Gaussove kvadraturne formule

Cvenić, Doris

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Doris Cvenić

Gaussove kvadraturne formule

Završni rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Doris Cvenić

Gaussove kvadraturne formule

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Mihaela Ribičić Penava

Osijek, 2020.

Sadržaj

Sažetak

U ovom završnom radu upoznat ćemo se s pojmom interpolacije funkcije polinomom te dokazati egzistenciju i jedinstvenost Hermiteovog interpolacijskog polinoma. Definirat ćemo Gaussove kvadraturne formule, te pokazati kako se one mogu dobiti integracijom Hermiteovog interpolacijskog polinoma. Detaljno ćemo obraditi specijalne slučajeve Gaussovih formula, Gauss-Legendreove formule te ćemo iskazati i dokazati tvrdnje koje pokazuju svojstva Legendreovih polinoma. Pokazat ćemo kako odrediti točke integracije i težinske koeficijente, te pronaći ocjene pogrešaka za te formule. Na kraju rada ćemo navesti neke od ostalih specijalnih slučajeva Gaussovih formula: Gauss-Čebiševljeve formule prve i druge vrste, Gauss-Laguerreove i Gauss-Hermiteove kvadraturne formule, te odgovarajuće primjere.

Ključne riječi: Gaussove kvadraturne formule, Hermiteov interpolacijski polinom, Legendreov polinom, Gauss-Legendreove kvadraturne formule, ortogonalni polinomi, ocjene pogrešaka

Abstract

In this final paper, we will explain polynomial interpolation of a function, prove the existence and uniqueness of Hermite polynomials. We will define the Gaussian quadrature formulae, and show how it is obtained by integrating the Hermite interpolation polynomial. We will consider a special case of the Gaussian formulae, the Gauss-Legendre formulae, and we will state and prove statements that show the properties of Legendre polynomials. We will show how to determine integration points and weights, and find the error estimates. At the end of the paper, we will list some of the other special cases of the Gaussian formulae: Gauss-Chebyshev formulae of the first and of the second kind, Gauss-Laguerre and Gauss-Hermite quadrature formulae, and corresponding examples.

Keywords: Gaussian quadratures, Hermite polynomial, Legendre polynomial, Gauss-Legendre quadrature formulae, orthogonal polynomials, error estimates

1 Uvod

Neka je zadana funkcija $f : I \to \mathbb{R}$, gdje je I interval. Želimo izračunati integral funkcije f na $[a, b]$

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

Potreba za približnim određivanjem vrijednosti određenih integrala pojavila se onda kada se pokazalo da ima mnogo funkcija za koje ne možemo odrediti primitivne funkcije na elementaran način pa ne možemo koristiti Newton-Leibnizovu formulu za računanje $I(f)$ preko vrijednosti primitivne funkcije F od f u rubovima intervala

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Jedino što nam preostaje je numeričko računanje.

Pojam numeričke integracije odnosi se na približno određivanje vrijednosti jednostrukih i višestrukih integrala korištenjem vrijednosti funkcije f na nekom konačnom skupu točaka. Zbog interpretacije integrala kao površine ispod krivulje pojam koji se tu javlja je pojam **kvadraturne formule** sa ili bez ostatka. Ona ima oblik

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) + E(f),$$

gdje su $w_i \geq 0$ **težinski koeficijenti**, a **čvorove** x_i obično biramo iz segmenta integracije $[a, b]$, dok je $E(f)$ **ostatak**, odnosno greška u toj formuli.

U ovom radu razmatrat ćemo klasične težinske **Gaussove** [1] **kvadraturne formule** oblika

$$\int_a^b w(x)f(x)dx,$$

gdje je $w > 0$ **težinska funkcija**. Te formule se baziraju na zamjeni funkcije f **Hermiteovim** [2] **interpolacijskim polinomom**. Objasnit ćemo Hermiteov oblik interpolacijskog polinoma i na koji način odabiremo točke x_i tako da nakon što integriramo Hermiteov polinom, vrijednosti derivacija $f'(x_i)$ ne uđu u kvadraturnu formulu. Detaljno ćemo objasniti specijalni slučaj Gaussove formule, **Gauss-Legendreove**[3] **formule**. Iskazat ćemo i dokazati neke tvrdnje vezane za nju, odrediti ocjenu pogreške te pokazati kako ju koristimo na primjeru. Na kraju ćemo navesti ostale oblike Gaussovih formula, njihove težinske funkcije, kao i oblike ortogonalnih polinoma vezanih uz njih te svaku formulu upotpuniti primjerom.

[1] Carl Friedrich Gauss (1777.-1855.), njemački matematičar i astronom
[2] Charles Hermite (1822.-1901.), francuski matematičar
[3] Adrien-Marie Legendre (1752.-1833.), francuski matematičar i astronom

2 Hermiteov interpolacijski polinom

U numeričkoj matematici često za neku funkciju f nemamo analitički izraz, ali su nam poznate neke informacije o njoj. Na osnovu tih informacija, kao što je poznavanje njene vrijednosti u nekoliko točaka $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, želimo zamijeniti funkciju f nekom drugom funkcijom koja je najbliža funkciji f. Drugim riječima, želimo funkciju f aproksimirati novom jednostavnijom funkcijom tako da su im vrijednosti u spomenutim točkama jednake. Potreba za aproksimiranjem se najčešće javlja u dvije različite situacije. Prvi slučaj je kada je poznata funkcija f, ali je njen izraz presložen za računanje, dok u drugom slučaju funkcija f nije poznata, ali su poznate neke informacije o njoj, primjerice njezine vrijednosti na nekom konačnom skupu točaka. Ova druga situacija se, u praksi, češće javlja i koristi kod mjerenja veličina, te ćemo se mi njome baviti. Naime, poznavajući vrijednosti funkcije f u nekoliko točaka, mi želimo konstruirati novu, jednostavniju funkciju, koja ima iste vrijednosti u tim točkama kao i funkcija f. Ovaj postupak određivanja jednostavnije funkcije nazivamo **problem interpolacije**.

