Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Toni Kulić

Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky nejednakost i primjene

Završni rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Toni Kulić

Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky nejednakost i primjene

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Mihaela Ribičić Penava

Osijek, 2020.

Sažetak

U završnom radu prezentirat će se Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky nejednakost i prikazati njen dokaz na više mogućih načina. Bit će pokazano i nekoliko generalizacija Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky nejednakosti te će se kroz ilustrativne zadatke pokazati njena primjena.

Ključne riječi

Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky nejednakost, primjena Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky nejednakosti, Jensenova nejednakost, aritmetičko-geometrijska nejednakost

CSB inequalities and applications

Summary

In this finals work the Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky inequality is presented and its proof is showed in a few different ways. Some generalisations of the inequality are also presented and through illustrative examples the use of the inequality is shown.

Key words

Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky inequality, application of Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky inequality, Jensens inequality, arithmetic-geometric inequality

Sadržaj

1 Uvod **4**

1.1 Povijesni pregled 4

1.2 Osnovni pojmovi i rezultati 5

2 Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky nejednakost i dokazi **7**

3 Poopćenja **13**

4 Primjene CSB u zadatcima **14**

Literatura **20**

1 Uvod

U završnom radu promatrat ćemo Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky nejednakost koja je u matematičkoj literaturi poznata i pod nazivom Cauchyjeva nejednakost ili Cauchy-Schwarzova nejednakost. Nakon što se upoznamo s njom i potrebnim definicijama prezentirat ćemo različite dokaze te nejednakosti i prikazati njenu primjenu u zadatcima.

1.1 Povijesni pregled

Augustin-Louis Cauchy(1789-1857) je davne 1821. godine objavio svoju svjetski poznatu nejednakost(CSB nejednakost) u knjizi *Cours d'Analyse Algebrique* koja je jedna od prvih strogo matematičkih knjiga. Koristio ju je u nekoliko ilustrativnih primjera ne pokazujući još njen puni potencijal. Godine 1829. Cauchy ju je prvi puta upotrijebio pri istraživanju Newtonove metode za izračunavanje korijena algebarskih i transcedentalnih jednadžbi. Cauchyjeva nejednakost bila je izražena u obliku konačne sume:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

Ruski matematičar Victor Bunyakovsky (1804-1889) studirao je u Parizu zajedno s Cauchyjem i bio je upoznat s njegovim radom na nejednakostima. U svojoj knjizi *Memoire* objavljenoj 1859. godine zamijenio je sume u CSB nejednakosti s integralima i tako dobio integralni oblik CSB nejednakosti:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Iako je knjiga bila štampana u Francuskoj nije bila poznata u zapadnoj Europi.
Matematičar Hermann Schwarz (1843-1921) nije bio upoznat s njom.
Schwarz je imao potrebu za nejednakosti sa dvodimenzionalnim integralima koja bi bila analogna Cauchyjevoj nejednakosti. Trebao je pokazati da ako je $S \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : S \to \mathbb{R}$ i $g : S \to \mathbb{R}$ tada dvostruki integrali $A = \iint_S f^2, \quad B = \iint_S fg,$

$C = \iint_S g^2$ moraju zadovoljavati nejednakost $\|B\| < \sqrt{A}\sqrt{C}$, pri čemu vrijedi stroga nejednakost osim ako su funkcije f i g proporcionalne.

Pristup ovoj nejednakosti preko Cauchyjeve nejednakosti bio je nezahvalan jer se strogost diskretne nejednakosti može izgubiti u ograničavajućem prijelazu prema integralima. Schwarz je tražio drugačiji put i pronašao odgovarajući dokaz. Pokazao je da je realni polinom

$$p(t) = \iint_S (tf(x,y) + g(x,y))^2 \, dx \, dy = At^2 + 2Bt + C,$$

nenegativan, tj. $p(t) > 0$ osim kada su f i g proporcionalne. Tada koeficijenti moraju zadovoljavati $B^2 \leq AC$, osim ako su f i g proporcionalne, tada vrijedi stroga nejednakost $B^2 < AC$.
Schwarz je ponovno otkrio Buniakowskyjev oblik nejednakosti.

1.2 Osnovni pojmovi i rezultati

Promatrimo realni vektorski prostor $\mathbb{R}^n$.

