# Algebarsko zaključivanje u nastavi matematike: uzorci i strukture

**Marinić, Ivana**

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

**Ivana Marinić**

# Algebarsko zaključivanje u nastavi matematike: uzorci i strukture

Diplomski rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

**Ivana Marinić**

# Algebarsko zaključivanje u nastavi matematike: uzorci i strukture

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2021.

# Sadržaj

# Uvod

*”Algebra je darežljiva,*
*često mi daje i više nego što sam tražio od nje.”*
Jean-Baptiste le Rond d’Alembert
(1717. - 1783.)

Algebra se u nastavu matematike uvodi već u prvom razredu osnovne škole. Pri uvođenju algebre u nastavu matematike, važno je algebru predstaviti učenicima kao dio matematike koji ima smisla, odnosno primjenu u svakodnevnom životu. Na taj način učenici dobivaju motivaciju za učenje te im gradivo ima smisla i lakše ga je shvatiti, a time i naučiti. Zaključak je da učenje i poučavanje algebre treba učiniti smislenim. Osnovna ideja pri poučavanju algebre je razvoj shvaćanja slova i simbola kod učenika. Svladavanje algebre znači vladanje novim jezikom, novim metodama znanja, kao i novi pogled na matematiku. Zato je jako važno da sami nastavnik matematike jako dobro poznaje algebru i algebarsko mišljenje kako se ne bi dogodilo da nastavnikova kriva shvaćanja, a zatim i tumačenja, budu prenesena na učenika. U osnovnoj školi algebra je uglavnom dobro prihvaćena te većina učenika lako svlada gradivo. No, krije li se iza toga stvarno shvaćanje algebre ili samo dobro naučene metode rješavanja određenih zadataka? Odgovor na ovo pitanje dobiva se dolaskom u prvi razred srednje škole, gdje algebra zauzima glavni dio nastave matematike. Nastava matematike u hrvatskim školama prema kurikulumu podijeljena je u pet domena:

- Brojevi
- Algebra i funkcije
- Oblik i prostor
- Mjerenje
- Podatci, statistika i vjerojatnost

Ove domene se tijekom cijelog školovanja kod učenika razvijaju i nadograđuju te su međusobno povezane. U ovom radu naglasak je na domeni Algebra i funkcije kroz osnovnoškolsko i srednjoškolsko obrazovanje učenika. Obrađene su i prezentirane teme u nastavi matematike iz domene Algebra i funkcije kroz sve razrede osnovne i srednje škole.

# Poglavlje 1

# Kurikulum: Domena Algebra i funkcije

Trenutni kurikulumi nastavnog predmeta Matematika donešeni su u siječnju 2019. godine. U njemu je algebra definirana kao "jezik za opisivanje pravilnosti u kojemu slova i simboli predstavljaju brojeve, količine i operacije, a varijable se upotrebljavaju pri rješavanju matematičkih problema." Nadalje, kroz osnovnu i srednju školu u domeni Algebra i funkcije učenici se služe različitim vrstama prikaza:

- grade algebarske izraze, tablice i grafove radi generaliziranja, tumačenja i rješavanja problemskih situacija,
- uočavaju nepoznanice i rješavaju jednadžbe i nejednadžbe računski provođenjem odgovarajućih algebarskih procedura, grafički i služeći se tehnologijom kako bi otkrili njihove vrijednosti i protumačili ih u danome kontekstu,
- određenim algebarskim procedurama koriste se i za primjenu formula i provjeravanje pretpostavki,
- prepoznavanjem pravilnosti i opisivanjem ovisnosti dviju veličina jezikom algebre učenici definiraju funkcije koje proučavaju, tumače, uspoređuju, grafički prikazuju i upoznaju njihova svojstva,
- modeliraju situacije opisujući ih algebarski, analiziraju i rješavaju matematičke probleme i probleme iz stvarnoga života koji uključuju pravilnosti ili funkcijske ovisnosti.

## 1.1 Osnovna škola

### 1.1.1 Razredna nastava

#### 1. razred

Prvi odgojno obrazovni ishod domene Algebra i funkcije za učenika u 1. razredu osnovne škole glasi:

**Zbraja i oduzima u skupu brojeva do 20.**,
koji se nadalje razrađuje na sljedeće:

- Zbraja i oduzima brojeve do 20.
- Računske operacije zapisuje matematičkim zapisom.
- Imenuje članove u računskim operacijama.
- Primjenjuje svojstva komutativnosti i asocijativnosti te vezu zbrajanja i oduzimanja.
- Određuje nepoznati broj u jednakosti.

Ishodi se postižu obradom sljedećih nastavnih sadržaja: zbrajanje i oduzimanje u skupu brojeva do 20, zamjena mjesta pribrojnika, združivanje pribrojnika, veza zbrajanja i oduzimanja (četiri jednakosti) i određivanje nepoznatoga broja u jednakosti primjenom veze zbrajanja i oduzimanja.
Zbrajanje i oduzimanje brojeva do dvadeset uvodi se pomoću konkretnih primjera iz svakodnevnog života. Koriste se primjeri u kojima će učenici povezivati zbrajanje brojeva s riječi "više", a oduzimanje s riječi "manje". Na primjer, mozemo reći učenicima da stave na svoj radni stol tri drvene bojice, zatim tražiti da stave jos dvije te ih upitati koliko sada imaju bojica. Radnju zaključiti izrazom "tri više dva jednako je pet". Kada su učenici u potpunosti ovladali riječima "više" , "manje" i "jednako" prelazi se na matematički zapis simbolima $+$, $-$ i $=$ . Potrebno je istaknuti dva zapisa:

1. 3 više 2 jednako je 5
2. $3 + 2 = 5$

te na takav način učenicima približiti matematički opis. Od iznimne je važnosti pri prvom susretu učenika sa znakom jednakosti osvješčivati njegovo značenje tj. jednakost lijeve i desne strane. Treba naglasiti na primjeru da vrijedi $2 + 3 = 5$, ali i $3 + 2 = 5$. Važno je poticati automatizaciju zbrajanja i oduzimanja brojeva do 20 radi lakšeg svladavanja daljnjeg sadržaja matematike. Također je od velike važnosti upoznati učenike s nazivima za članove računskih operacija (pribrojnici, umanjenik, umanjitelj). Učenici trebaju uočiti svojstvo komutativnosti zbrajanja na konkretnim primjerima. Možemo se opet poslužiti drvenim bojicama. Kažemo učenicima da stave tri bojice na stol, zatim još dvije. Nakon što učenici to naprave trebali bi matematičkim zapisom zapisati radnju i rezultat ($3 + 2 =5$). Zatim tražimo od učenika da najprije stave dvije bojice pa tri bojice, ponovno zapišu radnju i rezultat matematičkim izrazom ($2+3=5$). Učenici uočavaju da u oba primjera dolaze do istog rezultata i da je svejedno hoćemo li prvo uzeti tri, a zatim dvije bojice ili obratno. Tako učenici shvaćaju da svojstvo komutativnosti zbrajanja vrijedi, ali ga ne imenuju tj. ne koriste se riječju "komutativnost".

Drugi odgojno obrazovni ishod domene Algebra i funkcije za učenika u 1. razredu osnovne škole glasi:

**Prepoznaje uzorak i nastavlja niz.**,
koji se nadalje razrađuje na sljedeće:

- Uočava uzorak nizanja.

- Objašnjava pravilnost nizanja. Objašnjava kriterije nizanja.
- Niže po zadanom kriteriju.

Sadržaj kojeg obuhvaćaju ovi odgojno-obrazovni ishodi su Nizovi i Brojevni nizovi. Neke od preporuka za ostvarivanje odgojno-obrazovnoih ishoda u ovom slučaju također se baziraju na svakodnevnom životu. Recimo, možemo učenicima reći da nabroje dane u tjednu te im naglasiti da su upravo rekli jedan niz. Zatim uzeti još nekoliko primjera iz svakodnevnog života: reći učenicima da nabroje članove svoje obitelji, kolekciju svojih video igara, ... Kada su učenici stekli dojam o značenju i zapisu niza, uvesti brojevni niz. Možemo tražiti od učenika da nastave niz, bilo simbolima ili brojevima, ali pri tvorbi takvih zadataka treba biti oprezan kako se ne bi dogodilo da se tražena pravilnost ne može jedinstveno utvrditi.

### 2. razred

U drugom razredu osnovne škole prvi odgojno obrazovni ishod domene Algebra i funkcije je:

**Prepoznaje uzorak i kreira niz objašnjajući pravilnost nizanja.**,
koji se nadalje razrađuje na sljedeće:

- Uočava pravilnosti nizanja brojeva, objekata, aktivnosti i pojava. Određuje višekratnike kao brojevni niz.
- Kreira nizove.
- Objašnjava kriterije nizanja.

Kako bi ostvarili ovaj odgojno-obrazovni ishod, učenicima opet navesti nekakve životne primjere u kojima mogu uočiti brojne pojave iz okružja u kojima uočavaju pravilnosti nizanja. Neki od primjera su dan - noć, godišnja doba, ... Proći nizove brojeva kao što su niz prirodnih brojeva, višekratnici. Bitno je učenike poticati da uočene pravilnosti nizanja opisuju matematičkim jezikom.

Slijedeći odgojno-obrazovni ishod:

**Određuje vrijednost nepoznatog člana jednakosti.**,
koji se nadalje razrađuje na sljedeće:

- Određuje vrijednosti nepoznatoga člana u jednakosti i dobiveno rješenje provjerava.
- Primjenjuje svojstva računskih operacija.
- Primjenjuje vezu među računskim operacijama.
- Rabi slovo kao oznaku za broj. (Prošireni sadržaj.)

Kada s učenicima počinjemo raditi određivanje vrijednosti nepoznatog člana iz jednakosti, poželjno je nepoznati član zapisati djeci bliskim znakom, npr. $\triangle$, $\heartsuit$, $\square$. Do rješenja učenici mogu doći i odbrojavanjem (kada zbrajaju ili oduzimaju) ili prisjećanjem (kada množe ili dijele). Nakon što učenici pronađu rješenje treba ih potaknuti na pronalaženje i provjeru rješenja suprotnom računskom operacijom. Primjeri zadataka:

**Primjer 1.1** $20 + \square = 40$, *rješava se vezom zbrajanja i oduzimanja* $\square = 40 - 20$, $20 + 20 = 40$

**Primjer 1.2** $\blacktriangle + \blacksquare = 30$, $\blacktriangle + \blacktriangle = 20$, $\blacksquare = 20$

**Primjer 1.3** *Luka ima 15 godina. Njegov tata ima 40 godina. Koliko je Lukin tata stariji od njega? Ili: Koliko je godina imao Lukin tata kad se Luka rodio?*
$15 + ? = 40$ *rješava se vezom zbrajanja i oduzimanja* $40 - 15 =?$.

### 3. razred

U trećem razredu osnovne škole jedan je odgojno-obrazovni ishod:

**Rješava zadatke s jednim nepoznatim članom koristeći se slovom kao oznakom za broj.**
Ovaj ishod se razrađuje na:

- Koristi se slovom kao oznakom za broj.
- Uvrštava zadani broj umjesto slova.
- Određuje vrijednost nepoznatoga člana jednakosti/nejednakosti.
- Primjenjuje svojstva računskih operacija.
- Primjenjuje veze među računskim operacijama.

Kako bi ostvarili ove odgojno-obrazovne ishode učenicima bi trebali zadavati ovakve primjere zadataka:

**Primjer 1.4**

*Izračunaj vrijednost izraza* $241 + a$ *ako je* $a = 38$.

*Izračunaj* $b$ *ako je* $780 - b = 89$.

**Primjer 1.5** *Odredi sve troznamenkaste brojeve* $c$ *za koje vrijedi* $593 > c > 587$.

**Primjer 1.6**

*Zapiši matematičkim znakovima račun i izračunaj nepoznati član ako je djeljenik* 54*, a količnik* 6.

*Koji faktor množimo brojem* 7 *kako bi njihov umnožak bio* 42*?*

**Primjer 1.7** *Iva štedi za nove slušalice koje koštaju* 124 *kune. Koliko joj kuna još nedostaje ako je do sada uštedjela* 83 *kune?*

#### 4. razred

I u četvrtom razredu osnovne škole u domeni Algebra i funkcije jedan je odgojno obrazovni ishod koji glasi:

**Određuje vrijednost nepoznate veličine u jednakostima ili nejednakostima.**
Razrada ovog ishoda je sljedeća:

- Razlikuje jednakosti i nejednakosti. Koristi se slovom kao oznakom za nepoznati broj u jednakostima i nejednakostima.
- Računa vrijednost nepoznate veličine primjenjujući veze između računskih operacija.

