Nizovi i redovi realnih brojeva

Babok, Ema

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Ema Babok

Nizovi i redovi realnih brojeva

Završni rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Ema Babok

Nizovi i redovi realnih brojeva

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Dragana Jankov Maširević

Osijek, 2021.

Sažetak

U ovom radu obradit ćemo osnovne pojmove vezane uz nizove i redove realnih brojeva. Za početak, navest ćemo definiciju niza, svojstva nizova te neke najpoznatije nizove s kojima se intuitivno upoznajemo već u osnovnoj školi. Definirat ćemo limes ili graničnu vrijednost niza te na primjerima pokazati kako se ona računa. Nakon toga, objasnit ćemo što je to red realnih brojeva te ćemo se baviti konvergencijom reda. Navest ćemo neke najpoznatije kriterije konvergencije te ih pojasniti na primjerima. U zadnjem poglavlju, podsjetit ćemo se što su to metrički, odnosno topološki prostori te navesti najbitnije teoreme i definicije vezane za nizove i redove u spomenutim prostorima.

Ključne riječi: nizovi realnih brojeva, redovi realnih brojeva, limes, podniz, klasifikacija nizova, Cauchyjev niz, parcijalna suma, nužan uvjet konvergencije, kriteriji konvergencije, konvergencija u metričkim prostorima, Bolzano-Weierstrassov teorem

Abstract

In this paper we will discuss basic terms referring to sequences and series of real numbers. Firstly, we will define the sequence, its properties and some of the most recognizable sequences with which we have already been intimly familiarized since elementary school. We will define the limit of a sequence and show some examples of how it is calculated. Furthemore, we will explain the definition of the series of real numbers and discuss convergence of the series. We will show a few well known criteria of convergence and explain them using examples. In the last chapter, we will remind ourselves what is the metric and topological space and we will show the most important theorems and definitions pertaining to sequences and series in the aforementioned spaces.

Key words: sequence of real numbers, series of real numbers, limit of a sequence, subsequence, classification of the sequences, Cauchy sequence, partial sum, necessary condition for convergence, convergence of the series, convergence in metric space, Bolzano-Weierstrass theorem

Sadržaj

1 Uvod i motivacija

Nizovi i redovi realnih brojeva vrlo su važni u matematičkoj analizi. Njihovo proučavanje seže daleko u prošlost. Smatra se da je Arhimed oko 225. god. pr. Kr. prvi dao primjer konvergentnog reda računajući površinu segmenta parabole upisujući u nju trokute. Grčki filozof Zenon iz Eleje (490. god. pr. Kr. – 425. god. pr. Kr.) prvi je postavio pitanje beskonačno malih veličina.

Zenonovi paradoksi zbunjivali su mnoge filozofe i matematičare. Najpoznatiji su takozvani paradoksi protiv kretanja. Aristotel je opisao četiri njegova paradoksa i nazvao ih Dihotomija, Ahilej, Strijela i Stadion. Objasnit ćemo jedan od njih, Dihotomiju. Zamislimo da želimo doći od točke A do točke B. Da bi došli do točke B, prvo moramo doći u točku B_1 koja se nalazi na polovini puta između A i B. No prije toga, moramo doći u točku B_2, koja se nalazi točno između A i B_1. Prema Zenonovoj filozofiji, nastavimo li istim razmišljanjem, kretanje nikad neće početi. Dijelove puta koje moramo prijeći da bi došli na odredište možemo zamisliti kao članove nekog niza.

Sve do 17. stoljeća nitko nije ostvario napredak u ovom području. Tada Isaac Newton, britanski fizičar i matematičar, kojeg mnogi smatraju jednim od najvećih umova u povijesti čovječanstva uvodi pojam beskonačnosti, odnosno beskonačnih redova i time počinje nova era u proučavanju matematičkih procesa. U isto vrijeme njemački matematičar, fizičar i filozof Gottfried Wilhelm Leibniz daje svoje tvrdnje o beskonačnim redovima te na temelju njih objavljuje detaljne analize diferencijalnog i integralnog računa. Definicija limesa kakvu danas poznajemo dana je tek u 19. stoljeću.

Na temelju samo ovih primjera jasno je koliku su ulogu imali nizovi i redovi za daljnja otkrića.

U ovom radu detaljno ćemo odraditi prethodna dva pojma.

Prvo poglavlje uvodi definiciju niza realnih brojeva kao osnovu za daljnje istraživanje. Navodimo primjer Fibonaccijevog niza kao još jedan primjer proučavanja nizova u dalekoj prošlosti.

Nakon toga definiramo limes niza te uvodimo pojam konvergencije. Navodimo algebarske operacije s nizovima te ih na primjerima ilustriramo.

U trećem poglavlju upoznajemo se s redovima realnih brojeva. Na temelju primjera dolazimo do definicije parcijalne sume te konvergencije redova realnih brojeva. Navodimo nekoliko kriterija konvergencije te ih primjenjujemo na konkretnim primjerima.

Rad je naposljetku zaokružen s nizovima i redovima realnih brojeva u metričkim i topološkim prostorima.

Svrha ovog rada je upoznati i pobliže objasniti nizove i redove realnih brojeva, njihovo računanje i primjenu u različitim prostorima.

1.1 Definicija niza realnih brojeva

Definirajmo prvo sam pojam niza, počevši od pojma konačnog te zatim beskonačnog niza.

Definicija 1.1. *Funkciju $a\colon \{1, 2, 3, ..., s\} \to \mathbb{R}$ nazivamo **konačnim nizom realnih brojeva** i označavamo uređenom listom brojeva*

$$a_1, a_2, ..., a_n, ..., a_s,$$

gdje je $a_n = a(n)$, n=1,2,3,...,s. Za a_n kažemo da je n-ti ili opći član niza.

Definicija 1.2. *Svaku funkciju $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, kojoj je domena čitav skup prirodnih brojeva, a kodomena skup realnih brojeva, nazivamo **beskonačni niz realnih brojeva** (ili kraće **niz realnih brojeva**) i označavamo s*

$$a_1, a_2, ..., a_n, ...$$

ili jednostavnije s (a_n).

U daljnjem tekstu pod pojmom **niz** podrazumijevat ćemo beskonačni niz realnih brojeva.