Definicija 1 *Neka je $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-torka pozitivnih realnih brojeva. Aritmetička sredina od x definirana je izrazom*

$$A(x) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Definicija 2 *Neka je $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-torka pozitivnih realnih brojeva. Geometrijska sredina od x definirana je izrazom*

$$G(x) = (x_1 \cdot x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Definicija 3 *Za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ kažemo da je konveksna na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako $\forall x_1, x_2 \in I$ i $\forall \alpha \in [0,1]$ vrijedi*

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

Teorem 1 ***(Aritmetičko-geometrijska nejednakost)***
Neka je $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-torka pozitivnih brojeva. Tada vrijedi

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Dokaz se može vidjeti u [1].

Teorem 2 ***(Diskretna Jensenova nejednakost)***
Funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ je konveksna na $I \subseteq \mathbb{R}$ ako i samo ako za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $x_1, \ldots, x_n \in I$ i $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0, 1]$ takve da je $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ vrijedi

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i).$$

Dokaz se može vidjeti u [7].

2 Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky nejednakost i dokazi

Sad, kada smo naveli bitne definicije i teoreme, iskazat ćemo Cauchy-Schwarz-Buniakowsky nejednakost i nekoliko njezinih dokaza.

Teorem 3 ***(Cauchy-Schwarz-Buniakowsky (CSB) nejednakost)*** *Za bilo koje dvije n-torke realnih brojeva $a = (a_1, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, \ldots, b_n)$ vrijedi*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2. \tag{1}$$

Pri tome jednakost (1) vrijedi onda i samo onda ako su n-torke a i b proporcionalne.[1]

Korolar 1 ***(Engel forma CSB)*** *Neka su $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ i $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ dvije n-torke realnih brojeva i $v_i > 0, i = 1, 2, \ldots, n$. Tada vrijedi nejednakost*

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} v_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i^2}{v_i},$$

Prethodna nejednakost je direktna posljedica CSB nejednakosti.
Dokaz iste se može pogledati u [1].

[1] Postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\lambda a = b$

U nastavku slijede različiti dokazi CSB nejednakosti.

Dokaz 1

Dokaz provodimo raspisivanjem suma:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j-a_jb_i)^2 &= \sum_{i=i}^{n}a_i^2\sum_{j=1}^{n}b_j^2+\sum_{i=1}^{n}b_i^2\sum_{j=1}^{n}a_j^2-2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\sum_{j=1}^{n}b_ja_j\\ &= 2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)-2\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\end{aligned}$$

Zato što je lijeva strana jednakosti suma kvadrata realnih brojeva ona je veća ili jednaka od nule, stoga

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)\geq\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2.$$

$\square$

Dokaz 2

Funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, je strogo konveksna na $\mathbb{R}$, pa za nju vrijedi Jensenova nejednakost

$$\left(\frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n}s_ix_i\right)^2\leq\frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n}s_ix_i^2.$$

Ako pomnožimo sa S^2 dobijemo

$$\left(\sum_{i=1}^{n}s_ix_i\right)^2\leq S\sum_{i=1}^{n}s_ix_i^2.$$

S pomoću supstitucije $x_i=a_1/b_i$ i $s_i=b_i^2$ za $i=1,\ldots,n$ dobivamo

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right).$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako su a i b proporcionalne. $\square$

Dokaz 3

Dokazat ćemo CSB nejednakost pomoću matematičke indukcije.
Slučaj $n = 1$ je trivijalan, tj. $a_1^2 \cdot b_1^2 \geq (a_1b_1)^2$.
Baza indukcije: $n = 2$:

$$(a_1b_1+a_2b_2)^2 = a_1^2b_1^2+2a_1b_1a_2b_2+a_2^2b_2^2 \leq a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2 = (a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$$

Dakle, vrijedi baza indukcije.
Pretpostavka: Pretpostavimo da (1) vrijedi za bilo koji $n \in \mathbb{N}$, tj.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Korak indukcije: Imamo

$$\begin{aligned} a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots a_nb_n + a_{n+1}b_{n+1} &= (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots a_nb_n) + a_{n+1}b_{n+1} \\ &\leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)^{\frac{1}{2}}(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)^{\frac{1}{2}} + a_{n+1}b_{n+1} \\ &\leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + a_{n+1}^2)^{\frac{1}{2}}(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 + b_{n+1}^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