U ovom razredu se postavlja temelj za linearne jednadžbe i nejednadžbe iako ih učenicima ne predstavljamo kao takve. Primjeri koje radimo moraju biti jednostavni s jednom računskom operacijom, a nepoznanicu računamo primjenom veze među računskim operacijama. Nepotrebno je inzistirati na dugotrajnom računanju s velikim brojevima u zadatcima.

**Primjer 1.8** *Izračunaj nepoznati faktor u jednakosti* $k \cdot 35 = 770$.

**Primjer 1.9** *Koji broj možeš zapisati umjesto s da vrijedi nejednakost* $15396 < s < 16403$*?*

### 1.1.2 Predmetna nastava

#### 5. razred

U petom razredu dva su osnovna odgojno - obrazovna ishoda:

**1. Rješava i primjenjuje linearnu jednadžbu.**
koji se dalje razrađuje na

- Prepoznaje nepoznanicu u problemskoj situaciji
- Problemsku situaciju zapisuje linearnom jednadžbom.
- Rješava linearnu jednadžbu oblika $ax = b$, gdje su $a$ i $b$ prirodni ili decimalni brojevi, provjeravajući točnost dobivenoga rješenja.
- Izražava nepoznatu veličinu iz jednostavne linearne jednadžbe koristeći se vezom među računskim operacijama.
- Koristi se opsegom i površinom geometrijskih likova za računanje duljina njihovih stranica.

**2. Prikazuje skupove i primjenjuje odnose među njima za prikaz rješenja problema.**
čija razrada glasi:

- Oblikuje i prikazuje skupove (brojeva, podataka) i njihove odnose s pomoću Vennovih dijagrama (presjek, unija, podskup).

- Određuje broj elemenata skupa. Prepoznaje prazan skup.
- Koristi se matematičkim simbolima u zapisu skupova i njihovih odnosa.
- Skupovnim zapisom prikazuje rješenja jednostavne nejednadžbe u skupu prirodnih brojeva s nulom.
- Ispisuje i prebrojava elemente skupa u kombinatornim zadatcima (prošireni sadržaj).

Očito je da su sadržaji koje treba obraditi Linearne jednadžbe te Skup, Vennovi dijagrami i Presjek i unija skupova, a posljednji sadržaj možemo proširiti na Elemente skupa u kombinatornim zadatcima.
Ostvariti prvi ishod možemo sljedećim primjerima:

**Primjer 1.10** *Riješiti jednostavne linearne jednadžbe oblika:* $x + a = b$, $x - a = b$, $a \cdot x = b$, $x : a = b$, $a : x = b$, *gdje su* $a$ *i* $b$ *prirodni ili nenegativni racionalni brojevi.*

**Primjer 1.11 Matematička priča**: *Svaku navedenu linearnu jednadžbu pokušati povezati s odgovarajućim problemskim zadatkom.*

**Primjer 1.12** *Izrazi nepoznanicu koristeći se vezom među računskim operacijama: Ako je* $5 \cdot x = 35$, *onda je* $x = 35 : 5$.

**Primjer 1.13** *Kada s učenicima obrađujemo skupove točaka u ravnini, poželjno je upoznati ih s presjekom dvaju skupova točaka (trokuta, kutova i sl.) i unijom dvaju ili više skupova točaka. Vennove dijagrame bilo bi lijepo povezati s drugim područjima: obilježja životinja, narječja hrvatskog jezika, ...*

### 6. razred

Šesti razred obuhvaća jedan odgojno obrazovnih ishod:

**1. Rješava i primjenjuje linearnu jednadžbu.**
koji se dalje razrađuje na

- Analizira problemsku situaciju u skupovima $\mathbb{Q}^+$ i $\mathbb{Z}$ i zapisuju ju linearnom jednadžnom.
- Rješava jednadžbu koja se svodi na oblik $ax = b$, gdje su $a$ i $b$ nenegativni racionalni ili cijeli brojevi, primjenjujući ekvivalentnost jednadžbi.
- Odnos dviju veličina prikazanih omjerom u problemskoj situaciji prikazuje razlomkom.
- Primjenjuje ekvivalentnost razlomaka za određivanje nepoznatoga brojnika ili nazivnika.
- Koristi se opsegom i površinom geometrijskih likova za računanje duljina njihovih stranica. Računa mjeru nepoznatoga kuta u trokutu i četverokutu.
- Rješava jednostavne jednadžbe s apsolutnom vrijednošću.

- Provjerava točnost rješenja jednadžbe. Preispituje smislenost rješenja i tumači dobiveno rješenje u kontekstu problema.
- Rješava jednostavnu linearnu nejednadžbu. (Prošireni sadržaj)

Preporuke za ostvarivanje ovog ishoda su rješavanje jednostavnijih linearnih jednadžbi s apsolutnim vrijednostima. Učenici bi trebali izražavati nepoznatu veličinu iz neke jednostavne veličine gdje su $a$ i $b$ nenegativni racionalni ili cijeli brojevi koristeći se vezom između računskih operacija što je i priprema za biologiju, kemiju i fiziku.

### 7. razred

U sedmom razredu Algebra zauzima više prostora te tako imamo i više ishoda.

**1. Računa s algebarskim izrazima u $\mathbb{Q}$.**
Razrada ovog ishoda je sljedeća:

- Opisuje monom i binom. Pojednostavnjuje algebarske izraze (eksponenata u rezultatu ne većih od 3) u skupu racionalnih brojeva zbrajanjem, oduzimanjem, množenjem i dijeljenjem, primjenjujući svojstva računskih operacija.
- Množi monom binomom i binom binomom.

Ostvariti ovaj ishod možemo slijedećim preporukama: Učenike je potrebno podsjetiti na ispuštanje znakova za množenje u monomu s koeficijentom: $4x$ je zapravo ”4 puta x”. Kada radimo zadatke u skupu racionalnih brojeva potrebno je pozornost posvetiti zadatcima s decimalnim zapisom racionalnog broja.

**2. Rješava i primjenjuje linearnu jednadžbu.**
Ishod se razrađuje na:

- Analizira problemsku situaciju i zapisuje ju linearnom jednadžbom.
- Rješava jednadžbu koja se svodi na oblik $ax = b$, gdje su $a$ i $b$ racionalni brojevi, primjenjujući ekvivalentnost jednadžbi.
- Odnos dviju veličina prikazanih omjerom prikazuje razlomkom.
- Primjenjuje ekvivalentnost razlomaka za određivanje nepoznatoga brojnika ili nazivnika.
- Koristi se opsegom i površinom geometrijskih likova za računanje duljina njihovih stranica, visina, polumjera i promjera kruga. Računa mjeru nepoznatoga kuta u trokutu i četverokutu. Računa elemente postotnoga računa. Rješava jednostavne jednadžbe s apsolutnom vrijednošću.
- Provjerava točnost i preispituje smislenost rješenja. Izražava nepoznatu veličinu iz jednostavne linearne jednadžbe oblika $ax = b$, gdje su $a$ i $b$ racionalni brojevi, koristeći se vezom među računskim operacijama.

Kako bi ostavrili ove ishode, učenicima nije potrebno zadavati komplicirane jednadžbe za rješavanje. Nagalasak je na oblikovanju jednadžbi iz zadanog problema i njihovu rješavanju uz provjeru smislenosti rješenja te raspravi o rješenju. Učenicima također zadavati zadatke u kojima moraju izražavati nepoznate veličine iz jednostavnih jednadžbi, koristeći se vezom između računskih operacija.

**3. Primjenjuje proporcionalnost i obrnutu proporcionalnost.**
Ishod je razrađen na:

- Prepoznaje i opisuje proporcionalne i obrnuto proporcionalne veličine.
- U situacijama iz stvarnoga života prepoznaje i objašnjava proporcionalnost i obrnutu proporcionalnost.
- Određuje i tumači koeficijent proporcionalnosti i obrnute proporcionalnosti.
- Povezuje koeficijent proporcionalnosti s omjerom dviju proporcionalnih veličina.
- Koristi se svojstvima proporcionalnosti i obrnute proporcionalnosti pri rješavanju problemskih situacija.
- Preispituje smislenost rješenja s obzirom na kontekst

Preporuke za ostvarivanje ovih ishoda su poticati intuitivni pristup rješavanju problema proporcionalnosti i obrnute proporcionalnosti. Povezivati i iskazivati koeficijent proporcionalnosti kao omjer dviju proporcionalnih veličina te uočiti njegovu stalnost. Koeficijent obrnute proporcionalnosti povezivati i iskazivati kao umnožak obrnuto proporcionalnih veličina te uočiti njegovu stalnost. Opisivati i prikazivati složene mjerne jedinice kao što su $km/h$, stanovnika$/km^2$. S učenicima raditi razne zadatke s preračunavanjem valuta. U svim zadatcima potrebno je raspravljati o smislenosti rješenja problema.

**4. Primjenjuje linearnu ovisnost.**
Pogledajmo razradu ovog ishoda:

- Prepoznaje i objašnjava linearnu ovisnost veličina iz stvarnoga života.
- Oblikuje tablicu pridruženih vrijednosti linearno zavisnih podataka.
- Povezuje zavisnu i nezavisnu veličinu u problemskoj situaciji.
- Zapisuje linearnu ovisnost formulom $y = ax + b$, gdje su $a$ i $b$ racionalni brojevi.
- Prikazuje linearnu ovisnost grafički u pravokutnome koordinatnom sustavu u ravnini.
- Analizira promjenu u linearnoj ovisnosti.
- Uspoređuje i diskutira prikaze dviju različitih linearnih ovisnosti na istome grafu.
- Linearnom ovisnošću modelira i rješava probleme.

Ovaj ishod je jako bitan i njime se ne provjerava tehnika računanja nego učenikovo logičko razmišljanje i sposobnost analize problema. Bitno je proučavati međusobno zavisne veličine, prevoditi uočene situacije linearne ovisnosti u algebarski zapis, tumačiti grafički prikaz linearne ovisnosti i analizirati promjene. Svakako je poželjno koristiti razne interaktivne računalne programe, alate, edukativne igre.

### 8. razred

U osmom razredu domena Algebra i funkcije su zastupljenije nego do sad.

**1. Računa s algebarskim izrazima u $\mathbb{R}$.**
Razrada ovog ishoda je sljedeća:

- Pojednostavnjuje algebarske izraze u skupu zbrajanjem, oduzimanjem, množenjem i dijeljenjem primjenjujući svojstva računskih operacija.
- Množi monom binomom i binom binomom.
- Računa vrijednosti jednostavnih algebarskih izraza.
- Izlučuje zajednički faktor.
- Pojednostavnjuje algebarske izraze.
- Prikazuje veličine matematičkim formulama.

**2. Primjenjuje razmjer.**
Razrada ovog ishoda je sljedeća:

- Opisuje razmjer (proporciju) kao ekvivalentnost dvaju omjera.
- Razlikuje vanjske i unutarnje članove razmjera te računa bilo koji nepoznati član razmjera.
- Primjenjuje razmjer u rješavanju problema iz matematike, drugih područja i stvarnoga života.

**3. Rješava i primjenjuje linearnu jednadžbu.**
Razrada ovog ishoda je sljedeća:

- Analizira problemsku situaciju i zapisuje ju linearnom jednadžbom.
- Koristi se opsegom, površinom, oplošjem, volumenom, razmjerom, Pitagorinim poučkom, Talesovim poučkom za računanje nepoznatih elemenata likova, tijela, oblika, mjerivih obilježja.
- Raspravlja o rješenju s obzirom na postavljene uvjete.

**4. Rješava i primjenjuje sustav dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama.**
Razrada ovog ishoda je sljedeća:

- Analizira rješenje sustava te ga uvrštavanjem dobivenih vrijednosti provjerava.
- Rješenje prikazuje uređenim parom brojeva.
- U zadanim problemima prepoznaje mogućnost rješavanja sustavom dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama.
- Ako je sustav složeniji, svodi ga na standardni oblik i rješava zadanom/proizvoljnom metodom.
- Raspravlja o egzistenciji dobivenoga rješenja (jedinstvenost, nepostojanje, beskonačno mnogo rješenja).

**5. Rješava i primjenjuje kvadratnu jednadžbu.**
Razrada ovog ishoda je slijedeća:

- Opisuje kvadratnu jednadžbu oblika $x^2 = k$, gdje je $k$ nenegativan racionalni broj i razlikuje ju od linearne jednadžbe.
- Primjenjuje kvadratnu jednadžbu za rješavanje problemskih situacija i u svrhu prikazivanja veličina matematičkim formulama.

## 1.2 Srednja škola

U srednjoj školi domena Algebra i funkcije je najzastupljenija.