1.2 Neki poznati nizovi

Primjer 1.1. ***Fibonaccijev niz.*** *Talijanski matematičar Leonardo od Pise, poznatiji kao Fibonacci, 1202. godine u svom radu "Liber Abaci" objavljuje problem razmnožavanja zečeva. Shema tog problema je sljedeća: par zec-zečica (stari barem dva mjeseca) tijekom svakog sljedećeg mjeseca dobije par mladih, zeca i zečicu. Ako smo počeli s jednim novorođenim parom, koliko će ukupno biti parova zečeva u razdoblju od godinu dana uz uvjete da svaki mjesec par dobije točno jedan par zečića, da svaki taj novi par zeca i zečice dobije potomke tek u drugom mjesecu života i da nijedan ne ugine?*

Neka je F_n broj parova zec-zečica nakon n mjeseci, to jest tijekom $(n+1)$-og mjeseca. Prema pretpostavci je $F_0 = 1$ i $F_1 = 1$ (jer još nisu zreli za oplodnju). Da bi dobili F_n, broju parova F_{n-1} koji su živjeli prethodni mjesec treba dodati novorođene parove od F_{n-2}. Tada za svaki $n \geq 2$ vrijedi

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}.$$

U prethodnom primjeru dani niz definiran je rekurzivno, preciznije, rekurzivnom formulom. Ovako definiran niz brojeva, u kojem je svaki član, osim prva dva, zbroj dva prethodna člana, zove se **Fibonaccijev niz**, a njegovi članovi nazivaju se **Fibonaccijevi brojevi**.

Primjer 1.2. *Niz brojeva kojemu je razlika između nekog člana i njegovog prethodnika stalna zovemo **aritmetički niz**, to jest*

$$a_{n+1} - a_n = d, \quad \text{za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Broj d naziva se razlika ili diferencija aritmetičkog niza.

Naziv prethodnog niza dolazi od pojma aritmetičke sredine. [1] Prema definiciji je

$$a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$$

pa dobivamo

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dakle, svaki član niza (osim prvog) je aritmetička sredina susjednih članova.
Ispisivanjem prvih članova aritmetičkog niza, dobivamo formulu za opći član niza a_n

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Za zbroj prvih n članova aritmetičkog niza s_n vrijedi

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Primjer 1.3. *Niz brojeva kojemu je kvocijent između nekog člana i njegovog prethodnika stalan zovemo* ***geometrijski niz****, to jest*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q, \quad \textit{odnosno} \quad a_{n+1} = a_n \cdot q, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Broj q naziva se kvocijent geometrijskog niza.

Iz definicije dobivamo

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot a_{n+2}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

te vidimo da je svaki član (osim prvog) geometrijska sredina [2] njemu susjednih članova. Kao kod aritmetičkog niza, ispisivanjem prvih članova geometrijskog niza dobivamo formulu za opći član niza a_n

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Za zbroj s_n prvih n članova geometrijskog niza vrijedi

$$s_n = \begin{cases} a_1 \frac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1, \\ n \cdot a_1, & q = 1. \end{cases}$$

1.3 Podniz niza

Neka je S neprazan skup i (a_n) niz u S. Ako iz niza

$$a_1, a_2, ..., a_n, ... \tag{1}$$

uzmemo na primjer svaki drugi član te stavimo

$$b_1 = a_1, b_2 = a_3, b_3 = a_5, ..., b_n = a_{2n-1}, ...$$

dobivamo niz

$$b_1, b_2, ..., b_n, ...$$

za koji kažemo da je podniz niza (1).

[1] Broj $A(a,b) = (a+b)/2$ nazivamo aritmetičkom sredinom brojeva a i b.
[2] Broj $G(a,b) = \sqrt{ab}$ nazivamo geometrijskom sredinom brojeva a i b.

Definicija 1.3. *Za niz $b : \mathbb{N} \to S$ u skupu S kažemo da je* ***podniz*** *niza $a : \mathbb{N} \to S$ ako postoji strogo rastući niz $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takav da je $b = a \circ p$, odnosno*

$$b_n = a_{p_n}, \quad \textit{za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Prema tome, podniz niza

$$a_1, a_2, ..., a_n, ...$$

ima oblik

$$a_{p_1}, a_{p_2}, ..., a_{p_n}, ...$$

pri čemu je $p_1 < p_2 < \cdots < p_n < \ldots$ Kako je $p_1 \geq 1$ i $p_2 > p_1$, to povlači $p_2 \geq 2$. Općenito vrijedi $p_n > n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Time se čuva poredak, a uređenost podniza slijedi iz uređenosti skupa prirodnih brojeva.

1.4 Klasifikacija nizova

Definicija 1.4. *Za niz realnih brojeva (a_n) kažemo da je* ***pozitivan*** *ako postoji realan broj $a \geq 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da je $a_n \geq a$, za svaki $n \geq n_0$.*

Definicija 1.5. *Za niz realnih brojeva (a_n) kažemo da je* ***negativan*** *ako postoji realan broj $a < 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da je $a_n \leq a$, za svaki $n \geq n_0$.*

Drugim riječima, od člana a_n pa nadalje, svi su članovi niza pozitivni, odnosno negativni.

Primjer 1.4. *Niz s općim članom $a_n = \frac{3^n}{n!}$ je pozitivan niz, a niz s općim članom $b_n = \frac{5-n}{n}$ je negativan niz.*

Definicija 1.6. *Niz realnih brojeva je* ***stacionaran*** *ako postoji prirodan broj n_0 takav da je $a_n = a_{n_0}$, za svaki $n \geq n_0$.*

Primjer 1.5. *Primjer stacionarnog niza je $a_n = 1 + \lfloor \frac{2}{n} \rfloor$. Kada bi raspisali prvih nekoliko članova niza dobili bi 3,2,1,1,1,1,... Dakle, nakon određenog člana, svi članovi niza su jednaki.*

Definicija 1.7. *Za niz realnih brojeva (a_n) kažemo da je* ***monotono rastući*** *ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $a_n \leq a_{n+1}$, za svaki $n \geq n_0$.*

Definicija 1.8. *Za niz realnih brojeva (a_n) kažemo da je* ***monotono padajući*** *ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $a_n \geq a_{n+1}$, za svaki $n \geq n_0$.*

U slučaju stroge nejednakosti u prethodne dvije definicije, kažemo da se radi o strogo rastućem, odnosno strogo padajućem nizu.

Napomena 1.9. *Niz (a_n) je monotono rastući ako i samo ako je niz $(-a_n)$ monotono padajući.*

Definicija 1.10. *Niz (a_n) je* ***omeđen*** *ako je skup $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ omeđen.*

2 Limes niza realnih brojeva

Kako bi mogli definirati limes niza, trebamo uvesti pojam gomilišta.