U prvoj nejednakosti koristimo pretpostavku indukcije, a u drugoj nejednakosti koristimo bazu, gdje koristimo izraz

$$\alpha\beta + a_{n+1}b_{n+1} \leq (\alpha^2 + a_{n+1}^2)^{\frac{1}{2}}(\beta^2 + b_{n+1}^2)^{\frac{1}{2}},$$

uz supstituciju

$$\alpha = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)^{\frac{1}{2}}, \beta = (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Dakle, nejednakost (1) vrijedi i za $n + 1$. □

Dokaz 4

Neka su $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ n-torke realnih brojeva. Tada za proizvoljan broj $t \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$(a + tb) \cdot (a + tb) = a \cdot a + 2(a \cdot b)t + (b \cdot b)t^2 \Longleftrightarrow |a|^2 + 2(a \cdot b)t + |b|^2t^2 = |a + tb|^2 \geq 0.$$

Dakle,

$$(a \cdot b)^2 - |a|^2|b|^2 \leq 0.$$

Koristeći izraze: $a\cdot b = a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n, \quad |a|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2, \quad |b|^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2.$
Dobivamo

$$0 \geq \left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

To jest, dobivamo nejednakost (1). □

Dokaz 5
Neka je $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$ i $B = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}$, iz aritmetičko-geomtrijske nejednakosti vrijedi

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_ib_i}{AB} \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i^2}{A^2} + \frac{b_i^2}{B^2}\right) = 1.$$

Imamo

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i \leq AB = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2},$$

Stoga,

$$\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

Čime smo dobili nejednakost (1). □

Dokaz 6
Promotrimo sljedeći polinom

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{i=1}^n (a_ix + b_i)^2 \\
&= (a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + \cdots + (a_nx + b_n)^2 \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)x^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \\
&= \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)x^2 + 2\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)x + \sum_{i=1}^n b_i^2.
\end{aligned}$$

Budući da je $f(x) \geq 0 \ \forall\ x \in \mathbb{R}$, diskriminanta D od $f(x)$ nije pozitivna tj.

$$D = 4\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \leq 0.$$

Čime je dokazana nejednakost (1).

□

Dokaz 7

Neka su

$$\begin{aligned}A_n &= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2,\\ B_n &= b_1a_1 + b_2a_2 + \cdots + b_na_n,\\ C_n &= b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2.\end{aligned}$$

Iz aritmetičko-geometrijske nejednakosti slijedi:

$$\frac{A_nC_n}{B_n^2} + 1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2C_n}{B_n^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{C_n} = \sum_{i=1}^{n} (\frac{a_i^2C_n}{B_n^2} + \frac{b_i^2}{C_n}) \geq 2\sum_{i=1}^{n} \frac{a_ib_i}{B_n} = 2$$

Stoga, $A_nC_n \geq B_n^2$, to jest

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2$$

□

Dokaz 8

Koristeći aritmetičko-geometrijsku nejednakost, za $\lambda > 0$ imamo

$$|a_ib_i| \leq \frac{1}{2}\left(\lambda a_i^2 + \frac{b_i^2}{\lambda}\right).$$

Ako biramo $\lambda = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}$, gornja nejednakost nam daje

$$|a_ib_i| \leq \left[\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}a_i^2 + \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}}b_i^2\right].$$

Stoga,

$$\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i| \le \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}}\sum_{i=1}^{n}a_i^2 + \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}}\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right].$$

Što je ekvivalentno

$$\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i| \le \frac{1}{2}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2\sum_{i=1}^{n}a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$$

Iz čega slijedi nejednakost (1).

□

Dokaz 9

Definirajmo niz (S_n),

$$S_n = (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots a_nb_n)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).$$

Onda,

$$S_{n+1} = (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots a_nb_n + a_{n+1}b_{n+1}) - (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + a_{n+1}^2)\cdot$$
$$(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 + b_{n+1}^2),$$

Promotrimo razliku

$$S_{n+1} - S_n = -\left[(a_1b_{n+1} - b_1a_{n+1})^2 + (a_2b_{n+1} - b_2a_{n+1})^2 + \cdots + (a_nb_{n+1} - b_na_{n+1})\right]$$

Dakle, $S_{n+1} \le S_n \quad (n \in \mathbb{N})$.