### Prvi razred

**1. Primjenjuje potencije s cjelobrojnim eksponentima.**
Ishod je razrađen na:

- Računa vrijednosti brojevnih izraza s potencijama poštujući redoslijed računskih operacija.
- Navodi i objašnjava pravila za zbrajanje, množenje, dijeljenje i potenciranje potencija te ih primjenjuje za pojednostavnjivanje izraza i povezuje ih s problemima iz drugih područja i života.
- Zaokružuje broj na značajne znamenke

Preporuka za ostvariavnje ovog ishoda jeste ta da u primjerima i zadatcima za bazu potencija koristimo racionalne brojeve,

**Primjer 1.14** *Zemlji najbliža zvijezda Proxima Centauri udaljena je od Sunca* 4.3 *svjetlosne godine. Koliko iznosi ta udaljenost u kilometrima? Rezultat zapišite u znanstvenome obliku i zaokružite na tri decimale. Napomena: Svjetlosna godina udaljenost je koju svjetlost prijeđe u godini dana. Brzina svjetlosti je približno* $3 \cdot 10^3$ *metara u sekundi, a godina ima* 365 *dana.*

**2. Računa s algebarskim izrazima i algebarskim razlomcima.**

- Za zadani izraz računa konkretne vrijednosti, pojednostavnjuje izraz, primjenjuje formule za kvadrat binoma i razliku kvadrata, faktorizira izraze.
- Krati, množi, dijeli i zbraja jednostavne algebarske razlomke.

Preporuka za ostvarivanje ovog ishoda je da ne treba inzistirati na složenim zadatcima nego na razumijevanju i primjeni pravila.

**3. Primjenjuje proporcionalnost, postotke, linearne jednadžbe i sustave.**

- Primjenjuje postotni račun za obračun poreza, carine, promjene cijena, opise udjela i druge probleme iz života.
- Primjenjuje proporcionalnost u primjerima iz života. Rješava tekstualne zadatke iz matematike, drugih područja i života.
- Rješava linearne jednadžbe i sustave linearnih jednadžbi. Izražava jednu veličinu pomoću drugih primjenjujući svojstva jednakosti.

Preporuka za ostvarivanje ovog ishoda je da se zadaju jednostavni problemi: povećanje/sniženje za određeni postotak, izračun postotka, primjena proporcionalnosti u jednome koraku, račun diobe, problemi koji se izravno svode na linearnu jednadžbu.

**4. Primjenjuje linearne nejednadžbe.**

- Rješava linearne nejednadžbe i sustave linearnih nejednadžbi te rješenje zapisuje pomoću intervala.
- Primjenjuje linearne nejednadžbe u problemskim situacijama.

**5. Povezuje različite prikaze linearne funkcije.**

- Zadanu linearnu funkciju prikazuje tablično i grafički.
- Opisuje utjecaj koeficijenata na položaj grafa, definira i određuje nultočku.
- Iz grafa čita argumente i vrijednosti te određuje koeficijente i funkciju. Iz zadanih elemenata (argumenta i vrijednosti, točke grafa, koeficijenta) određuje funkciju.

Kako bi ostvarili ovaj ishod, preporuka je koristiti se programima dinamične geometrije te ostalim primjerenim i dostupnim interaktivnim računalnim programima i alatima za istraživanje svojstava funkcija, prikaz zadataka i provjeru ispravnosti rješenja

**6. Primjenjuje linearnu funkciju pri rješavanju problema.**

- U problemskim situacijama prepoznaje linearnu ovisnost, zapisuje ju kao funkciju te primjenjuje za analizu problema.
- Analizira problem iz grafičkoga prikaza.

Preporuka za ostvarivanje ovog ishoda je koristiti zadatke otvorenog tipa.

**7. Prikazuje operacije sa skupovima i rješenja nejednadžbi s pomoću intervala.**

- Nejednakosti zapisuje s pomoću intervala i obratno te prikazuje na brojevnome pravcu.
- Primjenjuje i prikazuje podskup, uniju, presjek i razliku podskupova skupa realnih brojeva zapisujući ih matematičkim simbolima.

Preporuka za ostvarivanje ovog ishoda je koristiti zadatke otvorenog tipa.

### Drugi razred

**1. Rješava i primjenjuje kvadratnu jednadžbu.**

- Odabire metodu i rješava kvadratne jednadžbe s racionalnim koeficijentima.
- Primjenjuje diskriminantu pri određivanju prirode rješenja kvadratne jednadžbe.
- Faktorizira trinom.
- Rješava jednadžbe koje se svode na kvadratnu jednadžbu.
- Modelira problemsku situaciju te određuje rješenja.

**2. Analizira funkciju.**

- Računa funkcijsku vrijednost zadane funkcije uvrštavanjem broja.
- Računski određuje domenu jednostavnih racionalnih i iracionalnih funkcija.
- Određuje sliku funkcije za linearnu i kvadratnu funkciju.
- Prepoznaje bijekciju između skupova prikazanih Vennovim dijagramima.

**3. Analizira grafički prikaz funkcije.**

- Grafički prikazuje funkcije: $f(x) = 1/x$ i $f(x) = \sqrt{x}$
- Na grafu funkcije određuje domenu, kodomenu, sliku funkcije i objašnjava bijekciju.
- Skicira graf inverzne funkcije

**4. Primjenjuje kvadratnu funkciju.**

- Određuje nultočke, sjecište s ordinatom, tjeme parabole, os simetrije, tijek funkcije.
- Grafički prikazuje kvadratnu funkciju.
- Očitava točke s grafa funkcije.
- Rješava jednostavne kvadratne nejednadžbe.
- Pri grafičkome prikazivanju kvadratne funkcije objašnjava oblik funkcije u ovisnosti o diskriminanti i vodećemu koeficijentu.

### Treći razred

U trećem razredu imamo najviše poklapanja domena.

1. **Primjenjuje pravila za računanje s potencijama racionalnoga eksponenta.**
    - Prelazi iz prikaza potencije racionalnoga eksponenta u prikaz korijenom i obratno.
    - Računa vrijednost korijena i potencija racionalnoga eksponenta koristeći se džepnim računalom ili bez njega.
    - Računa s potencijama racionalnoga eksponenta.
2. **Analizira eksponencijalnu i logaritamsku funkciju.**
    - Određuje domenu, kodomenu, sliku, rast i pad, inverznu funkciju eksponencijalne i logaritamske funkcije i crta grafove funkcija.
3. **Primjenjuje eksponencijalnu i logaritamsku funkciju.**
    - Modelira problemsku situaciju, određuje i provjerava rješenja te im utvrđuje smislenost.
4. **Modelira eksponencijalnom i logaritamskom jednadžbom.**
    - Navodi i primjenjuje svojstva potencija i logaritama, računa vrijednosti jednostavnih logaritamskih izraza, prelazi iz logaritamskoga u eksponencijalni oblik.
    - Rješava jednostavne eksponencijalne i logaritamske jednadžbe.
    - Modelira problemsku situaciju, određuje i provjerava rješenja te im utvrđuje smislenost.
5. **Primjenjuje svojstva trigonometrijskih funkcija.**
    - Definira trigonometrijske funkcije broja na brojevnoj kružnici, otkriva svojstva i rabi ih za računanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija.
    - Koristi se džepnim računalom.
6. **Analizira graf trigonometrijske funkcije.**
    - Prepoznaje i opisuje grafove osnovnih trigonometrijskih funkcija.
    - Grafički prikazuje trigonometrijske funkcije
7. **Primjenjuje trigonometrijske funkcije.**
    - Analizira probleme opisane trigonometrijskom funkcijom i primjenjuje trigonometrijske funkcije za modeliranje.
8. **Primjenjuje trigonometrijske jednadžbe.**
    - Osnovne trigonometrijske jednadžbe rješava grafički ili na brojevnoj kružnici.

**9. Primjenjuje jednadžbu pravca.**

- Prepoznaje, opisuje i crta pravac u koordinatnome sustavu iz njegove jednadžbe i izvodi jednadžbu pravca iz grafičkoga prikaza ili zadanih parametara.
- Računa mjeru kuta pravca s pozitivnim dijelom apscise i povezuje ga s koeficijentom smjera.
- Crta i određuje pravce paralelne s koordinatnim osima.
- Računa udaljenost točke od pravca i mjeru kuta između pravaca.

**10. Primjenjuje jednadžbu kružnice.**

- Prepoznaje jednadžbu kružnice i iz nje pronalazi duljinu polumjera i koordinate središta kružnice i obratno. Iz grafičkoga prikaza pronalazi jednadžbu kružnice.
- Određuje grafički ili računski jednadžbu kružnice u posebnome položaju (dodiruje jednu ili obje koordinatne osi) ili koncentrične kružnice.
- Iz općega oblika jednadžbe kružnice određuje središte i polumjer kružnice.

### Četvrti razred

**1. Primjenjuje aritmetički i geometrijski niz.**

- Opisuje aritmetički i geometrijski niz, zapisuje opći član niza, povezuje s aritmetičkom i geometrijskom sredinom.
- Računa zbroj prvih članova niza.
- Rješava probleme iz svakodnevnoga života primjenom aritmetičkoga i geometrijskoga niza, osobito složeni kamatni račun.

**2. Računa limes niza.**

- Opisuje pojam limesa, uočava rast ili pad članova niza i postojanje granice, tj. konvergentnost ili divergentnost.

**3. Analizira svojstva funkcija.**

- Nabraja elementarne funkcije i navodi njihova svojstva (domenu, kodomenu, sliku, parnost /neparnost, periodičnost, monotonost i ograničenost funkcije).
- Svojstva funkcija objašnjava na grafu funkcije

**4. Tumači značenje limesa funkcije u točki.**

- Opisuje i grafom prikazuje funkciju koja je neprekidna odnosno koja nije, objašnjava pojam limesa funkcije.
- Određuje limes funkcije

**5. Povezuje definiciju derivacije funkcije u točki s problemom tangente i brzine.**

- Grafički prikazuje i objašnjava problem tangente, označava prirast varijable i prirast funkcije, povezuje s pojmom limesa.
- Objašnjava vezu derivacije i trenutne brzine (prijelaz iz prosječne u trenutnu).
- Iskazuje definiciju derivacije funkcije u točki.

**6. Primjenjuje derivaciju funkcije u problemskim situacijama.**

- Izvodi derivaciju po definiciji za jednostavne funkcije (linearnu, kvadratnu), navodi pravila deriviranja zbroja, umnoška i kvocijenta, određuje tangentu na graf jednostavne funkcije.
- Rješava problemske zadatke rabeći derivaciju.

**7. Povezuje derivaciju funkcije i crtanje grafa funkcije.**

- U zadatcima s polinomima i racionalnim funkcijama (polinomi najviše 2. stupnja u brojniku i nazivniku), određuje domenu, nultočke (po mogućnosti), stacionarne točke, intervale pada i rasta funkcije (polinoma), ispituje postojanje ekstrema.
- Određuje tijek funkcije i crta graf.

# Poglavlje 2

# Koncepcija varijabli

U ovom poglavlju bavit ćemo se pitanjem što je školska algebra jer algebru nije lako definirati. Ona algebra koja se uči u školi drugačijeg je „kalupa“ od one algebre koja se uči na studiju matematike. Dva matematičara čija su pisanja uvelike utjecali na učenje algebre na studijskom nivou, **Saunders Mac Lane** i **Garrett Birkhoff** (1967.), svoju *Algebru* započinju pokušajem povezivanja školske i visokoškolske algebre:

> *"Algebra počinje kao umjetnost manipuliranja suma, produkata i potencija brojeva. Pravila za ova manipuliranja vrijede za sve brojeve pa se manipulacija može provoditi sa slovima umjesto brojevima. Tada vidimo da ista pravila vrijede za razne različite vrste brojeva, i da ta pravila možemo primijeniti i na objekte... koji zapravo uopće nisu brojevi. Algebarski sustav, kao što ćemo učiti, je tada skup elemenata bilo koje vrste na kojima djeluju funkcije kao što su zbrajanje i množenje, pod uvjetom da te operacije zadovoljavaju određena osnovna pravila."*

U prvoj rečenici ovog citata iznad misli se na aritmetiku, a u drugoj na školsku algebru. Školska algebra podrazumijeva slova (danas ih obično zovemo varijablama) i njihove operacije i smatra se da učenici uče algebru kada se prvi put susretnu s varijablama. No, pošto je koncepcija varijabli sama po sebi višestruka, reduciranje algebre na učenje varijabli ne odgovara na pitanje što je školska algebra. Pogledajmo sljedeće jednadžbe istog oblika – umnožak dva broja jednak je trećem broju:

1. $P = ab$
2. $40 = 5x$
3. $\sin x = \cos x \cdot \tan x$
4. $1 = n \cdot \frac{1}{n}$
5. $y = kx$

Svaka od ovih jednadžbi je drugačija. Prvu obično zovemo formula, drugu linearna jednadžba, treću identitet, četvrtu svojstvo, a petu jednadžba linearne funkcije. Ova različita imena reflektiraju drugačiju primjenu u koju je stavljena ideja o varijabli. U prvoj jednadžbi, odnosno formuli, $P$, $a$ i $b$ predstavljaju površinu, duljinu i širinu, što je nešto što nam je poznato. U drugoj, linearnoj jednadžbi, $x$ smatramo nepoznanicom koju računamo, a u identitetu, $x$ je argument funkcije. Četvrta jednadžba, za razliku od prethodnih, generalizira aritmetički uzorak gdje je $n$ broj ponavljanja. Zadnja, jednadžba linearne funkcije također ima $x$ kao argument funkcije, $y$ je vrijednost, a $k$ konstanta. Jedino u petoj jednadžbi osjećamo "varijabilnost" iz koje je nastao pojam *varijabla*. No, taj osjećaj nestaje ako o toj jednadžbi razmišljamo kao o jednadžbi pravca s nagibom $k$.