Definicija 2.1. *Za realan broj a kažemo da je* ***gomilište*** *(točka gomilanja) niza* (a_n) *ako svaka* ε*-okolina broja a (interval* $\langle a-\varepsilon, a+\varepsilon\rangle$*) sadrži beskonačno mnogo članova niza* (a_n)*.*

Primjer 2.1. *Pogledajmo niz* $a_n = \frac{3}{n}$.
Što je n veći, $\frac{3}{n}$ *je bliže 0. Dakle, kada u nizu idemo dovoljno daleko, onda vrijednost* $|a_n - 0|$ *postane manja od svakog pozitivnog realnog broja* ε*. Zaključujemo da je 0 jedino gomilište danog niza.*

Primjer 2.2. *Neka je niz zadan općim članom* $a_n = (-1)^n$*. Nekoliko njegovih prvih članova su -1,1,-1,1,-1,1, ... Članovi s parnim indeksom su 1 (*$a_{2n} = 1, n \in \mathbb{N}$*), a članovi s neparnim indeksom su -1 (*$a_{2n-1} = -1, n \in \mathbb{N}$*). Niz ima dva gomilišta i to su brojevi -1 i 1.*

Primjer 2.3. *Niz s općim članom* $a_n = 2n, n \in \mathbb{N}$ *nema gomilište. Što je n veći, to će i* $a_n = 2n$ *biti veći pa se u svakoj* $\varepsilon-$*okolini proizvoljnog realnog broja a može naći najviše konačno mnogo članova niza.*

Teorem 2.2. ***Bolzano-Weierstrassov teorem***
Svaki omeđen niz realnih brojeva ima barem jedno gomilište.

Dokaz. Vidi [8].

Definicija 2.3. *Za realan broj a kažemo da je* ***limes*** *ili* ***granična vrijednost*** *niza* (a_n) *ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da za svaki* $n \geq n_0$ *vrijedi* $|a_n - a| < \varepsilon$*.*

Ako je a limes niza (a_n), pišemo

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad ili \quad a_n \to a, n \to \infty.$$

Kažemo da je niz realnih brojeva (a_n) **konvergentan** ako ima limes, u suprotnom kažemo da je **divergentan**.

Definicija limesa niza ekvivalentna je tvrdnji da svaka ε-okolina od a sadrži sve osim eventualno konačno mnogo članova niza.

U nastavku navodimo sljedeći teorem u kojemu ćemo dokazati bitna svojstva konvergencije nizova.

Teorem 2.4.
a) Svaki konvergentan niz realnih brojeva ima samo jedan limes.
b) Konvergentan niz ima samo jedno gomilište. To je ujedno i njegov limes.

Dokaz.
a) Pretpostavimo da konvergentan niz realnih brojeva (a_n) ima dvije granične vrijednosti $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$, odnosno vrijedi

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n, \quad b = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Prema definiciji 2.3 zaključujemo sljedeće:
$\forall\varepsilon > 0$, $\exists n_a \in \mathbb{N}$ t. d. $\forall n \geq n_a \quad \Rightarrow \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$,
$\forall\varepsilon > 0$, $\exists n_b \in \mathbb{N}$ t.d. $\forall n \geq n_b \quad \Rightarrow \quad |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Neka je $n_\varepsilon = max\{n_a, n_b\}$. Za $n \geq n_\varepsilon$ imamo

$$|a - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

te ukoliko je $\varepsilon = |a - b|$ iz prethodnog slijedi da je $a = b$.
Dakle, limes mora biti jedinstven.

b) Neka je (a_n) konvergentan niz realnih brojeva, $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, i $b \in \mathbb{R}, b \neq a$.
Tada možemo odabrati disjunktne ε-okoline brojeva a i b, na primjer $\langle a-\varepsilon, a+\varepsilon\rangle$ i $\langle b-\varepsilon, b+\varepsilon\rangle$, gdje je $\varepsilon = \frac{|a-b|}{4}$. Prema definiciji 2.3. u ε-okolini broja a nalaze se svi članovi niza (a_n) osim eventualno konačno mnogo njih pa ti članovi ne mogu biti u ε-okolini broja b. Prema tome, b ne može biti niti limes niti gomilište toga niza. □

Primjer 2.4. *Niz kojemu je opći član konstanta, $a_n = c$, konvergentan je za svaki $c \in \mathbb{R}$ te je $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$.*

Definicija 2.5. *Niz realnih brojeva (a_n) divergira ka $+\infty$, pišemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, ako za svaki $M > 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $a_n > M$.*

Definicija 2.6. *Niz realnih brojeva (a_n) divergira ka $-\infty$, pišemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, ako za svaki $m > 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $a_n < m$.*

Napomena 2.7. *Neka su (a_n) i (b_n) bilo koja dva niza realnih brojeva takvi da je*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty.$$

a) Definiramo niz (c_n) kao $c_n = \frac{a_n}{b_n}$. U ovom slučaju i brojnik i nazivnik divergiraju prema ∞ kada n teži u ∞. Ovdje se radi o ***neodređenom obliku*** $\frac{\infty}{\infty}$.
b) Ukoliko definiramo niz (d_n) kao $d_n = a_n - b_n$, tada imamo ***neodređeni oblik*** $\infty - \infty$.
Osim ova dva neodređena oblika, postoje i $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0.

Sada ćemo dokazati dva vrlo važna teorema koja povezuju omeđenost i konvergenciju nizova.

Teorem 2.8. *Svaki konvergentan niz realnih brojeva je omeđen.*

Dokaz. Neka niz realnih brojeva (a_n) konvergira prema broju a. Treba pokazati da je skup $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ omeđen, to jest da postoji $M > 0$ takav da je $|a_n| \leq M$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Pretpostavimo da je (a_n) konvergentan za $\varepsilon = 1$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|a_n - a| < 1$. Zbog nejednakosti trokuta slijedi

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Neka je $M = 1 + |a| + |a_1| + |a_2| + ... + |a_{n_0}|$. Tada je $|a_n| < M$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i slijedi da je skup $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ omeđen. □

Napomena 2.9. *Obrat prethodnog teorema ne vrijedi. Postoji niz koji je omeđen, ali nije konvergentan. Primjer takvog niza je* $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$.

Teorem 2.10. *Svaki omeđen i monoton niz realnih brojeva je konvergentan.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je (a_n) monotono rastući i omeđen niz. Prema pretpostavci, skup $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ je omeđen odozgo te prema aksiomu polja realnih brojeva ima supremum [3] $a = sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sada treba pokazati da je (a_n) konvergentan i $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
Prema definicija supremuma, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $a-\varepsilon < a_{n_0} \leq a_n < a+\varepsilon$. Slijedi $|a_n - a| < \varepsilon$, za svaki $n > n_0$. Time je pokazano da je niz (a_n) konvergentan i da je $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Ako je (a_n) padajući niz, tada je niz $(-a_n)$ rastući te konvergira. □

2.1 Algebarske operacije s nizovima

Definicija 2.11. *Neka su* (a_n) *i* (b_n) *nizovi realnih brojeva takvi da je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. *Tada:*

