Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Preddiplomski studij matematike

Matea Klarić

Formula potpune vjerojatnosti i Bayesova formula

Završni rad

Osijek, 2016.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Preddiplomski studij matematike

Matea Klarić

Formula potpune vjerojatnosti i Bayesova formula

Završni rad

Mentor:
doc.dr.sc. Dragana Jankov Maširević

Osijek, 2016.

Sažetak

Uvjetna vjerojatnost je vjerojatnost u kojoj kao dodatnu informaciju imamo da se određeni događaj realizirao. Za takvu vrstu vjerojatnosti, odnosno vjerojatnost da se dogodio događaj A ako znamo da se realizirao događaj B, koristimo oznaku $P(A|B)$ ili $P_B(A)$. Nadalje, formula potpune vjerojatnosti se dobije:

1. podjelom prostora događaja na nekoliko disjunktnih događaja koji u uniji čine cijeli taj prostor,

2. računajući vjerojatnost događaja koji se realizirao uz opisane disjunktne događaje kao uvjete.

Promatranje vjerojatnosti u drugom smjeru je moguće pomoću Bayesove formule. Ona služi za računanje vjerojatnosti realizacije događaja iz prethodno opisane podjele uz informaciju o tome koji se događaj dogodio nakon izvođenja pokusa. U razumijevanju suštine Bayesovog teorema bitno je prepoznati potrebnu podjelu (particiju) skupa svih događaja, pri čemu se dodatna informacija o ishodu pokusa odnosi na neki određeni događaj iz te podjele.

Ključne riječi: potpun sustav događaja, uvjetna vjerojatnost, nezavisni događaji, formula potpune vjerojatnosti, Bayesova formula

Abstract

Conditional probability is a probability where the additional information is that certain event has been realized. For such kind of probability, i.e. the probability that event A happened if we know that event B has been realized, the symbol $P(A|B)$ or $P_B(A)$ is used. Furthermore, the formula of total probability is derived by:

1. dividing the space of events on several disjunct events that in union make up that whole space,

2. counting the probability of the event that has been realised with the described disjunct events as conditions.

Counting probability in the opposite direction is possible by using of Bayes' formula. Such formula is used for probability of event realisation from the previously described partition, with information about which event happened after the experiment has been performed. In understanding the essence of Bayes' theorem it is important to recognize the required partition of the set of all events whereby the additional information refers to a certain event from that partition.

Key words: complete sample space, conditional probability, independent events, formula of total probability, Bayes' theorem

Sadržaj

1 Uvod

Predmet ovog završnog rada je objasniti način shvaćanja formule potpune vjerojatnosti i njoj vrlo bliske Bayesove formule, koje se koriste u specijalnim slučajevima računanja vjerojatnosti. Također ćemo kroz zanimljive primjere vidjeti primjenu navedenih formula te princip razmišljanja u određenim situacijama povoljnima za korištenje tih dviju formula.
U prvom poglavlju će biti riječ o osnovnim pojmovima teorije vjerojatnosti i toku razmišljanja koji nas vodi do veze s uvjetnom vjerojatnosti. Navedene su najvažnije definicije vezane za uvjetnu vjerojatnost te njeno korištenje. U nastavku poglavlja kroz definicije su izdvojene neke situacije u kojima se zaključuje o nezavisnosti događaja vezanih za dani slučajan pokus.
Sljedeće poglavlje opisuje već spomenute specifične situacije u kojima se primjenjuje formula potpune vjerojatnosti te zašto je uopće bilo potrebno uvesti takvu vrstu vjerojatnosti, a zatim je iskazan i dokazan glavni teorem vezan za ovu temu.
Posljednje poglavlje govori o situacijama u kojima je ishod pokusa uvjetovan različitim mogućim događajima danog pokusa. Takve situacije se rješavaju Bayesovom formulom koja slijedi iz formule potpune vjerojatnosti. Kroz primjere je opisan postupak primjene formule i na samom kraju su izdvojene situacije u kojima bi se trebalo razmišljati o primjeni Bayesove formule.
Pri rješavanju primjera u ovom radu, zbog preglednijeg zapisa, komplement događaja A označavat ćemo s $\overline{A}$.

2 Uvjetna vjerojatnost

Dva osnovna pojma teorije vjerojatnosti su *pokus* i njegov *ishod*, tj. elementarni događaj. Pokus čiji ishod je slučajan naziva se *slučajan pokus*, a za njegovo opisivanje koristimo *vjerojatnosni prostor* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Vjerojatnosni prostor je matematički model pokusa koji nastaje tako što se svakom događaju A, koji je element pripadne σ- algebre $\mathcal{F}$ podskupova od Ω, pridružuje njegova vjerojatnost $P(A)$ sa svojstvom $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$, pri čemu je ona potpuno određena tim modelom. Do promjene vjerojatnosti pojave događaja može doći jedino ako nam je tijekom promatranja danog slučajnog pokusa poznato da se ostvario događaj B koji utječe na naš polazni događaj, pa je zato tom slučajnom pokusu potrebno pridružiti novi matematički model. Opisane postupke jednostavno predočuje sljedeći primjer:

Primjer 1.