Stoga imamo:

$$S_n \le S_{n-1} \le \cdots \le S_1 = 0.$$

Iz čega slijedi nejednakost (1).

□

3 Poopćenja

Za kompleksne brojeve na sljedeći način izražavamo CSB nejednakost.

Teorem 4 *Neka su* $a = (a_1, a_2 \ldots, a_n)$ *i* $b = (b_1, b_2 \ldots, b_n)$ *n-torke kompleksnih brojeva. Tada vrijedi*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right) \geq \left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2.$$

Pri tome jednakost vrijedi onda i samo onda ako su n-torke a i $\bar{b}$ proporcionalne.

Dokaz

Neka je $\lambda \in \mathbb{C}$. Vrijedi jednakost

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |a_i - \lambda \bar{b_i}|^2 &= \sum_{i=1}^{n} (a_i - \lambda \bar{b_i})(\bar{a}_i - \bar{\lambda} b_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 + |\lambda|^2 \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 - 2Re\left(\bar{\lambda} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right).\end{aligned}$$

U jednakost uvrstimo

$$\lambda = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right)^{-1},$$

gdje je $b \neq 0$, stoga imamo

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i - \lambda \bar{b_i}|^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 - \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2}{\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2} \geq 0,$$

što dokazuje CSB nejednakost za kompleksne brojeve. $\square$

Teorem 5 ***(Težinska CSB nejednakost)***
Neka su $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\quad b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ n-torke realnih brojeva i $m = (m_1, m_2, \dots, m_n), m_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ n-torka pozitivnih realnih brojeva. Tada vrijedi

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i m_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 m_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 m_i\right).$$

Jednakost vrijedi kao i samo ako su a i b proporcionalne.

Dokaz se može pogledati u [1].

4 Primjene CSB u zadatcima

U zadatcima ćemo koristiti i Engel formu CSB nejednakosti i AG nejednakost.

Zadatak 1.
Dokažite da za pozitivne realne brojeve x, y, z vrijedi:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9.$$

Rješenje:
U CSB nejednakosti stavimo $a_1 = \sqrt{x}, \quad a_2 = \sqrt{y}, \quad a_3 = \sqrt{z}$ te $b_1 = \frac{1}{x}, \quad b_2 = \frac{1}{y}, \quad b_3 = \frac{1}{z}$. Uvrštavanjem dobijemo:

$$\left(\sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{y}\frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{z}\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2 \leq (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right),$$

odnosno upravo ono što se trebalo pokazati, tj.

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq (1+1+1)^2 = 9.$$

Zadatak 2.
Neka su $x_1, \dots, x_n$ pozitivni realni brojevi za koje je $x_1 + \dots + x_n = 1$. Dokažite da vrijedi nejednakost:

$$\sqrt{x_1} + \dots + \sqrt{x_n} \leq \sqrt{n}.$$

Rješenje:
Stavimo li u CSB nejednakost $a_i = \sqrt{x_i}$ i $b_i = 1 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$ dobivamo

$$(\sqrt{x_1} \cdot 1 + \cdots + \sqrt{x_n} \cdot 1)^2 \leq (\sqrt{x_1}^2 + \cdots + \sqrt{x_n}^2)\underbrace{(1 + \cdots + 1)}_{n \quad puta},$$

odnosno

$$(\sqrt{x_1} + \cdots + \sqrt{x_n})^2 \leq n(x_1 + \cdots + x_n).$$

Kako je po uvjetu zadatka $x_1 + \cdots + x_n = 1$, slijedi $(\sqrt{x_1} + \cdots + \sqrt{x_n})^2 \leq n$, iz čega korjenovanjem dobijamo nejednakost.