Koncepcija varijabli mijenjala se tijekom vremena. 1950tih godina izraz *varijabla* se spominje tek kod diskusije o sustavima i tada je opisana kao "broj koji se mijenja". No, u ono što danas nazivamo varijablama uveo nas je američki matematičar **Walter W. Hart** u svom djelu *Prvi tečaj algebre* iz 1951. godine:

> *"U svakoj formuli slova predstavljaju brojeve. Upotreba slova za predstavljanje brojeva je glavna karakteristika algebre."*

U drugoj knjizi te serije, Hart formalnije definira varijable:

> *"Varijabla je doslovan broj koji može imati dvije ili više vrijednosti tijekom pojedine rasprave."*

Moderni tekstovi u zadnjem dijelu tog desetljeća imali su drugačiju koncepciju koju predstavlja ovaj citat iz djela *Relacije i funkcije* (1959.) matematičara **Kenneth May**-a i **Henry Van Engen**-a:

> *"Ugrubo govoreći, varijabla je simbol koji zamjenjuje imena nekih objekata, obično broj u algebri. Varijabla je uvijek pridružena skupu objekata čija se imena mogu zamijeniti varijablom. Te objekte nazivamo vrijednostima varijable."*

Danas težimo izbjegavati "ime objekta" jer želimo misliti o varijabli jednostavno kao o simbolu kojim možemo supstituirati objekte (točnije, elemente iz određenog zamjenskog skupa).
Mnogi učenici o varijablama misle kao o slovima koji predstavljaju brojeve. No, vrijednost koju varijabla uzima nije uvijek broj, čak i u srednjoškolskoj matematici. U geometriji varijable često predstavljaju točke. Npr., u izjavi "Ako je $|AB| = |BC|$, tada je trokut $ABC$ jednakokračan.", varijable $A$, $B$ i $C$ su točke trokuta. U logici, varijable $p$ i $q$ često predstavljaju propozicije, u analizi varijabla $f$ često predstavlja funkciju, u linearnoj algebri varijabla $A$ može predstavljati matricu, a varijabla $v$ vektor, u višoj algebri $*$ može predstavljati operaciju. U zadnjem primjeru vidimo da varijablu ne moramo zapisati kao slovo, iako učenici gotovo uvijek teže misliti da je varijabla uvijek slovo, što mnogi edukatori potiču. Recimo,

$$3 + x = 7 \text{ i } 3 + \triangle = 7$$

se obično smatraju algebrom, dok

$$3 + \_ = 7 \text{ i } 3 + ? = 7$$

ne, iako su _ i ?, u kontekstu traženja rješenja jednadžbe, logički ekvivalentni s $x$ i $\triangle$.
Da sažmemo, varijable imaju puno mogućih definicija, oznaka i simbola. Pokušavajući "ugurati" ideju varijable u jednu koncepciju pojednostavlja ideju i zauzvrat iskrivljuje

svrhu algebre.

**Dva osnovna problema u učenju algebre**

Možda najveći problem oko učenja algebre u školama danas ima veze s nivoom koji se od učenika očekuje da mogu raditi razne manipulativne vještine ručno. No, u novijim člancima i izvještajima možemo pročitati da učenici i odrasli neće morati raditi puno algebarskih manipulacija i da se mogu smanjiti neki dijelovi tradicionalnog drilanja ručnog računanja ...
Drugi problem u kurikulumu domene Algebre jest pitanje uloge funkcija i pitanje kada bi trebalo učenicima uvesti pojam *funkcije*. U nekim osnovnoškolskim kurikulumima, ideja funkcije uvodi se još u prvom razredu, dok neki drugi edukatori smatraju da se funkcije trebaju koristiti kao "sredstvo" kako bi se uvele varijable i sama algebra.
Očito je da su ova dva problema povezana sa svrhom i ciljevima podučavanja i učenja algebre i s koncepcijama koje su tema ovog poglavlja. Ono što nije očito jest da su povezani i s načinom kojim koristimo varijable. Svrha algebre određena je ili povezana s različitim koncepcijama algebre koje su u korelaciji s različitom relativnom važnosti danoj raznim upotrebama varijabli.

## 2.1 Algebra kao generalizirana aritmetika

**Koncepcija 1**

U ovoj koncepciji, prirodno je misliti o varijablama kao generalizatorima uzoraka. Recimo,

$$3 + 4.5 = 4.5 + 3 \text{ je generalizirano kao } a + b = b + a.$$

Uzorak

$$\begin{aligned} 3 \cdot 5 &= 15 \\ 2 \cdot 5 &= 10 \\ 1 \cdot 5 &= 5 \\ 0 \cdot 5 &= 0 \end{aligned}$$

je proširen na množenje negativnih brojeva (što je, u ovom kontekstu, često smatrano algebrom, ne aritmetikom):

$$\begin{aligned} -1 \cdot 5 &= -5 \\ -2 \cdot 5 &= -10 \end{aligned}$$

Ova ideja je generalizirana na sljedeće svojstvo

$$-x \cdot y = -xy.$$

Na naprednijem nivou, pojam varijable kao generalizatora uzorka je osnova za matematičko modeliranje. Često nalazimo veze među brojevima koje želimo opisati matematički, za što su nam varijable jako koristan alat. Npr., svjetski rekord (u sekundama) za istrčavanje milje u $y$ godini od 1900. godine je približno opisan jednadžbom

$$T = -0.4Y + 1020.$$

Ova jednadžba samo generalizira aritmetičke vrijednosti nađene u mnogim zapisima. 1974. godine rekord je bio 3 minute 51.1 sekunde. Ključne upute za učenike u ovoj koncepciji algebre su ***prevedi*** i ***generaliziraj***. To su važne vještine ne samo za algebru nego i za aritmetiku. Usiskin i Bell su 1984. zaključili da je nemoguće adekvatno podučavati aritmetiku bez implicitnog i eksplicitnog bavljenja varijablama. Recimo, što je lakše: "Umnožak bilo kojeg broja i nula je nula." ili "Za svaki $n$, $n \cdot 0 = 0$." Superiornost algebarskog nad nekim govornim jezikom u opisu veze među brojevima je u sličnosti tih dviju sintaksi. Algebarski opis izgleda kao numerički opis, dok govorni ne. Ako netko sumnja u vrijednost varijabli bi prvo trebao neko pravilo opisati na govornom jeziku, a zatim algebarski.
Povijesno, algebarske oznake uveo je Francois Viete 1564. godine što je imalo neposredni učinak. Tijekom sljedećih pedesetak godina izumljena je analitička geometrija i dovedena na napredni nivo. Zatim je tijekom sljedećih sto godina postavljen temelj za infinitezimalni račun. I upravo je u tome moć algebre kao generalizirane aritmetike.

## 2.2 Algebra kao proučavanje postupaka za rješavanje određenih vrsta problema

**Koncepcija 2**
Pogledajmo sljedeći problem:
*"Ako broj* 3 *dodamo nekom broju uvećanom* 5 *puta, dobijemo zbroj* 40*. Koji je to broj?"*
Ovaj problem je lagano prevesti na algebarski jezik pomoću nepoznanice:

$$5x + 3 = 40.$$

U prijašnjoj koncepciji algebre kao generalizatora uzoraka, nemamo nepoznanice. Generaliziraju se poznate veze među brojevima tako da uopće nemamo osjećaj nepoznatog. Prema prvoj koncepciji ovaj problem je riješen jer smo našli osnovni uzorak. No, u ovoj koncepciji tek smo počeli. Problem se rješava na sljedeći način. Možemo nadodati $-3$ svakoj strani:

$$5x + 3 - 3 = 40 - 3.$$

Zatim pojednostavimo:

$$5x = 37.$$

I riješimo ovu jednadžbu tako da dođemo do rješenja $x = 7.4$.
Broj koji smo tražili u problemu jeste 7.4 što i je lako za provjeriti.

U rješavanju ovakvih problema, mnogim učenicima je problem prijeći s aritmetike na algebru. Dok aritmetičko rješenje ("u glavi") uključuje oduzimanje trojke i dijeljenje s 5, da bismo postavili algebarski izraz $5\ x + 3$ pribrajamo broj 3 i množimo s 5, što su inverzne operacije. To jest, za postaviti jednadžbu moramo razmišljati točno suprotno od načina kako bi inače riješili zadatak koristeći aritmetiku. U ovoj koncepciji algebre, varijable su ili nepoznanice ili konstante i njene glavne upute su ***pojednostavi*** i ***riješi***. Zapravo, pojednostavi i riješi nekad čak i znači isto. Npr. pitamo učenika da riješi zadatak

$$| x - 2 | = 5$$

tako da dobijemo rješenja $x = 7$ ili $x = -3$. No učenike bi također mogli pitati da isti zadatak zapišu bez apsolutne vrijednosti. Tada dobijemo

$$(x - 2)^2 = 25$$

što je ekvivalentno našem početnom problemu.

## 2.3 Algebra kao proučavanje veza među količinama

### Koncepcija 3

Kada napišemo $P = a \cdot b$, formulu za površinu pravokutnika, opisujemo vezu između tri veličine. Temeljna razlika između prethodne i ove koncepcije jest da u ovoj koncepciji varijable variraju. Da postoji fundamentalna razlika između koncepcija, evidentno je kada pitamo učenike što se događa s vrijednošću $1/x$ kada $x$ raste. Pitanje se čini jednostavno, ali je dovoljno da zbuni većinu učenika. Ne traži se vrijednost $x$ pa $x$ nije nepoznanica, nismo pitali učenike da prevedu izraz. Postoji uzorak koji je generaliziran, no on ne izgleda kao aritmetika, nego je to osnovni algebarski uzorak. Zbog svoje intrinzične algebarske prirode, neki edukatori vjeruju da se algebra treba uvoditi koristeći varijable na ovaj način. U radu Fey i Good iz 1985. godine vide sljedeća pitanja kao bazna za učenje algebre.

Za danu funkciju $f(x)$ nađi:

1. $f(x)$ za $x = a$;
2. $x$ tako da je $f(x) = a$;
3. $x$ tako da dobijemo minimum i maksimum $f(x)$;
4. stopu promjene u $f$ oko $x = a$;
5. prosječnu vrijednost od $f$ na intervalu $(a,b)$.

U ovoj koncepciji, varijabla je **argument** (npr. predstavlja vrijednost domene funkcije) ili **parametar** (npr. predstavlja broj o kojem ovise drugi brojevi) i samo u njoj postoje pojam nezavisne i zavisne varijable. Odmah dolazimo i do funkcija jer moramo imati ime za vrijednosti koje ovise o argumentu ili parametru $x$. Varijable kao argumenti se razlikuju od varijabli kao nepoznanica što vidimo i u sljedećem primjeru:

> Nađi jednadžbu pravca kroz točku (6, 2) s nagibom pravca jednakim 11.

