Strukturna teorija za normalne operatore

Mercvajler, Karla

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Karla Mercvajler

Strukturna teorija za normalne operatore

Diplomski rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Karla Mercvajler

Strukturna teorija za normalne operatore

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2020.

Sadržaj

Uvod **1**

1. Osnovni pojmovi **2**

2. Hermitski adjungiran operator **5**

2.1 Matrica hermitski adjungiranog operatora 7

3. Normalni operatori **9**

3.1 Unitarna dijagonalizacija 9

3.2 Definicija normalnih operatora 10

3.3 Samoadjungirani operatori 11

3.4 Unitarni operatori 13

4. Struktura normalnih operatora **14**

4.1 Matrični zapis 18

5. Ortogonalna projekcija **19**

6. Ortogonalna dekompozicija jedinice **22**

7. Spektralni teorem **24**

Literatura **27**

Sažetak **28**

Summary **29**

Životopis **30**

Uvod

Svrha ovog rada je proučavati strukturu posebne vrste linearnih operatora na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru. Sastoji se od nekoliko poglavlja kroz koja ćemo se upoznati s normalnim operatorima te nekim njihovim specijalnim slučajevima. Rad je organiziran na sljedeći način.

Na početku rada ćemo definirati i objasniti neke osnovne pojmove. Kako bismo mogli definirati normalne operatore u drugom poglavlju ćemo uvesti pojam hermitski adjungiranog operatora te ćemo navesti i dokazati neka njegova svojstva. U trećem poglavlju upoznajemo se s pojmom unitarne dijagonalizacije te prelazimo na samu definiciju normalnih operatora i navodimo neka svojstva koja oni posjeduju. Na kraju poglavlja upoznajemo se sa nekim specijalnim slučajevima ovih operatora. U četvrtom poglavlju dokazujemo Strukturni teorem za normalne operatore na konačnodiomenzionalnom prostoru, posebno za kompleksni i posebno za realni slučaj. Na kraju poglavlja formuliramo njegovu matričnu verziju. U petom poglavlju se bavimo ortogonalnim projekcijama i dokazujemo njihovu karakterizaciju. U šestom poglavlju promatrat ćemo dekompoziciju jedinice te dajemo uvijet da je ona ortogonalna ako su svi projektori ortogonalni. Nadalje, pogledat ćemo vezu između rastava prostora V na ortogonalnu direktnu sumu i ortogonalne dekompozicije jedinice. U zadnjem dijelu rada upoznajemo se sa spektralnom dekompozicijom te ćemo navesti i dokazati Spektralni teorem za normalne operatore.

1. Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju definiramo osnovne pojmove koje ćemo koristiti u radu.

Definicija 1.1. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$.* **Skalarni produkt** *na V je preslikavanje $\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ koje ima sljedeća svojstva:*

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\forall x \in V$,
2. $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$,
3. $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$, $\forall x_1, x_2, y \in V$,
4. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}$, $\forall x, y \in V$,
5. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, $\forall x, y \in V$.

Vektorski prostor na kojem je definiran skalarni produkt zove se **unitaran prostor**.

Definicija 1.2. *Neka je V unitaran prostor. Kaže se da su vektori x i y iz V* **međusobno okomiti** *ili* **ortogonalni** *(oznaka: $x \perp y$) ako je*

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

Konačan skup vektora $\{e_1, \ldots, e_k\}$ je ortogonalan ako je $e_i \perp e_j$, $\forall i \neq j$. Skup $\{e_1, \ldots, e_k\}$ je ortonormiran ako je ortogonalan i ako je $\|e_i\| = 1$, $\forall i = 1, \ldots, k$.

Posebno, svaki ortonormiran skup je linearno nezavisan. Ortonormiran skup koji je baza od V zove se **ortonormirana baza** od X.

Ako su V i W vektorski prostori, svako preslikavanje $A : V \to W$ zove se **operator**.

Definicija 1.3. *Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Preslikavanje $A : V \to W$ zove se* **linearan operator** *ako vrijedi $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$, $\forall x, y \in V$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$.*

Skup svih linearnih operatora sa V u W označavamo sa $\mathcal{L}(V, W)$, a skup svih linearnih operatora sa V u V sa $\mathcal{L}(V)$.

Definicija 1.4. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $A \in \mathcal{L}(V)$. Kaže se da je skalar $\lambda_0 \in \mathbb{F}$* **svojstvena vrijednost** *operatora A ako postoji vektor $x \in V$, $x \neq 0$, takav da je $Ax = \lambda_0 x$. Skup svih svojstvenih vrijesdnosti operatora A naziva se* **spektar** *(operatora A) i označava sa $\sigma(A)$.*

Definicija 1.5. *Neka je $A : V \to W$ linearan operator. Potprostori*

$$ImA = A(V) = \{Av : v \in V\} \leq W$$

i

$$KerA = A^{-1}(\{0\}) = \{x \in V : Ax = 0\} \leq V$$

zovu se slika, odnosno jezgra operatora A. Kad su V i W konačnodimenzionalni, rang i defekt operatora A definiraju se kao brojevi

$$r(A) = dim(ImA),$$

odnosno

$$d(A) = dim(KerA).$$

Definicija 1.6. *Neka je V vektorski prostor nad poljem Φ* [1]*. Vektorski prostor $\mathcal{L}(V, \Phi)$ zove se* **dualni prostor** *prostora V, a njegovi elementi, linearni operatori s V u Φ, nazivaju se* **linearni funkcionali**.

Teorem 1.1 (Rieszov teorem o reprezentaciji funkcionala)**.** *Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor nad poljem Φ. Za svaki $f \in \mathcal{L}(V, \Phi)$ postoji jedinstveni $y \in V$ tako da je $f(x) = \langle x, y \rangle$, $\forall x \in V$. Nadalje, $\|y\| = \|f\|$.*

Definicija 1.7. *Neka je V vektorski prostor. Kažemo da je V* **direktna suma** *familije $\mathcal{F} = \{S_i : i \in K\}$ potprostora* [2] *od V ako se svaki vektor $v \in V$ može na jedinstven način zapisati kao konačna suma vektora potprostora iz $\mathcal{F}$. Odnosno, ako je $\forall v \in V$*

$$v = u_1 + \cdots + u_n$$

za $u_i \in S_i$ i nadalje, ako je

$$v = w_1 + \cdots + w_m$$

gdje je $w_i \in S_i$, onda je $m = n$ i $w_i = u_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Ako je $\mathcal{F} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ konačna familija, pišemo

$$V = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n.$$

Definicija 1.8. *Neka je V unitaran prostor i M potprostor od V.* **Ortogonalni komplement** *potprostora M je $M^{\perp} = \{x \in V : \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in M\}$.*

Definicija 1.9. *Neka je V unitaran prostor i neka su $S_1, \ldots, S_n$ potprostori od V. Kažemo da je V* **ortogonalna direktna suma** *od $S_1, \ldots, S_n$, u zapisu*

$$S = S_1 \odot \cdots \odot S_n,$$

ako vrijedi:

1. $V = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$,
2. $S_i \perp S_j$, *za* $i \neq j$.

Teorem 1.2. *Neka je V unitaran prostor. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne.*

1. $V = S \odot T$,
2. $V = S \oplus T$ *i* $T = S^{\perp}$,
3. $V = S \oplus T$ *i* $T \subseteq S^{\perp}$.

[1] Polje Φ je vektorski prostor nad samim sobom dimenzije 1.

[2] Potprostor vektorskog prostora V je podskup $M \subseteq V$ koji je i sam vektorski prostor nad istim poljem s obzirom na iste operacije.

Pod pojmom **polinom** podrazumijevamo izraze oblika

$$P = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \alpha_n X^n \quad \text{gdje su} \quad \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K.$$

Polinom P zove se **normiran**, ako je $P \neq 0$, tj. $m = degP \geq 0$, i ako je $a_m = 1$.

Definicija 1.10. *Neka je $\mathbb{F}[x]$ skup svih polinoma u jednoj varijabli s koeficijentima iz $\mathbb{F}$. Kažemo da je polinom $P \in \mathbb{F}[x]$* **ireducibilan polinom**, *ako je deg $P > 0$ i ako ne postoje nekonstantni polinomi A i B takvi da je $P = AB$.*

Definicija 1.11. *Ako je V lijevi (desni) R-modul, $W \subseteq V$ se zove* **podmodul** *ako je W modul s obzirom na iste operacije, tj W je podgrupa*

$$v, w \in W \implies v - w \in W$$

i vrijedi

$$a \in R,\ v \in W \implies av \in W.$$

Definicija 1.12. *Podmodul generiran podskupom S podmodula M je skup svih linearnih kombinacija elemenata iz S:*

$$\langle S \rangle = \{r_1 v_1 + \cdots + r_n v_n : r_i \in R, v_i \in S, n \geq 1\}.$$

Ako je $\tau \in \mathcal{L}(V)$, na V nećemo gledati samo kao na vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, nego i kao na modul nad $\mathbb{F}[x]$ pri čemu je množenje skalarom definirano sa $p(x)v = p(\tau)(v)$. Pisat ćemo V_τ da naglasimo ovisnost o τ.