Na polici je poredano 10 žarulja od kojih su 4 neispravne. Žarulje su numerirane brojevima od 1 do 10, a one neispravne su označene prostim brojevima. Bez gledanja, izabiru se dvije žarulje, jedna po jedna, i bez vraćanja nakon prvog odabira. Zanima nas:

1. vjerojatnost da je prva odabrana žarulja neispravna (događaj A),
2. vjerojatnost da je druga odabrana žarulja neispravna (događaj B),
3. vjerojatnost da je druga odabrana žarulja neispravna, ako znamo da smo prvi put izabrali neispravnu žarulju.

Rješenje:

Prostor elementarnih događaja je skup $\Omega = \{(i,j)|i \neq j; i,j = 1,2,...,10\}$ koji ima $10 \cdot 9 = 90$ elemenata. Kako je ovaj pokus slučajan pridružujemo mu vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pri čemu je

$$P(\omega) = \frac{1}{k(\Omega)} = \frac{1}{90}, \quad \forall \omega = (i,j) \in \Omega.$$

1. Iz zadatka vidimo da je $A = \{2,3,5,7\}$ pa je vjerojatnost događaja A jednaka

$$P(A) = \frac{k(A)}{k(\omega)} = \frac{36}{90} = \frac{4}{10}.$$

2. Što se tiče događaja B, on će se dogoditi i ako prva odabrana žarulja bude neispravna i ako bude ispravna. S obzirom na to, imamo

$$k(B) = 4 \cdot 3 + 6 \cdot 4 = 36,$$

pa slijedi da je

$$P(B) = \frac{k(B)}{k(\Omega)} = \frac{36}{90} = \frac{4}{10} = P(A).$$

3. Pretpostavimo da se realizirao događaj A tj. da je prva odabrana žarulja neispravna. Pitamo se kolika je sada vjerojatnost događaja B ako znamo da se realizirao događaj A. Nakon informacije o realiziranju događaja A ulogu prostora elementarnih događaja preuzima skup A, pa svih mogućih elementarnih događaja ima

$$k(A) = 4 \cdot 9 = 36,$$

jer je u prvom biranju odabrana jedna od četiri neispravne žarulje, a u drugom biranju bilo koja od preostalih devet žarulja. U tom slučaju povoljnih ishoda za B ima 12, jer je

$$k(A \cap B) = 4 \cdot 3 = 12$$

(kod drugog biranja odaberemo jednu od preostale tri neispravne žarulje). Vjerojatnost koju tražimo označimo s

$$P(B|A)$$

i nazovimo ju *vjerojatnost događaja B uz uvjet da se dogodio događaj A*. Iz svega navedenog slijedi:

$$P(B|A) = \frac{k(A \cap B)}{k(A)} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \neq P(B) = \frac{4}{10}.$$

$\triangle$

Definicija 1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i neka su $A, B \in \mathcal{F}$ proizvoljni događaji, takvi da je $P(B) > 0$. Tada funkciju $P_B : \mathcal{F} \to [0,1]$ zovemo* ***uvjetna vjerojatnost događaja A uz uvjet da se dogodio događaj B****, a definira se s:*

$$P_B(A) := P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{1}$$

Broj $P(A|B)$ često kraće zovemo **uvjetna vjerojatnost od A uz uvjet B**.

Napomena 2. *Dokažimo da je tako definirana vjerojatnost dobro definirana, tj. da zadovoljava aksiome vjerojatnosti:*

1. *Zbog* $P(A \cap B) \geq 0$ *(jer je* P *vjerojatnost) i* $P(B) > 0$*, prema (1) imamo* $P(A|B) \geq 0$.

2. $$P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

3. *Neka je* $(A_i, i \in I), I \subseteq \mathbb{N}$*, konačna ili prebrojiva familija međusobno disjunktnih događaja. Tada imamo:*
$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i \in I} A_i | B\right) &= \frac{P((\bigcup_{i \in I} A_i) \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\bigcup_{i \in I}(A_i \cap B))}{P(B)} \\ &= \frac{\sum_{i \in I} P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i \in I} \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \\ &= \sum_{i \in I} P(A_i|B). \end{aligned}$$

■

Napomena 3. *Analogno se definira i* $P(B|A)$ *pa vrijedi* pravilo umnoška vjerojatnosti*:*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B). \tag{2}$$

2.1 Nezavisnost događaja

Pojam nezavisnosti nam je blizak iz svakodnevnih životnih situacija, pa već intuitivno znamo odrediti njegovo značenje. No ako se pitamo kako pojam nezavisnosti matematički modelirati, odgovor će nam dati primjeri koji slijede:

Primjer 2.

Radnik na seoskoj farmi, između ostalog, čuva i šest malih psića koji se nalaze u boksu za pse, od kojih tri psića imaju bijele šape. Svaki dan radnik uzme dva psića kako bi im dao lijek.

1. Kolika je vjerojatnost da je u drugom uzimanju radnik uzeo psića s bijelim šapama, s obzirom da nije pogledao kojeg psića je u prvom uzimanju odabrao?

2. Kolika je vjerojatnost da je u drugom uzimanju radnik uzeo psića s bijelim šapama, ako je nakon prvog uzimanja vidio da je uzeo psića s bijelim šapama?