1. *niz* $(a_n \pm b_n)$ *je konvergentan i vrijedi* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$,
2. *niz* $(a_n \cdot b_n)$ *je konvergentan i vrijedi* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,
3. *niz* $(|a_n|)$ *je konvergentan i vrijedi* $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = |a|$,
4. *ako je* $b_n \neq 0$, *za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *i* $b \neq 0$, *onda je niz* $(\frac{1}{b_n})$ *konvergentan i vrijedi*
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{1}{b},$$
5. *ako je* $b_n \neq 0$, *za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *i* $b \neq 0$, *onda je niz* $(\frac{a_n}{b_n})$ *konvergentan i vrijedi*
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b},$$
6. *ako je* $a_n > 0$, *za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *i* $\alpha > 0$ *bilo koji realan broj, onda je* (a_n^α) *konvergentan i vrijedi* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^\alpha = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^\alpha = a^\alpha$,
7. *ako je* $p \in \mathbb{N}$, *tada vrijedi* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$ *(ako je* p *paran, tada mora biti* $a_n \geq 0$, *za svaki* $n \in \mathbb{N}$*),*
8. *ako je* $c \in \mathbb{R}$, *tada je* $\lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

[3] Za realan broj M kažemo da je supremum skupa S ako vrijedi
1. $M \geq x, \forall x \in S$,
2. $\forall\varepsilon > 0,\ \exists x \in S$ takav da je $x > M - \varepsilon$.

Napomena 2.12. *Općenito, limes niza kome je opći član racionalna funkcija određuje se izlučivanjem najveće potencije od* n *(u nazivniku).*
Neka je $R = \frac{P}{Q}$ *racionalna funkcija, gdje je* $P(n) = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + ... + a_1 n + a_0$*,*
$Q(n) = b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + ... + b_1 n + b_0$*. Tada je*

$$R(n) = \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + ... + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + ... + b_1 n + b_0}.$$

Kada na funkciju $R(n)$ *djelujemo limesom, u ovisnosti o stupnju polinoma* P *i* Q*, dobivamo jednu od tri mogućnosti:*

- *ukoliko je* $m = k$*, to jest stupanj polinoma u brojniku jednak stupnju polinoma u nazivniku, limes će biti jednak* $\frac{a_m}{b_k}$*,*
- *za* $m < k$ *limes će biti 0,*
- *za* $m > k$ *limes divergira ka* $+\infty$*, ako je* $a_m > 0$*, ili divergira ka* $-\infty$*, ako je* $a_m < 0$*.*

Primjer 2.5. *Odredimo* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 2n + 2}{n^2 - 3n + 9}$.

Uočimo da nizovi u brojniku i nazivniku nisu konvergentni pa ne možemo iskoristiti pravilo 5. iz prethodne definicije. Kada izlučimo najveću potenciju od n, dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 2n + 2}{n^2 - 3n + 9} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(2 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2})}{n^2(1 - \frac{3}{n} + \frac{9}{n^2})} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} (2 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{2}{n^2})}{\lim\limits_{n\to\infty} (1 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{9}{n^2})} = \frac{2}{1} = 2.$$

Nakon što smo izlučili najveću potenciju od n, nizovi u brojniku i nazivniku postaju konvergentni te možemo iskoristiti pravilo broj 5. Kako je stupanj polinoma u brojniku i nazivniku jednak, po gornjoj napomeni, limes niza je realan broj.

Primjer 2.6. *Odredimo* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^2 + 3n - 1}{4n + 2}$.
Lako je uočiti da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2 + 3 - 1}{4n + 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(5n + 3n - \frac{1}{n})}{n(4 + \frac{2}{n})} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} (5n + 3 - \dfrac{1}{n})}{\lim\limits_{n\to\infty} (4 + \dfrac{2}{n})} = \frac{\infty}{4} = \infty.$$

Primjer 2.7. *Odredimo* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-5n^2 + 3n - 1}{4n + 2}$.
Sada je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-5n^2 + 3n - 1}{4n + 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(-5n + 3 - \frac{1}{n})}{n(4 + \frac{2}{n})} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} (-5n + 3 - \dfrac{1}{n})}{\lim\limits_{n\to\infty} (4 + \dfrac{2}{n})} = \frac{-\infty}{4} = -\infty.$$

Ukoliko želimo ispitati konvergenciju niza zadanog rekurzivnom formulom, prije računanja limesa trebamo ispitati konvergira li niz. Pokažimo to sljedećim primjerom.

Primjer 2.8. *Promotrimo niz kome je prvi član* $a_1 = 2$ *te* $a_n = \frac{2}{a_{n-1}}$, *za sve* $n \geq 2$. *Raspisivanjem prvih nekoliko članova niza uočavamo da imamo dva gomilišta, 2 i 1 te zaključujemo da niz nije konvergentan. Brzopletim prelaskom na računanje limesa dobivamo* $a = \frac{2}{a}$, $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$, *što je pogrešno.*

Prilikom dokazivanja konvergencije niza pomoću definicije 2.3 potrebno je poznavati limes niza, ali odrediti limes niza često zna biti vrlo komplicirano. Postavlja se pitanje možemo li odrediti konvergenciju niza ako ne znamo limes niza. Odgovor na to pitanje daje sljedeća definicija.

Definicija 2.13. *Za niz realnih brojeva* (a_n) *kažemo da je* ***Cauchyjev*** *ili* ***fundamentalni niz*** *ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \quad \text{takav da} \quad (\forall m, n \geq n_0) \quad \text{vrijedi} \quad |a_n - a_m| < \varepsilon. \tag{2}$$

Teorem 2.14. *Niz realnih brojeva je konvergentan ako i samo ako je Cauchyjev.*

3 Redovi realnih brojeva

Kao motivaciju za uvođenje pojma reda razmotrit ćemo sljedeće primjere.

Primjer 3.1. *Neka je zadan sljedeći niz realnih brojeva*

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, ...$$

Budući da navedeni niz ima beskonačno mnogo članova, zanima nas kako ćemo odrediti sumu niza. Ako to napravimo na sljedeći način

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + ...$$

suma će biti 0. Ako to napravimo drugačije

$$1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) - ...$$

suma će iznositi 1. Postavlja se pitanje što je ispravno u ovom primjeru.

Primjer 3.2. *Razmotrimo sada zapis periodičnog decimalnog broja u obliku razlomka. Neka je* $r = 0.156156156156...$ *periodični decimalni broj. Cilj nam je zapisati ovaj broj u obliku razlomka. Uočimo da je*

$$r = \frac{156}{10^3} + \frac{156}{10^{3\cdot 2}} + \frac{156}{10^{3\cdot 3}} + ... + \frac{156}{10^{3\cdot n}} + ...$$

te da $a_n := \frac{156}{10^{3n}}, n \in \mathbb{N}$, *čini geometrijski niz kojemu je prvi član* $a_1 = \frac{156}{10^3}$, *a kvocijent* $q = \frac{1}{10^3}$.
Jasno je da ne možemo zbrojiti beskonačno mnogo članova niza.
Označimo sa s_n *sumu prvih* n *članova*

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n.$$

Što je veći n, zbrajamo više članova, dobivamo bolju aproksimaciju broja r te možemo zaključiti da s_n konvergira ka r, to jest

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{156}{10^3-1} = \frac{52}{333}.$$

Neka je (a_n) niz realnih brojeva. Pomoću njegovih članova induktivno definiramo **niz parcijalnih suma** s_n na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Na temelju navedenih primjera definiramo red realnih brojeva.