Jedan takav oblik interpolacije u kojoj su zadane točke $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ i vrijednosti funkcije f u tim točkama je **Lagrangeov interpolacijski polinom** koji je oblika

$$p_n(x) = \prod_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x),$$

pri čemu su

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad i = 0, \ldots, n \tag{2.1}$$

funkcije Lagrangeove baze. Više o njemu može se pronaći u [8] i [6].

Osim vrijednosti funkcije u točkama $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, mogu nam biti zadane i derivacije iste funkcije u točkama. Takav slučaj posebno promatramo zbog važnosti za teoriju numeričke integracije, odnosno Gaussovih kvadraturnih formula. Prije definiranja samog polinoma iskazat ćemo i dokazati teorem koji osigurava egzistenciju i jedinstvenost takvog polinoma. Iskaz i dokaz preuzeti su iz [3].

Teorem 2.1. *Postoji jedinstven polinom h_{2n+1} stupnja najviše $2n + 1$, koji zadovoljava interpolacijske uvjete*

$$h_{2n+1}(x_i) = f_i, \quad h'_{2n+1}(x_i) = f'_i, \quad i = 0, \ldots, n,$$

gdje su x_i međusobno različite točke i f_i, f'_i zadani realni brojevi.

Dokaz. Postojanje polinoma $h_{2n+1}(x)$ možemo dokazivati konstrukcijom eksplicitne baze. Neka su

$$\begin{aligned} h_{i,0}(x) &= [1 - 2(x - x_i) l'_i(x_i)] l_i^2(x) \\ h_{i,1}(x) &= (x - x_i) l_i^2(x), \end{aligned} \tag{2.2}$$

gdje su l_i funkcije Lagrangeove baze. Očito su $h_{i,0}(x)$ i $h_{i,1}(x)$ polinomi stupnja $2n + 1$ za koje je lako vidjeti da zadovoljavaju sljedeće relacije

$$\begin{matrix} h_{i,0}(x_j) = \delta_{i,j}, & h_{i,1}(x_j) = 0, \\ h'_{i,0}(x_j) = 0, & h'_{i,1}(x_j) = \delta_{i,j}, \end{matrix} \quad \text{za} \quad i, j = 0, \ldots, n,$$

pri čemu je $\delta_{i,j}$ Kroneckerov simbol definiran izrazom

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1\,, \text{ za } i = j \\ 0\,, \text{ za } i \neq j. \end{cases}$$

Ako definiramo polinom formulom

$$h_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} (f_i h_{i,0}(x) + f_i' h_{i,1}(x)), \tag{2.3}$$

zaključujemo da h_{2n+1} zadovoljava uvjete teorema.

Preostaje nam još pokazati jedinstvenost. Neka je $q_{2n+1}(x)$ bilo koji drugi polinom koji ispunjava interpolacijske uvjete teorema. Tada je $h_{2n+1}(x) - q_{2n+1}(x)$ polinom stupnja manjeg ili jednakog od $2n+1$, koji ima nultočke kratnosti barem 2 u svakom čvoru interpolacije x_i, tj. ima barem $2n+2$ nultočke, što je jedino moguće ako je identički jednak nuli iz čega slijedi jedinstvenost. □

Polinomi $h_{i,0}$, $h_{i,1}$ zovu se **funkcije Hermiteove baze**, a polinom h_{2n+1} obično se zove **Hermiteov interpolacijski polinom**.

Primjer 2.1. *Odredimo Hermiteov interpolacijski polinom za funkciju za koju je poznato* $f(0) = 2$*,* $f'(0) = 4$*,* $f(1) = 20$*,* $f'(1) = 40$*.*

Vidimo da je $n = 1$ *zbog toga što imamo zadane uvjete za dvije različite točke* $x_0 = 0$*,* $x_1 = 1$*.*

Uvrštavanjem x_0 *i* x_1 *u* (2.1) *imamo*

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x-1}{0-1} = -x + 1, \quad l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x-0}{1-0} = x.$$

Sada kad smo došli do ovih jednakosti, njih ćemo, zajedno sa spomenutim točkama uvrstiti u (2.2)

$$\begin{aligned} h_{0,0} &= 2x^3 - 3x^2 + 1, \quad & h_{0,1} &= x^3 - 2x^2 + x, \\ h_{1,0} &= -2x^3 + 3x^2, \quad & h_{1,1} &= x^3 - x^2. \end{aligned}$$

Koristeći poznate izraze i (2.3) *dobivamo traženi Hermiteov interpolacijski polinom*

$$\begin{aligned} h_3(x) &= f(0)h_{0,0} + f'(0)h_{0,1} + f(1)h_{1,0} + f'(1)h_{1,1} \\ h_3(x) &= 8x^3 + 6x^2 + 4x + 1. \end{aligned}$$

2.1 Ocjena pogreške

Nakon što smo iskazali i dokazali teorem o jedinstvenosti i egzistenciji Hermiteovog interpolacijskog polinoma pogledat ćemo aproksimaciju ocjene pogreške kroz sljedeći teorem (preuzet iz [3]).

Teorem 2.2. *Greška kod interpolacije Hermiteovim polinomom $h_{2n+1}(x)$ funkcije $f \in C^{(2n+2)}[x_{min}, x_{max}]$ u $n+1$ čvorova $x_0, \ldots, x_n$ je oblika*

$$e(x) := f(x) - h_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega^2(x),$$

pri čemu vrijedi $x_{min} := min\{x_0, \ldots, x_n\} < \xi < max\{x_0, \ldots, x_n\} =: x_{max}$, a $\omega(x)$ je definirana izrazom $\omega(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$.