Rješenje:

Označimo s:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{u drugom uzimanju radnik je uzeo psića s bijelim šapama}\}, \\ B &= \{\text{u prvom uzimanju radnik je uzeo psića s bijelim šapama}\}. \end{aligned}$$

1. Računamo vjerojatnost da je radnik u drugom uzimanju uzeo psića s bijelim šapama, bez ikakvog saznanja o ishodu prvog odabira. Stoga, ako je u prvom uzimanju radnik uzeo psića s bijelim šapama, onda mu u drugom uzimanju preostaju dva takva psića od njih pet $\rightarrow (\frac{2}{5})$. U drugom slučaju, ako je u prvom odabiru radnik uzeo psića koji nema bijele šape, onda za drugo uzimanje ostaju tri psića s bijelim šapama od njih ukupno pet $\rightarrow (\frac{3}{5})$. Kada to zapišemo, dobit ćemo sljedeće:
$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{5}{5} = 1.$$
Pošto su oba ishoda jednako moguća računamo njihov prosjek, pa imamo:
$$P(A) = \frac{1}{2}.$$

2. Sada računamo vjerojatnost da je radnik u drugom uzimanju uzeo psića s bijelim šapama, s tim da znamo da je u prvom uzimanju uzeo psića s bijelim šapama. Ako je u prvom uzimanju uzeo psića s bijelim šapama, tada mu za drugi odabir preostaju dva psića s bijelim šapama od njih ukupno pet u boksu, pa imamo:
$$P(A|B) = \frac{2}{5}.$$

$\triangle$

Ako usporedimo vjerojatnosti $P(A)$ i $P(A|B)$ koje smo u prethodnom primjeru izračunali, vidimo da su one različite. Iz definicije koja slijedi u nastavku bit će jasno što nam taj podatak govori o događajima A i B.

Definicija 4. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i $A, B \in \mathcal{F}$ proizvoljni događaji. Kažemo da* **događaj A ne zavisi od događaja B** *ili da su događaji A i B* **nezavisni***, ako vrijedi:*
$$P(A|B) = P(A). \tag{3}$$
U protivnom slučaju tj. ako je $P(A|B) \neq P(A)$ kažemo da **događaj A zavisi od događaja B** *ili da su događaji A i B* **zavisni***.*

Nezavisnost događaja može se utvrditi i pomoću njihovog presjeka.

Naime, ako se vratimo na događaje iz Primjera 2. i njihove vjerojatnosti, možemo ustanoviti sljedeće:
$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(A|B) = \frac{2}{5}$$
$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5} \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Ako navedeno povežemo s činjenicom da su događaji A i B zavisni, možemo doći do sljedeće definicije:

Definicija 5. *Događaji $A, B \in \mathcal{F}$ su nezavisni ako vrijedi:*
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Prethodnu definiciju možemo generalizirati na slučaj kada imamo proizvoljnu familiju događaja, pa prema [1, str. 33] slijedi:

Definicija 6. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor. Kažemo da je proizvoljna familija događaja* $(A_x, x \in I) \subseteq \mathcal{F}$ *nezavisna ako za svaki konačan skup različitih indeksa* $\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq I$ *vrijedi:*

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{n} P(A_{i_j}).$$

Sljedeća propozicija pokazat će nam da komplementiranje ne mijenja status nezavisnosti događaja.

Propozicija 1. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor i* $A, B \in \mathcal{F}$ *nezavisni događaji. Tada su nezavisni i događaji*

1. A^C *i* B*,*
2. A *i* B^C*,*
3. A^C *i* B^C*.*

Dokaz:

Pomoću nezavisnosti događaja A i B, zbog čega je $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, i vjerojatnosti komplementa događaja, tj. vjerojatnosti suprotnog događaja, dokazat ćemo da su događaji A^C i B, A i B^C te A^C i B^C nezavisni:

1.
$$\begin{aligned} P(A^C \cap B) &= P(B \setminus (A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(B) - P(A)P(B) = (1 - P(A))P(B) \\ &= P(A^C) \cdot P(B) \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} P(A \cap B^C) &= P(A \setminus (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) \\ &= P(A) \cdot P(B^C). \end{aligned}$$

3. U posljednjem dijelu dokaza, uz nezavisnost događaja A i B te vjerojatnost komplementa, trebat će nam i svojstvo vjerojatnosti unije dvaju ne nužno disjunktnih događaja, odnosno svojstvo da je $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Sada imamo
$$\begin{aligned} P(A^C \cap B^C) &= P((A \cup B)^C) = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) \\ &= (1 - P(A)) - (1 - P(A))P(B) \\ &= (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B)) \\ &= P(A^C) \cdot P(B^C). \end{aligned}$$

■

Ilustraciju prethodne propozicije vidjet ćemo u sljedećem primjeru.

Primjer 3.

Dva bračna para su na kuglanju. Vjerojatnost da prvi bračni par sruši sve čunjeve je 0.7, a vjerojatnost da drugi bračni par sruši sve čunjeve je 0.8. Kolika je vjerojatnost da će u jednom bacanju točno jedan par srušiti sve čunjeve, ako znamo da parovi igraju nezavisno jedan od drugog?

