Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Lea Mađarić

Geršgorinovi krugovi

Završni rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Lea Mađarić

Geršgorinovi krugovi

Završni rad

Mentor: doc.dr.sc. Ivana Kuzmanović Ivičić

Osijek, 2020.

Sažetak

U ovom radu razmatramo problem približnog lociranja područja u Gaussovoj ravnini unutar kojeg leži spektar kompleksne kvadratne matrice. Za poznavanje spektra kvadratne matrice potrebno je odrediti njene svojstvene vrijednosti, a sam postupak njihovog određivanja opisan je u prvom poglavlju. Za matrice većeg reda računanje svojstvenih vrijednosti može biti vrlo zahtjevno. U nekim primjenama dovoljno je spektar samo približno locirati. Geršgorinov poznati teorem govori o tome kako sve svojstvene vrijednosti kvadratne matrice leže u krugovima, zvanim Geršgorinovi krugovi, oko dijagonalnih elemenata. Za neke specijalne slučajeve, moguće je iskoristiti danu strukturu i odrediti još i manje krugove koji sadrže svojstvene vrijednosti od onih iz općenitog Geršgorinovog rezultata. Tvrdnje su potkrijepljene primjerima koji vjerno prikazuju sadržaj Geršgorinovih teorema.

Ključne riječi: kvadratna kompleksna matrica, svojstvena vrijednost, spektar matrice, lociranje spektra, Geršgorinov krug, Geršgorinov teorem

Abstract

In this paper, we consider the problem of determining a subset of the complex plane which contains all eigenvalues of the given complex matrix.To know the spectrum of a square matrix, it is necessary to determine its eigenvalues, and the procedure for their determination is described in the first chapter. For higher order matrices, the calculation of eigenvalues can be very demanding. In some applications, it is sufficient to locate the spectrum only approximately. Gershgorin's well-known theorem states that all eigenvalues of a square matrix lie in disks, called Gershgorin disks, around the diagonal elements. For some special cases, it is possible to use a given structure and determine even smaller circles that contain eigenvalues than those from the general Gershgorin result. The claims are supported by examples that faithfully illustrate the content of Gershgorin's theorems.

Key words: square complex matrix, eigenvalue, spectrum of a matrix, spectrum location, Gershgorin's disk, Gershgorin's theorem

Sadržaj

1 Uvod s motivacijom

U ovom radu bavit ćemo se svojstvenim vrijednostima i njihovim lociranjam pomoću Geršgorinovih krugova. Na samom početku, u prvom poglavlju dotičemo se definicije svojstvenih vrijednosti, te njihova problema koji ima veliko teorijsko značenje i vrlo široku primjenu. Vidjet ćemo kako, kod kvadratnih matrica, upravo svojstvene vrijednosti predstavljaju najvažniji podatak o njima, koji nam dalje koristi u rješavanju problema. Ako je matrica dijagonalna ili trokutasta, svojstvene vrijednosti su dijagonalni elementi. Za ostale tipove matrica, svojstvene vrijednosti potrebno je računati. Na primjer, ovaj problem svojstvenih vrijednosti od velike je važnosti u rješavanju diferencijalnih jednadžbi i analiziranju modela rasta populacije. Nadalje, uvodimo pojam svojstvenog vektora te postupka njegovog izračunavanja. Njegovi primjenu možemo pronaći u raznim područjima znanosti poput fizike, sociologije, ekonomije i statistike. Nakon što smo definirali pojam svojstvene vrijednosti i svojstveng vektora, slijedi definiranje karakterističnog polinoma koji je ključan pri izračunavanju svojstvene vrijednosti i svojstvenog vektora. Postupak računanja svojstvenih vrijednosti nije uvijek jednostvan, čak štoviše može biti vrlo zahtjevan, posebno kod matrica koje su većeg reda. Ovisno o tome što pojedini zadatak zahtijeva od nas, za njegovo rješavanje ponekad je dovoljno samo približno locirati svojstvene vrijednosti. Kako smo već naveli, svojstvene vrijednosti dijagonalne matrice vrlo je lako locirati i one su neprekidne funkcije, pa je prirodno pitati se može li nam bilo koja od njih reći nešto korisno o svojstvenim vrijednostima matrice koja je gotovo dijagonalna, u smislu da među njenim dijagonalnim elementima na neki način dominira glavni dijagonalni element. Takve matrice najčešće susrećemo u računanju velikih sustava homogenih jednadžbi. U drugom poglavlju opisujemo jednostavne kriterije koji su dovoljni kako bi osigurali da svojstvene vrijednosti dane matrice budu uključene u skupove poput zadane poluravnine, kruga ili zraka. O tim skupovima nam govore Geršgorinovi teoremi (ime dobili po ruskom matematičaru Semjonu Aranoviću Geršgorinu). Teoremi predstavljaju temeljni rezultat u lociranju svojstvenih vrijednosti kvadratne matrice. Oni nam govore da sesve svojstvene vrijednosti nalaze u krugovima oko dijagonalnih elemenata, drugim riječima za danu $n \times n$ kompleksnu matricu jednostavne aritmetičke operacije nad elementima matrice daju n kružnica u kompleksnoj ravnini čija unija sadrži sve svojstvene vrijednosti spomenute matrice. Naime, kada je matrica nenegativna i ima višestruku svojstvenu vrijednost, tada ta svojstvena vrijednost leži na krugovima manjeg radijusa oko dijagonalnog elementa. Danas se Geršgorinovi teoremi koriste kao dobro poznata tehnika za riješavanje problema u Linearnoj algebri i još uvijek se spominju u različitimistraživačkim područjima, čak i nakon dugo vremena a to nam upravo pokazuje veličinu njihove važnosti.