Dokaz. Ako pogledamo uvjete interpolacije vidimo da je $f(x) = h_{2n+1}(x)$ i $f'(x) = h'_{2n+1}(x)$ za $x = x_0, \ldots, x_n$, pa za neku konstantu C očekujemo da je

$$f(x) - h_{2n+1}(x) \approx C\omega^2(x).$$

Definiramo

$$F(x) = f(x) - h_{2n+1}(x) - C\omega^2(x),$$

i vidimo da F ima nultočke kratnosti 2 u $x = x_0, \ldots, x_n$, tj. $F(x_k) = F'(x_k) = 0$ za $k = 0, \ldots, n$. Odaberemo li neki $x_{n+1} \in [x_{min}, x_{max}]$ koji je različit od postojećih čvorova moći ćemo odrediti konstantu C takvu da vrijedi $F(x_{n+1}) = 0$. $F(x)$ sada ima (barem) $n+2$ nule, a F' ima $n+1$ nulu u nekim točkama između njih. Ona također ima nule u $x_0, \ldots, x_n$, što znači da ima ukupno (barem) $2n+2$ nula. Onda F'' ima bar $2n+1$ nula, F''' $2n$ nula, itd., na osnovu Rolleovog teorema [4]. Na kraju, $F^{(2n+2)}$ ima barem jednu nulu u promatranom intervalu, označimo ju ξ. Deriviranjem izraza za $F(x)$ dobijemo

$$F^{(2n+2)}(\xi) = f^{(2n+2)}(\xi) - C(2n+2)! = 0,$$

i iz toga izračunamo C. Uvrstimo li taj rezultat u izraz za grešku, imamo

$$F(x_{n+1}) - h_{2n+1}(x_{n+1}) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega^2(x_{n+1}).$$

Kako je x_{n+1} proizvoljan, ali različit od čvorova $x = x_0, \ldots, x_n$, možemo ga zamijeniti s proizvoljnim x. Na kraju primijetimo da je gornji rezultat točan i za $x \in \{x_0, \ldots, x_n\}$, jer su obje strane nula, pa dokaz slijedi. $\square$

[4]Neka je $f : I \to \mathbb{R}$, diferencijabilna na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ i neka za $a, b \in I,\ a < b$, vrijedi $f(a) = f(b) = 0$. Tada $\exists c \in (a, b)$ takav da je $f'(c) = 0$.

3 Gaussove kvadraturne formule

Kao što smo u uvodu već spomenuli, Gaussove kvadraturne formule su oblika

$$\int_a^b w(x)f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i),$$

gdje se **točke integracije** x_i računaju tako da postignemo maksimalan stupanj egzaktnosti, a w je **težinska funkcija** koja je pozitivna na otvorenom intervalu (a, b). Koeficijenti $w_i > 0$ se zovu **težinski koeficijenti** ili **težine**. Pritom, za kvadraturnu formulu kažemo da je stupnja egzaktnosti m ako joj je ostatak jednak nula za sve polinome stupnja manjeg ili jednakog m.

Ovisno o težinskim funkcijama na određenim intervalima imamo više specijalnih slučajeva Gaussove formule kao što su Gauss-Legendreove, Gauss-Čebiševljeve prve i druge vrste, Gauss-Laguerreove i Gauss-Hermiteove kvadraturne formule.

U prethodnom poglavlju upoznali smo se s Hermiteovim interpolacijskim polinomom. Sada ćemo vidjeti kako se Gaussove formule mogu dobiti integracijom tog polinoma. Takav pristup je ekvivalentan s pristupom u kojem zahtijevamo da Gaussove formule integriraju egzaktno polinome što je moguće višeg stupnja, odnosno da su točke integracije x_i nultočke polinoma koji su ortogonalni na intervalu (a, b) obzirom na težinsku funkciju w, tj. da vrijedi

$$\int_a^b w(x)x^j dx = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^j, \quad j = 0, 1, \dots, 2n-1.$$

Ovu relaciju možemo koristiti da napišemo $2n$ jednadžbi s $2n$ nepoznanica x_i i w_i, ali je takav pristup znatno teži, jer u tom slučaju imamo nelinearni sustav jednadžbi.

Za Hermiteov interpolacijski polinom h_{2n-1} stupnja $2n-1$, koji u čvorovima integracije x_i interpolira vrijednosti $f_i = f(x_i)$ i $f_i' = f'(x_i)$, za $i = 1, \dots, n$, iz relacija (2.2) i (2.3) imamo

$$\begin{aligned} h_{2n-1}(x) &= \sum_{i=1}^{n}(h_{i,0}(x)f_i + h_{i,1}(x)f_i') \\ h_{2n-1}(x) &= \sum_{i=1}^{n}([1-2(x-x_i)l_i'(x_i)]l_i^2(x)f_i + (x-x_i)l_i^2(x)f_i'). \end{aligned}$$

Ako prethodnu jednakost pomnožimo s $w(x)$ i nakon toga integriramo dobijemo

$$\int_a^b w(x)h_{2n-1}(x)dx = \sum_{i=1}^{n}(A_i f_i + B_i f_i'), \tag{3.1}$$

gdje su

$$\begin{aligned} A_i &= \int_a^b w(x)\ [1-2(x-x_i)l_i'(x_i)]l_i^2(x)dx, \\ B_i &= \int_a^b w(x)\ (x-x_i)l_i^2(x)dx. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Integracijska formula (3.1) je slična Gaussovoj kvadraturnoj formuli, osim što sadrži dodatne članove $B_i f_i'$, koji koriste i derivacije funkcije f u čvorovima integracije.

Kada bi čvorovi x_i bili unaprijed zadani, iz uvjeta egzaktne integracije polinoma trebalo bi odrediti $2n$ parametara A_i, B_i. Zbog toga očekujemo da takva formula egzaktno integrira polinome do stupnja $2n-1$. Za njenu upotrebu trebamo još znati, osim funkcijskih vrijednosti $f(x_i)$, i vrijednosti derivacije funkcije u tim čvorovima.