Teorem 1.3. *Podskup $S \subseteq V$ je podmodul od V_τ ako i samo ako je S τ-inavrijantan potprostor od V.*

Definicija 1.13. *Neka je $\tau \in \mathcal{L}(V)$. Jedinstveni normirani red od V_τ naziva se* **minimalni polinom** *za τ i označava se s $m_\tau(x)$.*

2. Hermitski adjungiran operator

U svrhu definiranja normalnih operatora uvest ćemo pojam hermitski adjungiranog operatora. Tokom cijelog poglavlja pretpostavit ćemo da su svi vektorski prostori konačnodimenzionalni.

Teorem 2.1. *Neka su V i W konačnodimenzionalni unitarni prostori nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$. Tada postoji jedinstvena funkcija $\tau^* : W \to V$ definirana izrazom*

$$\langle \tau(v), w \rangle = \langle v, \tau^*(w) \rangle$$

za svaki $v \in V$ i $w \in W$. Ovako definirana funkcija nalazi se u $\mathcal{L}(W, V)$ i zove se hermitski adjungiran operator operatora τ.

Dokaz: Fiksirajmo $w \in W$ i promotrimo preslikavanje $\theta_w : V \to \mathbb{F}$ definirano s

$$\theta_w(v) = \langle \tau(v), w \rangle.$$

Očito smo dobili linearan funkcional na V i zato prema Rieszovom teoremu o reprezentaciji postoji jedinstveni vektor $x \in V$ takav da je

$$\theta_w(v) = \langle v, x \rangle$$

za svaki $v \in V$. Stoga, ako je $\tau^*(w) = x$ onda je

$$\langle \tau(v), w \rangle = \langle v, \tau^*(w) \rangle$$

za svaki $v \in V$. Preostaje nam pokazati da je τ^* linearno. Uzmimo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ i $w_1, w_2 \in W$, te proizvoljan $v \in V$. Jasno je da vrijedi

$$\begin{aligned}
\langle v, \tau^*(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) \rangle &= \langle \tau(v), \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \rangle \\
&= \overline{\lambda_1} \langle \tau(v), w_1 \rangle + \overline{\lambda_2} \langle \tau(v), w_2 \rangle \\
&= \overline{\lambda_1} \langle v, \tau^*(w_1) \rangle + \overline{\lambda_2} \langle v, \tau^*(w_2) \rangle \\
&= \langle v, \lambda_1 \tau^*(w_1) + \lambda_2 \tau^*(w_2) \rangle.
\end{aligned}$$

Ako ovaj posljednji izraz oduzmemo od početnog, dobivenu jednakost možemo zapisati kao

$$\langle v, \tau^*(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) - \lambda_1 \tau^*(w_1) + \lambda_2 \tau^*(w_2) \rangle = 0.$$

Kako ova jednakost vrijedi za svaki vektor $v \in V$, posebno vrijedi i za

$$v = \tau^*(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) - \lambda_1 \tau^*(w_1) + \lambda_2 \tau^*(w_2),$$

a tada definicija skalarnog produkta povlači

$$\tau^*(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) - \lambda_1 \tau^*(w_1) + \lambda_2 \tau^*(w_2) = 0.$$

Dakle, $\tau^* \in \mathcal{L}(W, V)$. $\square$

Prema prethodnom teoremu, svaki operator na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru posjeduje hermitski adjungiran operator. Ponekad se taj operator kraće naziva adjungirani operator. Obično se smatra da radimo nad poljem kompleksnih brojeva i tada umjesto adjungirani operator možemo reći i hermitski konjugirani operator.

U sljedećem teoremu navesti ćemo i dokazati nekoliko osnovnih svojstava.

Teorem 2.2. *Neka su V i W konačnodimenzionalni unitarni prostori nad poljem $\mathbb{F}$. Za svaki $\sigma, \tau \in \mathcal{L}(V, W)$ i $\lambda \in \mathbb{F}$ vrijede sljedeća svojstva:*

1. $(\sigma + \tau)^* = \sigma^* + \tau^*$,
2. $(\lambda\tau)^* = \overline{\lambda}\tau^*$,
3. $\tau^{**} = \tau$,
4. *Ako je $V = W$ onda je $(\sigma\tau)^* = \tau^*\sigma^*$.*

Dokaz:

1. Neka su x i y proizvoljni vektori iz V, odnosno W. Tada je

$$\begin{aligned}\langle(\sigma+\tau)^*(x), y\rangle &= \langle x, (\sigma+\tau)(y)\rangle = \langle x, \sigma(y)+\tau(y)\rangle = \langle x, \sigma(y)\rangle + \langle x, \tau(y)\rangle \\ &= \langle \sigma^*(x), y\rangle + \langle \tau^*(x), y\rangle = \langle(\sigma^*+\tau^*)(x), y\rangle.\end{aligned}$$

   Slijedi $(\sigma+\tau)^*(x) = (\sigma^*+\tau^*)(x)$ te je stoga

$$(\sigma+\tau)^* = \sigma^* + \tau^*.$$

2. Neka su x i y proizvoljni vektori iz V, odnosno W. Tada je

$$\langle x, (\lambda\tau)^*(y)\rangle = \langle \lambda\tau(x), y\rangle = \lambda\langle\tau(x), y\rangle = \lambda\langle x, \tau^*(y)\rangle = \langle x, \overline{\lambda}\tau^*(y)\rangle.$$

   Slijedi $(\lambda\tau)^*(y) = \overline{\lambda}\tau^*(y)$ te je stoga

$$(\lambda\tau)^* = \overline{\lambda}\tau^*.$$

3. Kako je $\tau^* \in \mathcal{L}(W, V)$ znamo da je njegov adjungirani operator $(\tau^*)^* : V \to W$ definiran. Neka je x proizvoljan vektor iz V. Tada je

$$\langle(\tau^*)^*(x), y\rangle = \overline{\langle y, (\tau^*)^*(x)\rangle} = \overline{\langle \tau^*(y), x\rangle} = \langle x, \tau^*(y)\rangle = \langle \tau(x), y\rangle$$

   za svaki $y \in W$. Slijedi $(\tau^*)^*(x) = \tau(x)$ te je stoga

$$(\tau^*)^* = \tau.$$

4. Neka su x i y proizvoljni vektori iz V. Tada je

$$\langle \sigma\tau(x), y\rangle = \langle \tau(x), \sigma^*(y)\rangle = \langle x, \tau^*\sigma^*(y)\rangle.$$

   Kako je adjungirani operator operatora $\sigma\tau$ jedinstven i kako prethodna jednakost pokazuje da svojstvo tog operatora ima operator $\tau^*\sigma^*$, to mora biti

$$(\sigma\tau)^* = \tau^*\sigma^*.$$

$\square$

Povežimo sada jezgru i sliku linearnog operatora i njegovog adjungiranog operatora.

Teorem 2.3. *Neka su V i W konačnodimenzionalni unitarni prostori nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $\tau \in \mathcal{L}(V, W)$. Tada*

1. $Ker(\tau^*) = Im(\tau)^\perp$,
2. $Im(\tau^*) = Ker(\tau)^\perp$,
3. *τ je injekcija ako i samo ako je τ^* surjekcija,*
4. *τ je surjekcija ako i samo ako je τ^* injekcija,*
5. $Ker(\tau^*\tau) = Ker(\tau)$,
6. $Ker(\tau\tau^*) = Ker(\tau^*)$,
7. $Im(\tau^*\tau) = Im(\tau^*)$,
8. $Im(\tau\tau^*) = Im(\tau)$.