Uobičajno rješenje kombinira korištenje svih varijabli koje smo spomenuli do sada što možda i objašnjava zašto neki učenici imaju poteškoća s rješavanjem istog. Analizirajmo rješenje. Točke na pravcu su povezane s jednadžbom oblika

$$y = kx + l,$$

što je uzorak i među varijablama i među formulama. U našim mislima to je funkcija s domenom varijable $x$ i slikom varijable $y$, ali učenicima nije jasno što je argument: $k$, $x$ ili $l$. Kao uzorak lako je razumjeti, no u kontekstu ovoga problema, postoje stvari koje su nam nepoznate. Sva nam slova izgledaju kao nepoznanice (posebno $x$ i $y$, slova koja tradicionalno označavamo kao nepoznanice). Probajmo to riješiti. Pošto znamo da je $k = 11$, u formuli ćemo slovo $k$ zamijeniti s brojem 11:

$$y = 11x + l.$$

Stoga $k$ ovdje nije parametar već konstanta. Sada trebamo naći $l$. Sada je $l$ iz parametra prešao u nepoznanicu. Kako sada naći $l$? Uzmemo jedan par od mnogh mogućih parova u vezi između $x$ i $y$, tj. izaberemo vrijednost za argument $x$ za koji znamo $y$. Zamijeniti par vrijednosti za $x$ i $y$ je moguće jer izraz $y = kx + l$ opisuje opći uzorak među brojevima. Sada u formulu uvrstimo umjesto $x$ broj 6 i umjesto $y$ broj 2

$$2 = 11 \cdot 6 + l$$

i za rješenje dobijemo $l = -64$. No, nismo našli $x$ i $y$ jer imamo danu vrijednost za njih pa nam nisu nepoznanice. Našli smo nepoznanicu $l$ koju uvrstimo u početnu jednadžbu pa dobijemo

$$y = 11x - 64.$$

Drugi način za razlikovanje dvije upotrebe varijabli u ovom problemu je da uključimo kvatifikatore. Za svaki $x$ i $y$, postoje $k$ i $l$ tako da je $y = kx + l$. Dana nam je vrijednost koja postoji za $k$ pa tražimo vrijednost koja vrijedi za $l$ koristeći jedan od mnogih "za svaki $x$ i $y$" parova. Koristeći jezik skupova, izraz $y = kx + l$ možemo zapisati

$$\{(x, y) : y = kx + l\}.$$

Znamo $k$, a $l$ trebamo naći.
Teško je uvjeriti učenike, čak i neke učitelje, da je

$$\{x : 3x = 6\} = \{y : 3y = 6\}$$

iako je rješenje svakog skupa $\{2\}$. Isto tako, mnogi i učenici, pa čak i učitelji ne vide da je funkcija $f$ dana s $f(x) = x + 1$ jednaka funkciji $g$ s istom domenom kao i $f$, danoj s $g(y) = y + 1$. Ključne upute za studenta u ovoj koncepciji algebre su ***poveži*** i ***grafički prikaži***.

## 2.4 Algebra kao proučavanje struktura

**Koncepcija 4**
Učenje algebre na visokoškolskoj razini uključuje strukture kao što su grupe, prstenovi, integralna domena, polja, vektorski prostori. Čini se da nema baš puno sličnosti s algebrom koja se uči u srednjoj školi, iako su polja realnih i kompleksnih brojeva i razni prsteni polinoma dobra podloga za teoriju algebre, a svojstva integralnih domena i grupa objašnjavaju zašto određene jednadžbe mogu biti riješene, druge ne. Algebru prepoznajemo kao proučavanje struktura po svojstvima koje pripisujemo operacijama nad realnim brojevima i polinomima. Promotri sljedeći problem

**Primjer 2.1** *Faktoriziraj* $3x^2 + 4ax - 13a^2$.

Koncepcija varijabli predstavljena ovdje nije ista kao prethodna koncepcija. Nema ni funkcije ni relacije niti je varijabla argument. Nema jednadžbe koju treba riješiti pa varijabla nije nepoznanica. Nema aritmetičkog uzorka koji bi se generalizirao. Rješenje primjera je:

$$(3x + 22)(x - 6a),$$

a možemo ga provjeriti supstitucijom vrijednosti za $x$ i $a$ u dani polinom i u rješenje, ali to se gotovo nikad ne radi. Da na ovaj način provjeravamo rješenje, možda bi postojao argument da ovdje generaliziramo aritmetiku. No, zapravo, učenika se uobičajeno pita da provjeri množenjem binoma, što je točno isti postupak koji se koristi da dobijemo odgovor. U ovoj vrsti problema učenici tretiraju varijable kao oznake na papiru, bez brojeva na koje se referiraju, a u ovoj koncepciji je ipak varijabla nešto više od proizvoljnog simbola. Ključne upute za studenta u ovoj koncepciji algebre su ***manipuliraj*** i ***opravdaj***.

Ovdje postoji suptilna nedoumica. Želimo da učenici imaju referente (obično realne brojeve) za varijable u mislima dok koriste varijable. Isto tako želimo da učenici mogu vršiti operacije s varijablama bez da uvijek imamo referenta. Pogledajmo sljedeći primjer:

**Primjer 2.2** *Dokaži identitet:* $2\sin^2 x - 1 = \sin^4 x - \cos^4 x$.

Kada ovakav primjer zadamo učeniku, mi od učenika ne tražimo da on misli o sinusu i kosinusu nekog broja ili da misli o sinusu i kosinusu kao o funkcijama. Ne zanimaju nas ni omjeri u trokutu. Samo želimo $\sin x$ i $\cos x$ zapisati drugačije koristeći svojstva koja su apstraktna kao i identitet koji želimo dokazati.
U ovim problemima, vjerujemo u svojstva varijabli, u vezi između $x$-eva, $y$-ona i $n$-ova, bili oni pribrojnici, faktori, baze ili eksponenti. Varijabla je postala proizvoljni objekt u strukturi povezanoj određenim svojstvima.

**Varijable u programiranju**
Algebra u matematici se razlikuje od one u programiranju i često je drugačija sintaksa. Pogledajmo sljedeći primjer:

**Primjer 2.3** $x = x + 2$.

U matematičkoj algebri u programima vidimo običnu jednadžbu bez rješenja, dok u računalstvu isti ovaj zapis znači zamjenu određene prostorne lokacije u računalo brojem za dva većim. U računalstvu su varijable često definirane kao nizovi slova i brojeva. Računalne aplikacije često sadrže veliki broj varijabli koje mogu označavati različite vrste objekata. Također, računala su programirana da manipuliraju s varijablama. Upotreba varijabli u računalstvu koristi sve vrste varijabli navedenih u poglavlju. Postoji generalizacija aritmetike. Učenje je algoritama je učenje struktura. U programiranju, varijable smatramo argumentom puno prije nego što je to uobičajeno u matematičkoj algebri. Pošto su računala programirana da izvode manipulacije sa simbolima bez referenata na njih, mnogi učenici uče o varijablama putem računalstva.

Da zaključimo, sve navede koncepcije algebre povezane su s različitim upotrebama varijabli. Početna dva problema, kroz ovu diskusiju, možemo interpretirati kao pitanje relativne važnosti za različite nivoe učenja do različitih koncepcija. Recimo, u prošlosti je bilo važno imati dobre "papir i olovka" manipulativne vještine kako bi se proučavale funkcije i druge relacije. Danas računalo lagano pojednostavljuje izraze. Svakako manipulativne vještene ne bi trebale biti veliki i jedini kriterij s kojim utvrđujemo je li netko savladao neki sadržaj algebre. Ako pogledamo ulogu funkcija u proučavanju algebre, jasno je da je i to važan pogled na algebru kao proučavanje veza među količinama.

# Poglavlje 3

# Uzorci

U ovom poglavlju bavit ćemo se pitanjem kako možemo koristiti uzorke za uvođenje varijabli. Postoje dvije vrste algebarskih uzoraka koji promoviraju algebarsko razmišljanje i uvode pojam varijable: **ponavaljujući** i **rastući** uzorci. Ponavljajući uzorci su najjednostavniji za uvođenje aktivnosti koje traže da učenici uoče i identificiraju uzorke, a rastući uzorci nas uvode u kompleksnije veze među pojmovima. Rastući uzorci mogu biti linearni i nelinearni.

## 3.1 Ponavljajući uzorci

Ponavljajući uzorci su linearni nizovi objekata, slika ili brojeva koji čine uzorak jer se dio njih ponavlja:

- $0\ x\ 0\ x\ 0\ x\ 0\ x\ 0\ x\ 0$, ponavljajući dio: $0\ x$
- $o\,|\,|\,o\,|\,|\,o\,|\,|\,o\,|\,|\,o\,|$, ponavljajući dio: $o\,|\,|$

Bitna vještina je znati od uzorka naći ponavljajući dio i od ponavljajućeg dijela uzorak. Velike ideje koje se mogu razviti iz ponavljajućih uzoraka su:

1. generalizacija
2. predstavljati generalizaciju s varijablama (uvod u algebru)
3. razlomci i omjeri
4. ekvivalentni razlomci i omjeri (proporcija).

Uobičajeni materijali koji se koriste sadrže nekakve objekte različitih boja, veličine, oblika itd. s jednim ili više atributa koji određuju bazu uzorka, male karte s brojevima od 1 do 5, tablice i kalkulatori. Poželjno je imati neke objekte s magnetima kako bi ih mogli staviti na ploču.

Ponavljajuće dijelove u nekom ponavljajućem uzorku moguće je numerirati što nam je korisno u generalizaciji, iako postoji problem u smislu da dva ponavljanja obično znače original i jedno ponavljanje ako krećemo od 1; pa se postavlja pitanje je li bolje numerirati od 1 ili od 0.

| o \| \| | o \| \| | o \| \| | o \| \| | o \| \| |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

Slika 3.1: Numerirani dijelovi ponavljajućeg uzorka

## 3.2 Rastući uzorci

### 3.2.1 Linearni rastući uzorci

Rastući uzorci su niz članova gdje imamo fiksni dio i rastući dio. Pogledajmo sljedeće primjere:

- Ako je rastući iznos uvijek isti, onda je rastući uzorak linearan. Na Slici 3.2 je 0 fiksni dio, a $X$ raste za jedan svaki put.

```
                    X
              X     X
        X     X     X
0X     0X    0X    0X
```

Slika 3.2: Linearni rastući niz

- Kada rastući iznos ne raste (raste za 0), onda imamo rastući uzorak kao na Slici 3.3.

```
0X   0X   0X   0X
```

Slika 3.3: Niz u kojem rastući dio ne raste

- Isto tako, moguće je da je fiksni dio jednak 0, odnosno da ne postoji što možemo vidjeti na Slici 3.4.

```
                   X
             X     X
       X     X     X
 X     X     X     X
```

Slika 3.4: Niz u kojem je fiksni dio 0

**Numeriranje objekata rastućeg uzorka**

Kao što smo već spomenuli, postoji debata treba li numeriranje članova linearnog rastućeg niza početi od 0 ili 1. Ako počnemo numerirati s 0, prednosti su sljedeće:

- Veza između uzoraka i grafova je očitija.
- Povezano je s problemima iz stvarnog života gdje postoji neka početna mjera prije neke izmjerene promjene.

No, ako imamo posla s nebrojevnim uzorcima napravljenih od nekog materijala, razumno je i uobičajno numerirati od 1.

Naravno, numeriranje od 0 ili 1 nije toliko bitno za ideje, ali mijenja konstantni dio pravila uzorka:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rastući uzorak | 0X | 0XX | 0XXX | 0XXXX | |
| Numeriranje od 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | Pravilo uzorka: $n + 2$ |
| Numeriranje od 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | Pravilo uzorka: $n + 1$ |

Slika 3.5: Numeriranje od 0 i od 1

Zapravo možemo numerirati poziciju članova bilo kojim brojem, jedino je za grafički prikaz puno jednostavnije ako imamo nulti objekt.

**Grafičko prikazivanje i pravilo uzoraka**
Fokus na rastućim uzorcima je identificirati *pravilo uzorka* koje opisuje rast. Pogledajmo slijedeći niz:

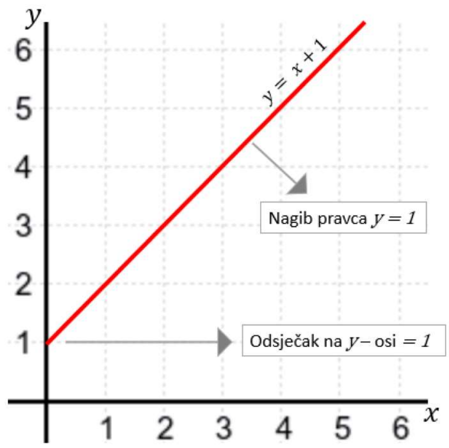

Slika 3.6: Niz

Za ovakav niz postoje dva tipa pravila:

1. **Sekvencijalno pravilo**: $n$-ti član je prethodni član + 1.
2. **Pozicijsko pravilo**: $n$-ti član je $1 + n$ ili $n + 1$.

Zbog pozicijskog pravila linearno rastuće uzorke možemo iskoristiti za uvod u pojam varijabli ili za grafičko prikazivanje pravaca. Postoji relacija između grafa pravca, rastućeg djela i fiksiranog dijela: rastući dio je nagib pravca, a fiksirani dio je sjecište s $y$-osi što možemo vidjeti na sljedećem primjeru.

**Primjer 3.1** *Nacrtaj graf* $y = x + 1$.

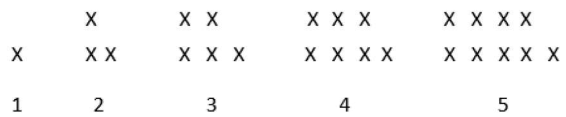



Slika 3.7: Rješenje Primjera 3.1

### Aktivnosti, materijali i veće ideje

Učenici mogu steći bolje razumijevanje sljedećim aktivnostima.

