbb{N})$ funkcije distribucije od $(X_n, n \in \mathbb{N})$ te s F graničnu funkciju distribucije od $X = c$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo:

$$\begin{aligned} P(|X_n - c| > \varepsilon) &= P(X_n > c + \varepsilon) + P(X_n < c - \varepsilon) \\ &\leq 1 - P(X_n \leq c + \varepsilon) + P\left(X_n \leq c - \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &= 1 - F_n(c + \varepsilon) + F_n\left(c - \frac{\varepsilon}{2}\right). \end{aligned}$$

Kako su točke $c + \varepsilon$ i $c - \frac{\varepsilon}{2}$ točke u kojima je funkcija F neprekidna i vrijedi da je
$\lim_{n\to\infty} F_n(c+\varepsilon) = F(c+\varepsilon) = 1$ te $\lim_{n\to\infty} F_n(c - \frac{\varepsilon}{2}) = F(c - \frac{\varepsilon}{2}) = 0$, stoga

$$\implies \lim_{n\to\infty} P(|X_n - c| > \varepsilon) = 0 \implies X_n \xrightarrow{P} c.$$

□

Dakle, u specijalnom slučaju, kada niz slučajnih varijabli konvergira po distribuciji ka konstanti, onda su konvergencija po vjerojatnosti i konvergencija po distribuciji ekvivalentne. To u općem slučaju ne vrijedi te se konvergencija po vjerojatnosti smatra znatno jačim tipom konvergencije u odnosu na konvergenciju po distribuciji.
Navest ćemo još jedan važan teorem u teoriji vjerojatnosti koji tvrdi da neke algebarske operacije koje vrijede za nizove realnih brojeva, vrijede i za nizove slučajnih varijabli.

Teorem 12. ***(Teorem Slutskog)*** *Neka su* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *i* $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ *nizovi slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ *te neka* $X_n \xrightarrow{d} X$ *i* $Y_n \xrightarrow{d} c$*. Tada vrijedi:*

a) $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c, \quad n \to \infty$

b) $Y_n X_n \xrightarrow{d} cX, \quad n \to \infty$

c) $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{d} \frac{X}{c}, \quad c \neq 0, n \to \infty.$

Dokaz. Vidi [6, Teorem 5.10, str. 277]. □

7.2 Veza konvergencije po vjerojatnosti i konvergencije gotovo sigurno

Teorem 13. *Konvergencija gotovo sigurno povlači konvergenciju po vjerojatnosti.*

Dokaz. Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih varijabli definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Pretpostavimo nadalje da $X_n \xrightarrow{g.s.} X$.
Tada za fiksni $\varepsilon > 0$ i za $n \in \mathbb{N}$ definiramo skup $A_n(\varepsilon) := \{|X_n - X| > \varepsilon\}$. Uočavamo da očito vrijedi $A_n(\varepsilon) \in \mathcal{F}$ za $n \in \mathbb{N}$. Nadalje, za svaki $n \in \mathbb{N}$ stavimo da je

$$B_n(\varepsilon) := \bigcup_{k \geq n} A_k(\varepsilon) \quad \text{i} \quad B(\varepsilon) := \limsup_{n \to \infty} B_n(\varepsilon) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n(\varepsilon)$$

Prema pretpostavci da $X_n \xrightarrow{d} X$ zaključujemo da je $P(B(\varepsilon)) = 0$, za svaki $\varepsilon > 0$. Ako sada iskoristimo svojstvo neprekidnosti vjerojatnosti s obzirom na padajuće nizove događaja, slijedi da je $\lim\limits_{n \to \infty} P(B_n(\varepsilon)) = 0$ za svaki $\varepsilon > 0$. Zatim, kako je $A_n(\varepsilon) \subset B_n(\varepsilon)$, za svaki $n \in \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow \lim_{n \to \infty} P(A_n(\varepsilon)) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0 \Longrightarrow X_n \xrightarrow{P} X.$$

□

Obrat ove tvrdnje ne vrijedi, odnosno konvergencija po vjerojatnosti i konvergencija gotovo sigurno nisu ekvivalentne. To ćemo pokazati sljedećim kontraprimjerom.