Dokaz: Vidjeti [5, str. 229]. □

2.1 Matrica hermitski adjungiranog operatora

Neka je $A = \alpha_{ij} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ proizvoljna matrica. Za matricu $B = \beta_{ij} \in \mathcal{M}_{n\times m}$ za koju vrijedi $\beta_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$ kažemo da je hermitski adjungirana matrici A i označavamo s A^*. Tada je

$$A^* = (\overline{\alpha_{ij}})^\top.$$

Neka su V i W unitarni vektorski prostori te neka su $b = (b_1, \ldots, b_n)$ i $c = (c_1, \ldots, c_m)$ redom ortonormirane baze za njih. Svakom linearnom operatoru $A \in \mathcal{L}(V, W)$ možemo pridružiti matricu u paru baza b i c. Kako je $A^* \in \mathcal{L}(W, V)$ imamo matrični zapis operatora A^* u paru baza b i c. Možemo pisati:

$$\begin{cases} A^*c_1 = \beta_{11}b_1 + \beta_{21}b_2 + \cdots + \beta_{n1}b_n \\ A^*c_2 = \beta_{12}b_1 + \beta_{22}b_2 + \cdots + \beta_{n2}b_n \\ \vdots \\ A^*c_m = \beta_{1m}b_1 + \beta_{2m}b_2 + \cdots + \beta_{nm}b_n \end{cases}$$

te na taj način operatoru A^* pridružujemo matricu

$$[A^*]_{b,c} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \ldots & \beta_{nm} \end{bmatrix}$$

Kako su b i c ortonormirane baze, za α_{ij} iz matričnog zapisa linearnog operatora A u paru baza (c, b) vrijedi:

$$\begin{aligned}\alpha_{ij} &= \alpha_{ij}\langle c_i, c_i\rangle \\ &= \langle \alpha_{ij}c_i, c_i\rangle \\ &= \langle \alpha_{1j}c_1 + \alpha_{2j}c_2 + \cdots + \alpha_{mj}c_m, c_i\rangle \\ &= \langle Ab_j, c_i\rangle, \quad i=1,\ldots, m,\ j=1,\ldots, n.\end{aligned}$$

Analogno za β_{ij} imamo

$$\beta_{ij} = \langle A^*c_j, b_i\rangle, \quad i=1,\ldots, n,\ j=1,\ldots, m.$$

Slijedi,

$$\beta_{ij} = \langle A^*c_j, b_i\rangle = \langle c_j, Ab_i\rangle = \overline{\langle Ab_i, c_j\rangle} = \overline{\alpha_{ji}}, \quad i=1,\ldots, n,\ j=1,\ldots, m.$$

Time smo dokazali sljedeću propoziciju.

Propozicija 2.1. *U paru ortonormiranih baza b i c, matrica $[A^*]_{b,c}$ operatora A^* je hermitski adjungirana matrici $[A]_{c,b}$, tj. vrijedi*

$$[A^*]_{b,c} = [A]^*_{c,b}.$$

3. Normalni operatori

3.1 Unitarna dijagonalizacija

Neki linearni operatori $\tau \in \mathcal{L}(V)$ imaju svojstvo da postoji neka baza prostora V u kojoj je matrični zapis operatora τ dijagonalna matrica. Takve operatore ćemo zvati dijagonalizabilni operatori. Linearni operator $\tau \in \mathcal{L}(V)$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V je dijagonalizabilan ako i samo ako V ima bazu koja se sastoji isključivo od svojstvenih vektora operatora τ, odnosno vektorski prostor V se može zapisati kao direktna suma svojstvenih potprostora operatora τ

$$V = \varepsilon_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \varepsilon_{\lambda_k}.$$

Svaki svojstveni potprostor ε_{λ_i} ima ortonormiranu bazu, ali unija ovih baza ne mora biti ortonormirana.

Definicija 3.1. *Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i neka je $\tau \in \mathcal{L}(V)$. Ako postoji ortonormirana baza o za V za koju je $[\tau]_o$ dijagonalna matrica, kažemo da je τ unitarno dijagonalizabilan za kompleksan V te ortogonalno dijagonalizabilan za realan V.*

Radi jednostavnosti u izlaganju koristit ćemo termin unitarno dijagonalizabilan za oba slučaja. Vidimo da su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

1. τ je unitarno dijagonalizabilan.
2. Postoji ortonormirana baza za V koja se sastoji isključivo od svojstvenih vektora operatora τ.
3. V se može zapisati kao ortogonalna direktna suma svojstvenih potprostora operatora τ
$$V = \varepsilon_{\lambda_1} \odot \cdots \odot \varepsilon_{\lambda_k}.$$

Pogledajmo sada karakterizaciju ovakvih operatora. Pretpostavimo da je τ unitarno dijagonalizabilan operator i da je o ortonormirana baza koja se sastoji isključivo od svojstvenih vektora operatora τ. Tada je matrica $[\tau]_o$ dijagonalna matrica

$$[\tau]_o = \operatorname{diag}(\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_n})$$

te je

$$[\tau^*]_o = \operatorname{diag}(\overline{\lambda}_{i_1}, \ldots, \overline{\lambda}_{i_n}).$$

Očito $[\tau]_o$ i $[\tau^*]_o$ komutiraju te stoga τ i τ^* također komutiraju. Dakle,

$$\tau\tau^* = \tau^*\tau.$$

Obrat vrijedi za slučaj kompleksnog vektorskog prostora, odnosno ako τ i τ^* komutiraju, onda je τ unitarno dijagonalizabilan operator.

3.2 Definicija normalnih operatora

Definicija 3.2. *Neka je τ linearan operator na unitarnom prostoru V. Kažemo da je operator τ normalan ako vrijedi*

$$\tau\tau^* = \tau^*\tau.$$

U sljedećem teoremu ćemo vidjeti neka lijepa svojstva koja posjeduju normalni operatori.

Teorem 3.1. *Neka je $\mathcal{N}$ skup svih normalnih operatora na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru V. Tada $\mathcal{N}$ zadovoljava sljedeća svojstva:*

1. *Zatvorenost na linearne kombinacije*

$$r, s \in \mathbb{F}, \quad \sigma, \tau \in \mathcal{N} \Rightarrow r\sigma + s\tau \in \mathcal{N}.$$

2. *Zatvorenost na množenje pod pretpostavkom komutativnosti*

$$\sigma, \tau \in \mathcal{N}, \quad \sigma^*\tau = \tau\sigma^* \Rightarrow \sigma\tau \in \mathcal{N}.$$

3. *Zatvorenost na invertibilnost*

$$\tau \in \mathcal{N}, \quad \tau \text{ invertibilan} \Rightarrow \tau^{-1} \in \mathcal{N}.$$

4. *Zatvorenost na polinome*

$$\tau \in \mathcal{N} \Rightarrow p(\tau) \in \mathcal{N} \quad \text{ za svaki } \quad p(x) \in \mathbb{F}[x].$$

Štoviše, ako je $\tau \in \mathcal{N}$ tada je

5. $\tau(v) = 0 \Leftrightarrow \tau^*(v) = 0$.
6. $\tau^k(v) = 0 \Leftrightarrow \tau(v) = 0$.
7. *Minimalni polinom operatora τ je produkt različitih ireducibilnih normiranih polinoma.*
8. $\tau(v) = \lambda v \Leftrightarrow \tau^*(v) = \overline{\lambda} v$.
9. *Neka su S i T podmoduli od V_τ čiji su redovi relativno prosti. Tada je $S \perp T$.*
10. *Ako su λ i μ različite svojstvene vrijednosti od τ, onda je $\varepsilon_\lambda \perp \varepsilon_\mu$.*

Dokaz: Vidjeti [5, str. 235]. □

Prije nego raspravimo strukturu normalnih operatora definirat ćemo neke specijalne slučajeve normalnih operatora koji će imati važnu ulogu u teoriji.

Definicija 3.3. *Neka je V unitaran vektorski prostor i neka je $\tau \in \mathcal{L}(V)$.*

1. *τ je samoadjungiran (također se još naziva hermitski u kompleksnom slučaju i simetričan u realnom slučaju), ako je*

$$\tau^* = \tau.$$

2. τ *nazivamo antihermitski u kompleksnom slučaju i antisimetričan u realnom slučaju, ako je*
$$\tau^* = -\tau.$$

3. τ *nazivamo unitaran u kompleksnom slučaju i ortogonalan u realnom slučaju, ako je* τ *invertibilan i*
$$\tau^* = \tau^{-1}.$$

Ukoliko zamijenimo operator τ nekom matricom A dobivamo matrični zapis ovih definicija.
S obzirom da vrijedi

$$[\tau^*]_o = [\tau]_o^*$$

za neku ortonormiranu bazu o prostora V, ako je τ normalan tada je

$$[\tau]_o[\tau]_o^* = [\tau]_o[\tau^*]_o = [\tau\tau^*]_o = [\tau^*\tau]_o = [\tau^*]_o[\tau]_o = [\tau]_o^*[\tau]_o,$$

što implicira da je matrica $[\tau]_o$ operatora τ normalna. Vrijedi i obrat. Štoviše, možemo reći da je operator τ normalan ako i samo ako je njegov matrični zapis u ortonormiranoj bazi o normalna matrica.