Definicija 3.1. *Uređeni par nizova realnih brojeva $((a_n),(s_n))$ nazivamo* ***red realnih brojeva*** *i označavamo s $\sum_{n\geq 1} a_n$. Pri tome a_n zovemo* ***općim članom****, a s_n zovemo* ***n-tom parcijalnom sumom*** *tog reda.*

Definicija 3.2. *Za red $\sum_{n\geq 1} a_n$ kažemo da je* ***konvergentan*** *ako je njegov niz parcijalnih suma (s_n) konvergentan. Pri tome $\lim_{n\to\infty} s_n$ zovemo* ***suma*** *ili* ***zbroj reda*** *$\sum_{n\geq 1} a_n$ i označavamo s $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, odnosno*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Za red $\sum_{n\geq 1} a_n$ kažemo da je ***divergentan*** *ako je njegov pripadni niz parcijalnih suma (s_n) divergentan.*

Primjer 3.3. *Vratimo se sada na primjer 3.1 i ispitajmo konvergenciju reda*

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Niz parcijalnih suma (s_n) je 1,0,1,0,1,0,1,... Očigledno je da niz ima dva gomilišta te iz toga slijedi da je divergentan i nema smisla tražiti njegov limes.

Primjer 3.4. *Odredimo konvergenciju harmonijskog reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.*
Za dani red n-ta parcijalna suma $s_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}$ je rastući niz. Metodom matematičke indukcije može se pokazati da je $s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$. Iz toga slijedi $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$.

Primjer 3.5. *Odredimo konvergenciju geometrijskog reda* $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$.
Za dani geometrijski red n-ta parcijalna suma je oblika
$s_n = a_1(1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1}) = \frac{a_1}{1-q} - a_1\frac{q^n}{1-q}$. *Znamo da je* $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ *ako i samo ako je* $|q| < 1$. *Dakle, geometrijski red je konvergentan ako i samo ako vrijedi* $|q| < 1$. *Njegova suma je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q}$.

Teorem 3.3. ***(Nužan uvjet konvergencije)***
Ako je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentan, onda je* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dokaz. Neka je $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ suma reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Iz $a_n = s_n - s_{n-1}$ prijelazom u limes dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

Obratno, ako je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ne možemo zaključiti da je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan. Primjer koji potvrđuje ovu tvrdnju je harmonijski red. □

Napomena 3.4. *Nužan uvjet nije i dovoljan uvjet da bi red konvergirao.*

3.1 Kriteriji konvergencije

U primjeru 3.5 razmatrali smo konvergenciju geometrijskog reda te smo odgovorili na pitanje konvergira li red i pronašli mu sumu. U praksi, računanje sume nekog reda vrlo je složen postupak i u nekim slučajevima nećemo ju moći izračunati. Ako pak ustanovimo da je red konvergentan, u primjenama ćemo se koristiti aproksimacijom sume reda. Često je lakše odrediti konvergenciju reda nego pronaći sumu. U ovom poglavlju navest ćemo nekoliko osnovnih kriterija za ispitivanje konvergencije redova.

Za red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kažemo da je **red s nenegativnim članovima** ako je $a_n \geq 0$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Redovi s nenegativnim članovima imaju svojstvo da im je odgovarajući niz parcijalnih suma monotono rastući. Zbog toga vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 3.5. *Red s nenegativnim članovima je konvergentan ako i samo ako mu je niz parcijalnih suma omeđen.*

Dokaz. Neka je red konvergentan. Tada je po definiciji 3.2 njegov niz parcijalnih suma konvergentan.
Obratno, neka je niz parcijalnih suma omeđen. Kako je on i monotono rastući niz, on konvergira po teoremu 2.10. □

Kažemo da je red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **majoranta** reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ako postoji prirodan broj n_0 takav da je $a_n \leq b_n$, za svaki $n \geq n_0$. Istodobno kažemo da je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **minoranta** reda $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Sljedeći teorem tvrdi da je neki red s nenegativnim članovima konvergentan [divergentan] ako posjeduje barem jednu konvergentnu majorantu [divergentnu minorantu].

Teorem 3.6. ***(Poredbeni kriterij ili komparacijski test)***
Neka su $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *redovi s nenegativnim članovima te neka postoje realan broj* $c > 0$ *i prirodan broj* n_0 *takvi da je*

$$a_n \leq c \cdot b_n, \quad \text{za svaki } n \geq n_0.$$

Tada vrijedi:

a) ako je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergentan, onda je konvergentan i red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*,*

b) ako je red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentan, onda je divergentan i red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$*.*

Dokaz. Označimo s s_n i σ_n parcijalne sume redova $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, odnosno $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Nizovi (s_n) i (σ_n) su monotono rastući. Za proizvoljni $n \geq n_0$ slijedi

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n_0-1} a_k + \sum_{k=n_0}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n_0-1} a_k + c \cdot \sum_{k=n_0}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n_0-1} a_k + c \cdot \sigma_n - c \cdot \sum_{k=1}^{n_0-1} b_k.$$

a) Neka je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentan. To znači da je niz (σ_n) konvergentan, a po teoremu 3.5 i omeđen. Iz prethodne nejednakosti niz (s_n) je omeđen. Kako je niz (s_n) monotono rastući i omeđen, red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentan.

b) Neka je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentan. To znači da je niz (s_n) odozgo neomeđen pa prema gornjoj jednakosti slijedi da je i niz (σ_n) odozgo neomeđen. Dakle, red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ je divergentan. $\square$

Primjer 3.6. *Ispitajmo konvergenciju reda* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$*.*

Pogledajmo prvo red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$*. Ako zapišemo taj red kao*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

prema primjeru 3.5, njegova $n-$*ta parcijalna suma iznosi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Uspoređivanjem zadanog reda s konvergentnim redom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ *zaključujemo da je i on konvergentan jer je* $\frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n}$*, za svaki* $n \in \mathbb{N}$*.*

Teorem 3.7. ***(Poredbeni kriterij u formi limesa)***
Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *red s nenegativnim članovima i neka je* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *red s pozitivnim članovima te neka postoji*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \geq 0.$$

a) ako je c *konačan i* $c > 0$*, onda je red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentan [divergentan] ako i samo ako je red* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergentan [divergentan],*

b) ako je $c = 0$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergentan, onda je i* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentan,*

c) ako je $c = 0$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentan, onda je i* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentan.*

Dokaz. Vidi [5, str. 108].