Rješenje:

Ako koristimo sljedeće oznake:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\text{prvi bračni par je srušio sve čunjeve}\}, \\ A_2 &= \{\text{drugi bračni par je srušio sve čunjeve}\}, \\ B &= \{\text{točno jedan bračni par je srušio sve čunjeve u jednom bacanju}\}, \end{aligned}$$

u zadatku su nam zadane vjerojatnosti:

$$P(A_1) = 0.7, \quad P(A_2) = 0.8,$$

a vjerojatnost $P(B)$ trebamo izračunati. Pošto se u zadatku traži da je točno jedan par srušio sve čunjeve, znači da u tom jednom bacanju drugi par nije uspio srušiti sve čunjeve, pa će nam biti potrebne i sljedeće vjerojatnosti:

$$\begin{aligned} P(\overline{A_1}) &= 0.3 \quad \to P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1), \\ P(\overline{A_2}) &= 0.2 \quad \to P(\overline{A_2}) = 1 - P(A_2), \end{aligned}$$

pri čemu smo s $\overline{A_1}$ i $\overline{A_2}$ označili događaje:

$$\begin{aligned} \overline{A_1} &= \{\text{prvi par nije srušio sve čunjeve}\}, \\ \overline{A_2} &= \{\text{drugi par nije srušio sve čunjeve}\}. \end{aligned}$$

S obzirom da imamo dva para, imat ćemo i dvije mogućnosti:

1. prvi bračni par je srušio sve čunjeve i drugi par nije, ili
2. prvi bračni par nije srušio sve čunjeve i drugi bračni par jest.

Uzimajući u obzir nezavisnost događaja A_1 i A_2, možemo izračunati vjerojatnost da je točno jedan par srušio sve čunjeve u jednom bacanju na sljedeći način:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} \cap A_2) \\ &= P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \\ &= 0.7 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.8 \\ &= 0.38. \end{aligned}$$

△

3 Formula potpune vjerojatnosti

U nekim specifičnim situacijama računanja vjerojatnosti potrebno je skup događaja podijeliti na događaje koji su međusobno disjunktni, pri čemu je njihova unija jednaka cijelom tom skupu. Za početak ćemo to ilustrirati jednostavnim primjerom.

Primjer 4.

Kuglice bijele i crne boje nalaze se u kutiji s dvije pregrade. U jednoj pregradi nalaze se 4 crne i 2 bijele kuglice, dok se u drugoj pregradi nalaze 3 crne i 4 bijele kuglice. Kolika je vjerojatnost da ćemo iz kutije slučajnim odabirom izvući bijelu kuglicu?

Rješenje:

Iz kutije izvučemo jednu kuglicu. Pri tome postoje dvije mogućnosti:

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\text{izvučena kuglica je iz prve pregrade}\}, \\ H_2 &= \{\text{izvučena kuglica je iz druge pregrade}\}. \end{aligned}$$

Vjerojatnosti da se ovi događaji ostvare su:

$$P(H_1) = \frac{6}{13}, \qquad P(H_2) = \frac{7}{13}.$$

Ako je $A = \{\text{izvučena kuglica je bijele boje}\}$ traženi događaj, onda se može podijeliti na dva disjunktna događaja:

$$\begin{aligned} A \cap H_1 &= \{\text{izvučena kuglica bijele boje je iz prve pregrade}\}, \\ A \cap H_2 &= \{\text{izvučena kuglica bijele boje je iz druge pregrade}\}. \end{aligned}$$

Zbog toga vrijedi i $P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2)$, pri čemu se vjerojatnosti događaja $A \cap H_1$ i $A \cap H_2$ računaju na sljedeći način:

$$P(A \cap H_1) = P(H_1) \cdot P(A|H_1), \qquad P(A \cap H_2) = P(H_2) \cdot P(A|H_2).$$

Vjerojatnost da smo izvukli bijelu kuglicu iz prve pregrade jednaka je $P(A|H_1) = \frac{2}{6}$, dok je vjerojatnost da je izvučena bijela kuglica iz druge pregrade jednaka $P(A|H_2) = \frac{4}{7}$. U skladu s time, vrijedi sljedeće:

$$P(A) = \frac{6}{13} \cdot \frac{2}{6} + \frac{7}{13} \cdot \frac{4}{7} = \frac{6}{13}.$$

△

Ako se prethodno opisane specifične situacije prošire na slučajeve kada se pojavljuje više različitih mogućnosti, tada se skup elementarnih događaja Ω podijeli na n međusobno disjunktnih nepraznih događaja pri čemu vrijedi:

$$\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n.$$

Skupove $H_1, H_2, \ldots, H_n$ koji čine particiju skupa Ω nazivamo *hipotezama*, a one s navedenim svojstvima čine *potpun sustav događaja*. Slijedi i definicija:

Definicija 7. *Konačna ili prebrojiva familija događaja* $(H_i, i \in I), I \subseteq \mathbb{N}$, *u vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *čini* **potpun sustav događaja** *ako je:*

1. $P(H_i) > 0, \quad i \in I;$
2. $H_i \cap H_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i, j \in I;$
3. $\bigcup_{i \in I} H_i = \Omega.$

Sada imamo sve što nam je potrebno za iskaz i dokaz formule potpune vjerojatnosti.

Teorem 2. (Formula potpune vjerojatnosti) *Neka je* $(H_i, i \in I), I \subseteq \mathbb{N}$, *potpun sustav događaja i neka je* $A \in \mathcal{F}$ *proizvoljan događaj. Tada vrijedi:*

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(H_i) P(A|H_i). \tag{4}$$

Dokaz:

Kako je

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i \in I} H_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap H_i)$$

i događaji $A \cap H_i, i \in I$, su međusobno disjunktni jer vrijedi

$$H_i \cap H_j = \emptyset, \quad \forall i, j \in I, \quad i \neq j,$$

iz svojstva σ-aditivnosti vjerojatnosti i formule (2) slijedi

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A \cap H_i) = \sum_{i \in I} P(H_i) P(A|H_i).$$

■

Primjer 5.