2 Svojstvene vrijednosti matrica

Matricu $A \in \mathbf{M_n}$ možemo smatrati linearnom transformacijom iz $\mathbb{C}^n$ u $\mathbb{C}^n$, $A : x \to Ax$, također ovo možemo promatrati kao niz brojeva. Međusobni odnos ova dva koncepta od A i ono što nam niz brojeva govori o linearnoj transformaciji je središnja tema matrične analize. Temeljni koncept u matričnoj analizi je skup svojstvenih vrijednosti kvadratne matirce. Algebarska definicija vrijednosti λ matrice A kao skalara za kojeg je, s nekim vektorom x različitim od nul-vektora, ispunjeno $Ax = \lambda x$ povlači algebarsku karakterizaciju svojstvenih vrijednosti kao nultočaka određenog polinoma. Kako $(A - \lambda I)x = 0$ i $x \neq 0$ povlače da $(A - \lambda I)$ ima netrivijalnu jezgru, tj. da je ona singularna, odmah je $det(A - \lambda I) = 0$. Iz definicije determinante je odmah jasno da je $det(\lambda I - A)$ polinom stupnja n u varijabli λ,

$$det(\lambda - A) = det\begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1,n-1} & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2,n-1} & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1,1} & & \lambda - a_{n-1,n-1} & -a_{n-1,n} & \\ -a_{n1} & \dots & \dots & -a_{n,n-1} & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}$$

$= \lambda^n - trag(A)\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n det(A)$

Definicija 2.1. *Neka je $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Ako skalar λ i nenul vektor x zadovoljavaju jednadžbu*

$$x = \lambda x, x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0, \lambda \in \mathbb{C} \tag{2.1}$$

tada se λ naziva svojstvena vrijednost matrice A, a x se naziva svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ matrice A.

Skalar λ i vektor x u predhodnoj definiciji javljaju se uvijek u paru.

Treba primjetiti da svojstveni vektor x iz navedene definicije nikako nije jedinstven: ako je x svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ onda je αx svojstveni vektor pridružen istoj svojstvenoj vrijednosti i to za svaki skalar $\alpha \neq 0$.

Ponekad struktura matrice olakšava izračunavnaje karakterističnog polinoma matrice. To je slučaj kod dijagonalnih ili trokutastih matrica.

Primjer 2.1. *Neka je $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$ dijagonalna matrica. Objasnimo zašto su bazni vektori $e_i, i = 1, \ldots, n$ svojstveni vektori od D, te s kojom je svojstvenom vrijednosti povezan pojedini svojstveni vektor.*

Znamo da su svojstvene vrijednosti dijagonalnih matrica smještene na dijagonali. Ukoliko bazne vektore e_i uvrstimo u jednadžbu 2.1 iz definicije 2.1, slijedi da skalari d_i i bazni vektori e_i zadovoljavaju danu jednadžbu. S toga, zaključujemo da su bazni vektori upravo svojestveni vektori dijagonalne matrice D, te da parovi (d_i, e_i), za svaki $i = 1, \ldots, n$ čine par svojstvena vrijednost-svojstveni vektor.