**Primjer 3.2** *Promotri sljedeće: Fiksirani dio je nulti član* $X$*, rastući dio su dva do-*




Slika 3.8: Niz

*dana* $X$*-a dodana svakom članu niza. Jasno je da je nulti član* $1$*, drugi član je* $3$*, treći član je* $7$ *itd što nas dovodi do uzorka* $2n + 1$ *za* $n$*-ti član. No, ako pratimo vizualan prikaz i dalje, imamo više mogućnosti za interpretaciju:*

- *dva reda, gornji je* $n$*, a donji je* $n + 1$ *što dovodi do uzorka* $n + n + 1$*;*
- *dvostruki red gdje imamo dvostruki red za svaki* $n$ *što dovodi do uzorka* $2n + 1$*;*
- *dvostruki red s* $n+1$ $X$*-ova umanjen za jedan* $X$*, što nam daje uzorak* $2(n+1)-1$

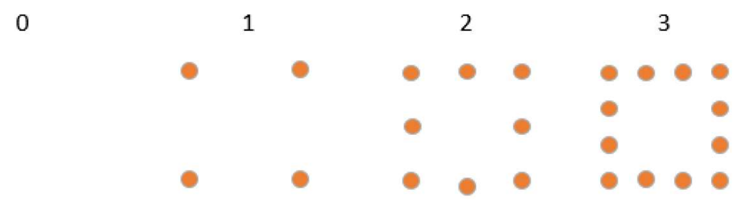
Fokusom na vizualni prikaz učenici bolje razumiju da postoje razni ekvivalentni algebarski izrazi za pravilo uzorka. Različite interpretacije vizualnog prikaza također podržavaju činjenicu da pravilo uzorka vrijedi za sve članove.
Uobičajni materijali koji se koriste u objašnjavanju su brojevi ili objekti različitih boja, veličina, oblika, itd, karte, tablice, kalkulatori.
Glavne ideje koje se razvijaju:

- generalizacija i argumentiranje generalizacije;
- vizualna manipulacija i numeričko zapisivanje;
- reprezentacija generalizacija s varijablama (uvod u algebru)
- uvod u graf pravca i vezu nagiba i sjecišta s $x$ - osi s rastućim i fiksnim dijelovima rastućih uzoraka.

### 3.2.2 Nelinearni rastući i drugi uzorci

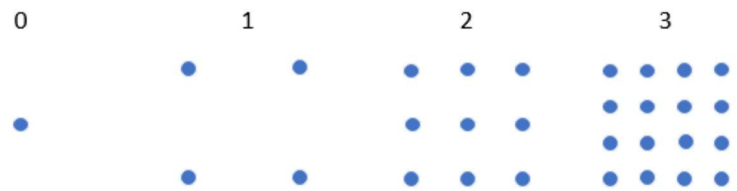
Nelinearni rastući uzorci se mogu konstruirati tako da ne rastu na neki konstantan način, npr. za isti iznos svaki put.

**Primjer 3.3** *Otvoreni kvadrat - uzorak raste za 4 svaki put:* 0, 4, 8, 12, 16, *itd. (višekratnici broja* 4*) pa je pravilo* $4n$ *(linearna jednadžba).*




Slika 3.9: Otvoreni kvadrat

**Primjer 3.4** *Ispunjeni kvadrat - uzorak površina kvadrata:* 1, 4, 16, 25, *itd, kvadrati brojeva počevši od* $1^2$, *a pravilo glasi* $(n+1)^2$ *(kvadratna, stoga nelinearna jednadžba).*




Slika 3.10: Ispunjeni kvadrat

Pogledajmo sada je li uzorak linearan, kvadratan ili kuban.

**Primjer 3.5**

- **UZORAK A**: $1, 3, 5, 7, 9, 11$, itd.
  oduzimanjem uzastopnih članova dobijemo $2, 2, 2, 2, 2, 2$, itd
  pa pravilo u sebi ima $n$ - linearni uzorak.

- **UZORAK B**: $2, 3, 5, 8, 12, 17$, itd.
  oduzimanjem uzastopnih članova dobijemo $1, 2, 3, 4, 5$, itd
  oduzimanjem uzastopnih članova dobijemo $1, 1, 1, 1, 1$, itd
  pa pravilo sadrži $n^2$ - kvadratni (nelinearni uzorak)

- **UZORAK C**: $2, 5, 10, 18, 30$, itd.
  oduzimanjem uzastopnih članova dobijemo $3, 5, 8, 12$, itd
  oduzimanjem uzastopnih članova dobijemo $1, 2, 3, 4, 5$, itd
  ponovno oduzimanjem uzastopnih članova dobijemo $1, 1, 1, 1$, itd
  pa pravilo sadrži $n^3$ - kubni (nelinearni uzorak)

**Napomena.** Da smo morali oduzimati četiri puta, u pravilu bi bilo $n^4$, itd.

**Drugi matematički uzorci**

Uzorci u drugim matematičkim područjima se koriste za razumijevanje ideja i podsjećanje činjenica u tim područjima. Recimo, red pozicija mjesnih vrijednosti, veza između susjednih pozicija mjesenih vrijednosti, brojanje uzoraka i pravilo odometra, osnovna pravila množenja, ponovljeno zbrajanje su sve primjeri razumijevanja i činjenica do kojih smo došli promatrajući uzorke.

## 3.3 Velike ideje za uzorke

Glavne **velike matematičke ideje** koje možemo podučavati s uzorcima su:

- *generalizacija*: npr. moći razviti pravilo koje vrijedi za sve brojeve i obrazloženje generalizacije;

- *vizualna manipulacija i numeričke tablice*: tablice olakšavaju identifikaciju pravila uzorka, no određujući pravilo samo iz vizualnog prikaza povećava mogućnost učenika da obrazloži svoje pravilo i da nađe više od jedne verzije pravila (što pomaže razviti ekvivalenciju izjava);

- *značenje varijabli*: npr. moći izreći pravilo sa slovom.

- *ekvivalencija*: za razlomke i omjere kada imamo dva broja ista kao npr. $2/3 = 4/6$.

- *graf linearnog uzorka (pravac)* i veze između nagiba i odsječka na $y$-osi s fiksnim i rastućim dijelovima.

Još neke velike ideje za podučavanje su:

- **numerirati, nenumerirati**: počinjemo s nenumeriranim aktivnostima prije nego što krenemo s numeriranim aktivnostima jer nenumerirane aktivnosti omogućuju da se lakše vide velike ideje;

- **razvoj**: jedan atribut $\rightarrow$ dva ili više atributa, jedna operacija $\rightarrow$ više od jedne operacije, i zbrajanje i oduzimanje $\rightarrow$ množenje i dijeljenje $\rightarrow$ sve četiri operacije;

- **istraživanje/stvarnost** - odglumiti situaciju iz stvarnog života, istražiti, diskusirati i dozvoliti učenicima da sami dođu do svojih pravila, tj. misliti o situacijama u kojima bi uzorci mogli postojati.

# Poglavlje 4

# Aktivnosti kojima se izgrađuju funkcije

U ovom poglavlju navest ćemo neke aktivnosti kojima izgrađujemo linearne, kvadratne i eksponencijalne izraze, a iz njih jednadžbe i funkcije.

## 4.1 Linearni izrazi

### 4.1.1 Metoda eliminacija za rješavanje sustava jednadžbi

Ovo je aktivnost u kojoj će učenici rješavati sustave jednadžbi koristeći metodu eliminacije. Učenici će također vidjeti potrebu algebarskog pristupa za rješavanje sustava jednadžbi.
Pogledajmo slijedeći primjer koji učenicima možemo dati nekoliko dana prije nego što će raditi metodu eliminacije u razredu:

**Primjer 4.1** *Na igralištu se nalazi 25 igračaka. Igračke su ili bicikli ili trocikli. Ukupno je 61 kotač. Koliko je biciklova na igralištu?*

Očekivani pristup koji bi učenici koristili je metoda pokušaja i pogreške:
Prvo pretpostavimo da je 10 bicikala i 15 tricikala pa imamo:
$10 \cdot 2 + 15 \cdot 3 = 20 + 45 = 65$
nije točno, pa probamo dalje:
pretpostavimo da je 15 bicikala i 10 tricikala pa imamo:
$15 \cdot 2 + 10 \cdot 3 = 30 + 30 = 60$
opet nismo dobili točan rezultat pa pokušamo ponovo
sada pretpostavimo da je 14 bicikala i 11 tricikala pa imamo:
$14 \cdot 2 + 13 \cdot 3 = 28 + 33 = 61$
što je konačan rezultat.
Sofisticiraniji postupak rješavanja bi bio odmah koristiti činjenicu da je potreban neparan broj tricikala. To smanjuje posao onima koji to primjete.
Kako bi uveli učenike u metodu eliminacije za rješavanje ovih jednadžbi, jednadžbe možemo prvo složiti u rečenice:
broj bicikala + broj tricikala = broj igračaka

dva puta broj bicikala + tri puta broj tricikala = broj kotača
Sada ni učenicima ne bi trebao biti problem prevesti ovo na matematički jezik, ako je $b$ broj bicikala, a $t$ broj tricikala:

$$\begin{cases} b+t=25 \\ 2b+3t=61 \end{cases}$$

Ovo se može riješiti algebarski ili možemo mijenjati ove sustave, izraziti jednu nepoznanicu pomoću druge, vratiti nepoznanicu odnosno riješiti sustav. Još neki problemi koje možemo zadati učenicima:

**Primjer 4.2** *Možeš li izračunati koliko iznosi $x$, a koliko $y$ u slijedećim sustavima jednadžbi?*

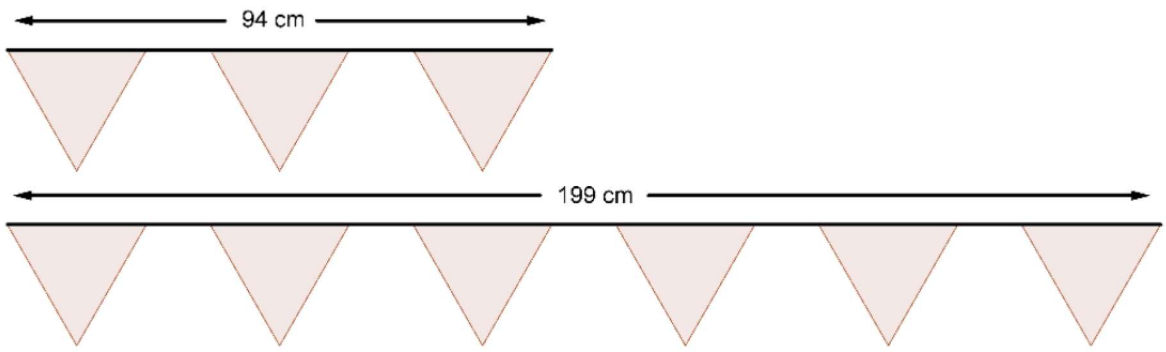
$$\begin{cases} 5x+2y=35 \\ 5x+8y=95 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3y=24 \\ 6x+3y=39 \end{cases}$$

*U prvom sustavu jednadžbi lagano je eliminirati $x$ jer je jednak, koeficijent $y$ je narastao za 6 ukupno, a ukupan zbroj za 60 pa nam je jasno da je $y = 10$. Dalje nam je lagano izračunati da je $x = 3$. Sličnu strategiju rješavanja možemo primjeniti i na drugi sustav.*
*Ako učenici mogu razumjeti kako riješiti sustave zadanih jednadžbi, tada strategija za dalje može biti "što trebam napraviti da sustav jednadžbi izgleda kao sustav jednadžbi koji znam riješiti?"*

Također možemo koristiti vizualni pristup na slijedeći način.

**Primjer 4.3** *Ena postavlja zastave za zabavu. Sve su zastave jednake veličine i jednako su udaljene jedna od druge na žici. Koja je širina baze svake zastave? Kolika je duljina udaljenosti između svake zastave?*




Slika 4.1: Enine zastave

## 4.2 Kvadratni izrazi

Neke od aktivnosti kojima izgrađujemo kvadratne funkcije su:

### 4.2.1 Dijeljenje algebarskih izraza

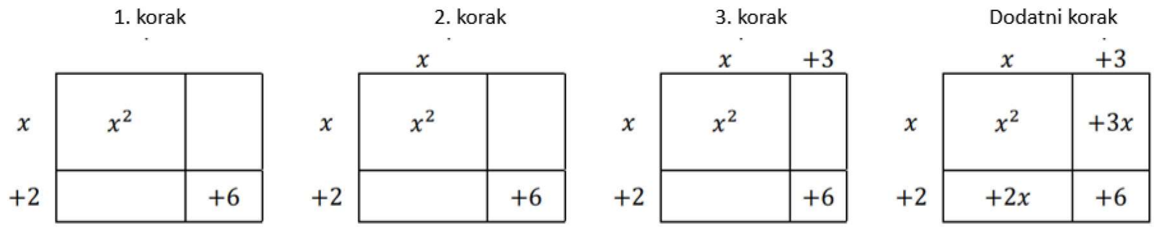
Kroz ovu aktivnost, učenici će moći:

- uvidjeti kako dijeljenje algebarskih razlomaka se uzdiže iz potrebe rješavanja problema vezanih za površinu pravokutnika
- dijeliti jednu dimenziju pravokutnika u izraz za njegovu površinu
- izvoditi operacije sljedećih oblika:
  - $(x^2 + bx + c) : (dx + e)$
  - $(ax^2 + bx + c) : (dx + e)$

Dijeljenje algebarskih izraza možemo učenicima uvesti kao potrebu za rješavanje problema. Pogledajmo sljedeći primjer:

**Primjer 4.4** *Ako je površina pravokutnika $x^2 + 5x + 6$ i jednja njegova stranica je $x + 2$, koliko iznosi druga stranica?*

Jedan pristup rješavanju ovog problema je da koristimo model površine. Iako se po-




Slika 4.2: Model površine

javljuju izrazi i s negativnim koeficijentima, ova metoda je dobra za rješavanje ovakvih problema. Također treba naglasiti da pojednostaviti kvadratni izraz podijeljen linearnim izrazom možemo i faktoriziranjem kvadratnog izraza i dijeljenjem zajedničkim faktorom kako bi dobili ekvivalentan izraz.