Primjer 3.7. *Poredbenim kriterijem ispitajmo konvergenciju reda* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$.
Neka je $a_n = \frac{1}{2^n-1}$ *i* $b_n = \frac{1}{2^n}$. *Konvergenciju reda* $b_n = \frac{1}{2^n}$ *pokazali smo u prošlom primjeru. Tada je*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n-1}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n(1-\frac{1}{2^n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{2^n}} = 1.$$

Prema prethodnom teoremu, iz tvrdnje a) slijedi konvergencija zadanog reda.

Teorem 3.8. ***(D'Alembertov kriterij)***
Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *red s pozitivnim članovima.*

a) Ako postoje prirodan broj n_0 *i realan broj* $|q| < 1$ *takvi da je*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q, \quad \text{za svaki } n \geq n_0,$$

onda je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentan.*

b) Ako postoji prirodan broj n_0 *takav da je*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \quad \text{za svaki } n \geq n_0,$$

onda je red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentan.*

Dokaz. Vidi [5, str. 109].

Primjer 3.8. *Pokažimo da red* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$ *konvergira.*

Kako je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{n^3}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n(n+1)^3}{3^n \cdot 3 \cdot n^3} = \frac{1}{3},$$

red konvergira prema D'Alembertovom kriteriju.

Teorem 3.9. ***(D'Alembertov kriterij u formi limesa)***

Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *red s pozitivnim članovima takav da postoji* $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. *Tada vrijedi:*

a) ako je $L < 1$ *,onda* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira,*

b) ako je $L > 1$, *onda* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergira,*

c) za $L = 1$ *nema odluke.*

Dokaz.

a) Neka je $L < 1$. Po definiciji limesa niza za $\varepsilon = \frac{1-L}{2}$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - L < \varepsilon$, za svaki $n > n_0$, odnosno

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \varepsilon + L = 1 - \varepsilon < 1, \quad n > n_0.$$

Ako u D'Alembertovom kriteriju uzmemo $q = \varepsilon + L$, red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

b) Neka je $L > 1$. Za $\varepsilon = L - 1 > 0$ prema definiciji limesa niza postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - L < \varepsilon$, za svaki $n > n_0$, odnosno $1 = L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n}$, za svaki $n > n_0$. Prema D'Alembertovom kriteriju red divergira. □

Primjedba 3.10. *Pokažimo primjerima da za L=1 ne možemo zaključiti ništa o konvergenciji. Za harmonijski red* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *je L=1, a znamo da je taj red divergentan. Za red* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *je L=1 i taj red je konvergentan.*

Teorem 3.11. ***(Cauchyjev kriterij)***

Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *red s nenegativnim članovima.*

a) Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ *i realan broj* $q < 1$ *takav da je* $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ *za svaki* $n \geq n_0$, *onda je red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentan.*

b) Ako je $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ *za beskonačno mnogo indeksa n, onda je red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentan.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti neka je $n_0 = 1$.

a) Iz $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ dobivamo $a_n \leq q^n, n \in \mathbb{N}$. Prema poredbenom kriteriju red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira jer smo mu pronašli jednu konvergentnu majorantu.

b) Iz $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ dobivamo $a_n \geq 1$ za beskonačno mnogo indeksa n pa opći član a_n ne konvergira ka 0. □

Teorem 3.12. ***(Cauchyjev kriterij u formi limesa)***

Neka je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ red s nenegativnim članovima. Ako postoji $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, onda red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira za $L < 1$ i divergira za $L > 1$.

Dokaz. Dokaz ovog teorema provodi se kao dokaz D'Alembertova kriterija u formi limesa (teorem 3.9) tako da se $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ zamijeni s $\sqrt[n]{a_n}$. □

Primjer 3.9. *Ispitajmo konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^2}, a > 0$.*

Možemo uočiti da je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}} = a.$$

Prema prethodnom teoremu, ako je $a < 1$ red konvergira, dok za $a > 1$ red divergira.

Za potrebe definiranja sljedećeg kriterija uvest ćemo pojam alterniranog reda.

Definicija 3.13. *Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nazivamo* ***alterniranim redom*** *ako je za svaki $n \in \mathbb{N}$*

$$a_{2n-1} \geq 0, \quad a_{2n} \leq 0, \quad ili \quad a_{2n-1} \leq 0, \quad a_{2n} \geq 0.$$

Teorem 3.14. ***(Leibnizov kriterij)***

Neka je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ alternirani red. Ako niz realnih brojeva $(|a_n|)$ pada i konvergira nuli, onda red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira nekom realnom broju a za koji vrijedi ocjena:

a) ako je za svaki $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n-1} \geq 0$ i $a_{2n} \leq 0$, onda je $a_2 \leq a \leq a_1$,

b) ako je za svaki $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n-1} \leq 0$ i $a_{2n} \geq 0$, onda je $a_1 \leq a \leq a_2$.

Dokaz. Vidi [2, str. 113].

Primjer 3.10. *Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ je konvergentan jer je niz $|a_n| = \frac{1}{n}$ padajući i konvergira ka nuli.*

Koristeći pravila za računanje limesa nizova realnih brojeva i definiciju konvergencije reda nije teško dokazati sljedeće tvrdnje:

Teorem 3.15. *Neka su* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *bilo koja dva konvergentna reda realnih brojeva. Tada su redovi:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty}\lambda a_n \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

konvergentni i pri tome za njihove sume vrijedi:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda a_n = \lambda\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Primjedba 3.16. *Općenito, konvergencija reda* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ *ili* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$ *ne povlači konvergenciju redova* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$*. Primjerice red* $0+0+0+0+0+\ldots$ *je konvergentan, dok su redovi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ *i* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)$ *divergentni.*

Definicija 3.17. *Za red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *kažemo da je* ***apsolutno konvergentan*** *ako red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *konvergira.*

Definicija 3.18. *Red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je* ***uvjetno konvergentan*** *ako je red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentan, a red* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *divergentan.*

Sljedeći teorem daje nam vezu između obične konvergencije i apsolutne konvergencije redova.

Teorem 3.19. *Svaki apsolutno konvergentan red je konvergentan.*

Dokaz. Neka je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ apsolutno konvergentan red. Kako je $a_n \leq |a_n|$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, tvrdnja slijedi iz poredbenog kriterija. □

Teorem 3.20. ***(Gaussov kriterij)***

Neka se $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ *može napisati u obliku:*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma_n}{n^2},$$

gdje su α *i* β *konstante, a za* γ_n *vrijedi* $|\gamma_n| < M$ *za svaki* n*. Tada vrijedi:*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira ako je* $\alpha > 1$ *ili ako je* $\alpha = 1$ *i* $\beta > 1$, *b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergira ako je* $\alpha < 1$ *ili ako je* $\alpha = 1$ *i* $\beta \leq 1$.