Definicija 2.2. *Skup svih svojstvenih vrijednosti $\lambda \in \mathbb{C}$ matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ naziva se spektar od A i označava se sa $\sigma(A)$.*

Jednadžbu iz Definicije 2.1 možemo zapisati u obliku $\lambda x - Ax = (\lambda I - A)x = 0$, kao homogeni sustav linearnih jednadžbi. Ako taj sustav ima netrivijalno riješenje, tada je λ svojstvena vrijednost od A, a matrica $\lambda I - A$ je singularna. Suprotno, ako je $\lambda \in \mathbb{C}$ i $\lambda I - A$ singularna, onda postoji nenul-vektor x takav da je $(\lambda I - A)x = 0$, pa je $Ax = \lambda x$, tj. λ i x čine par svojstvena vrijednost-svojstveni vektor od A.

Definicija 2.3. *Za $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ svojstveni ili karakteristični polinom je definiran s*

$$k_A(\lambda) = det(\lambda I - A) \tag{2.2}$$

Teorem 2.4. *Skalar $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ je svojstvena vrijednost matrice A ako i samo ako je $k_A(\lambda_0) = 0$*

Dokaz. λ je svojstvena vrijednost matrice A ako i samo ako postoji $x \neq 0$ takav da je $(A - \lambda I)x = 0$. To je ekvivalentno uvjetu da je $A - \lambda I$ singularna, što je opet ekvivalentno činjenici da je $det(A - \lambda_0 I) = 0$. □

Primjer 2.2. *Promotrimo matricu*

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{M_2}.$$

Karakteristični polinom pripadne matrice A je

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 7 - \lambda & -2 \\ 4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (7 - \lambda)(1 - \lambda) + 15 = \lambda^2 - 8\lambda + 15.$$

Svojstvene vrijednosti su nultočke karakterističnog polinom matrice pa rješavamo jednadžbu

$$\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$$

te dobivamo svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 3$ *i* $\lambda_2 = 5$. *Iz uvjeta* $Ax = \lambda x$ *računamo svojstvene vektore za pripadne svojstvene vrijednosti. Svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti* $\lambda_1 = 3$ *je*

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Nadalje, za svojstvenu vrijednost $\lambda_2 = 5$ *pripadni svojstveni vektor je*

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Kako polinom stupnja n ima općenito n nultočaka, zaključujemo da će i matrica reda n imati n svojstvenih vrijednosti.

Teorem 2.5. *Matrica* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *ima* n *svojstvenih vrijednosti koje su općenito kompleksni brojevi i koje brojimo kao nultočke* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *karakterističnog polinoma* $k_A(\lambda)$, *zajedno sa kratnostima. Vrijedi formula*

$$det(\lambda I - A) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i) \tag{2.3}$$

Specijalno je

$$trag(A) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i, \; det(A) = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i \tag{2.4}$$

Dokaz. Na početku ovog poglavlja diskutirali smo da za karakteristični polinom vrijedi

$$det(\lambda I - A) = \lambda^n - trag(A)\lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^n det(A).$$

Kako smo karakteristični polinom zapisali kao polinom n-tog stupnja u varijabli λ, a iz pretpostavke teorema $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ su nultočke karakterističnog polinoma, možemo pisati

$$det(\lambda I - A) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i).$$

Specijalno, za $\lambda = 0$ dobijemo $det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$. Preostaje još dokazati da je trag matrice A jednak sumi svojstvenih vrijednosti te matrice. Iz

$$k_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n)$$

množenjem dobijemo izraz $-(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)$ koji stoji uz λ^{n-1}. Kako je izraz uz λ^{n-1} iz jednakosti s početka dokaza jednak $-trag(A)$ slijedi da je $trag(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$, odnosno $trag(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. $\square$

Definicija 2.6. *Neka je λ svojstvena vrijednost od A i neka je α njena kratnost kao nultočke karakterističnog polinoma k_A. Tada je α algebarska kratnost od λ.*

Korolar 2.7. *Neka je $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, sa svojstvenim vrijednostima $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Iz predhodnog Teorema odmah slijedi:*