### 4.2.2 Koncept potreban za rješavanje kvadratne jednadžbe - posebno svojstvo 0

U ovoj aktivnosti učenici će vidjeti da kada je produkt dva broja 0, onda je jedan faktor sigurno 0. Učenicima možemo zadati slijedeći problem:

**Primjer 4.5** *Koristeći neke vještine koje smo već učili i učenjem novog koncepta riješimo probleme:*

$$(x + 2)(x + 3) = 42 \textit{ ili } (x + 2)(x + 3) = 756$$

*Dio vašeg zadatka je izazov, a on glasi da nađete dva broja, od kojih nijedan nije 0, čiji je produkt nula. Pripremite se da obranite svoje mišljenje i da diskutiramo o ovom izazovu.*

Svrha ovog izazova je da učenicii utvrde posebno svojstvo 0. Nadamo se da će ovaj izazov ostati učenicima u pamćenju jer ćemo se pozivati na njega ubuduće. Kada učenici shvate da je produkt dva broja nula i da onda jedan od faktora mora biti nula, stekli su važnu vještinu za rješavanje kvadratnih jednadžbi.

Alternativa je igra u kojoj učitelj kaže kako može predvidjeti umnožak bilo koja dva broja od kojih jedan broj zadaju učenici, a drugi broj zada učitelj. Učitelj u ovom slučaju izabire nulu i ponavlja igru sve dok učenici ne razumiju koncept.

## 4.3 Eksponencijalna funkcija

U ovoj aktivnosti učenici će moći:

- reprezentirati eksponencijalnu vezu na više načina
- identificirati ključna svojstva funkcija $f(x) = 2^x$ i $g(x) = 3^x$
- identificirati ključna svojstva funkcija $f(x) = a2^x$ i $g(x) = a3^x$
- naći aproksimirajuća rješenja iz grafova usporedbe dvije funkcije

**Aktivnost: Kako pitati za 2 kune?**
Matematička priča glasi:
Marko je rekao roditeljima:
*"Želim samo da mi dajete sitniš iz džepa cijeli mjesec lipanj. Prvi dan mi trebate dati 2 kune, drugi dan 4, treći 8 itd. "*
Postavlja se pitanje odgovara li ovaj dogovor više Marku ili Markovim roditeljima?
Zapišimo sljedeće:
Prvi dan: 2 kune
Drugi dan: $2 \cdot 2 = 4$ kune
Treći dan: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ kuna
i tako do kraja mjeseca iznos se duplira.
Ako broj dana označimo s $n$, kako ćemo napisati izraz kojim modeliramo Markov zahtjev? Glasiti će $2^n$, što je eksponencijalna funkcija.

# Poglavlje 5

# Strategije kako raditi s učenicima

Algebra je često prva matematička tema koja zahtijeva intenzivno apstraktno mišljenje, što je za mnoge učenike izazovna vještina. S algebrom želimo potaknuti učenike da se, nakon učenja aritmetičkih operacija, fokusiraju na korištenje simbola da predstavljaju brojeve i izraze matematičke veze. Razumijevanje algebre je ključno i važno za neki budući uspjeh u matematici, ali i u životu. Neke ideje koje unapređuju podučavanje i učenje matematike:

- Razvijanje dubljeg razumijevanja algebre.
  Iako je znanje i brzina izvođenja aritmetičkih operacija važna, bitno je dublje razumjeti algebru. Učenike bi trebalo ohrabrivati da povezuju algebarske koncepte i postupke u problemima. Učenike možemo pitati neka od sljedećih pitanja: Što se od vas traži u ovom zadatku? Što znate o formi ove izjave ili jednadžbe? Kako provjeriti jeste li točno riješili zadatak?

- Promovirati procesno-orijentirano mišljenje.
  Fokus algebre bi trebao biti u razumijevanju postupaka koji su nas doveli do točnog odgovora, a ne samo konačan rezultat algebarskog problema. Učenicima bi trebali postavljati sljedeću vrstu pitanja: Koje ste odluke donijeli da bi riješili problem? Koje ste korake poduzeli da biste riješili ovaj problem? Postoje li drugi načini da se riješi ovaj zadatak?

- Ohrabrivati preciznu komunikaciju.
  Učitelji bi trebali učenike poticati da razumijevaju i pričaju o matematičkim konceptima, postupcima i strategijama i pri tome da koriste precizan, točan matematički jezik. Komunikacija ima glavnu ulogu da pomogne učenicima da razviju matematičko razumijevanje. Pitanja za učenika su: Kako bi ste opisali ovaj problem koristeći precizan matematički jezik? Kako bi ste opisali strategiju za rješavanje nekog problema koristeći precizan matematički jezik?

## 5.1 Prva preporuka

Prva preporuka za rad s učenicima glasi:
**Koristite riješene probleme kako biste angažirali učenike u analiziranju al-**

**gebarskog razmišljanja i strategija**:

1. Neka učenici diskutiraju na strukturama riješenih problema kako bi povezali strategije i zaključivanje.

2. Odaberite riješene probleme koji reflektiraju cilj sata, uključujući i probleme koji ilustriraju uobičajne greške.

3. Koristite cijeli razred za diskusiju, male grupe za rad i nezavisne aktivnosti za vježbu kako biste uveli, elaborirali i vježbali rad s riješenim problemima.

Za razliku od osnovnoškolske aritmetike, algebarski problemi često traže učenike da misle apstraktno. Algebarsko mišljenje od učenika zahtijeva da simultano procesuiraju više dijelova kompleksne informacije što može limitirati učenikov kapacitet da razvije nova znanja. Riješeni problemi mogu minimizirati teret apstraktnog razmišljanja jer učenici vide problem i nekoliko koraka do rješenja odjednom, bez da izvršavaju svaki korak, i tako učenici uče efikasnije. Također, upotrebom nedovršenih ili netočnih riješenih problema učenike ohrabruje da misle kritički.

**Primjer 5.1** *Odredi $x$ u jednadžbi* $3^{4x+3} = 81$.
**Rješenje:**

$$\begin{aligned} 3^{4x+3} &= 81 \\ 3^{4x+3} &= 3^4 \\ 4x + 3 &= 4 \\ 4x &= 1 \\ x &= \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Sada ćemo objasniti kako izvršiti preporuke jednu po jednu:

1. Neka učenici diskutiraju na strukturama riješenih problema kako bi povezali strategije i zaključivanje.

Mi kao učitelji, trebamo stvoriti prilike za učenike da diskutiraju i analiziraju riješene probleme tako što ćemo učenike pitati da opišu korake u riješenom problemu i da objasne korišteno razmišljanje. Pitajte učenike specifična pitanja o strategiji rješenja i je li ta strategija logična i matematički korektna. Kroz ova pitanja učenike ohrabrujemo da aktivno sudjeluju. Pitanja treba prilagoditi potrebama učenika i tipovima problema o kojima raspravljamo. Neka pitanja koja možemo primjeniti na mnoge probleme u algebri su:

- Koji koraci su korišteni u rješavanju problema? Zašto koraci idu redom kojim idu? Možemo li mijenjati redoslijed koraka?

- Je li problem mogao biti riješen u manje koraka?

- Može li se netko sjetiti drugog načina da se riješi ovaj problem?

- Hoće li ova strategija rješavanja vrijediti uvijek? Zašto?

- Za koje druge probleme će vrijediti ova strategija?

- Kako možemo promijeniti dani problem tako da strategija ne vrijedi?
- Kako možeš modificirati rješenje da bude jasnije drugima?
- Koje su matematičke ideje povezane s ovim rješenjem?

Što se tiče strukture zadataka, ona uključuje količine, varijable, operacije i relacije, uključujući jednakost i nejednakost. Složenije strukture su građene od jednostavnijih i prepoznati strukturu uključuje sposobnost kretanja među različitim nivoima kompleksnosti. Pažljivo pregledavanje i diskutiranje struktrue i svakog koraka rješenja pomaže učenicima da prepoznaju sekvencijalnu prirodu rješenja i očekivanje sljedećeg koraka u rješavanju problema. Na taj način učenici unaprijeđuju razmišljanje iz različitih strategija rješavanja problema. Pitanja s kojima možemo poticati diskusiju o strukturi problema su:

- Koje količine, uključujući brojeve i varijable, možemo naći u ovom problemu?
- Jesu li ove količine diskretne ili neprekidne?
- Koje operacije i veze među količinama uključuje ovaj problem? Postoje li veze zbrajanja ili množenja? Uključuje li problem jednakost ili nejednakost?
- Kako zagrade korištene u problemu označavaju strukturu problema?

2. Odaberite riješene probleme koji reflektiraju instrukcijski cilj lekcije, uključujući i probleme koji ilustriraju uobičajne greške.

Preporuča se učenicima dati riješene primjere kako bismo postigli razne odgojno - obrazovne ishode. Odaberimo riješene probleme koji su povezani s ishodima od, bilo sadašnjih ili prošlih, učenika, od učenika drugih učitelja, iz kurikuluma ili one koje smo sami smislili. Učenicima treba dopustiti da se konzultiraju međusobno kako bi shavtili različite načine rješavanja problema. Ako učenicima pokažemo nekoliko riješenih problema koji se rješavaju sličnim postupkom, učenici mogu vidjeti kako pristupiti različtim problemima sličnih struktura. Da bi uključili višestruko riješene probleme u obradu neke nastavne teme možemo se voditi sljedećim pristupima:

- Birati probleme s različitim nivoima težine i poredajte ih od jednostavnije do najkompleksnije primjene istog koncepta.
- Prikazati više primjera simultantnosti kako biste ohrabrili učenike da prepoznaju uzorke u postupcima rješavanja kroz probleme.
- Alternativno, pokazati probleme jedan po jedan kako biste olakšali diskusiju svakog problema.

Pogledajte primjere riješenih problema različitih ishoda:

**Primjer 5.2** *Nađi nepoznanice $x$ i $y$:*

$$\begin{cases} 2x - 4y = 10 \\ 5x - 2y = 9 \end{cases}$$

*Učenicima prikažemo sljedeći postupak rješavanja ovog zadatka tako da kažemo npr. Josip je riješio zadatak na sljedeći način:*

$$\begin{gathered}2x-4y=10\\2x=10+4y\\x=5+2y\end{gathered}$$

*Pitanja kojima vodimo učeničku diskusiju su:*
*Što je Josip prvo učinio u zadatku? Zašto? Ima li smisla da je ovo prvi korak? Može li se netko sjetiti drugačijeg načina da započnemo rješavati ovaj zadatak?*

$$\begin{gathered}5x-2y=9\\5(5+2y)-2y=9\\25+10y-2y=9\\25+8y=9\\8y=-16\\y=-2\end{gathered}$$

*Što je Josip dalje napravio? Zašto? Imaju li svi Josipovi koraci smisla? Može li se netko sjetiti drugačijeg načina da se dođe do y?*

$$\begin{gathered}x=5+2(-2)\\x=5+(-4)\\x=1\end{gathered}$$

*Možemo pitati učenike sljedeće: Kako je Josip došao do x? Hoće li ova strategija rješavanja uvijek uspjeti? Zašto? Može li se netko sjetiti drugačijeg načina da se dobije x?*
*Provjera rješenja:*

$$\begin{gathered}2(1)-4(-2)=10\\2+8=10\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}5(1)-2(-2)=9\\5-(-4)=9\end{gathered}$$

*Moguća pitanja za učenike su: Jesu li Josipov rješenja točna? Kako znamo da Josip nije negdje pogriješio? Bi li ovaj postupak doveo do točnog rješenja da promjenimo redoslijed koraka? Mogu li se ove jednadžbe riješiti jednostavnije ili u manje koraka?*

**Primjer 5.3** *Faktorirziraj izraz:* $2x^2-16x+32$.
*Učenicima prikažemo sljedeći postupak rješavanja ovog zadatka tako da kažemo npr. Josip je riješio zadatak na sljedeći način:*

$$\begin{gathered}2x^2-16x+32\\2(x^2-8x+16)\\2(x-4)(x-4)\\2(x-4)^2\end{gathered}$$

*Pitanja za učenika kojima potičemo diskusiju:*
*Što je Josip prvo napravio i možeš li objasniti zašto je to učinio prvo? Zašto je Josip izlučio broj 2? Može li se netko sjetiti drugačijeg načina da se faktorizira ovaj izraz? Kako Josip može provjeriti svoj odgovor?*

3. Koristite cijeli razred za diskusiju, male grupe za rad i nezavisne aktivnosti za vježbu kako biste uveli, elaborirali i vježbali rad s riješenim problemima.