Nakon odlučujuće utakmice prvenstva igrači su se morali izjasniti o promjeni trenera. Pri tome, četvrtina igrača kluba ima manje od 25 godina, polovina igrača kluba je dobi između 25 i 30 godina, a preostali su stariji od 30 godina, od ukupno 20 igrača u klubu. Poznato je da je 40% igrača mlađih od 25 godina glasovalo za promjenu trenera, kao i 50% igrača dobi između 25 i 30 godina te 80% igrača starijih od 30 godina. Kolika je vjerojatnost da se slučajno odabran igrač kluba izjasnio da je potrebna promjena trenera?

Rješenje:

Ako s H_1, H_2, H_3 označimo sljedeće događaje:

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\text{igrač ima manje od 25 godina}\}, \\ H_2 &= \{\text{igrač ima između 25 i 30 godina}\}, \\ H_3 &= \{\text{igrač ima više od 30 godina}\}, \end{aligned}$$

onda imamo:

$$\begin{aligned}
P(H_1) &= \frac{1}{4} \rightarrow \text{jer četvrtina igrača ima manje od 25 godina,}\\
P(H_2) &= \frac{1}{2} \rightarrow \text{jer je polovina igrača dobi između 25 i 30 godina,}\\
P(H_3) &= \frac{1}{4} \rightarrow \text{jer četvrtina igrača ima više od 30 godina.}
\end{aligned}$$

Sve vjerojatnosti navedenih hipoteza su pozitivne, događaji su međusobno disjunktni te u uniji daju cijeli skup Ω, tj. u našem slučaju ekipu sastavljenu od 20 igrača. To znači da događaji H_1, H_2 i H_3 čine potpun sustav događaja, te vjerojatnost da se slučajno odabran igrač kluba izjasnio da je potrebna promjena trenera možemo izračunati formulom potpune vjerojatnosti. Ako je

$$A = \{\text{slučajno odabran igrač kluba glasovao je za promjenu trenera}\},$$

za formulu potpune vjerojatnosti potrebne su nam još vjerojatnosti događaja $A|H_1, A|H_2$ te $A|H_3$. Jednostavno se izračuna da je:

$$\begin{aligned}
P(A|H_1) &= \frac{2}{5},\\
P(A|H_2) &= \frac{1}{2},\\
P(A|H_3) &= \frac{4}{5},
\end{aligned}$$

jer je 40% igrača mlađih od 25 godina glasovalo za promjenu trenera, a također i 50% igrača dobi između 25 i 30 godina te 80% igrača koji imaju više od 30 godina.
Sada, uvrštavanjem u formulu (4) za $n = 3$ dobijemo:

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3)\\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5}\\
&= \frac{11}{20}.
\end{aligned}$$

$\triangle$

U sljedećoj napomeni navodimo poopćenu formulu potpune vjerojatnosti.

Napomena 8. *Neka je zadan potpun sustav događaja* $(H_i, i \in I), I \subseteq \mathbb{N}$, *i događaji* $A, B \in \mathcal{F}$, *takvi da je* $P(B) > 0$. *Ako se formula potpune vjerojatnosti primijeni na vjerojatnost definiranu s* $P_B(\cdot) = P(\cdot|B)$ *te se pri tome iskoristi jednakost*

$$P_B(A|H_i) = \frac{P_B(A \cap H_i)}{P_B(H_i)} = \frac{\dfrac{P(A \cap H_i \cap B)}{P(B)}}{\dfrac{P(B \cap H_i)}{P(B)}} = P(A|B \cap H_i),$$

dobijemo da je

$$P_B(A) = \sum_{i\in I} P_B(A|H_i)P_B(H_i) = \sum_{i\in I} P(A|B\cap H_i)P(H_i|B).$$

Stoga, vrijedi poopćena formula potpune vjerojatnosti:

$$P(A|B) = \sum_{i\in I} P(A|B\cap H_i)P(H_i|B).$$

4 Bayesova formula

Na formulu potpune vjerojatnosti nadovezuje se Bayesova formula do koje se može doći malim promjenama u toku razmišljanja o danom slučajnom pokusu. Odnosno, pretpostavimo da imamo zadan potpun sustav događaja i poznate vjerojatnosti svake od hipoteza $P(H_i) > 0, i \in I, I \subseteq \mathbb{N}$, te znamo da se nakon izvođenja pokusa pojavio događaj A kao njegov ishod. Sada se pitamo koliku vjerojatnost imaju hipoteze $H_i, i \in I$, ako znamo da se dogodio ishod A. Mi zapravo želimo svakoj od hipoteza $H_i, i \in I$, pridružiti vjerojatnosti $P(H_i|A)$. To možemo postići uz pomoć relacije

$$P(A\cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B),$$

iz koje slijedi:

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}.$$

Uzmimo sada da je događaj B jedna od hipoteza $H_i, i \in I$, na koje je skup Ω podijeljen, odnosno

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}.$$

Pri tome vjerojatnost događaja A računamo uglavnom pomoću formule potpune vjerojatnosti (4). Na taj način smo došli do Bayesove formule.