Želimo izborom čvorova x_i poništiti koeficijente B_i i time izbjeći korištenje derivacija. Tako dobivena formula bi postala Gaussova kvadraturna formula.

Uvedimo posebni polinom čvorova ω_n koji ima nultočke u svim čvorovima integracije

$$\omega_n(x) := (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n).$$

Sljedeća lema pokazat će nam kako treba izabrati čvorove.

Lema 3.1. *Ako je $\omega_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ ortogonalan s težinom w na sve polinome nižeg stupnja, tj. ako vrijedi*

$$\int_a^b w(x)\omega_n(x)x^k dx = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{3.3}$$

onda su svi koeficijenti B_i u (3.2) *jednaki nula.*

Dokaz. Iz (2.1) i definicije polinoma ω_n dobijemo jednakost

$$(x-x_i)l_i(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_i)}.$$

Ako prethodnu jednakost uvrstimo u (3.2) imamo

$$B_i = \frac{1}{\omega_n'(x_i)} \int_a^b w(x)\omega_n(x)l_i(x)dx.$$

Kako je l_i polinom stupnja $n-1$, a po pretpostavci je polinom ω_n ortogonalan s težinom w na sve takve polinome pa tvrdnja slijedi. $\square$

Pogledajmo sada da vrijedi i obrat, odnosno da su svi koeficijenti $B_i = 0$ u (3.1), ako i samo ako je polinom čvorova ω_n ortogonalan na sve polinome nižeg stupnja, s težinskom funkcijom w, tj. da vrijedi

$$\int_a^b w(x)\omega_n(x)p(x)dx = 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}_{n-1}.$$

Pokažimo prvo da iz $B_i = 0$ slijedi ortogonalnost.
Ako je $B_i = 0$, $i = 1, \cdots, n$, vidi se da je ω_n ortogonalan na sve polinome l_i, za $i = 1, \cdots, n$. Kako ti polinomi čine bazu prostora $\mathcal{P}_{n-1}$, onda je

$$\int_a^b w(x)\omega_n(x)p(x)dx = 0, \quad \forall p \in \mathcal{P}_{n-1}.$$

Za drugi smjer moramo pokazati da ortogonalnost povlači $B_i = 0$.
Ako je ω_n ortogonalan na sve polinome $p \in \mathcal{P}_{n-1}$, onda je također ortogonalan i na polinome Lagrangeove baze, tj. stavimo $p = l_i$, pa je

$$\int_a^b w(x)\omega_n(x)l_i(x)dx = 0, \quad i = 1, \cdots, n,$$

iz čega slijedi

$$B_i = \frac{1}{\omega_n'(x_i)} \int_a^b w(x)\omega_n(x)l_i(x)dx = 0, \quad i = 1, \cdots, n.$$

Kako bismo dobili Gaussovu kvadraturnu formulu, polinom čvorova ω_n mora biti ortogonalni polinom s vodećim koeficijentom 1. Vidimo da ω_n postoji i jedinstven je. Uvjet ortogonalnosti (3.3) jednoznačno određuje raspored čvorova za Gaussovu integraciju. Znamo da ω_n ima n jednostrukih nultočaka u intervalu (a, b) pa njih možemo samo permutirati, a uz standardni dogovor jednoznačno su određene.

Time smo dokazali sa postoji jedinstvena Gaussova kvadraturna formula oblika

$$\int_a^b w(x)f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i),$$

pri čemu su čvorovi integracije x_i nultočke ortogonalnog polinoma stupnja n na $[a, b]$ s težinskom funkcijom w.

Težinski koeficijenti se mogu izračunati iz (3.2), zbog toga što je tada $w_i = A_i$, za $i = 1, \dots, n$. Kada se iskoristi pretpostavka ortogonalnosti, te relacija za B_i, $B_i = 0$ dobijemo da je

$$w_i = \int_a^b w(x)l_i^2(x)dx.$$

Iz ovog izraza možemo vidjeti pozitivnost težinskih koeficijenata. Naime, kako znamo da je težinska funkcija $w(x)$ pozitivna, te je svakako kvadrat Lagrangeove baze pozitivan vidimo da su i težinski koeficijenti w_i također pozitivni.

Može se još pokazati da je

$$w_i = \int_a^b w(x)l_i^2(x)dx = \int_a^b w(x)l_i(x)dx. \tag{3.4}$$

To je isto kao i dokazati

$$\int_a^b w(x)l_i^2(x)dx - \int_a^b w(x)l_i(x)dx = \int_a^b w(x)l_i(x)(l_i(x) - 1)dx = 0.$$

Po definiciji polinoma l_i, polinom $l_i(x)-1$ se poništava u točki $x=x_i$, što znači da $l_i(x)-1$ mora sadržavati $x-x_i$ kao faktor, pa to možemo napisati na sljedeći način

$$l_i(x)-1=(x-x_i)q(x),$$

gdje je q neki polinom stupnja $n-2$, što je za jedan manje od stupnja polinoma l_i. Onda je

$$l_i(x)(l_i(x)-1)=\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_i)(x-x_i)}(l_i(x)-1)=\frac{1}{\omega_n'(x_i)}\omega_n(x)q(x),$$

pa je zbog svojstva ortogonalnosti ω_n na sve polinome nižeg stupnja

$$\int\limits_a^b w(x)l_i(x)(l_i(x)-1)dx=\frac{1}{\omega_n'(x_i)}\int\limits_a^b w(x)\omega_n(x)q(x)=0.$$

Time smo pokazali da Gaussovu kvadraturnu formulu možemo dobiti kao integral Hermiteovog interpolacijskog polinoma, uz odgovarajući izbor čvorova pri čemu su težinski koeficijenti definirani sa (3.4).