Primjer 3.11. *Ispitajmo konvergenciju reda Gaussovim kriterijem:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \right]^2.$$

Lako dobivamo

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{2n+2}{2n+1} \right)^2 = \frac{4n^2+8n+4}{4n^2+4n+1} = (4n^2+8n+4) : (4n^2+4n+1) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{-(n^2+n)}{4n^2+4n+1}$$

te vidimo da je $\alpha = 1, \beta = 1$ *i*

$$|\gamma_n| = \left| \frac{n^2+n}{4n^2+4n+1} \right| < 1,$$

iz čega slijedi da je red divergentan.

4 Nizovi u metričkom prostoru

O konvergenciji nizova moguće je govoriti jedino ako na zadanom skupu X imamo metriku ili topološku strukturu. Za realnu analizu najvažniji su nizovi na metričkom prostoru $\mathbb{R}^n$. Za daljnju razradu ovog poglavlja prvo ćemo definirati sam pojam metrike i metričkog, odnosno topološkog prostora.

Definicija 4.1. *Neka je* X *bilo koji neprazan skup.* ***Metrika*** *na skupu* X *je bilo koja funkcija* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *za koju vrijedi:*

(M1) $d(x, y) \geq 0$,

(M2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Kažemo da je d *funkcija udaljenosti ili razdaljinska funkcija, odnosno metrika na skupu* X. *Uređen par* (X, d) *nazivamo* ***metrički prostor****, a uvjete (M1)-(M4) aksiomi metrike.*

Definicija 4.2. *(**Euklidska metrika na** $\mathbb{R}^n$)*

Neka je $\|\cdot\|$ *euklidska norma na* $\mathbb{R}^n$. *Preslikavanje* $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *zadano formulom*

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

zove se euklidska udaljenost ili euklidska metrika na skupu $\mathbb{R}^n$.

Euklidska metrika ima jednaka svojstva kao i metrika iz definicije 4.1.

Definicija 4.3. ***(Konvergencija u metričkom prostoru)***

Neka je (x_n) niz u metričkom prostoru (X, d). Kažemo da niz (x_n) konvergira prema točki $x_0 \in X$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $d(x_n, x_0) < \varepsilon$, odnosno ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \Rightarrow d(x_n, x_0) < \varepsilon.$$

Točku x_0 zovemo granična vrijednost ili limes niza (x_n).

Iz gornje definicije i definicije konvergencije niza realnih brojeva izlazi tvrdnja da niz (x_n) u metričkom prostoru konvergira prema točki $x_0 \in X$ ako i samo ako niz realnih brojeva $(d(x_n, x_0))$ konvergira nuli.

Napomena 4.4. *Gornja definicija ekvivalentna je sljedećem: niz (x_n) konvergira prema $x_0 \in X$ ako i samo ako se u svakoj otvorenoj kugli $K(x_0, \varepsilon), \varepsilon > 0$, nalaze svi članovi toga niza, osim eventualno konačno mnogo njih.*

Definicija 4.5. *Neka je $\mathcal{U}$ familija svih otvorenih skupova u metričkom prostoru (X, d). Familija $\mathcal{U}$ ima sljedeća svojstva:*

(T1) unija svake familije članova iz $\mathcal{U}$ član je iz $\mathcal{U}$,

(T2) presjek konačno članova iz $\mathcal{U}$ član je iz $\mathcal{U}$,

(T3) $\emptyset, X \in \mathcal{U}$.

Familija $\mathcal{U}$ podskupova od X sa svojstvima (T1)-(T3) zove se topološka struktura ili ***topologija*** *na X. Uređeni par $(X,\mathcal{U})$ zove se* ***topološki prostor****. Članove familije $\mathcal{U}$ zovemo otvoreni skupovi.*

Teorem 4.6. *Niz (x_n) iz metričkog prostora (X, d) konvergira prema točki $x_0 \in X$ ako i samo ako za svaku otvorenu okolinu U točke x_0 [4] postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in U$ za svaki $n \geq n_0$.*

Dokaz. Neka (x_n) konvergira prema točki x_0 i neka je U bilo koja otvorena okolina točke x_0. Skup U je otvoren pa postoji realan broj $\varepsilon > 0$ takav da je $K(x_0, \varepsilon) \subseteq U$. Kako (x_n) konvergira ka x_0, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $d(x_n, x_0) < \varepsilon$, odnosno $x_n \in K(x_0, \varepsilon)$. Zato je $x_n \in U$ za svaki $n \geq n_0$.
Obratno, neka je $\varepsilon > 0$. Znamo da je otvorena kugla $K(x_0, \varepsilon)$ otvoren skup pa po pretpostavci postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in K(x_0, \varepsilon)$ za svaki $n \geq n_0$, to jest $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ za svaki $n \geq n_0$. To znači da je $d(x_n, x_0) < \varepsilon$, za svaki $n \geq n_0$. Po definiciji 4.3 niz (x_n) konvergira prema točki $x_0 \in X$. $\square$

Teorem 4.7. *Neka je (x_n) niz u metričkom prostoru (X, d). Ako (x_n) konvergira, onda mu je limes jedinstven.*

Dokaz. Neka je $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Treba pokazati da niti jedna druga točka $\widetilde{x_0} \in X$ ne može biti limes. Neka je $\varepsilon := \frac{1}{2} d(x_0, \widetilde{x_0})$. Pokazat ćemo da se otvorene kugle $K(x_0, \varepsilon)$ i $K(\widetilde{x_0}, \varepsilon)$ ne sijeku. Neka je $x \in K(x_0, \varepsilon)$. Tada je $d(x, x_0) < \varepsilon$. Zbog nejednakosti trokuta vrijedi

$$d(x_0, \widetilde{x_0}) \leq d(x_0, x) + d(x, \widetilde{x_0}),$$

[4] otvorena kugla sa središtem u zadanoj točki x_0 polumjera $\varepsilon, \varepsilon > 0$

odakle slijedi

$$d(x, \widetilde{x_0}) \geq d(x_0, \widetilde{x_0}) - d(x_0, x) > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon.$$

Pokazali smo $K(x_0, \varepsilon) \bigcap K(\widetilde{x_0}, \varepsilon) = \emptyset$.
Prema definiciji limesa postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ za svaki $n \geq n_0$, odnosno $x_n \in K(x_0, \varepsilon)$. Iz toga slijedi $x_n \notin K(\widetilde{x_0}, \varepsilon)$ što znači da $\widetilde{x_0}$ nije limes niza (x_n). □

Definicija 4.8. *Za niz (x_n) u metričkom prostoru (X, d) kažemo da je **omeđen** ako je skup svih njegovih članova omeđen.*

Drugim riječima, niz (x_n) bit će omeđen ako i samo ako postoje točka x_0 i realan broj $M > 0$ takav da je $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq K(x_0, M)$.