3.3 Samoadjungirani operatori

Definicija adjungiranog operatora implicira da je operator τ na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru V samoadjungiran ako i samo ako je

$$\langle \tau v, w\rangle = \langle v, \tau w\rangle$$

za svaki $v, w \in V$. Razmotrimo neka svojstva samoadjungiranih operatora.

Teorem 3.2. *Neka je* $\mathcal{H}$ *skup svih samoadjungiranih operatora na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru V. Tada* $\mathcal{H}$ *zadovoljava sljedeća svojstva:*

1. *Zatvorenost na zbrajanje*
$$\sigma, \tau \in \mathcal{H} \Rightarrow \sigma + \tau \in \mathcal{H}.$$

2. *Zatvorenost na množenje realnim skalarom*
$$r \in \mathbb{R}, \quad \tau \in \mathcal{H} \Rightarrow r\tau \in \mathcal{H}.$$

3. *Zatvorenost na množenje pod pretpostavkom komutativnosti*
$$\sigma, \tau \in \mathcal{H}, \quad \sigma\tau = \tau\sigma \Rightarrow \sigma\tau \in \mathcal{H}.$$

4. *Zatvorenost na invertibilnost*
$$\tau \in \mathcal{H}, \quad \tau \text{ invertibilan} \Rightarrow \tau^{-1} \in \mathcal{H}.$$

5. *Zatvorenost na realne polinome*

$$\tau \in \mathcal{H} \Rightarrow p(\tau) \in \mathcal{H} \quad \textit{za svaki} \quad p(x) \in \mathbb{R}[x].$$

Dokaz: Vidjeti [5, str. 239]. □

Pokažimo sada da ako je normalan operator samoadjungiran onda su njegove kompleksne svojstvene vrijednosti realne. Ovo nam sugerira da je analogija skupa realnih brojeva skup samoadjungiranih operatora. Prvo ćemo vidjeti kako se ova analogija odražava na ponašanje od $\langle \tau f, f \rangle$.

Teorem 3.3. *Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i neka je $\tau \in \mathcal{L}(V)$. Tada je τ samoadjungiran operator ako i samo ako je*

$$\langle \tau f, f \rangle \in \mathbb{R}$$

za svaki $f \in V$.

Dokaz: Neka je $f \in V$. Tada je

$$\langle \tau f, f \rangle - \overline{\langle \tau f, f \rangle} = \langle \tau f, f \rangle - \langle f, \tau f \rangle = \langle \tau f, f \rangle - \langle \tau^* f, f \rangle = \langle (\tau - \tau^*) f, f \rangle.$$

Ako je $\langle \tau f, f \rangle \in \mathbb{R}$ za svaki $f \in V$, onda je lijeva strana prethodne jednakosti jednaka 0, odnosno $\langle (\tau - \tau^*) f, f \rangle = 0$ za svaki $f \in V$. To implicira da je $\tau - \tau^* = 0$. Dakle, τ je samoadjungiran operator.

Obratno, ako je τ samoadjungiran operator, onda je desna strana gornje jednakosti jednaka 0, odnosno $\langle \tau f, f \rangle = \overline{\langle \tau f, f \rangle}$ za svaki $f \in V$. To implicira da je $\langle \tau f, f \rangle \in \mathbb{R}$ za svaki $f \in V$. □

Teorem 3.4. *Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i neka je $\tau \in \mathcal{L}(V)$. Ako je τ samoadjungiran operator onda su mu sve kompleksne svojstvene vrijednosti realne.*

Dokaz: Ako je τ hermitski operator, odnosno $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, i $\tau(v) = \lambda v$ tada je

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle \tau(v), v \rangle$$

realan prema Teoremu 3.3 pa λ mora biti realan. Ukoliko je τ simetričan operator, odnosno $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, moramo biti oprezni. Ako je λ kompleksni korijen ne slijedi da je $\tau(v) = \lambda v$ za neki $v \in V, v \neq 0$. Međutim, možemo postupiti na sljedeći način. Neka je τ reprezentiran matricom A s obzirom na neku bazu prostora V. Tada je karakteristični polinom operatora τ jednak karakterističnom polinomu matrice A. A je realna simetrična matrica, ali se može smatrati kompleksnom hermitskom matricom koja ima realne vrijednosti. Kao takva reprezentira hermitski linearni operator na kompleksnom prostoru $\mathbb{C}^n$ te su stoga svi korijeni karakterističnog polinoma realni. Ali karakteristični polinom matrice A je isti, bez obzira gledali na A kao na realnu ili kompleksnu matricu, te stoga slijedi tvrdnja. □

3.4 Unitarni operatori

Unitaran operator je normalan operator koji preslikava ortonormiranu bazu u ortonormiranu bazu. Primijetimo da je operator τ unitaran ako i samo ako je

$$\langle \tau(v), w \rangle = \langle v, \tau^{-1}(w) \rangle$$

za svaki $v, w \in V$.

Teorem 3.5. *Neka je $\mathcal{U}$ skup unitarnih operatora na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru V. Tada $\mathcal{U}$ zadovoljava sljedeća svojstva:*

1. *Zatvorenost na skalarno množenje kompleksnim brojevima norme 1*

$$r \in \mathbb{C}, \quad |r| = 1 \quad i \quad \tau \in \mathcal{U} \Rightarrow r\tau \in \mathcal{U}.$$

2. *Zatvorenost na množenje*

$$\sigma, \tau \in \mathcal{U} \Rightarrow \sigma\tau \in \mathcal{U}.$$

3. *Zatvorenost na inverze*

$$\tau \in \mathcal{U} \Rightarrow \tau^{-1} \in \mathcal{U}.$$

4. *τ je unitaran ako i samo ako ortonormiranu bazu preslikava u ortonormiranu bazu.*

5. *Ako je τ unitaran, onda svojstvena vrijednost od τ ima apsolutnu vrijednost 1.*

Dokaz: Vidjeti [5, str. 241]. □

4. Struktura normalnih operatora

Pogledajmo sada strukturu normalnog operatora τ na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru.

Prema Teoremu 3.1 minimalni polinom operatora τ ima oblik

$$m_\tau(x) = p_1(x) \cdots p_n(x)$$

pri čemu su p_i različiti normirani ireducibilni polinomi. Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, onda je svaki $p_i(x)$ linearan.
To implicira da je τ dijagonalizabilan i

$$V = \varepsilon_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \varepsilon_{\lambda_k}$$

gdje su $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ različite svojstvene vrijednosti operatora τ. Teorem 3.1 nam također govori ako je $\lambda_i \neq \lambda_j$, onda je $\varepsilon_{\lambda_i} \perp \varepsilon_{\lambda_j}$, pa imamo

$$V = \varepsilon_{\lambda_1} \odot \cdots \odot \varepsilon_{\lambda_k}.$$

To je ekvivalentno tvrdnji da V ima ortonormiranu bazu svojstvenih vektora operatora τ.
Obrat također vrijedi. Doista, ako je $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ ortonormirana baza svojstvenih vektora od τ, onda je

$$\langle \tau^* u_i, u_j \rangle = \langle u_i, \tau u_j \rangle = \langle u_i, \lambda_j u_j \rangle = \overline{\lambda_j} \delta_{i,j} = \langle \overline{\lambda_i} u_i, u_j \rangle,$$

te je $\tau^* u_i = \overline{\lambda_i} u_i$. Slijedi

$$\tau \tau^* u_i = \overline{\lambda_i} \lambda_i u_i = \tau^* \tau u_i$$

odnosno τ je normalan. Time smo dokazali sljedeći teorem.

Teorem 4.1 (Strukturni teorem za normalne operatore: kompleksni slučaj)**.** *Neka je V konačnodimenzionalan kompleksan unitaran prostor. Tada je linearan operator τ na V normalan ako i samo ako V ima ortonormiranu bazu $\mathcal{B}$ koja se sastoji isključivo od svojstvenih vektora operatora τ, odnosno*

$$V_\tau = \varepsilon_{\lambda_1} \odot \cdots \odot \varepsilon_{\lambda_k}$$

pri čemu je $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ spektar od τ. Drugim riječima, τ je normalan ako i samo ako je unitarno dijagonalizabilan.