3.1 Gauss–Legendreove formule

Kao što smo rekli, ortogonalnost funkcije ω_n na sve polinome nižeg stupnja određuje točke integracije x_i. Pristup koji smo objasnili može se koristiti za sve moguće intervale integracije i razne težinske funkcije. No, za polinome većeg stupnja određivanje nultočki nije egzaktno moguće. Zbog toga nam je cilj doći do više informacija za ortogonalne polinome na specijalnim intervalima i težinama. Uz to, želimo formulom izračunati težinske faktore w_i u Gaussovim formulama. Do takvih rezultata je moguće doći za mnoge specijalne težine $w(x)$, a u ovom poglavlju ćemo izvesti specijalne **Gauss-Legendreove fomule**.

Za početak, uzet ćemo slučaj kada je $w \equiv 1$, $a = -1$, $b = 1$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i).$$

Legendreov polinom stupnja n definiran je **Rodriguesovom formulom**

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

Primjer 3.1. *Iz Rodriguesove formule izračunajmo prvih osam Legendreovih polinoma:*

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1, \\
P_1(x) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x^2-1) = x, \\
P_2(x) &= \frac{1}{8}\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2 = \frac{1}{2}(3x^2-1), \\
P_3(x) &= \frac{1}{48}\frac{d^3}{dx^3}(x^2-1)^3 = \frac{1}{2}(5x^3-3x), \\
P_4(x) &= \frac{1}{16\cdot 24}\frac{d^4}{dx^4}(x^2-1)^4 = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3), \\
P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x), \\
P_6(x) &= \frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5), \\
P_7(x) &= \frac{1}{16}(429x^7-693x^5+315x^3-35x).
\end{aligned}$$

Vidimo da traženje nultočaka Legendreovih polinoma nije jednostavno jer egzaktni načini preko algoritama i tablica postoje samo za male stupnjeve.

Polinomi koji su tako definirani čine ortogonalnu bazu u prostoru polinoma stupnja n, što znači da su linearno nezavisni i ortogonalni obzirom na skalarni produkt

$$\langle P, Q\rangle := \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx. \tag{3.5}$$

U sljedećim tvrdnjama ćemo iskazati i dokazati neka bitna svojstva Legendreovih polinoma. Ona su preuzeta iz [3].

Lema 3.2. *Legendreov polinom stupnja n ortogonalan je na sve potencije x^k nižeg stupnja, tj. vrijedi*

$$\int_{-1}^{1} x^k P_n(x)dx = 0, \quad za \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

i

$$\int_{-1}^{1} x^k P_n(x)dx = \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Dokaz. Koristeći Rodriguesovu formulu dobijemo

$$\int_{-1}^{1} x^k P_n(x)dx = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} x^k \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx.$$

Sada primjenjujemo parcijalnu integraciju na dani integral, pa imamo

$$\int_{-1}^{1} x^k \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx = x^k \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} kx^{k-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n dx.$$

Možemo uočiti da je

$$x^k \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\Big|_{-1}^{1} = 0,$$

pa nakon toga nastavimo primjenjivati postupak parcijalne integracije, te za $k < n$ dobijemo

$$\int_{-1}^{1} x^k \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx = (-1)^k k! \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x^2-1)^n dx = 0,$$

pa smo time dokazali prvu formulu.
Istim postupkom, za $k = n$ imamo

$$\int_{-1}^{1} x^n \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx = (-1)^n n! \int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx = 2n! \int_{0}^{1}(1-x^2)^n dx.$$

Primijenimo supstituciju $x = \sin t$ i dobijemo

$$\int_{-1}^{1} x^n \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx = 2n! \int_{0}^{\pi/2} \cos^{2n+1} t\ dt.$$

Parcijalnom integracijom zadnjeg integrala dobijemo

$$\int_{0}^{\pi/2} \cos^{2n+1} t\ dt = \frac{\cos^{2n} t \sin t}{2n+1}\Big|_{0}^{\pi/2} + \frac{2n}{2n+1}\int_{0}^{\pi/2} \cos^{2n-1} t\ dt.$$

Vidimo da je

$$\left.\frac{\cos^{2n} t \sin t}{2n+1}\right|_0^{\pi/2} = 0.$$

Nastavljajući taj postupak imamo

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t \; dt = \frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3} \int_0^{\pi/2} \cos t \; dt,$$

pa iz toga slijedi da je

$$\int_{-1}^{1} x^n \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx = 2n! \frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3}.$$

Prvo pomnožimo brojnik i nazivnik s $2n(2n-2)\cdots 2 = 2^n n!$. Nakon toga, zbog definicije Legendreovog polinoma P_n, sve podijelimo s $2^n n!$. Onda dobijemo

$$\int_{-1}^{1} x^n P_n(x) dx = \frac{1}{2^n n!} 2n! \frac{2^n n! \cdot 2^n n!}{(2n+1)!} = \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

□

Lema 3.3. *Legendreovi polinomi su ortogonalni na intervalu* $(-1,1)$ *obzirom na skalarni produkt* (3.5)

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx = 0, \quad za \quad m \neq n.$$

Norma Legendreovog polinoma je

$$\|P_n\|^2 := \int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Dokaz. Prva tvrdnja je direktna posljedica Leme 3.2, a druga tvrdnja slijedi iz

$$\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 dx = \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2^n n!} \frac{(2n)!}{n!} x^n + \cdots \right] P_n(x) dx.$$

Potencije manje od x^n nisu od važnosti za integral, pa druga tvrdnja Leme 3.2 povlači

$$\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \frac{2^{n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}.$$

□

Lema 3.4. *Legendreovi polinomi P_n imaju n nultočaka, koje su sve realne i različite, i nalaze se u otvorenom intervalu $(-1, 1)$.*