Primjer 9. *Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih slučajnih varijabli definiranih na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Nadalje, pretpostavimo*

$$X_n \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N},$$

te fiksirajmo $\varepsilon > 0$, proizvoljan. Sada imamo:

$$P(|X_n| > \varepsilon) = P(X_n > \varepsilon, X_n = 1) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \varepsilon \leq 1 \\ 0, & \varepsilon > 1. \end{cases}$$

Iz prethodnog slijedi da $X_n \xrightarrow{P} 0$. Pokažimo sada da niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ ne konvergira gotovo sigurno u 0.
Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo skup $A_n := \{X_n \geq \frac{1}{2}\}$. Tada imamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Ako sada iskoristimo sljedeću tvrdnju:
Ako je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, gdje su A_n nezavisni događaji na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ onda vrijedi da je $P\left(\limsup\limits_{n \to \infty} A_n\right) = 1$ (za dokaz vidi [2, Lema 2.17, str. 51])
te imamo da je

$$P\left(\limsup_{n \to \infty} A_n\right) = 1.$$

Dakle, $X_n > \frac{1}{2}$ za beskonačno mnogo $n \in \mathbb{N}$ na događaju vjerojatnosti jedan. To pokazuje da niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ ne konvergira gotovo sigurno prema nuli.

■

Dakle, zaključujemo da je konvergencija gotovo sigurno dovoljan uvjet za konvergenciju po vjerojatnosti, dok konvergencija po vjerojatnosti nije nužan uvjet za konvergenciju gotovo sigurno. Također znamo da konvergencija po vjerojatnosti, iako slabija od konvergencije gotovo sigurno, povlači konvergenciju po distribuciji pa iz tog slijedi tvrdnja sljedećeg teorema.

Teorem 14. *Konvergencija gotovo sigurno povlači konvergenciju po distribuciji, tj. ako $X_n \xrightarrow{g.s.} X$ onda $X_n \xrightarrow{d} X$.*

Dokaz. Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih varijabli definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ i neka vrijedi da $X_n \xrightarrow{g.s.} X$, gdje je X slučajna varijabla definirana na istom vjerojatnosnom prostoru. Prema tome, ispunjeni su uvjeti Teorema 13 iz čega slijedi da $X_n \xrightarrow{P} X$. Sada smo u uvjetima Teorema 10 iz čega slijedi tvrdnja ovog teorema.

□

7.3 Veza konvergencije u srednjem reda 2 i konvergencije po vjerojatnosti

U ovom poglavlju bit će dokazana veza između konvergencije u srednjem reda 2 i konvergencije po vjerojatnosti. Za potrebe ovog dokaza koristimo se važnom nejednakosti u teoriji vjerojatnosti, te ćemo prvo nju navesti. Riječ je o Markovljevoj nejednakosti.

Teorem 15. ***(Markovljeva nejednakost)*** *Neka je X slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ te $g : \mathcal{R}(X) \to \mathbb{R}$ nenegativna funkcija s očekivanjem $\mathbb{E}[g(X)] < \infty$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi:*

$$P(g(X) \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[g(X)]}{\varepsilon}.$$

Dokaz. Vidi [6, Teorem 3.19, str. 134]. □

Teorem 16. *Ako niz slučajnih varijabli $(X_n, n \in \mathbb{N})$ konvergira u srednjem reda 2 prema slučajnoj varijabli X, onda niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ konvergira po vjerojatnosti prema slučajnoj varijabli X.*

Dokaz. Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih varijabli koji konvergira u srednjem reda 2 prema X, odnosno po definiciji vrijedi da je $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}[(X_n - X)^2] = 0$.
Promotrimo sada opći član niza $(X_n - X)^2$ i na njega primijenimo gore navedenu Markovljevu nejednakost za proizvoljan $\varepsilon > 0$. Sada imamo:

$$P((X_n - X)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{\mathbb{E}[(X_n - X)^2]}{\varepsilon^2}$$