Zadatak 3.
Dokažite da za pozitivne realne brojeve x, y, z vrijedi nejednakost

$$\frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} \geq x + y + z.$$

Rješenje:
Tvrdnja slijedi direktno iz CSB nejednakosti ako pažljivo odaberemo što su a_i, odnosno b_i. Kako s lijeve strane CSB nejednakosti imamo sumu produkata $a_i b_i$, očito nam primjerice a_1 i b_1 u produktu moraju dati x, dok kvadrat jednog od njih treba biti $\frac{x^2}{z}$ jer je to jedan od faktora s desne strane tražene nejednakosti. Neka su stoga:

$$a_1 = \frac{x}{\sqrt{z}}, \quad b_1 = \sqrt{z}, \quad a_2 = \frac{y}{\sqrt{x}}, \quad b_2 = \sqrt{x}, \quad a_3 = \frac{z}{\sqrt{y}}, \quad b_3 = \sqrt{y}.$$

Iz CSB nejednakosti (uz promjenu poretka nakon primjene iste) sada slijedi:

$$(x + y + z)^2 \leq \left(\frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y}\right)(x + y + z).$$

Podijelimo li prethodnu nejednakost s $x + y + z > 0$ dobivamo traženu nejednakost.

Zadatak 4.
Neka su $x, y, z \in [-1/4, \infty\rangle$ takvi da je $x + y + z = 1$. Dokažite da vrijedi

$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1} \le \sqrt{21}.$$

Rješenje:
Treba razmisliti kako s desne strane nejednakosti dobiti broj 21. Kako je $21 = 7 \cdot 3$ potpun rastav broja 21 na proste faktore, ne nameće se puno mogućnosti. Očito ćemo 3 dobiti kao sumu jedinica, što znači da stavljamo

$$a_1 = \sqrt{4x+1}, \quad a_2 = \sqrt{4y+1}, \quad a_3 = \sqrt{4z+1}, \quad b_1 = b_2 = b_3 = 1.$$

Sada iz CSB nejednakosti slijedi:

$$\begin{aligned}(\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1})^2 &\le (4x+1+4y+1+4z+1)(1+1+1)\\ &= (4(x+y+z)+3) \cdot 3 = 7 \cdot 3 = 21\end{aligned}$$

Korjenovanjem prethodne nejednakosti slijedi:

$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1} \le \sqrt{21}.$$

Zadatak 5.
Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \ge \frac{3a+2b-c}{4}.$$

Rješenje:
Primijenimo CSB nejednakost u Engel formi na desnu stranu nejednakosti:

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \ge \frac{(a+b)^2}{a+2b+c} = a + b - \frac{(a+b)(b+c)}{a+2b+c}.$$

Iz kvadrirane AG nejednakosti i odgovarajuće primjene svojstva asocijativnosti dobivamo:

$$\left(\frac{a+2b+c}{2}\right)^2 = \left(\frac{(a+b)+(b+c)}{2}\right)^2 \ge (a+b)(b+c).$$

Iz čega dijeljenjem s $a + 2b + c$ slijedi da je:

$$\frac{(a+b)(b+c)}{a+2b+c} \le \frac{a+2b+c}{4}. \tag{2}$$

Sad kada uvrstimo u Engel formu CSB (2) i svedemo sve na zajednički nazivnik dobivamo upravo ono što smo trebali i pokazati, tj.

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \geq a + b - \frac{a+2b+c}{4} = \frac{3a+2b-c}{4}.$$

Zadatak 6.

Neka su a i b duljine kateta, a c duljina hipotenuze pravokutnog trokuta. Dokažite da vrijedi:

$$\left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right) \geq 3+2\sqrt{2}.$$

Rješenje:

Lijeva strana nejednakosti koju želimo dokazati produkt je dvaju binoma, pa slutimo da možemo koristiti CSB nejednakost.

U tu svrhu neka je $n=2$, $a_1=b_1=1$, $a_2=\sqrt{\frac{c}{a}}$, $b_2=\sqrt{\frac{c}{b}}$. Uvrštavanjem u CSB nejednakost slijedi:

$$\left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right) \geq \left(1+\sqrt{\frac{c^2}{ab}}\right)^2.$$

Kako je prema uvjetu zadatka trokut pravokutan, iz Pitagorinog teorema[2] uvrštavanjem slijedi:

$$\left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right) \geq \left(1+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{ab}}\right)^2.$$

Iz nejednakosti $(a+b)^2 \geq 0$ tj. $a^2+b^2 \geq 2ab$ uvrštavanjem se pokrati razlomak i dobivamo upravo ono što se trebalo pokazati, tj.

$$\left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right) \geq (1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}.$$

[2]Kvadrat nad hipotenuzom jednak je zbroju kvadrata nad obje katete, tj. u našin oznakama $c^2=a^2+b^2$.