Razmotrimo sada slučaj gdje je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Primijetimo da je tada minimalni polinom operatora τ produkt različitih realnih linearnih i realnih kvadratnih faktora

$$m_\tau(x) = (x - r_1) \cdots (x - r_k) p_1(x) \cdots p_d(x)$$

gdje su r_i različiti, a $p_i(x)$ različiti realni ireducibilni kvadratni polinomi. Stoga po Teoremu 3.1 primarna dekompozicija od V_τ ima oblik

$$V_\tau = \varepsilon_{\lambda_1} \odot \cdots \odot \varepsilon_{\lambda_k} \odot W_1 \odot \cdots \odot W_s$$

gdje je $\{\lambda_1. \ldots, \lambda_k\}$ spektar operatora τ, a

$$W_i = \{v \in V : p_i(\tau)v = 0\}$$

su $\tau-$ invarijantni potprostori.
Dakle, možemo se fokusirati na potprostor $W = W_1 \odot \cdots \odot W_s$ na kojem je τ normalan operator s minimalnim polinomom koji je produkt različitih ireducibilnih kvadratnih faktora.

Pogledajmo proces kompleksifikacije pomoću kojega možemo iskoristiti prethodni rezultat iz kompleksnog slučaja. Ako je V realan vektorski prostor, onda je skup

$$V^{\mathbb{C}} = \{u + vi : u, v \in V\}$$

kompleksan vektorski prostor sa istim operacijama zbrajanja i množenja skalarom kao u polju $\mathbb{C}$, odnosno

$$\begin{aligned}(u + vi) + (x + yi) &= (u + x) + (v + y)i \\ (a + bi)(u + vi) &= (au + bv) + (av + bu)i.\end{aligned}$$

Preslikavanje $\operatorname{cpx} : V \to V^{\mathbb{C}}$ definirano sa

$$\operatorname{cpx}(v) = v + 0i$$

je injektivna linearna transformacija vektorskog prostora V na realan slučaj $(V^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$ prostora $V^{\mathbb{C}}$.
Ako je $\mathcal{B} = \{v_j \mid j \in I\}$ baza za V nad poljem $\mathbb{R}$, onda je

$$\operatorname{cpx}(\mathcal{B}) = \{v_j + 0i : v_j \in \mathcal{B}\}$$

baza za vektorski prostor $V^{\mathbb{C}}$ nad poljem $\mathbb{C}$ te je $\dim(V^{\mathbb{C}}) = \dim(V)$.
Za proizvoljan operator τ na V možemo definirati linearan operator $\tau^{\mathbb{C}}$ na $V^{\mathbb{C}}$ sa

$$\tau^{\mathbb{C}}(u + vi) = \tau(u) + \tau(v)i.$$

Primijetimo da vrijedi

$$(\sigma\tau)^{\mathbb{C}} = \sigma^{\mathbb{C}}\tau^{\mathbb{C}}.$$

Također, ako je $p(x)$ realni polinom, onda je

$$p(\tau^{\mathbb{C}}) = [p(\tau)]^{\mathbb{C}}.$$

Za bilo koju bazu $\mathcal{B}$ od V imamo da je

$$[\tau^{\mathbb{C}}]_{\operatorname{cpx}(\mathcal{B})} = [\tau]_{\mathcal{B}}.$$

Stoga, ako realna matrica A reprezentira linearni operator τ na V, onda matrica A također reprezentira kompleksifikaciju od τ na $V^{\mathbb{C}}$. Posebno, polinom $c(x) = \det(xI - A)$ je karakteristični polinom oba operatora τ i $\tau^{\mathbb{C}}$.
Ako je V vektorski prostor sa realnim skalarnim produktom, možemo definirati skalarni produkt na $V^{\mathbb{C}}$ kao

$$\langle u + vi, x + yi\rangle = \langle u, x\rangle + \langle v, y\rangle + (\langle v, x\rangle - \langle u, y\rangle)i.$$

Ovo je ista formula kao za običan skalarni produkt na kompleksnom vektorskom prostoru. Slijedi, ako su $u, x \in V$, onda je

$$\langle u^{\mathbb{C}}, x^{\mathbb{C}} \rangle = \langle u, x \rangle.$$

Posebno, $u \perp x$ u V ako i samo ako je $u^{\mathbb{C}} \perp x^{\mathbb{C}}$ u $V^{\mathbb{C}}$.
Pokažimo da vrijedi jednakost $(\tau^*)^{\mathbb{C}} = (\tau^{\mathbb{C}})^*$. Naime,

$$\begin{aligned}
\langle u + vi, (\tau^*)^{\mathbb{C}}(x + yi) \rangle &= \langle u + vi, \tau^*(x) + \tau^*(y)i) \rangle \\
&= \langle u, \tau^*(x) \rangle + \langle v, \tau^*(y) \rangle + (\langle v, \tau^*(x) \rangle - \langle u, \tau^*(y) \rangle)i \\
&= \langle \tau(u), x \rangle + \langle \tau(v), y \rangle + (\langle \tau(v), x \rangle - \langle \tau(u), y \rangle)i \\
&= \langle \tau(u) + \tau(v)i, x + yi \rangle \\
&= \langle \tau^{\mathbb{C}}(u + vi), x + yi \rangle \\
&= \langle u + vi, (\tau^{\mathbb{C}})^*(x + yi) \rangle.
\end{aligned}$$

Slijedi da je τ normalan ako i samo ako je $\tau^{\mathbb{C}}$ normalan.

Promotrimo sada normalni linearni operator τ na realnom vektorskom prostoru V i pretpostavimo da je minimalni polinom $m_\tau(x)$ operatora τ produkt različitih ireducibilnih kvadratnih faktora

$$m_\tau(x) = p_1(x) \cdots p_d(x)$$

Stoga $m_\tau(x)$ ima različite korijene koji su svi nerealni. Označimo ih sa

$$\lambda_1, \overline{\lambda}_1, \ldots, \lambda_d, \overline{\lambda}_d.$$

S obzirom da je karakteristični polinom $c(x)$ od τ i $\tau^{\mathbb{C}}$ višekratnik polinoma $m_\tau(x)$, gornji skalari su karakteristični korijeni od $\tau^{\mathbb{C}}$.
Kako je $m_\tau(x)$ realan, slijedi

$$m_\tau(\tau^{\mathbb{C}}) = [m_\tau(\tau)]^{\mathbb{C}} = 0$$

pa je $m_{\tau^{\mathbb{C}}}(x) \mid m_\tau(x)$. Međutim, svojstvene vrijednosti $\lambda_i, \overline{\lambda}_i$ operatora $\tau^{\mathbb{C}}$ su korijeni polinoma $m_{\tau^{\mathbb{C}}}(x)$ pa je $m_\tau(x) \mid m_{\tau^{\mathbb{C}}}(x)$. Slijedi, $m_{\tau^{\mathbb{C}}}(x) = m_\tau(x)$.
Budući da je $m_{\tau^{\mathbb{C}}}(x)$ produkt različitih linearnih faktora na polju $\mathbb{C}$, zaključujemo da je operator $\tau^{\mathbb{C}}$ dijagonalizabilan. Stoga se baza od $V^{\mathbb{C}}$ sastoji od svojstvenih vektora operatora $\tau^{\mathbb{C}}$, odnosno

$$V^{\mathbb{C}} = \varepsilon_{\lambda_1} \odot \varepsilon_{\overline{\lambda}_1} \odot \cdots \odot \varepsilon_{\lambda_d} \odot \varepsilon_{\overline{\lambda}_d}.$$

Kako je operator $\tau^{\mathbb{C}}$ normalan, svojstveni prostori iz gornjeg izraza su ortogonalni s obzirom na skalarni produkt prostora $V^{\mathbb{C}}$.
Razmotrimo određeni par svojstvenih vrijednosti λ i $\overline{\lambda}$ te potprostor $\varepsilon_\lambda \odot \varepsilon_{\overline{\lambda}}$. Pretpostavimo da je $\lambda = a + bi$ te da je

$$\mathcal{O} = (u_1 + v_1 i, \ldots, u_m + v_m i)$$

ortonormirana baza za ε_λ. Tada za proizvoljni $j = 1, \ldots, m$ vrijedi

$$\tau^{\mathbb{C}}(u_j + v_j i) = (a + bi)(u_j + v_j i)$$

te je

$$\begin{aligned} \tau(u_j) &= au_j - bv_j \\ \tau(v_j) &= bu_j + av_j. \end{aligned}$$

Slijedi,

$$\begin{aligned} \tau^{\mathbb{C}}(u_j - v_j i) &= \tau(u_j) - \tau(v_j)i \\ &= au_j - bv_j - (bu_j + av_j)i \\ &= (a - bi)(u_j - v_j i) \\ &= \overline{\lambda}(u_j - v_j i). \end{aligned}$$