Propozicija 4.9. *Svaki konvergentan niz u metričkom prostoru (X, d) je omeđen.*

Dokaz. Neka (x_n) konvergira prema x_0. Prema definiciji konvergencije za $\varepsilon = 1$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\{x_n : n \geq n_0\} \subseteq K(x_0, 1)$. Neka je

$$r := max\{1, d(x_1, x_0), d(x_2, x_0), ..., d(x_{n_0-1}, x_0)\} + 1.$$

Tada je $\{x_n : n \geq n_0\} \subseteq K(x_0, r)$. □

Propozicija 4.10. *Neka je (x_n) niz u metričkom prostoru (X, d). Ako niz (x_n) konvergira prema točki $x_0 \in X$, onda i svaki njegov podniz konvergira prema x_0.*

Dokaz. Neka je (x_{u_n}) podniz niza (x_n). Prema definiciji limesa za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $d(x_n, x_0) < \varepsilon$. Podniz je strogo rastuća funkcija pa je $u_n \geq n$ i zato je

$$d(x_{u_n}, x_0) < \varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

Time smo pokazali da podniz (x_{u_n}) konvergira prema x_0. □

Svaki metrički prostor ujedno je i topološki prostor. U topološkom prostoru općenito nemamo metriku, ali definiciju konvergencije možemo iskazati na ekvivalentan način pomoću otvorenih skupova.

Definicija 4.11. ***(Konvergencija nizova u topološkom prostoru)***
Neka je (x_n) niz u topološkom prostoru $(X, \mathcal{U})$. Niz (x_n) konvergira prema točki $x_0 \in X$ ako za svaku otvorenu okolinu $U \in \mathcal{U}$ od x_0 postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in U$ za svaki $n \geq n_0$.

Primjedba 4.12. *U topološkom prostoru limes ne mora biti jedinstven.*
Navedimo primjer: neka je $X = \{0, 1\}$ i $\mathcal{U} = \{\emptyset, X\}$ trivijalna topologija na X. Svaki niz u X ima i 0 i 1 za limes.

U dokazu teorema 4.7 koristili smo disjunktnost otvorenih skupova $K(x_0, \varepsilon)$ i $K(\widetilde{x_0}, \varepsilon)$. U topološkim prostorima, limes (ukoliko postoji) će biti jedinstven ako svake dvije različite točke imaju međusobno disjunktne okoline. Takvi topološki prostori nazivaju se Hausdorffovi ili T_2-prostori.

Definicija 4.13. *Topološki prostor X je Hausdorffov ili T_2-prostor ako za svaki par različitih točaka $x_0 \neq x_0'$ iz X postoje disjunktne okoline O od x_0 i O' od x_0'.*

Metrički prostori primjer su Hausdorffovih prostora. Ako u Hausdorffovu prostoru niz (x_n) konvergira, onda je limes tog niza jednoznačno određena točka $x_0 \in X$, odnosno
$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Teorem 4.14. ***(Bolzano-Weierstrassov teorem za nizove)***
Svaki omeđen niz u $\mathbb{R}^n$ ima konvergentan podniz.

Dokaz. Dokaz se provodi metodom matematičke indukcije po dimenziji n prostora $\mathbb{R}^n$.
Baza: za $n = 1$ niz (x_k) ima monoton podniz (x_{u_k}) koji je konvergentan.
Pretpostavka: pretpostavimo da teorem vrijedi u $\mathbb{R}^n$.
Korak: dokažimo da vrijedi i u $\mathbb{R}^{n+1}$. Neka je $x_k = (x_k^1, ..., x_k^n, x_k^{n+1}), k \in \mathbb{N}$, omeđen niz u $\mathbb{R}^{n+1}$. Tada je $\widetilde{x_k} = (x_k^1, ..., x_k^n), k \in \mathbb{N}$, omeđen niz u $\mathbb{R}^n$, pa po pretpostavci ima konvergentan podniz. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je $(\widetilde{x_k})$ konvergentan podniz. Niz (x_k^{n+1}) je omeđen, ali ne mora biti konvergentan. Prema već dokazanom slučaju za $n = 1$, on ima konvergentan podniz $(x_{u_k}^{n+1})$. Prema propoziciji 4.10, niz $(\widetilde{x_k})$ je konvergentan u $\mathbb{R}^n$. Tada je konvergentan i podniz (x_{u_k}). □

Napomena 4.15. *Bolzano-Weierstrassov teorem općenito ne vrijedi u metričkim prostorima. Ako uzmemo neki niz iz prostora $\mathbb{R}$ s diskretnom metrikom, on će biti konvergentan ako i samo ako je stacionaran. Zato niz $(x_n), x_n = n$, nema konvergentan podniz.*

Definicija 4.16. *Za niz (x_n) u metričkom prostoru (X, d) kažemo da je* ***Cauchyjev niz*** *ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \in \mathbb{N}$ za koje je $m, n \geq n_0$ vrijedi $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.*

Teorem 4.17. *U metričkom prostoru (X, d) vrijedi:*

a) Svaki konvergentan niz je Cauchyjev.

b) Svaki Cauchyjev niz je ograničen.

Dokaz.

a) Neka niz (x_n) konvergira ka x_0. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $n \geq n_0$ vrijedi $d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Slijedi da za $n, m \geq n_0$ vrijedi $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_0, x_m) < \varepsilon$ pa je niz Cauchyjev.

b) Neka je (x_n) Cauchyjev niz. Tada za $\varepsilon = 1$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $m \geq n_0$ vrijedi $d(x_m, x_{n_0}) < 1$. Definiramo broj $r := max\{d(x_i, x_{n_0}) : i = 1, ..., n_0\} + 1$. Tada će vrijediti $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq K(x_{n_0}, r)$. □

Literatura

[1] F. M. Brückler, Povijest matematike II, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, 2010.

[2] M. Crnjac, D. Jukić, R. Scitovski, Matematika, Sveučilište J. J. Strossmayera, Ekonomski fakultet, Osijek, 1994.

[3] P. Javor, Matematička analiza: zbirka zadataka, Školska knjiga, Zagreb, 1994.

[4] D. Jukić, Realna analiza, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2020.

[5] D. Jukić, R. Scitovski, Matematika I, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2017.

[6] S. Kurepa, Matematička analiza, drugi dio, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.

[7] S. Mardešić, Matematička analiza u n-dimenzionalnom prostoru, prvi dio, Školska knjiga, Zagreb, 1988.

[8] Š. Ungar, Matematička analiza 3, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odjel, Zagreb, 2002.