Teorem 3. *Neka je $(H_i, i \in I), I \subseteq \mathbb{N}$, potpun sustav događaja u vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i neka je $A \in \mathcal{F}$ događaj takav da je $P(A) > 0$. Tada za svaki $i \in I, I \subseteq \mathbb{N}$, vrijedi formula*

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}, \tag{5}$$

koju nazivamo **Bayesova formula***.*

Dokaz:

Prema definiciji uvjetne vjerojatnosti (1) vrijedi:

$$\begin{aligned} P(H_i|A) &= \frac{P(H_i\cap A)}{P(A)} \\ &\overset{(2)}{=} \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}. \end{aligned}$$

■

Dakle, i u slučaju kada znamo koji događaj se dogodio izvođenjem pokusa i dalje nam nije odmah očita vjerojatnost pojave hipoteza koje su se ostvarile, pa zato pomoću Bayesove formule dolazimo do traženih vjerojatnosti.

Primjer 6.

U ponoć su na parkiralištu bila dva siva i jedan crni Ford, tri siva i četiri crna BMW–a te tri sive i jedna crna Toyota. Te noći je kradljivac automobila nasumce odabrao automobil i ukrao ga. Ako je ukradeni automobil sive boje, kolika je vjerojatnost da je to bio BMW?

Rješenje:

Imamo tri događaja

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\text{automobil je marke Ford}\}, \\ H_2 &= \{\text{automobil je marke BMW}\}, \\ H_3 &= \{\text{automobil je marke Toyota}\}, \end{aligned}$$

koja čine potpun sustav događaja, i odgovarajuće vjerojatnosti:

$$\begin{aligned} P(H_1) &= \frac{3}{14} \quad \to \text{jer su 3 automobila marke Ford, od njih 14;} \\ P(H_2) &= \frac{1}{2} \quad \to \text{jer je 7 automobila marke BMW, od njih 14;} \\ P(H_3) &= \frac{2}{7} \quad \to \text{jer je 4 automobila marke Toyota, od njih 14.} \end{aligned}$$

Ako s A označimo događaj

$$A = \{\text{ukradeni automobil je sive boje}\},$$

preostaje nam izračunati vjerojatnosti $P(A|H_1), P(A|H_2)$ i $P(A|H_3)$ kako bi mogli pomoću Bayesove formule dobiti traženu vjerojatnost događaja $H_2|A$.
Kako imamo 2 siva automobila marke Ford, 3 siva automobila marke BMW i 3 siva automobila marke Toyota, odgovarajuće vjerojatnosti iznose:

$$P(A|H_1) = \frac{2}{3}, \quad P(A|H_2) = \frac{3}{7}, \quad P(A|H_3) = \frac{3}{4}.$$

Uvrštavanjem u formulu (5) dobijemo:

$$\begin{aligned} P(H_2|A) &= \frac{P(H_2) \cdot P(A|H_2)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}}{\frac{3}{14} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4}} \\ &= 0.375. \end{aligned}$$

△

U primjeru koji slijedi koristi se Bayesova formula, ali je prikazana i alternativna metoda osnovana na intuitivnom pristupu toj istoj formuli, i njime ćemo se uvesti u novo potpoglavlje.

Primjer 7.

Muškarci čine 51% odraslog stanovništva jednoga grada. U skladu s time, 49% tog istog stanovništva čine žene. Za neko istraživanje je slučajno odabrana jedna odrasla osoba.

1. Kolika je vjerojatnost da je odabrana odrasla osoba muškarac?
2. Kasnije se saznalo da je subjekt istraživanja bio pušač. Također znamo da 9.5% muškaraca puši dok u tu skupinu spada samo 1.7% žena. Iskoristimo tu dodatnu informaciju kako bismo saznali vjerojatnost da je odabrana osoba ženskog spola.

Rješenje:

Koristit ćemo sljedeći zapis:

$$\begin{aligned} M &= \{\text{slučajno odabrana osoba je muškarac}\}, \\ \overline{M} &= \{\text{slučajno odabrana osoba je žena}\}, \\ C &= \{\text{slučajno odabrana osoba je pušač}\}, \\ \overline{C} &= \{\text{slučajno odabrana osoba je nepušač}\}. \end{aligned}$$

1. Prije korištenja informacije dobivene u drugom dijelu znamo samo da 51% stanovnika čine muškarci, pa je pri slučajnom odabiru odrasle osobe vjerojatnost da bude izabran muškarac jednaka $P(M) = 0.51$.
2. S obzirom na dobivenu dodatnu informaciju imamo sljedeće:

   - $P(M) = 0.51 \rightarrow$ jer 51% stanovništva čine muškarci,
   - $P(\overline{M}) = 0.49 \rightarrow$ jer 49% stanovništva čine žene,
   - $P(C|M) = 0.095 \rightarrow$ jer 9.5% muškaraca puši cigarete; to je vjerojatnost da će osoba koju smo odabrali koja puši cigarete biti muškarac,
   - $P(C|\overline{M}) = 0.017 \rightarrow$ jer 1.7% žena puši cigarete; to je vjerojatnost da će osoba koju smo odabrali koja puši cigarete biti žena.

   Kada primijenimo Bayesovu formulu (5) gledajući M kao događaj H_1, a C kao događaj A dobit ćemo sljedeće:

$$\begin{aligned} P(M|C) &= \frac{P(M) \cdot P(C|M)}{P(M) \cdot P(C|M) + P(\overline{M}) \cdot P(C|\overline{M})} \\ &= \frac{0.51 \cdot 0.095}{0.51 \cdot 0.095 + 0.49 \cdot 0.017} \\ &= 0.85329342 \\ &\approx 0.853. \end{aligned}$$

Prije nego što smo saznali da je subjekt istraživanja pušač, vjerojatnost da je subjekt muškog spola je bila 0.51 (jer muškarci čine 51% promatranog stanovništva). Međutim, nakon saznanja da je subjekt pušač vjerojatnost se povećala na 0.853. Dakle, vjerojatnost da je odgovarajući pušač muškarac iznosi 0.853. Navedena situacija ima smisla jer vjerojatnost da je subjekt muškog spola drastično raste zbog saznanja da je pušač, a to objašnjava činjenica da je puno više pušača muškaraca nego žena.