- *Slične matrice A i $S^{-1}AS$ imaju isti karakteristični polinom pa i iste svojstvene vrijednosti*
- *Matrice A i A^T imaju iste svojstvene vrijednosti. Svojstvene vrijednosti matrica $\bar{A}$ i A^* su $\overline{\lambda_1}, \overline{\lambda_2}, \ldots, \overline{\lambda_n}$*
- *Ako je A regularna, onda su sve $\lambda_i \neq 0$ i svojstvene vrijednoti od A^{-1} su $1/\lambda_1$, $1/\lambda_2$, $\ldots$, $1/\lambda_n$*

Definicija 2.8. *Neka je $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$. Spektralni radijus matrice A je*

$$\rho(A) = max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}. \tag{2.5}$$

3 Lociranje svojstvenih vrijednosti pomoću Geršgorinovih krugova

Ponekad je dovoljno samo približno locirati svojstvene vrijednosti matrice. Na primjer, za zaključak da je matrica regularna, dovoljno je na neki način zaključiti da nula nije u njenom spektru. U nekoj drugoj situaciji može biti važna npr. činjenica da su sve svojstvene vrijednosti po modulu manje od jedan ili da su sve u lijevoj otvorenoj kompleksnoj poluravnini tj. sa strogo negativnim realnim dijelovima.

U ovom poglavlju opisujemo jednostavne kriterije koji su dovoljni da osiguraju svojstvenim vrijednostima dane matrice uključenost u skupove poput zadane poluravnine, diska ili zraka.

Definicija 3.1 (SDD matrica)**.** *Kažemo da je matirca* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *strogo dijagonalno dominantna (SDD matrica) ako je* $|A_{ii}| > \sum\limits_{j\neq i}|A_{ij}|$ *za* $i{,}j = 1, \ldots, n$.

Primjer 3.1. *Neka je dana matrica*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -8 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Lako se vidi da svaki red zadovoljava nejednakost $|A_{ii}| > \sum\limits_{j\neq i}|A_{ij}|$

$$\begin{array}{lccccccc} \textit{red } 1 & |6| & > & |-1| & + & |2| & + & |2| \\ \textit{red } 2 & |5| & > & |-1| & + & |-1| & + & |2| \\ \textit{red } 3 & |-8| & > & |1| & + & |1| & + & |5| \\ \textit{red } 4 & |3| & > & |-1| & + & |0| & + & |0| \end{array}$$

Teorem 3.2 (Nesingularnost SDD matrice)**.** *SDD matrice su uvijek ne singularne.*

Dokaz. Pretpostavimo da je matrica A SDD i singularna, tada postoji $u \in \mathbb{C}^n$ takav da je $Au = b$ pri čemu je b nulvektor, dok je u različit od nulvektora.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad b = \vec{0}$$

U vektoru u postoji "dominantan element" na mjestu i, pri čemu je njegova apsolutna vrijednost veća ili jednaka od apsolutne vrijednosti bilo kojeg drugog elementa vektora u. Nazovimo tu maksimalnu vrijednost α. Svaki element u u ne može biti α. Ukoliko je to slučaj, tada red $i - ti$ redak matrice A pomnožen s u nije 0, 0 iz b, koji je potreban kako bi b bio nulvektor. Pretpostavimo da su apsolutne vrijednosti elemenata vektora u jednake α, tj.

$$| u_1| =| u_2| = \dots =| u_n| = \alpha.$$

Pogledamo li i-tu komponent jednakosti $Au = b$

$$A_{i1}u_1 + A_{i2}u_2 + \ldots + A_{in}u_n = 0$$

uvrštavanjem pretpostavke da su sve komponente vektora u po apsolutnoj vrijednosti jednake α dobijemo da je

$$\pm A_{i1}\alpha \pm A_{i2}\alpha \pm \ldots \pm A_{in}\alpha = 0.$$

Djeljenjem prethodne jednakosti brojem α dobivamo

$$\pm A_{i1} \pm A_{i2} \pm \ldots \pm A_{in} = 0$$

što ekvivalentno možemo zapisati kao

$$|A_{i1}| =| A_{i2}| + \ldots + | A_{in}|.$$

Prethodna jednakost je u kontradikciji s pretpostavkom da je matrica A SDD, dakle svaki u_n ne može biti α.