**Primjer 5.4** *Nagib pravca je* $-1/2$. *Točka* $(6, 8)$ *se nalazi na pravcu. Kako glasi jednadžba pravca u eksplicitnom obliku? U kojoj točki graf siječe y-os?*
**Ivanovo rješenje.**

$$y = kx + l$$
$$y = -\tfrac{1}{2}x + l$$

$$8 = -\tfrac{1}{2}(6) + l$$

$$8 = -3 + l$$
$$8 + 3 = l$$
$$11 = l$$

$$y = -\tfrac{1}{2}x + 11$$

*Odsječak na y - osi je* 11, *a nagib pravca* $-\frac{1}{2}$

*Pitanja koja postavljamo kako bi potaknuli raspravu u cijelom razredu:*
*Što predstavlja* $k$*? Što predstavlja* $l$*?*
*Što je Ivan prvo napravio? Zašto? Što predtsvalja* $-1/2$*? Ima li netko ideju kako drugačije možemo započeti rješavati ovaj zadatak?*
*Zašto je bitno naći* $k$*? Što supstituiramo za* $x$ *i* $y$ *u početnoj jednadžbi pravca?*
*Kako je Ivan došao do* $y = -\frac{1}{2}x + 11$*? Kako znamo da je ova jednadžba točna? Leži li točka* $(6, 8)$ *na tom pravcu?*

## 5.2 Druga preporuka

Druga preporuka za rad s učenicima je:
**Poučavajte učenike da koriste strukturu algebarskih reprezentacija.** :

1. Promovirajte uporabu jezika koji reflektira matematičku strukturu.

   **Primjer 5.5** *Neprecizni vs. precizni matematički jezik.*

   - *izluči* $x$ *vs. faktoriziraj* $x$*. Ili podijeli obje strane jednadžbe s* $x$*, pazi na mogućnosti dijeljenja s* 0
   - *prebaci* 5 *s druge strane vs. oduzmi* 5 *s obje strane jednadžbe*
   - *riješi izraz vs. riješi jednadžbu, zapiši izraz u drugačijem obliku*
   - *A su jabuke vs. neka A predstavlja broj jabuka ili neka A predstavlja težinu jabuka u kilogramima*
   - *staviti* 2 *vs. zamijeniti* $x$ *s brojem* 2

2. Ohrabrite učenike da koriste refleksivno ispitivanje kako bi primjetili struktruru dok rješavaju problem.

   **Primjer 5.6** *Neka pitanja koja možemo postaviti učenicima kako bi lakše uočili strukturu:*

   - *Što se od mene traži u ovom problemu?*
   - *Kako bi opisao ovaj problem preciznim matematičkim jezikom?*
   - *Je li ovaj problem struktuiran slično kao neki problemi koje sam prije vidio/vidjela?*
   - *Koliko varijabli imamo?*
   - *Što pokušavam riješiti?*
   - *Koje su veze među količinama u izrazu ili jednadžbi?*
   - *Kako položaj količina i operacija utječe na ono što ću prvo napraviti?*

3. Poučavajte učenike da različiti algebarski prikazi mogu prenositi različite informacije o problemu.
   Prepoznavanje i objašnjavanje odgovorajućih značajki strukturi koje predstavljaju isto pomaže učenicima da shvate nekoliko veza algebarskih prikaza, kao što su jednadžbe, grafovi i problemi s riječima.
   Možemo učenicima prezentairati jednadžbe različitih oblika pa ih pitati da nađu sličnosti i razlike. Pogledajmo slijedeći primjer:

   **Primjer 5.7** *Usporedi različite oblike jednadžbi za isti pravac:*

   (a) *Eksplicitni oblik jednadžbe pravca* $y = kx + l$*:* $y = 2x - 3$
   (b) *Jednadžba pravca dana točkom i nagibom* $y - y_1 = k(x - x_1)$

   - *SLIČNOSTI: obje jednadžbe su jednadžbe pravca, jednostavno je vidjeti da je nagib pravca 2, teško je vidjeti kolika je nultočka*
   - *RAZLIKE: iz eksplicitnog oblika jednadžbe pravca jednostavno je vidjeti koliki je odsječak na y-osi, a iz druge jednadžbe lako je vdijeti da se točka* $(4, 5)$ *nalazi na pravcu.*

## 5.3 Treća preporuka

Treća preporuka za rad s učenicima je:
**Poučavajte učenike da izaberu alternativne algebarske strategije kad rješavaju probleme**:

1. Učite učenike da prepoznaju i generiraju strategije za rješavanje problema.
   Osigurajte učenicima primjere koji ilustriraju višestruku upotrebu algebrskih strategija. Pogledajmo sada neke primjere zadataka riješene i uobičajenom i alternativnom metodom

**Primjer 5.8** *Koliko je* $2a + 4b - 7a + 2b - 8a$ *ako je* $a = 1$ *i* $b = 7$*?*

- *Uobičajena metoda:*

$$\begin{gathered} 2a + 4b - 7a + 2b - 8a \\ 2(1) + 4(7) - 7(1) + 2(7) - 8(1) \\ 2 + 28 - 7 + 14 - 8 \\ 29 \end{gathered}$$

- *Alternativna metoda:*

$$\begin{gathered} 2a + 4b - 7a + 2b - 8a \\ -13a + 6b \\ -13(1) + 6(7) \\ 29 \end{gathered}$$

**Primjer 5.9** *Milka čokolada bez poreza košta* 16 *kuna. Ako je porez* 25%, *kolika je puna cijena Milka čokolade?*

- *Uobičajena metoda:*

$$\begin{gathered} 16 \cdot 1.25 = x \\ x = \textit{20kuna} \end{gathered}$$

- *Alternativna metoda:*

  10% *od* 16 *je* 1.60 *kn, pa imamo* 3.20 *kn, pola od* 1.60 *je* 0.80 *kn, stoga je ukupni račun:* $16 + 3.20 + 0.80 = 20$ *kuna.*

Pitanja koja možemo postavljati učenicima kako bi im olakšali odabir strategije rješenja:

- Koje strategije možete koristiti da bi riješili ovaj problem? Koliko je mogućih strategija?
- Od strategija koje poznate, koja najbolje pristaje određenom problemu i zašto?
- Ima li nešto posebno u ovom problemu što sugerira da određena strategija nije primjenjiva ili da je dobra ideja?
- Zašto ste odabrali baš ovu strategiju da bi riješili problem?
- Možete li drugom strategijom provjeriti svoj odgovor? Koliko se ta strategija razlikuje od one s kojom si riješio problem?

2. Ohrabrite učenike da artikuliraju obrazloženje zašto su izabrali neku strategiju i matematičku vrijednost svojih strategija kad rješavaju probleme.
   Neka učenici opisuju svoje razmišljanje dok analiziraju strukturu problema, određuju kako će riješiti zadatak, rješavaju problem i analiziraju rješenje drugog učenika. Opisivanje svog razmišljanja pomaže učenicima da bolje razumiju svoje izbore i

ciljeve kada rješavaju zadatak. Učenici bi svoje ideje i razmišljanje trebali iskomunicirati i verbalno i pisano.
Pitanja kojima možemo pomoći učenicima da artikuliraju svoje razmišljanje su:

- Što ste prvo primjetili u strukturi problema? Kako je to utjecalo na način tvoga rješavanja zadatka? Koja strategija je odgovarajuća za rješenje ovog problema i zašto?
- Koje ste izbore morali napraviti da bi riješili ovaj problem?
- Koji ste cilj htjeli postići?
- Kako ste došli do svog odgovora? Kako znate da je točan?
- Opiši drugom učeniku kako riješiti ovaj problem?
- Što vam je bilo najteže u ovom problemu? Jeste li naletjeli na nekakve izazove i kako ste ih riješili?

3. Neka učenici evaluiraju i uspoređuju različite strategije kada rješavaju probleme. Učenike svakako treba ohrabrivati da uspoređuju strukturu problema i strategije rješavanja kako bi otkrili veze između sličnih i različitih problema, strategija i rješenja. Isto tako, učenicima možete pokazati dvije strategije rješavanja jednu pored druge jer će na taj način učenici vidjeti broj, tip i niz koraka rješavanja. Tako će učenici uspoređivati strategije rješavanja i promotriti točnost, učinkovitost i primjenjivost različitih kombinacija koraka rješavanja.

# Sažetak

Cilj ovog rada je reći nešto o algebri u hrvatskom školstvu. Rad je podijeljen na pet dijelova. U prvom dijelu se upoznajemo s domenom Algebra i funkcije u kurikulumu kroz osnovnoškolsko i srednjoškolsko obrazovanje. Tema drugog dijela je koncepcija varijabli gdje se s algebrom upoznajemo kao generaliziranom aritmetikom, kao proučavanjem postupaka za rješavanje određenih vrsta problema, kao proučavanjem veza među količinama i kao proučavanjem strukutura. Nadalje se bavimo uzorcima. Upoznajemo ponavaljajuće, a zatim i rastuće uzorke koji se dijele na linearne i nelinearne uzorke. Također su opisane i neke velike ideje koje uzorci promiču. U četvrtom dijelu tema su aktivnosti kojima se izgrađuju funkcije kroz linearne, kvadratne i eksponencijalne izraze. Rad završava strategijama kako raditi s učenicima te su navedene preporuke za rad s učenicima.
**Ključne riječi:** kurikulum, algebra, uzorci, linearni i kvadratni izrazi, strategije

# Algebraic thinking and patterns

The aim of this paper is to say something about algebra in Croatian education. The work is divided into five parts. In the first part we are introduced to the domain of algebra and functions in the curriculum through primary and secondary education. The theme of the second part is the conception of variables where we become acquainted with algebra as generalized arithmetic, as a study of procedures for solving certain kinds of problems, as a study of realtionships among quantities and as a study of structures. We continue to deal with patterns. We get to know the repeating patterns and then growing patterns that divide into linear and nonlinear patterns. Some big ideas that the patterns promote are also described. In the fourth part, the topic is activities that build functions through linear, square and exponential expressions. The paper ends with strategies on how to work with students and recommendations are made for working with students.
**Key words:** curriculum, algebra, , linear and square expressions, strategies

# Životopis

Zovem se Ivana Marinić. Rođena sam u Đakovu 12.07.1989. godine. Udana sam te majka jednog djeteta. Osnovnu školu sam završila u Đakovu. Nakon toga sam upisala opću gimnaziju u Đakovu. Nakon završene srednje škole upisujem se na Odjel za matematiku sveučilišta u Osijeku. Kao apsolvent neko vrijeme sam radila kao nastavnik matematike i informatike u osnovnoj, a zatim i u srednjoj ekonomskoj školi u Đakovu. Kroz rad sam stekla iskustvo rada s djecom s različitim potrebama te time i iskustvo različitog poučavanja. Definitivno se u budućnosti vidim kao nastavnik matematike i informatike i osjećam da je to moj poziv.

# Literatura


[1] Lj. Jukić Matić, V. Tutnjević, *Algebarski koncepti u nastavi matematike*, Poučak 14(55), 31. - 38.

[2] Z. Usiskin, *Conceptions of Scool Algebra and Uses of Variables, Algebraic Thinking, Grades K - 12: Readings from NCTM's School-Based Journals and Other Publications (Barbara Moses ed)*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Va 1999, 7 - 13.

[3] Maths Development Team, *Algebra throuh the lens of functions*, *https : //www.projectmaths.ie/wp − content/uploads/*2016/04/ *AlgebraThroughTheLensOfFunctionsPart*2*.pdf*

[4] U.S. Department of Education, *Teaching Strategies for Improving Algebra Knowledge in Middle and High School Students*, National Center for Education and Regional Assistance *https : //ies.ed.gov/ncee/wwc/Docs/practiceguide/*$wwc_a lgebra_0$40715*.pdf*

[5] YuMi Deadly Maths, *Algebra: Patterns and Linear Relationships*, Queensland University of Technology, 2014., *https : //research.qut.edu.au/ydc/wp−content/uploads/sites/*181/2019/12/*AIM− YrC*1 − *A*2 − *Patterns − and − Linear − Relationships* − 2014*.pdf*