Iz gornjih jednakosti vidimo da je $u_j - v_j i$ svojstveni vektor operatora $\tau^{\mathbb{C}}$ za svojstvenu vrijednost $\overline{\lambda}$ pa je

$$\overline{\mathcal{O}} = (u_1 - v_1 i, \ldots, u_m - v_m i) \subseteq \varepsilon_{\overline{\lambda}}.$$

Skup $\overline{\mathcal{O}}$ je linearno nezavisan pa je $\dim(\varepsilon_{\overline{\lambda}}) \geq \dim(\varepsilon_\lambda)$. Analogno, $\dim(\varepsilon_\lambda) \geq \dim(\varepsilon_{\overline{\lambda}})$. Iz prethodne dvije nejednakosti slijedi da je $\dim(\varepsilon_\lambda) = \dim(\varepsilon_{\overline{\lambda}})$ te je stoga skup $\overline{\mathcal{O}}$ ortonormirana baza za $\varepsilon_{\overline{\lambda}}$. Slijedi da je

$$\varepsilon_\lambda \odot \varepsilon_{\overline{\lambda}} = U_1 \odot \cdots \odot U_m,$$

gdje je linearna ljuska $U_j = \langle u_j + v_j i, u_j - v_j i \rangle$ dvodimenzionalna jer su svojstveni vektori $u_j + v_j i$ i $u_j - v_j i$ povezani sa različitim svojstvenim vrijednostima te su stoga linearno nezavisni.
Stoga je $V^{\mathbb{C}}$ ortogonalna direktna suma $\tau-$invarijantnih dvodimenzionalnih potprostora

$$V^{\mathbb{C}} = U_1 \odot \cdots \odot U_n$$

gdje je $2n = \dim(V^{\mathbb{C}}) = \dim(V)$, svaki potprostor U_j ima svojstvo da je

$$\begin{aligned} \tau(u_j) &= a_j u_j - b_j v_j \\ \tau(v_j) &= b_j u_j + a_j v_j \end{aligned}$$

i skalari $\lambda = a_j + b_j i$ pokrivaju sve različite svojstvene vrijednosti $\lambda_1, \overline{\lambda}_1, \ldots, \lambda_d, \overline{\lambda}_d$ operatora $\tau^{\mathbb{C}}$.

Spustimo se sada na V. Za svaki $j = 1, \ldots, n$, neka je linearna ljuska $S_j = \langle u_j, v_j \rangle$ potprostor prostora V razapet realnim i imaginarnim dijelovima svojstvenih vektora $u_j + v_j i$ i $u_j - v_j i$ koji razapinju U_j. Da bi vidjeli da je S_j dvodimenzionalan promotrimo

$$S_j^{\mathbb{C}} = \{x + yi : x, y \in S_j\}.$$

Budući da je $U_j \subseteq S_j^{\mathbb{C}}$, imamo

$$2 = \dim(U_j) \leq \dim(S_j)^{\mathbb{C}} = \dim(S_j) \leq 2.$$

Nadalje, uočimo da ako je $x \in S_j$ i $y \in S_k$, $j \neq k$, onda, s obzirom da je $x^{\mathbb{C}} \in U_j$ i $y^{\mathbb{C}} \in U_k$, vrijedi $x^{\mathbb{C}} \perp y$ pa i $x \perp y$. Dakle, $S_j \perp S_k$.

Dakle, ako je $\mathcal{B}_j = (u_j, v_j)$, onda su potprostori S_j dvodimenzionalni, τ-invarijantni i u paru ortogonalni, sa matricom

$$[\tau]_{\mathcal{B}_j} = \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix}.$$

Slijedi, $S_1 \odot \cdots \odot S_n \subseteq V$, ali budući da obje strane imaju jednaku dimenziju imamo jednakost

$$V = S_1 \odot \cdots \odot S_n.$$

Vrijedi i obrat. S obzirom da je $[\tau]_{\mathcal{B}_j}([\tau]_{\mathcal{B}_j})^T = (a_j^2 + b_j^2)I_2$ jasno je da je $[\tau]_{\mathcal{B}_j}$ normalan s obzirom na polje $\mathbb{R}$. Slijedi, τ je normalan s obzirom na polje $\mathbb{R}$.

Time smo dokazali sljedeći teorem.

Teorem 4.2 (Strukturni teorem za normalne operatore: realni slučaj)**.** *Neka je V konačno-dimenzionalan realan unitaran prostor. Linearan operator τ na V je normalan ako i samo ako je*

$$V = \varepsilon_{\lambda_1} \odot \cdots \odot \varepsilon_{\lambda_k} \odot S_1 \odot \cdots \odot S_m$$

gdje je $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ spektar od τ i svaki S_j je dvodimenzionalan τ-invarijantan potprostor za koji postoji baza $\mathcal{B}_j = (u_j, v_j)$ tako da je

$$[\tau]_{\mathcal{B}_j} = \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix}$$

za $a_j, b_j \in \mathbb{R}$.

4.1 Matrični zapis

Možemo formulirati matrične verzije strukturnog teorema za normalne operatore.

Teorem 4.3 (Strukturni teorem za normalne matrice)**.**

1. *Kompleksna matrica A je normalna ako i samo ako postoji unitarna matrica U za koju je*

$$UAU^{-1} = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$$

gdje je $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ spektar operatora τ. Odnosno, matrica A je normalna ako i samo ako je unitarno dijagonalizabilna.

2. *Realna matrica A je realno normalna ako i samo ako postoji ortogonalna matrica O za koju matrica OAO^{-1} ima blok-dijagonalnu formu*

$$OAO^{-1} = diag\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} a_m & -b_m \\ b_m & a_m \end{bmatrix}\right).$$

5. Ortogonalna projekcija

Neka je $V = V_1 \oplus V_2$ rastav prostora V na direktnu sumu potprostora V_1 i V_2. Tada se svaki $v \in V$ može na jedinstven način napisati u obliku

$$v = v_1 + v_2, \quad v_1 \in V_1, \quad v_2 \in V_2.$$

Preslikavanje $P : V \to V$ definirano sa

$$P(v) = P(v_1 + v_2) = v_1$$

zovemo projekcijom na potprostor V_1 duž potprostora V_2. Projekcija je linearno preslikavanje jer za $v_1, u_1 \in V_1$, $v_2, u_2 \in V_2$ i skalare λ_1, λ_2 imamo

$$\begin{aligned} P(\lambda_1(v_1 + v_2) + \lambda_2(u_1 + u_2)) &= P((\lambda_1 v_1 + \lambda_2 u_1) + (\lambda_1 v_2 + \lambda_2 u_2)) \\ &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 u_1 \\ &= \lambda_1 P(v_1 + v_2) + \lambda_2 P(u_1 + u_2). \end{aligned}$$

Primijetimo da je

$$\begin{aligned} P^2(v_1 + v_2) &= P(v_1) \\ &= v_1 \\ &= P(v_1 + v_2), \end{aligned}$$

odnosno

$$P^2 = P.$$

Za linearan operator $P' : V \to V$ kažemo da je projektor ako je idempotentan, odnosno ako je

$$P'^2 = P'.$$

Dakle, projekcija je projektor. Vrijedi i obrat. Naime, iz $P'^2 - P' = 0$ slijedi da minimalni polinom $m_{P'}(X)$ dijeli polinom $X(X - 1)$. Pretpostavimo da je

$$m_{P'}(X) = X(X - 1).$$

Tada je $\{1, 0\}$ spektar operatora P' te imamo dekompoziciju prostora V na svojstvene potprostore

$$V = V_1 \oplus V_2$$

pri čemu su $V_1 = Ker(P' - I) \neq 0$ i $V_2 = KerP' \neq 0$. Slijedi

$$P'v = P'v_1 + P'v_2 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 = v_1, \quad v_1 \in V_1, \quad v_2 \in V_2.$$

To znači da je projektor P' projekcija na potprostor ImP' duž potprostora $KerP'$.

Definicija 5.1. *Neka je $V = V_1 \odot V_2$ rastav prostora V na ortogonalnu sumu potprostora V_1 i V_2, $V_1 \perp V_2$. Tada projekciju P na V_1 duž V_2 zovemo ortogonalnom projekcijom. Drugim riječima, projekcija P je ortogonalna projekcija ako je $ImP \perp KerP$.*

Idući teorem nam daje karakterizaciju ortogonalnih projekcija.