što je ekvivalentno s

$$P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[(X_n - X)^2]}{\varepsilon^2}.$$

Ako sada s obje strane djelujemo s limesom kada $n \to \infty$, imamo:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}[(X_n - X)^2]}{\varepsilon^2} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}[(X_n - X)^2]}{\varepsilon^2} = 0,$$

gdje smo iskoristili pretpostavku da $X_n \xrightarrow{m^2} X$. Iz gornje nejednakosti onda slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0$$

tj. $(P) \lim X_n = X \implies X_n \xrightarrow{P} X$. □

Obrat ove tvrdnje ne vrijedi, odnosno konvergencija po vjerojatnosti ne povlači konvergenciju u srednjem reda 2. To ćemo potvrditi sljedećim kontraprimjerom.

Primjer 10. *Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih varijabli takav da je $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$ i $P(X_n = n) = \frac{1}{n^2}$. Također, pretpostavimo da $X_n \xrightarrow{P} 0$, tj. $(P) \lim X_n = 0$. Treba provjeriti konvergira li $(X_n, n \in \mathbb{N})$ u srednjem reda 2 prema 0.*

Rješenje:

Po definiciji konvergencije u srednjem reda 2, promatramo:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_n - 0)^2] = 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \implies \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(X_n - 0)^2] \neq 0 \\ \implies X_n \overset{m^2}{\not\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

■

Dakle, na osnovu prethodnih tvrdnji i primjera zaključujemo da je konvergencija u srednjem reda 2 jača od konvergencije po vjerojatnosti, a samim time i konvergencije po distribuciji.

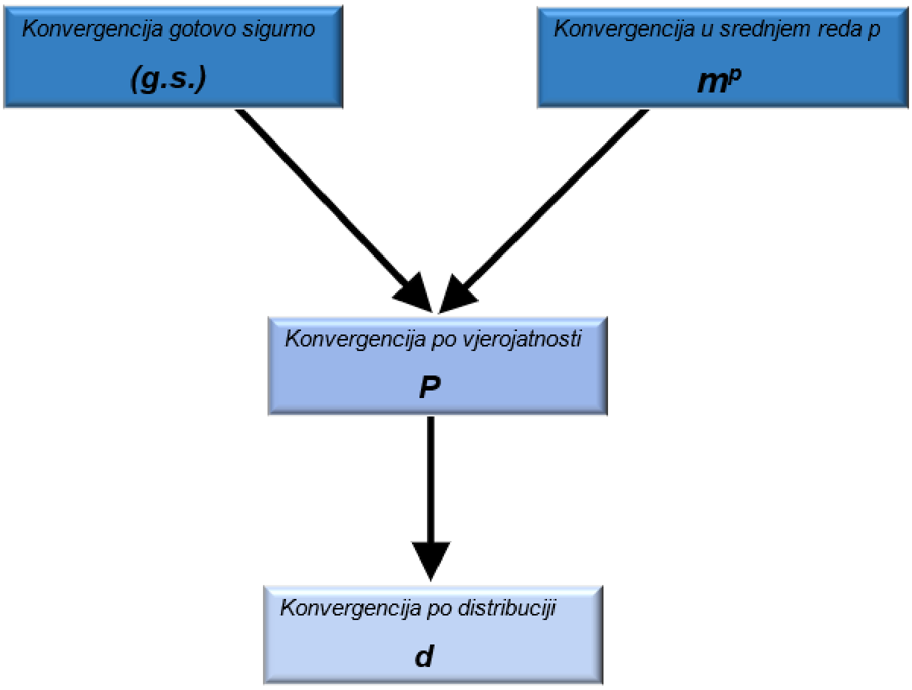
Teorem 17. *Konvergencija u srednjem reda 2 povlači konvergenciju po distribuciji, odnosno $X_n \xrightarrow{m^2} X \implies X_n \xrightarrow{d} X$.*