Kako bi b_1 bio jednak 0 onda $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_{1i}u_i = 0$. Zbog $|A_{11}| > \displaystyle\sum_{j\neq i} |A_{ij}|$, tada u_1 ne može biti α.Ako u_1 ne može biti α što je onda s u_2? Iz istog razloga u_1 ne može biti α zbog dimenzije A_{ii} u retku 1 od A, u_2 ne može biti α zbog dimenzije A_{ii} u retku 2 matrice A. Ta se logika nastvalja od u_2 sve do u_n. Kao rezultat, niti jedan element u u ne može biti maksimalan element, a svi elementi u u ne mogu butu maksimalni elementi.Stoga ne postoji vektor u koji bismo moglistvoriti takav da $Au = 0$. Ako ne postoji u osim nul-vektora koji se može stvoriti takao da je $Au = 0$, tada A nije singularna što je u kontradikciji s našom pretpostvakom. $\square$

Znajući da matrica A nije singularna pod uvjetom da je SDD sada možemo iskazati i dokazati Geršgorinov teorem.

Teorem 3.3 (Geršgorinov teorem 1)**.** *Svaka svojstvena vrijednost matrice* $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ *zadovoljava* $|\lambda - A_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |A_{ij}|$, $i \in 1, \ldots, n$.

Dokaz. Pretpostavimo da je λ svojstvena vrijednost matrice A. Matrica $\lambda I - A$ je SDD ako je $|\lambda I - A| > \sum_{j \neq i} |A_{ij}|$ za svaki i. Ako Teorem 3.3 nije zadovoljen, onda je $\lambda I - A$ SDD. Ako je ona SDD, tada je nesingularna po Teoremu 3.2 i kao rezultat toga λ nije svojstvena vrijednost. Ako je λ svojstvena vrijednost tada mora vrijediti Teorem 3.3 $\square$

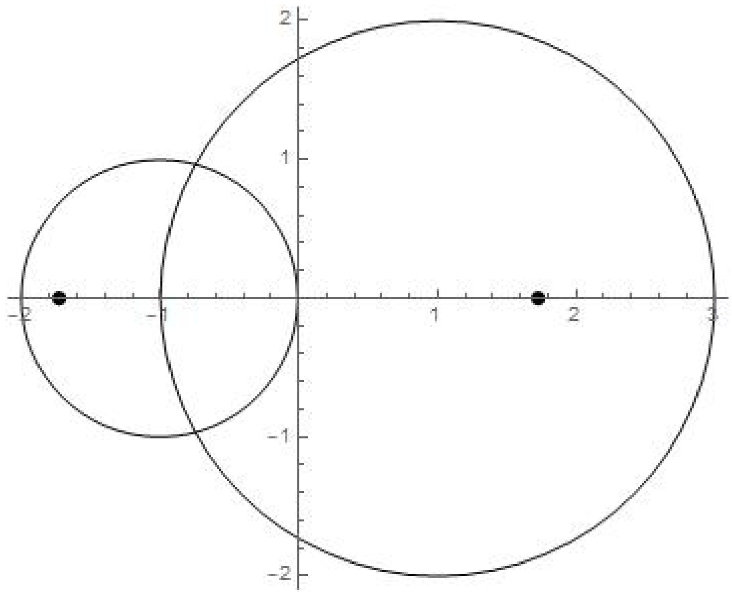
Analizirajući ovaj teorem vidimo da svaka svojstvena vrijednost matrice A mora biti na nekoj udaljenosti d od A_{ii} za neke i. Budući da su općenito svojstvene vrijednosti kompleksni brojevi možemo vizualizirati svojstvenu vrijednost kao točku u kompleksnoj ravnini, pri čemu ona mora biti unutar udaljenosti d od A_{ii} za neke i. To nas dovodi do sljedeće definicije

Definicija 3.4 (Geršgorinovi krugovi)**.** *Neka je* $d_i = \sum_{j \neq i} |A_{ij}|$ *. Tada skup* $D_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - A_{ii}| \leq d_i\}$ *nazivamo i-ti Geršgorinov krug matrice A. Radijus kruga je* d_i *i smješten je u kompleksnoj ravnini.*

Primjer 3.2. *Neka je dana matrica*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Svojstvene vrijednosti dane matrice su $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$. *Iz redova matrice A dobivamo krug radijusa 2 sa središtem u (1,0) i krug radijusa 1 sa središtem u (-1,0). Ucrtavanjem oba kruga i svojstvenih vrijednosti u kompleksnu ravninu dobivamo:*