Teorem 5.1. *Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1. *P je ortogonalna projekcija.*
2. *P je idempotentan i samoadjungiran operator.*
3. *P je idempotentan i $\|P(v)\| \leq \|v\|$, $\forall v \in V$.*

Dokaz: Pokažimo prvo da su tvrdnje 1. i 2. ekvivalentne. Naime,

$$\begin{aligned} P = P^* &\Leftrightarrow ImP = ImP^* \text{ i } KerP = KerP^* \\ &\Leftrightarrow ImP = (KerP)^{\perp} \text{ i } KerP = (ImP)^{\perp} \\ &\Leftrightarrow ImP \perp KerP. \end{aligned}$$

Da bi pokazali da 1. povlači 3. primijetimo da je $v = P(v) + z$, gdje je $z \in KerP$. Budući da je $P(v) \perp z$, imamo

$$\|v\|^2 = \|P(v)\|^2 + \|z\|^2 \geq \|P(v)\|^2.$$

Pretpostavimo sada da vrijedi tvrdnja 3. Znamo da je $V = ImP \oplus KerP$ te želimo pokazati da je ta suma ortogonalna. Prema Teoremu 1.2 dovoljno je pokazati da je $ImP \subseteq (KerP)^{\perp}$. Neka je $w \in ImP$. Kako je $V = KerP \odot (KerP)^{\perp}$, imamo $w = x + y$ pri čemu je $x \in KerP$ i $y \in (KerP)^{\perp}$. Slijedi

$$w = Pw = Px + Py = Py.$$

Stoga je

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|w\|^2 = \|Py\|^2 \leq \|y\|^2.$$

Iz toga slijedi da je $\|x\| = 0$, dakle, $x = 0$. Prema tome, $w = y \in (KerP)^{\perp}$ pa je $ImP \subseteq (KerP)^{\perp}$. $\square$

Projektori P_1 i P_2 su ortogonalni ako je $P_1P_2 = 0$. Tada je i $P_2P_1 = 0$. Naime, u prethodnom teoremu smo pokazali da su P_1 i P_2 hermitski operatori te stoga imamo

$$(P_1P_2)^* = P_2P_1 = 0.$$

Neka su ImP_1 i ImP_2 slike ortogonalnih projektora P_1 i P_2. Promotrimo operator $P_1 + P_2$. Prema Teoremu 3.2 taj operator je hermitski te vrijedi

$$(P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_1P_2 + P_2P_1 = P_1^2 + P_2^2 = P_1 + P_2.$$

Dakle, $P_1 + P_2$ je ortogonalni projektor. Nadalje, za $v_1 \in ImP_1$ i $v_2 \in ImP_2$ vrijedi

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle P_1v_1, P_2v_2 \rangle = \langle P_2P_1v_1, v_2 \rangle = 0$$

pa su potprostori ImP_1 i ImP_2 okomiti. Vrijedi i obrat, odnosno okomitim potprostorima pripadaju okomiti projektori.

Teorem 5.2. *Neka je V unitaran prostor i neka su $P, P_1, \dots, P_k$ projektori od kojih je svaki ortogonalan. Tada je $P = P_1 + \dots + P_k$ ortogonalna projekcija ako i samo ako je $P_i \perp P_j$ za svaki $i \neq j$.*

Dokaz: Ako su $P_1, \dots, P_k$ ortogonalne projekcije i ako je $P_i \perp P_j$, $\forall i \neq j$, onda je $P_i P_j = 0$, $\forall i \neq j$, te se jednostavno provjeri da je $P^2 = P$ i $P^* = P$. Dakle, P je ortogonalna projekcija.

Obratno, pretpostavimo da je P ortogonalna projekcija i da je $x \in ImP_i$ za neki fiksni i. Tada je $P_i(x) = x$ pa je

$$\|x\|^2 \geq \|P(x)\|^2 = \langle P(x), P(x) \rangle = \langle P(x), x \rangle$$

$$= \sum_j \langle P_j(x), x \rangle = \sum_j \|P_j(x)\|^2$$

$$\geq \|P_i(x)\|^2 = \|x\|^2,$$

što implicira da je $P_j(x) = 0$ za $j \neq i$. Drugim riječima,

$$ImP_i \subseteq KerP_j = (ImP_j)^\perp.$$

Dakle,

$$0 = \langle P_j(v), P_i(w) \rangle = \langle P_i P_j(v), w \rangle$$

za svaki $v, w \in V$, što pokazuje da je $P_i P_j = 0$, odnosno $P_i \perp P_j$. $\square$

6. Ortogonalna dekompozicija jedinice

Neka je

$$V = V_1 \oplus V_2,$$

P_1 projekcija na potprostor V_1 duž potprostora V_2 i P_2 projekcija na potprostor V_2 duž potprostora V_1. Tada očito vrijedi rastav

$$I = P_1 + P_2, \quad P_i P_j = \delta_{ij} P_i, \quad i, j \in \{1, 2\}$$

kojeg zovemo dekompozicijom jedinice. Općenito za rastav prostora na direktnu sumu potprostora

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_i \oplus \cdots \oplus V_s$$

za svaki $i = 1, \ldots, s$ možemo definirati projektor

$$P_i : V \to V, \quad P_i v = P_i(v_1 + \cdots + v_i + \cdots + v_s) = v_i.$$

Očito vrijedi rastav

$$I = P_1 + \cdots + P_s, \quad P_i P_j = \delta_{ij} P_i \quad \text{za sve} \quad i, j \in \{1, \ldots, s\}$$

kojeg također zovemo dekompozicija jedinice.

Obratno, svaka dekompozicija jedinice daje rastav prostora

$$V = V_1 + \cdots + V_s, \quad V_i = ImP_i, \quad v = Iv = P_1 v + \cdots + P_s v.$$

Primjenom relacija $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$ slijedi da je suma potprostora $V_i = ImP_i$ direktna. Naime, svaki $v_i \in V_i$ je oblika $v_i = P_i v = P_i P_i v = P_i v_i$ jer je $P_i^2 = P_i$ pa primjenom operatora P_i na vektor

$$0 = v_i + \cdots + v_i + \cdots + v_s = P_1 v_i + \cdots + P_i v_i + \cdots + P_s v_s$$

iz $P_i P_j = 0$ za $i \neq j$ dobivamo

$$0 = P_i P_1 v_i + \cdots + P_i P_i v_i + \cdots + P_i P_s v_s = P_i^2 v_i = v_i.$$

Dakle, zbog međusobne ortogonalnosti projektora slijedi da je suma direktna. Ako su dodatno projektori ortogonalni onda je direktna suma ortogonalna.

Definicija 6.1. *Ako je $P = P_1 + \cdots + P_k = I$ dekompozicija jedinice i P_i je ortogonalan za svaki i, $i = 1, \ldots, k$, onda kažemo da je $P = P_1 + \cdots + P_k = I$ ortogonalna dekompozicija jedinice.*

Pogledajmo vezu između rastava prostora V na ortogonalnu direktnu sumu i ortogonalne dekompozicije jedinice.

Neka je

$$V = V_1 \odot V_2,$$

P_1 ortogonalna projekcija na potprostor V_1 duž potprostora V_2, a P_2 ortogonalna projekcija na potprostor V_2 duž potprostora V_1. Tada očito vrijedi rastav

$$I = P_1 + P_2, \quad P_i^* = P_i, \quad P_iP_j = \delta_{ij}P_i, \quad i, j \in \{1, 2\}$$

kojeg zovemo ortogonalnom dekompozicijom jedinice. Općenito za rastav prostora na ortogonalnu sumu potprostora

$$V = V_1 \odot \cdots \odot V_i \odot \cdots \odot V_s$$

za svaki $i = 1, \ldots, s$ možemo definirati ortogonalnu projekciju

$$P_i : V \to V, \quad P_iv = P_i(v_1 + \cdots + v_i + \cdots + v_s) = v_i.$$

Očito vrijedi rastav

$$I = P_1 + \cdots + P_s, \quad P_i^* = P_i, \quad P_iP_j = \delta_{ij}P_i \quad \text{za sve} \quad i, j \in \{1, \ldots, s\}$$

kojeg zovemo ortogonalna dekompozicija jedinice.