Dokaz. Dokaz ide iz definicije Legendreovih polinoma Rodriguesovom formulom

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n,$$

induktivnom primjenom već spomenutog Rolleovog teorema. Vidimo da je polinom $(x^2-1)^n$ stupnja $2n$ i ima n-terostruke nultočke u rubovima intervala ± 1. Prva derivacija ima jednu nultočku na intervalu $(-1, 1)$ (prema Rolleovom teoremu). No, prva derivacija je nula u ± 1, pa ukupno mora imati tri nultočke u zatvorenom intervalu $[-1, 1]$. Druga derivacija ima dvije unutarnje nule po Rolleovom teoremu, i dvije u ± 1, pa slijedi da ima četiri nule u $[-1, 1]$. Nastavljamo postupak i vidimo da $n-1$-a derivacija ima $n-1$ unutarnju nultočku i još dvije u ± 1. Na kraju zaključujemo da n-ta derivacija ima n unutarnjih nultočaka. Kako je ta n-ta derivacija do na multiplikativni faktor jednaka P_n, polazna tvrdnja je ovime dokazana. □

Tražeći nultočke Legendreovog polinoma zapravo nalazimo točke integracije u Gauss-Legendreovoj formuli i bez rješavanja nelinearnog sustava jednadžbi za w_i i x_i, iz uvjeta egzaktne integracije potencija najvećeg mogućeg stupnja o čemu nam govori i sljedeći teorem.

Teorem 3.1. *Čvorovi integracije u Gauss-Legendreovoj formuli reda n su nultočke Legendreovog polinoma P_n, za svaki n.*

Dokaz. Po konstrukciji polinoma ω_n nam je već poznato da su točke integracije x_i nultočke tog polinoma. Polinom ω_n, s vodećim koeficijentom 1 je, zbog uvjeta ortogonalnosti (3.3), proporcionalan Legendreovom polinomu P_n. Vodeći koeficijent u P_n ćemo dobiti iz Rodriguesove formule, iz čega slijedi

$$\omega_n(x) = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} P_n(x),$$

pa vidimo da su sve nultočke polinoma ω_n zapravo nultočke od P_n. □

Legendreovi polinomi zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \tag{3.6}$$

$$uz \quad P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x.$$

te postoji lakši način za traženje nultočaka od P_n preko te rekurzivne formule. Ona je važna u konstrukciji algoritma za traženje nultočaka. Više o tome može se naći u [3].

Nakon što smo pokazali kako odrediti točke integracije x_i preostaje nam još odrediti težinske faktore kako bismo dobili konačna svojstva vezana uz Gauss-Legendreove formule, te odrediti ocjenu pogreške i navesti uvjet egzaktnosti. Sve tvrdnje vezane uz ove rezultate, kao i dokaz sljedeće leme, preuzeti su iz [3].

Lema 3.5. *Težinski faktori u Gauss-Legendreovim formulama mogu se eksplicitno izračunati formulama*

$$w_i = \frac{2(1-x_i^2)}{n^2 [P_{n-1}(x_i)]^2},$$

gdje su x_i, $i = 0, \ldots, n$, nultočke Legendreovog polinoma P_n.

Osim ovoga, imamo još načina za računanje težinskih faktora

$$w_i = \frac{2(1-x_i^2)}{[(n+1)P_{n+1}(x_i)]^2} = \frac{2}{nP_n'(x_i)P_{n-1}(x_i)} = -\frac{2}{(n+1)P_n'(x_i)P_{n+1}(x_i)} = \frac{2}{(1-x_i^2)[P_n'(x_i)]^2},$$

a više o tome kako doći do njih može se vidjeti u [3].

Izračunavanjem nultočki Legendreovih polinoma i korištenjem prethodne formule za dobivanje težinskih faktora mogu se dobiti rezultati prikazani u sljedećoj tablici. Više rezultata može se vidjeti u [2].

n	nultočke	težinski faktori
2	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
	0	$\frac{8}{9}$
	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
4	-0.861136	0.347855
	-0.339981	0.652145
	0.339981	0.652145
	0.861136	0.347855
5	-0.90618	0.236927
	-0.538469	0.478629
	0	0.568889
	0.538469	0.478629
	0.90618	0.236927
6	-0.932469	0.171324
	-0.66121	0.36076
	-0.23862	0.46791
	0.23862	0.46791
	0.66121	0.36076
	0.932469	0.171324
7	-0.94911	0.12958
	-0.74153	0.27981
	-0.40585	0.38183
	0	0.41796
	0.40585	0.38183
	0.74153	0.27981
	-0.94911	0.12958

Tablica 3.1: Nultočke i težine koje se koriste u Gauss-Legendreovoj integraciji

U sljedećem teoremu je dana ocjena pogreške za Gauss-Legendreovu integraciju.

Teorem 3.2. *Za funkciju* $f \in C^{2n}[-1,1]$ *Gauss-Legendreova formula integracije glasi*

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) + E_n(f),$$

gdje su x_i *nultočke Legendreovog polinoma* P_n *i* w_i *dani u Lemi 3.5. Za grešku* $E_n(f)$ *vrijedi*

$$E_n(f) = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in (-1,1).$$

Dokaz. Kako bismo dokazali ovu tvrdnju, dovoljno je samo dokazati formulu za ocjenu pogreške. To ćemo napraviti tako da integriramo grešku kod Hermiteove interpolacije koju smo procijenili u Teoremu 2.2 jer je Gauss-Legendreova formula zapravo integral Hermiteovog interpolacijskog polinoma i uvrstimo odgovarajući ω_n. Integracijom i primjenom teorema srednje vrijednosti za integrale[5], dobivamo

$$E_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_{-1}^{1} \omega_n^2(x)dx,$$

za neki $\xi \in (-1,1)$. Kako je

$$\omega_n(x) = \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!} P_n(x),$$

zbog poznatog kvadrata norme Legendreovog polinoma (Lema 3.3), imamo

$$E_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \left[\frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}\right]^2 \frac{2}{2n+1} = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi).$$

□

Ovaj izraz za grešku nije lagano primijeniti jer je potrebno naći neku ogradu za vrlo visoku derivaciju funkcije f. Član uz $f^{(2n)}(\xi)$ jako brzo pada s porastom n. Na primjer, za $n = 5$, greška je oblika

$$8.08 \cdot 10^{-10} f^{(10)}(\xi).$$

Korolar 3.1 (Uvjet egzaktnosti). *Gauss-Legendreova formula egzaktno integrira polinome stupnja* $2n-1$.