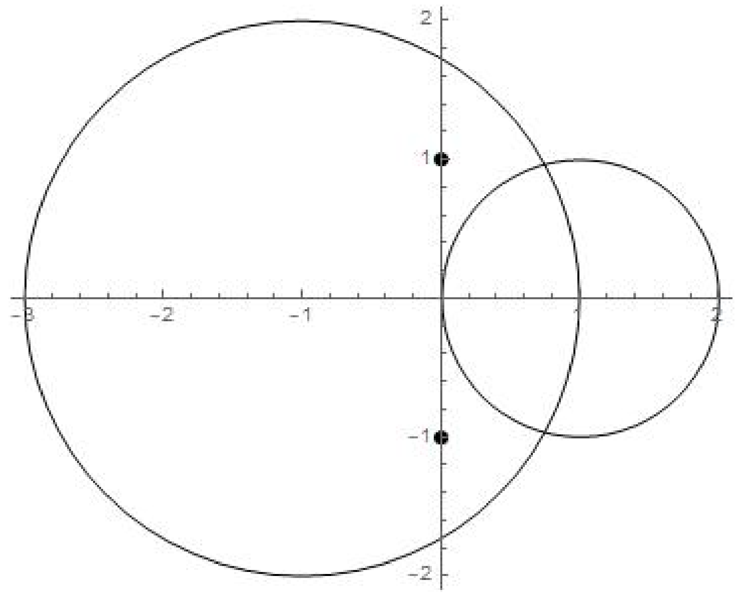
Slika 3.1

Iz Definicije 3.4 vidimo da za matricu A postoji n krugova u kompleksnoj ravnini, svaki sa središtem u jednoj od dijagonalnih vrijednosti matrice A. Iz Teorema 3.3 znamo da svaka svojstvena vrijednost mora biti unutar jednog od tih krugova, no to nam ne govori da svaki krug sadrži svojstvenu vrijednost.

Primjer 3.3. *Neka je dana matrica*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Svojstvene vrijednosti matrice su i, $-i$. *Iz redova matrice* A *dobivamo krug radijusa 1 sa središtem u (1,0) i krug radijusa 2 sa središtem u (-1,0). Ucrtavanjem oba kruga i svojstvenih vrijednosti u kompleksnu ravninu dobivamo:*



Slika 3.2

Jasno je vidljivo da se sve svojstvene vrijednosti nalaze u krugu radijusa 2, a niti jedna se ne nalazi u krugu radijusa 1.

Teorem 3.5 (Geršgorin u odnosu na stupce)**.** *Svaka svojstvena vrijednost matrice A mora ležati u Geršgorinovom krugu koji odgovara stupcima od A.*

Dokaz. Teorem 3.3 i rezultirajuća Definicija 3.4 daju nam Geršgorinove krugove koji odgovaraju redovima matrice A, gdje je A matrica čije svojstvene vrijednosti tražimo. Ako transponiramo matricu A tada redovi matrice A postaju stupci matrice A^T. Znamo da matrice A i A^T imaju iste svojstvene vrijednosti, dodatno matrica A^T mora zadovoljavati Teorem 3.3. Uzimajući u obzir sve to, dobivamo skup svojstvenih vrijednosti koje su i u A i u A^T. Budući da redovi od A^T odgovaraju stupcima od A, svojstvene vrijednosti padaju unutar Geršgorinovih krugova koji odgovaraju stupcima matrice A zbog toga što A^T zadovoljava Teorem 3.3. $\square$

Sada smo došli do jednog od najzanimljivijih svojstava Geršgorinovih krugova.

Teorem 3.6 (Geršgorinovi teorem 2)**.** *Svojstvene vrijednosti matrice A nalaze se u uniji Geršgorinovih krugova*

$$G(A) = \bigcup_{i=1}^{n} \{z \in \mathbb{C} : |z - A_{ii}| \leq d_i\} \tag{3.1}$$

Nadalje, ako unija k od n krugova iz $G(A)$ tvori skup $G_k(A)$ koji je disjunktan s preostalim $n-k$ krugova, tada $G_k(A)$ sadrži točno k svojstvenih vrijednosti matrice A.