Zadatak 7.
Neka su $x_1, \dots, x_n$ pozitivni realni brojevi takvi da je $x_1 + \cdots + x_n = 1$.
Dokažite da vrijedi:

$$\frac{x_1^2}{x_1+x_2} + \frac{x_2^2}{x_2+x_3} + \cdots + \frac{x_n^2}{x_n+x_1} \geq \frac{1}{2}.$$

Rješenje:
Lijeva strana nejednakosti suma je razlomaka čiji su brojnici kvadrati brojeva x_i, dok se u nazivnicima ne pojavljuju kvadrati. Pogledamo li izraz s lijeve strane CSB nejednakosti u Engel formi uočavamo sličnosti. Stavimo li $a_i = x_i, \quad b_i = x_i + x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n$ pri čemu smatramo da je $x_{n+1} = x_1$ te uvrstimo u CSB nejednakost u Engel formi, slijedi

$$\frac{x_1^2}{x_1+x_2} + \frac{x_2^2}{x_2+x_3} + \cdots + \frac{x_n^2}{x_n+x_1} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots x_n)^2}{2(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}.$$

Kako je $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$, slijedi tražena nejednakost

$$\frac{x_1^2}{x_1+x_2} + \frac{x_2^2}{x_2+x_3} + \cdots + \frac{x_n^2}{x_n+x_1} \geq \frac{1}{2}.$$

Zadatak 8.
Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} 2x + 3y6z &= 49 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 49. \end{aligned}$$

Rješenje:
Uvrstimo li u CSB nejednakost dobivamo

$$(2x + 3y + 6z)^2 \leq (2^2 + 3^2 + 6^2)(x^2 + y^2 + z^2),$$

tj.

$$\begin{aligned} (2x + 3y + 6z)^2 &\leq 49(x^2 + y^2 + z^2) \\ 49^2 &\leq 49 \cdot 49 \end{aligned}$$

Dakle, $49 = 49$.
Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6} = k, \quad k \in \mathbb{R},$$

tj.$x = 2k, \quad y = 3k, \quad z = 6k, \quad k \in \mathbb{R}$. Tada iz $2x + 3y6z = 49$ slijedi $4k + 9k + 36k = 49$, pa je $k = 1$. Dakle, uređena trojka $(2, 3, 6)$ je rješenje traženog sustava.

Zadatak 9.
Odredite realne brojeve a, b, c tako da vrijedi

$$\begin{aligned} a + b + c &= 6, \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 12. \end{aligned}$$

Rješenje:
Prema CSB nejednakosti vrijedi

$$6^2 = (a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(1^2 + 1^2 + 1^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

Dakle, $a^2 + b^2 + c^2 \geq 12$.
Jednakost vrijedi ako i samo ako je $\frac{a}{1} = \frac{b}{1} = \frac{c}{1}$, tj. za $a = b = c = 2$.

Primjeri su preuzeti iz [3] i [4].

Literatura

[1] Z. CVETKOVSKI, *Inequlities*, Springer, Berlin, 2012.

[2] S.S.DRAGOMIR, *A survey on Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz type discrete inequalities*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 4 (3) (2003), 1-142.

[3] I. ILIŠEVIĆ, *Primjena Cauchy–Schwartz–Buniakowsky-jeve nejednakosti u geometriji*, Osječki matematički list, 5 (2) (2005), 77-84.

[4] I. ILIŠEVIĆ, *Primjena Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeve nejednakosti na rješavanje algebarskih jednadžbi i sustava jednadžbi*, Osječki matematički list, 12 (1) (2012), 1-10.

[5] D. JUKIĆ, R. SCITOVSKI, *Matematika 1*, Odjel za matematiku, Osijek, 1998.

[6] D. S. MITRINOVIĆ, J. E. PEČARIĆ, A. M. FINK, *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.

[7] M. R. PENAVA, K. BOŠNJAK, *Jensenova nejednakost i nejednakiosti izvedene iz nje*, Osječki matematički list, 16 (1) (2016), 15-25.

[8] J. M. STEELE, *The Cauchy-Schwarz Master Class*, University of Pennsylvania, 2004.

[9] H. H. WU, S. WU, *Various proofs of the Cauchy-Schwarz inequality*, Octogon mathematical magazine, 17 (1) (2009), 221-229.