Dokaz. To je očito jer se greška, koja uključuje $2n$-tu derivaciju, poništava na takvim polinomima. □

[5]Teorem: Neka je $f \in C([a,b])$. Tada postoji točka $c \in [a,b]$ tako da je $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Primjer 3.2. *Aproksimirajmo integral* $\int_{-1}^{1} e^x cos(x)dx$ *koristeći Gauss-Legendreovu integraciju za* $n = 3$.

Trebat će nam nultočke Legendreovog polinoma $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$.

Dobijemo da su to $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$.

Sada ćemo pomoću njih dobiti težinske faktore u Gauss-Legendreovim formulama kao što je navedeno u Lemi 3.5:

$$w_1 = \frac{2(1-x_1^2)}{n^2[P_2(x_1)]^2} = \frac{2(1-x_1^2)}{9 \cdot (\frac{1}{2}(3 \cdot x_1^2 - 1))^2} = \frac{5}{9}$$

$$w_2 = \frac{2(1-x_2^2)}{n^2[P_2(x_2)]^2} = \frac{2(1-x_2^2)}{9 \cdot (\frac{1}{2}(3 \cdot x_2^2 - 1))^2} = \frac{8}{9}$$

$$w_3 = \frac{2(1-x_3^2)}{n^2[P_2(x_3)]^2} = \frac{2(1-x_3^2)}{9 \cdot (\frac{1}{2}(3 \cdot x_3^2 - 1))^2} = \frac{5}{9}.$$

Za grešku imamo

$$E_n(f) = \frac{2^7(3!)^4}{7 \cdot (6!)^3} f^{(6)}(\xi) = 6.35 \cdot 10^{-5} f^{(6)}(\xi), \quad \xi \in (-1, 1).$$

Dakle,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} e^x cos(x)dx &= \sum_{i=1}^{3} w_i f(x_i) + E_n(f) \\ &= 1.93339 + 6.35 \cdot 10^{-5} f^{(6)}(\xi), \quad \xi \in (-1, 1). \end{aligned}$$

Prethodnu Gauss-Legendreovu formulu smo obradili detaljno, a u nastavku ćemo se još dotaknuti ostalih specijalnih slučajeva Gaussovih kvadraturnih formula. Naime, postoji mogućnost da nam se pojave integrali koji uključuju neke druge težinske funkcije na specijalnim intervalima, često neograničenima. Takve intervale nije moguće jednostavnom supstitucijom prebaciti na interval $(-1, 1)$, te uz to postići da je težinska funkcija jedinična kao što je slučaj u Gauss-Legendreovim kvadraturnim formulama. Ideja je doći do polinoma koji su ortogonalni obzirom na težinsku funkciju w na polinome nižeg stupnja da bismo došli do eksplicitnih fomula. Pogledajmo sada neke od tih ortogonalnih polinoma i pripadnih im Gaussovih kvadraturnih formula. Više o tome može se naći u [1] i [5].

3.2 Gauss-Čebiševljeve formule prve vrste

Pogledajmo prvo **Gauss-Čebiševljeve fomule prve vrste**. Za težinsku funkciju

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in [-1,1]$$

imamo formule oblika

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) + E_n(f).$$

Čvorovi integracije su nultočke Čebiševljevog polinoma prve vrste. Oni su ortogonalni polinomi na intervalu $[-1,1]$ s obzirom na spomenutu težinsku funkciju. Obično se označavaju s T_n, $n \in \mathbb{N}_0$, a definirani su s

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1}(x)).$$

Prvih pet Čebiševljevih polinoma prve vrste su oblika

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1. \end{aligned}$$

Nultočke tih polinoma mogu se izračunati iz

$$x_i = \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right) \quad i = 1, \cdots, n.$$

Težinski koeficijenti u Gauss-Čebiševljevim formulama prve vrste dani su s

$$w_i = \frac{\pi}{n}, \quad i = 1, \cdots, n,$$

dok je greška dana formulom

$$E_n(f) = \frac{\pi}{2^{2n-1}(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in (-1,1).$$

Primjer 3.3. *Izračunajmo* $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(x^3+1)dx$ *koristeći Gauss-Čebiševljeve formule prve vrste. Upotrijebit ćemo formulu reda 2 za koju su nam čvorovi nultoče polinoma* T_2, *odnosno* $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ *i* $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Dobit ćemo egzaktni rezultat, jer je $f^{(2n)} = 0$, *pa imamo*

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(x^3+1)dx = \frac{\pi}{2}\left(\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + 1\right) = \pi.$$

3.3 Gauss-Čebiševljeve formule druge vrste

Druge na redu su formule oblika

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} f(x) dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) + E_n(f)$$

koje zovemo **Gauss-Čebiševljeve formule druge vrste**.