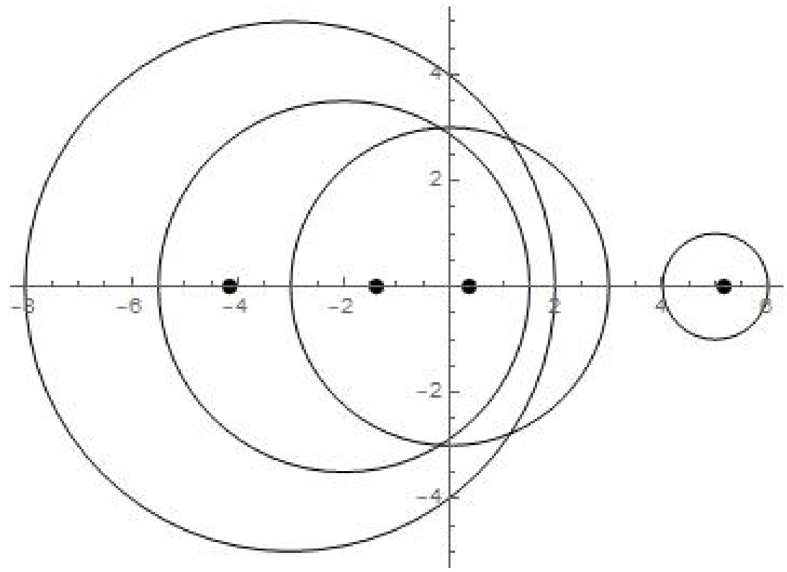
Dokaz. Za dokaz vidjeti [1]

□

Primjer 3.4. *Promatrajmo matricu*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1.5 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Svojstvene vrijednosti matrice A su približno 5.17, −4.15, −1.38, *i* 0.35. *Iz retka matrice A dobivamo krug polumjera 1 sa središtem (5,0), krug radijusa 3 sa središtem u (0,0), krug radijusa 3.5 sa središtem u (-2,0) i krug radijusa 5 sa središtem u (-3,0). Ucrtavanjem dobivenih krugova i svojstvenih vrijednosti u kompleksnu ravninu dobivamo:*



Slika 3.3

Kao što možemo vidjeti postoji grupa $G1$ sastoji se od jednog kruga sa središtem u (5,0) i unutar te grupe postoji jedna svojstvena vrijednost. U većoj grupi, $G2$ nalaze se četiri kruga i unutar te grupe postoje četiri svojstvene vrijednosti.

Teorem 3.7 (Realni disjunktni Geršgorinovi krugovi)**.** *Ako matrica A ima disjunktan Geršgorinov krug, P, stvoren iz reda sa realnim dijagonalnim elementima, tada je svojstvena vrijednost unutar kruga P realna.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ i λ njezina svojstvena vrijednost koja se nalazi unutar kruga P stvorenog iz reda koji ima realan dijagonalni element. Neka je P disjunktan Geršgorinov krug. Ako je $\lambda = x + iy$, gdje su x, y različiti od nule i relani brojevi, tada je druga svojstvena vrijednost od A $\lambda_1 = x - iy$. Budući da je λ_1 jednako udaljen od središta kruga kao i λ, proizlazi da je λ_1 u krugu P. Međutim, to znači da postoje dvije svojstvene vrijednosti unutar izoliranog Geršgorinovog kruga P s obzirom da je njegovo središte na realnoj osi. To je u kontradikciji s Teoremom 3.6 i stoga mora vrijediti Teorem 3.7. $\square$

Literatura

[1] R. A. Horn, C. R. Johanason, Matrix analysis, Second edition, Cambridge university Press, 2013.

[2] Z. Drmač, Numerička matematika, https://web.math.pmf.unizg.hr/ drmac/na001.pdf

[3] S. Brakken-Thal, Gershgorin's Theorem for Estimating Eigenvalues, http://buzzard.ups.edu/courses/2007spring/projects/brakkenthal-paper.pdf

[4] I. Bárány, J. Solymosi, Gershgorin disk for multiple eigenvalues of non-negative matrices, https://discovery.ucl.ac.uk/id/eprint/1518381/1/B%C3%A1r%C3%A1ny _gersh0922.pdf

[5] Control techniques, https://shodhganga.inflibnet.ac.in/bitstream/10603/31645/13/13_chapter%203.pdf

[6] J. Kovačević, J. Mandić, T. Vučičić, Geršgorinova lokacija spektra i primjene, Osječki matematički list, Vol. 14 No. 1, 2014., str. 35-50, https://hrcak.srce.hr/124965