Dokaz. Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz slučajnih varijabli i neka vrijedi da $X_n \xrightarrow{m^2} X$, gdje je X slučajna varijabla. Prema tome, ispunjeni su uvjeti Teorema 16 iz čega slijedi $X_n \xrightarrow{P} X$. Sada smo u uvjetima Teorema 10 iz kojeg zaključujemo da $X_n \xrightarrow{d} X$. □

Napomena 9. *Obrat Teorema 17 ne vrijedi, odnosno konvergencija po distribuciji nije nužan uvjet za konvergenciju u srednjem reda 2.*

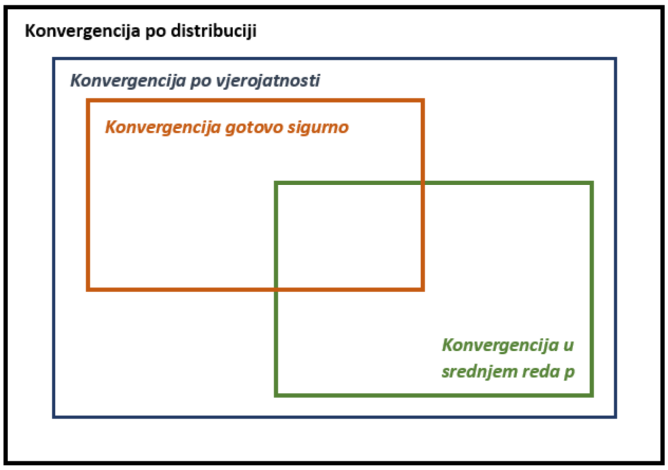
7.4 Grafički prikaz veza konvergencije slučajnih varijabli

U ovom poglavlju pokazali smo kakve sve veze među pojedinim tipovima konvergencije slučajnih varijabli postoje, na osnovu čega smo mogli dobiti dojam o njihovoj jačini i povezanosti. Kako bi još bolje razumjeli njihovu hijerarhiju promotrimo sljedeći grafički prikaz.



Slika 1: Grafički prikaz veza među tipovima konvergencije nizova slučajnih varijabli.

Kao najgornje, nalaze se konvergencija gotovo sigurno i konvergencija u srednjem reda p koje se smatraju jakim konvergencijama. Strelicama je prikazano da svaka od njih pojedinačno povlači konvergenciju po vjerojatnosti, koja spada u nešto slabiju vrstu konvergencije. Naposljetku, uočavamo da je strelicom naglašena veza između konvergencije po vjerojatnosti i konvergencije po distribuciji, koja je najslabija od četiri vrste konvergencije koje smo proučavali.



Slika 2: Ilustrativni prikaz tipova konvergencije nizova slučajnih varijabli kao skupova i podskupova

Literatura

[1] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti* – Treće, prerađeno izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[2] N. Sandrić, Z. Vondraček, *Vjerojatnost – predavanja*, PMF- Zagreb, dostupno na: https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/vjer/files/vjer_predavanja.pdf

[3] M. Taboga, *Asymptotic theory,* StatLect. Dostupno na:
https://www.statlect.com/asymptotic-theory/
27.7.2020. god.

[4] *Convergence of Random Variables*, Probability Course. Dostupno na:
https://www.probabilitycourse.com/chapter7/7_2_3_different_types_of_convergence_for_sequences_of_random_variables.php
27.7.2020. god.

[5] M. Benšić, N. Šuvak, *Uvod u vjerojatnost i satistiku*, Sveučilište J.J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2014.

[6] R. C. Mittelhammer, *Mathematical Statistics for Economics and Business*, Belin: Springer – Verlag, 1996.

[7] S. I. Resnick, *Probability Path*, School of Operations Research and Industrial Engineering, Cornell University Ithaca, 1998
Dostupno na:
https://www.academia.edu/31852080/A_probabilitv_Path_Sidney_I_Resnick_BIRKHAUSER

[8] P. Billingsley, *Convergence of probability measures,* Wiley, 1999.
Dostupno na: http://cermics.enpc.fr/~monneau/Billingsley-2eme-edition.pdf

[9] https://en.wikipedia.org/wiki/Convergence_of_measures

[10] https://en.wikipedia.org/wiki/Continuous_mapping_theorem