$\triangle$

4.1 Intuitivan pristup Bayesovoj formuli

Prethodno rješenje ilustrira primjenu Bayesovog teorema korištenjem formule. Nažalost, taj račun je dovoljno kompliciran za stvaranje mogućnosti pogreške ili nepravilne zamjene danih vrijednosti vjerojatnosti. Ipak, postoji drugi pristup koji je intuitivniji i jednostavniji (vidi [5]):

$\star$ *uzmemo neku prikladnu vrijednost za sveukupan skup koji promatramo i zatim konstruiramo tablicu s odgovarajućim frekvencijama za svaku mogućnost posebno, s obzirom na dane vjerojatnosti.*

Koristeći prethodni primjer, jednostavno uzmemo neku vrijednost za broj stanovnika tog mjesta, recimo $100,000$ i iskoristimo dane podatke za popunjavanje tablice.

Pronalazak broja muškaraca koji su pušači:

- Ako je 51% muškaraca od $100,000$ stanovnika onda njih ima $51,000$;
- Ako 9.5% muškaraca puši cigarete, onda je broj muškaraca pušača jednak 9.5% od $51,000$ ili $0.095 \cdot 51,000 = 4,845$;
- Preostalih muškaraca nepušača onda očigledno ima $51,000 - 4,845 = 46,155$.

Unesemo dobivene podatke u tablicu.

Pronalazak broja žena koje su pušači:

- Koristeći slično obrazloženje, 49% od $100,000$ su žene, pa je broj žena jednak $49,000$;
- Informacija da je 1.7% žena koje puše cigarete nam govori da je njihov broj jednak $0.017 \cdot 49,000 = 833$;
- Broj žena koje su nepušačice je $49,000 - 833 = 48,167$.

Dobivene podatke također unesemo u tablicu. Tako dobivamo:

	C (pušači)	$\overline{C}$ (nepušači)	Ukupno
M (muškarci)	$4,845$	$46,155$	$51,000$
$\overline{M}$ (žene)	833	$48,167$	$49,000$
Ukupno	$5,678$	$94,322$	$100,000$

Tablicu je bilo relativno jednostavno popuniti - podjelu pretpostavljene populacije rasporediti u različite kategorije i naći odgovarajuće postotke.

Sada vrlo lako možemo odgonetnuti ključno pitanje: pronaći vjerojatnost odabira subjekta muškog spola, znajući da subjekt puši cigarete, jednostavno koristeći uvjetnu vjerojatnost. Tako ćemo vjerojatnost odabira muškarca s informacijom da je pušač pronaći izdvojivši iz tablice stupac u kojemu su pušači, a zatim u tom stupcu odabiremo red u kojemu se nalaze muškarci. Među $5,678$ pušača nalazi se $4,845$ muškaraca, pa je vjerojatnost koju tražimo jednaka $4,845 \div 5,678 = 0.85329341$. To je:

$$P(M|C) = 4,845 \div 5,678 = 0.85329341 \approx 0.853.$$

Uočimo da smo dobili isto rješenje kao i kada smo primjer riješili pomoću Bayesove formule.

△

Formula za Bayesov teorem u prethodnom primjeru koristi podjelu na točno dvije mogućnosti (muškarce i žene), ali se formula može proširiti tako da uključuje više od dva slučaja. Sljedeći primjer prikazuje to proširenje i također opisuje primjenu Bayesovog teorema kod kontrole kvalitete u industriji. Kada skup događaja dijelimo na više od dva slučaja moramo pripaziti da podjela zadovoljava sljedeća dva uvjeta:

- događaji su disjunktni,
- događaji u uniji čine cjelinu.

Primjer 8.

Odašiljač signala položaja u slučaju opasnosti zrakoplova je uređaj koji odašilje signal u slučaju pada zrakoplova. Takve uređaje proizvode tri tvrtke, pri čemu prva tvrtka proizvodi 80% uređaja, druga tvrtka proizvodi 15% uređaja, dok treća tvrtka proizvodi preostalih 5% takvih uređaja. Uređaji proizvedeni u prvoj tvrtki imaju stopu neispravnosti 4%, iz druge tvrtke uređaji su sa stopom neispravnosti od 6%, dok ta stopa u posljednjoj tvrtki iznosi 9%.

1. Ako je uređaj odabran slučajnim odabirom od svih proizvedenih uređaja, kolika je vjerojatnost da je proizveden u prvoj tvrtki?
2. Ako je uređaj odabran slučajnim odabirom i testiranjem je utvrđeno da je neispravan, kolika je vjerojatnost da ga je proizvela prva tvrtka?

Rješenje:

Koristit ćemo sljedeći zapis:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{uređaj je proizvela prva tvrtka}\}, \\ B &= \{\text{uređaj je proizvela druga tvrtka}\}, \\ C &= \{\text{uređaj je proizvela treća tvrtka}\}, \\ \\ N &= \{\text{uređaj je neispravan}\}, \\ \overline{N} &= \{\text{uređaj je ispravan}\}. \end{aligned}$$

1. Ako je uređaj nasumično odabran od svih proizvedenih uređaja, vjerojatnost da ga je proizvela prva tvrtka jednaka je 0.8, jer prva tvrtka proizvodi 80% uređaja.