Koeficijenti w_i su definirani s

$$w_i = \frac{\pi}{n+1} \sin^2 \frac{i\pi}{n+1}, \quad i = 1, \cdots, n.$$

Čvorovi ovih formula su nultočke Čebiševljevog polinoma druge vrste koji ima oblik

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\cos^{-1}(x)]}{\sin[\cos^{-1}(x)]},$$

te ih možemo dobiti iz

$$x_i = \cos\left(\frac{i\pi}{n+1}\right).$$

Prvih pet Čebiševljevih polinoma druge vrste su

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1, \\ U_1(x) &= 2x, \\ U_2(x) &= 4x^2 - 1, \\ U_3(x) &= 8x^3 - 4x, \\ U_4(x) &= 16x^4 - 12x^2 + 1. \end{aligned}$$

Greška ovih Gaussovih formula iznosi

$$E_n(f) = \frac{\pi}{2^{2n+1}(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in (-1, 1).$$

Primjer 3.4. *Izračunajmo integral* $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \cdot x^4 dx$.
Da bismo došli do egzaktnog rješenja uzet ćemo $n = 3$.

Nultočke polinoma U_3 *su* $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = 0$ *i* $x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Izračunavanjem koeficijenata w_i *dobivamo* $w_1 = \frac{\pi}{8}$, $w_2 = \frac{\pi}{4}$ *i* $w_3 = \frac{\pi}{8}$ *te uvrštavanjem pripadnih rezultata u Gaussovu formulu, imamo*

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \cdot x^4 dx = \frac{\pi}{8} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 + \frac{\pi}{4} \cdot 0^4 + \frac{\pi}{8} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{\pi}{16}.$$

3.4 Gauss-Laguerreove formule

Sljedeće na redu su formule oblika

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + E_n(f)$$

koje zovemo **Gauss-Laguerreove formule**.
Čvorovi integracije u tim formulama su nultočke Laguerreovog polinoma L_n koji je definiran izrazom

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k.$$

Prvih pet Laguerreovih polinoma su oblika

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= 1, \\
L_1(x) &= -x + 1, \\
L_2(x) &= \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2), \\
L_3(x) &= \frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6), \\
L_4(x) &= \frac{1}{24}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24).
\end{aligned}$$

Oni su ortogonalni na intervalu $[0, \infty)$ s težinskom funkcijom $w(x) = e^{-x}$ pa ih zbog toga koristimo u spomenutoj kvadraturnoj formuli.

Težine u tim formulama dane su s

$$w_i = \frac{(n!)^2}{L_n'(x_i) L_{n+1}(x_i)},$$

dok je greška kod numeričke integracije dana s

$$E_n(f) = \frac{(n!)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in (0, \infty).$$

Primjer 3.5. *Izračunajmo integral* $\int_0^\infty e^{-x} x^7 dx$.
Za $n = 3$ *tražimo nultočke polinoma* L_3 *pa su to* $x_1 \approx 0.4158$, $x_2 \approx 2.2943$, $x_3 \approx 6.2899$.
Nakon izračuna odgovarajućih težina i uvrštavanja nultočaka u funkciju $f(x) = x^7$ *imamo*

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-x} x^7 dx &\approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3) \\
&= 0.7111 \cdot 0.4158^7 + 0.2785 \cdot 2.2943^7 + 0.0104 \cdot 6.2899^7 = 4143.9812,
\end{aligned}$$

a greška je

$$E_3(f) = \frac{(3!)^2}{6!} f^{(6)}(\xi) = \frac{(3!)^2}{6!} 7!\, \xi = 252\, \xi, \quad \xi \in (0, \infty).$$

Primijetimo da bi za $n = 4$ *dobili egzaktan rezultat jer bi tada osma derivacija funkcije* f *bila nula što bi značilo da je* $E_4(f) = 0$.

3.5 Gauss-Hermiteove formule

Zadnji slučaj koji ćemo obraditi su **Gauss-Hermiteove formule** . One imaju oblik

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) + E_n(f),$$

pri čemu su čvorovi integracije nultočke Hermiteovog polinoma H_n. Oni su ortogonalni na intervalu $(-\infty, \infty)$ obzirom na težinsku funkciju

$$w(x) = e^{-x^2}.$$

Za njih vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x)H_n(x)dx = \begin{cases} 0 & , \text{za } m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & , \text{za } m = n, \end{cases}$$

te Rodriguesova formula

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}).$$

Prvih pet Hermiteovih polinoma su

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, \\ H_1(x) &= 2x, \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2, \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x, \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12. \end{aligned}$$

Težinski koeficijenti u ovim Gaussovim formulama dani su s

$$w_i = -\frac{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}{H_n'(x_i) H_{n+1}(x_i)},$$

a ostatak je

$$E_n(f) = \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^n (2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in (-\infty, \infty).$$

Primjer 3.6. *Izračunajmo integral* $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} 4x^2 dx$.
Primijetimo da taj integral možemo napisati u obliku

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_1(x)H_1(x)dx,$$

pa je, zbog načina definiranja Hermiteovih polinoma,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} 4x^2 dx = 2\sqrt{\pi}.$$

Literatura

[1] A. Aglić Aljinović, A. Čivljak, S. Kovač, J. Pečarić, M. Ribičić Penava, General Integral Identities and Related Inequalities, Element, Zagreb, 2013.

[2] K. Atkinson, An introduction to numerical analysis, University of Iowa, SAD, 1978.

[3] Z. Drmač, V. Hari, M. Marušić, M. Rogina, S. Singer, Numerička analiza, Sveučilište u Zagrebu - PMF - Matematički odjel, Zagreb, 2003.

[4] B. Guljaš, Matematička analiza I&II, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno - matematički fakultet - Matematički odjel, Zagreb, 2018.

[5] P. Rabinowitz, A. Raltoson, A first course in numerical analysis, Dover Publications, New York, 2001.

[6] R. Scitovski, Numerička Matematika, Sveučlište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku - Odjel za matematiku, Osijek, 2015.

[7] E. Süli, D. F Mayers, An introduction to Numerical Analysis, Cambridge University Press, SAD, 2003.

[8] N. Ujević, Uvod u Numeričku Matematiku, Sveučilište u Splitu - Fakultet prirodoslovno-matematičkih znanosti i odgojnih područja, Split, 2004.