Obratno, svaka ortogonalna dekompozicija jedinice daje rastav prostora

$$V = V_1 \odot \cdots \odot V_s, \quad V_i = ImP_i, \quad v = Iv = P_1v + \cdots + P_sv.$$

Primjenom relacija $P_i^* = P_i$ i $P_iP_j = \delta_{ij}P_i$ slijedi da je suma potprostora $V_i = ImP_i$ ortogonalna. Naime, svaki $v_i = V_i$ je oblika $v_i = P_iv = P_iP_iv = P_iv_i$ jer je $P_i^2 = P_i$, pa za $i \neq j$ imamo

$$\langle v_i, v_j \rangle = \langle P_iv_i, P_jv_j \rangle = \langle v_i, P_i^*P_jv_j \rangle = \langle v_i, P_iP_jv_j \rangle = \langle v_i, 0v_j \rangle = 0.$$

7. Spektralni teorem

Neka je τ proizvoljan linearan operator na V. Pretpostavimo da se τ može zapisati na sljedeći način:

$$\tau = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k$$

pri čemu je $P_1 + \cdots + P_k = I$ dekompozicija jedinice i $\lambda_i \in \mathbb{F}$. Tada je

$$V = ImP_1 \oplus \cdots \oplus ImP_k.$$

Štoviše, ako je $v \in ImP_j$, onda je $v = P_j(x)$ pa je

$$\tau(v) = (\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k)P_j(x) = \lambda_j P_j(x) = \lambda_j v.$$

Stoga je $ImP_j \subseteq \varepsilon_{\lambda_j}$. Vrijedi i drugi smjer. Naime, jednakost $\tau(v) = \lambda_j v$ možemo zapisati u obliku

$$(\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k)(v) = \lambda_j (P_1 + \cdots + P_k)v,$$

odnosno

$$(\lambda_1 - \lambda_j)P_1(v) + \cdots + (\lambda_k - \lambda_j)P_k(v) = 0.$$

Međutim, s obzirom da je $(\lambda_i - \lambda_j)P_i(v) \in ImP_i$, zaključujemo da je $P_i(v) = 0$ za $i \neq j$ pa je

$$v = (P_1 + \cdots + P_k)v = P_j v \in ImP_j.$$

Stoga je $ImP_j = \varepsilon_{\lambda_j}$ i možemo zaključiti da je

$$V = \varepsilon_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \varepsilon_{\lambda_k},$$

odnosno τ je dijagonalizabilan. Vrijedi i obratno. Naime, ako je V direktna suma svojstvenih potprostora operatora τ i ako je P_i projekcija na ε_{λ_i} duž direktne sume drugih svojstvenih potprostora onda je

$$P_1 + \cdots + P_k = I.$$

Međutim, za svaki $v_i \in \varepsilon_{\lambda_i}$ imamo

$$\tau(v_i) = \lambda_i v_i = \lambda_i (P_1 + \cdots + P_k)v_i = (\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k)(v_i)$$

pa je

$$\tau = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k.$$

Teorem 7.1. *Linearni operator $\tau \in \mathcal{L}(V)$ je dijagonalizabilan ako i samo ako se može zapisati u obliku*

$$\tau = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k \tag{1}$$

gdje su λ_i različiti i $P_i + \cdots + P_k = I$ je dekompozicija jedinice. U tom slučaju, $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ je spektar operatora τ i projekcije P_i zadovoljavaju

$$ImP_i = \varepsilon_{\lambda_i} \ i \ KerP_i = \bigoplus_{j \neq i} \varepsilon_{\lambda_j}.$$

Jednakost (1) nazivamo spektralna dekompozicija od τ.

Sada možemo karakterizirati normalne operatore na konačnodimenzionalnom kompleksnom unitarnom prostoru koristeći projekcije.

Teorem 7.2 (Spektralni teorem za normalne operatore)**.** *Neka je τ operator na konačnodimenzionalnom kompleksnom unitarnom prostoru V. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1. *τ je normalan.*

2. *τ je unitarno dijagonalizabilan, odnosno*

$$V = \varepsilon_{\lambda_i} \odot \cdots \odot \varepsilon_{\lambda_k}.$$

3. *τ ima ortogonalnu spektralnu dekompoziciju*

$$\tau = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k \tag{2}$$

pri čemu su $\lambda_i \in \mathbb{C}$, a $P_1 + \cdots + P_k = I$ je ortogonalna dekompozicija jedinice.

Štoviše, ako τ ima oblik (2), gdje su λ_i različiti i P_i različiti od nula, onda su λ_i svojstvene vrijednosti operatora τ i ImP_i je svojstveni potprostor za λ_i.

Dokaz: Vidjeli smo da su tvrdnje 1. i 2. ekvivalentne. Pretpostavimo da je operator τ unitarno dijagonalizabilan. Neka je P_i ortogonalna projekcija na ε_{λ_i}. Tada se svaki $v \in V$ može zapisati kao suma ortogonalnih svojstvenih vektora

$$v = v_1 + \cdots + v_k$$

pa je

$$\tau(v) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = (\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k)(v).$$

Dakle, vrijedi tvrdnja 3. Obratno, ako vrijedi (2) imamo

$$V = ImP_1 \odot \cdots \odot ImP_k.$$

Međutim, Teorem 7.1 implicira da je $ImP_i = \varepsilon_{\lambda_i}$ pa je operator τ unitarno dijagonalizabilan.

□

Teorem 7.3 (Spektralni teorem za samoadjungirane operatore)**.** *Neka je τ operator na konačnodimenzionalnom realnom unitarnom prostoru V. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne.*

1. *τ je samoadjungiran.*

2. *τ je ortogonalno dijagonalizabilan, odnosno*

$$V = \varepsilon_{\lambda_i} \odot \cdots \odot \varepsilon_{\lambda_k}.$$

3. τ *ima ortogonalnu spektralnu dekompoziciju*

$$\tau = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k \tag{3}$$

pri čemu su $\lambda_i \in \mathbb{R}$, *a* $P_1 + \cdots + P_k = I$ *je ortogonalna dekompozicija jedinice.*

Štoviše, ako τ *ima oblik (3), gdje su* λ_i *različiti i* P_i *različiti od nula, onda su* λ_i *svojstvene vrijednosti operatora* τ *i* ImP_i *je svojstveni potprostor za* λ_i.

Dokaz: Vidjeti [5, str. 246]. $\square$

Literatura

[1] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[2] H. Kraljević, *Algebra*, Sveučilište J.J. Strossmayera, Osijek, 2007.

[3] H. Kraljević, *Vektorski prostori*, Sveučilište J.J. Strossmayera, Osijek, 2008.

[4] G. Muić, M. Primc, *Predavanja iz vektorskih prostora*, skripta, dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/ gmuic/predavanja/vp.pdf`.

[5] S. Roman, *Advanced Linear Algebra*, Springer, USA, 2007.

Sažetak

U ovom radu se bavimo pitanjem kada je operator na unitarnom prostoru V dijagonalizabilan. Prvo uvodimo pojam adjungiranog operatora te to koristimo da bi definirali normalne operatore, a to su oni za koje operator i njegov adjungirani operator komutiraju. Zatim dokazujemo Strukturni teorem za normalne operatore koji tvrdi da su normalni operatori unitarno dijagonalizabilni s obzirom na ortonormiranu bazu i formuliramo njegov matrični zapis. Nadalje, definiramo ortogonalnu projekciju i dokazujemo njenu karakterizaciju. Pokazali smo da je dekompozicija jedinice ortogonalna ako su svi projektori ortogonalni te to koristimo da definiramo spektralnu dekompoziciju normalnog operatora. U zadnjem dijelu dolazimo do glavnog rezultata ovog rada, a to je Spektralni teorem.

Ključne riječi: adjungirani operator, normalni operator, Strukturni teorem, ortogonalna projekcija, ortogonalna dekompozicija jedinice, projektori, spektralna dekompozicija, Spektralni teorem

Summary

In this thesis we deal with the issue when an operator on an inner product space V is diagonalizable. We first introduce the notion of the adjoint of an operator and use this to define normal operators, which are those for which the operator and its adjoint commute with each other. Then, there is the proof of the Structure theorem for normal operators which states that normal operators are diagonal with respect to an orthonormal basis and we formulate his the matrix version. Furthermore, we define orthogonal projection and prove their characterization. It has been shown that if the projections are themselves orthogonal, then the resolutions of identity is orthogonal. We use this to define spectral resolution of normal operators. In the last part we come the main result of this thesis which is the Spectral theorem.

Key words: the adjoint, normal operator, Structure theorem, orthogonal projection, orthogonal resolutions of identity, projections, spectral resolution, Spectral theorem

Životopis

Moje ime je Karla Mercvajler, rođena sam 28. veljače 1994. godine u gradu Wangen im Allgäu u Njemačkoj. Osnovnu školu započela sam 2000. godine u osnovnoj školi dr.Franjo Tuđman, Bapska. Nakon završetka osnovne škole 2008. godine upisala sam opću gimnaziju u Srednjoj školi Ilok koju završavam 2012. godine. U istoj godini upisujem Preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku, Sveučilišta J.J.Strossmayera u Osijeku. Preddiplomski studij sam završila 2018. godine s temom završnog rada Kroneckerov produkt i operator vektorizacije pod mentorstvom doc. dr. sc. Suzane Miodragović. U jeseni iste godine upisujem Diplomski studij financijske matematike i statistike, na istoimenom fakultetu.