2. Ako imamo dodatnu informaciju da se testiranjem ispostavilo da je uređaj neispravan, želimo poboljšati vjerojatnost iz dijela 1. tako da iskoristimo dodatnu informaciju. Želimo pronaći vjerojatnost $P(A|N)$, što je vjerojatnost da je uređaj proizveden u prvoj tvrtki uz uvjet da je neispravan. Na osnovi danih informacija, znamo sljedeće vjerojatnosti:

$$\begin{aligned} P(A) &= 0.80 \rightarrow \text{jer prva tvrtka proizvodi } 80\% \text{ uređaja,} \\ P(B) &= 0.15 \rightarrow \text{jer druga tvrtka proizvodi } 15\% \text{ uređaja,} \\ P(C) &= 0.05 \rightarrow \text{jer treća tvrtka proizvodi } 5\% \text{ uređaja,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(N|A) &= 0.04 \rightarrow \text{jer je } 4\% \text{ uređaja iz prve tvrtke neispravno,} \\ P(N|B) &= 0.06 \rightarrow \text{jer je } 6\% \text{ uređaja iz druge tvrtke neispravno,} \\ P(N|C) &= 0.09 \rightarrow \text{jer je } 9\% \text{ uređaja iz treće tvrtke neispravno.} \end{aligned}$$

Ovdje je Bayesova formula proširena kako bi uključila tri događaja u skladu s izborom uređaja proizvedenog od strane tri proizvođača $\{A, B, C\}$:

$$\begin{aligned} P(A|N) &= \frac{P(A) \cdot P(N|A)}{P(A) \cdot P(N|A) + P(B) \cdot P(N|B) + P(C) \cdot P(N|C)} \\ &= \frac{0.80 \cdot 0.04}{0.80 \cdot 0.04 + 0.15 \cdot 0.06 + 0.05 \cdot 0.09} \\ &= 0.703. \end{aligned}$$

Intuitivan pristup Bayesovoj formuli:

Sada ćemo pronaći vjerojatnost $P(A|N)$ uz pomoć tablice. Pretpostavimo da je proizvedeno $10,000$ uređaja (rješenje ne ovisi o odabranom broju, nego je korisno odabrati dovoljno veliki broj da svi brojevi u tablici budu cijeli brojevi). Zbog proizvodnje od 80%, imamo $8,000$ uređaja proizvedenih u tvrtki A, od kojih je 320 neispravno. Stoga, imamo $7,680$ ispravnih uređaja iz tvrtke A. Do preostalih vrijednosti dođemo analognim zaključcima te ispunimo tablicu dobivenim vrijednostima.

	N(neispravni)	$\overline{N}$(ispravni)	Ukupno
A	320	7,680	8,000
B	90	1,410	1,500
C	45	455	500
Ukupno	455	9,545	10,000

Želimo pronaći vjerojatnost da je uređaj proizveden u tvrtki A, pri čemu znamo da je neispravan. S obzirom da znamo da je uređaj neispravan, možemo se osvrnuti na prvi stupac, gdje vidimo da je od ukupnih 455 neispravnih uređaja njih 320 iz tvrtke A, pa je vjerojatnost jednaka $320 \div 455 \approx 0.703$. Isti taj rezultat dobili smo rješavanjem zadatka preko Bayesove formule. $\triangle$

Prethodno opisani primjer obuhvaća proširenje Bayesove formule na tri događaja, koja smo označili s A, B i C. Na osnovu toga, nije teško napraviti proširenje Bayesove formule koje bi u obzir uzelo četiri ili više događaja.

* * *

Pitanje koje se može postaviti pri rješavanju zadataka je kada točno primijeniti Bayesov teorem, odnosno što nam jamči upotrebu Bayesove formule. Dakle, trebali bi uzeti u obzir Bayesovu formulu ako su ispunjeni sljedeći uvjeti:

- skup svih događaja podijeljen je u klase $(H_i, i \in I), I \subseteq \mathbb{N}$, koje su međusobno disjunktne i neprazne,
- unutar skupa svih događaja postoji događaj A sa svojstvom $P(A) > 0$,
- cilj je izračunati uvjetnu vjerojatnost oblika $P(H_i|A)$,
- poznat je barem jedan od sljedeća dva skupa vjerojatnosti:
  - $P(H_i|A)$ za svaki H_i, $i \in I$,
  - $P(H_i)$ i $P(A|H_i)$ za svaki H_i, $i \in I$.

Literatura

[1] M. Benšić, N. Šuvak, Uvod u vjerojatnost i statistiku, Grafika d.o.o., Osijek, 2014.

[2] N. Elezović, Vjerojatnost i statistika - Diskretna vjerojatnost, Element, Zagreb, 2007.

[3] N. Sarapa, Teorija vjerojatnosti, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[4] N. Sarapa, Vjerojatnost i statistika, I. dio, Osnove vjerojatnosti - kombinatorika, Školska knjiga, Zagreb, 1993.

[5] M. F. Triola, Bayes' Theorem. PDF.
Dostupno: http://faculty.washington.edu/tamre/BayesTheorem.pdf

[6] https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/uuv/files/ch4.pdf