Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

**Marija Sudarić**

# Omjeri, proporcije i proporcionalno zaključivanje

Diplomski rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

**Marija Sudarić**

# Omjeri, proporcije i proporcionalno zaključivanje

Diplomski rad

Mentor: doc.dr.sc Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2021.

# Sadržaj

# 1 Uvod

Tema diplomskog rada su omjeri, proporcije i proporcionalno zaključivanje. Zbog česte upotrebe omjera i proporcija u svakodnevnom životu i ostalim znanostima, smatram kako je upravo taj dio matematike jedan od važnijih u školskom obrazovanju učenika. Diplomski je rad podijeljen na nekoliko dijelova:

- Osnove razumijevanja omjera i proporcionalnosti
- Istraživanje provedeno među učenicima
- Procjena stupnja razvijenosti proporcionalnog zaključivanja kod učenika

U poglavlju "Osnove razumijevanja omjera i proprocionalnosti" navode se osnovne razlike u shvaćanju omjera od ostalih vrsta zaključivanja. Naime, često se događa da učenici pri rješavanju zadataka koji obuhvaćaju proporcionalnost primjenjuju pojednostavljene algoritme, a da pritom ne razmišljaju o smislu samog problema ili o ostalim načinima pomoću kojih se takvi zadaci mogu rješavati.
Nadalje, u radu se objašnjava pojam omjera i dva moguća shvaćanja omjera. Također, u ovom se poglavlju nalaze i razni primjeri primjene omjera u svakodnevnom životu. Iako omjer, razlomak i količnik nemaju isto značenje, objašnjena je njihova međusobna povezanost. Nakon što učenici usvoje pojam omjera, tada se njihovo znanje proširuje pojmom proporcija. Proporcionalnost i proporcionalne veličine smještamo unutar zaključivanja kojeg nazivamo proporcionalno zaključivanje. Razumijevanje proporcionalnosti složen je proces i razvija se postupno. U ovom se poglavlju navode i ključni aspekti takve vrste zaključivanja. Nadalje, navedene su i druge vrste omjera poput brzine, gustoće i slično koje se također vrlo često upotrebljavaju u svakodnevnom životu. Uz pojam proporcionalnosti učenici najčešće vežu i algoritam unakrsnog množenja, čija će povezanost sa proporcionalnim zaključivanjem također biti objašnjena u radu.
Drugo poglavlje rada sadrži istraživanje koje je provedeno među učenicima 8. razreda osnovne škole.
Treće poglavlje obuhvaća procjenu stupnja razvijenosti proporcionalnog zaključivanja kod učenika, koja se provodi pomoću tri strategije. Takva procjena može biti vrlo korisna nastavnicima matematike kako bi imali što kvalitetniji uvid u učenički napredak. U tu svrhu navedeni su i primjeri za neke strategije rješavanja problema.

# 2 Osnove razumijevanja omjera i proporcionalnosti

Podjela osnova razumijevanja omjera i proporcionalnosti može se prikazati pomoću sljedeće tablice:

| **Osnove razumijevanja** | **Pitanja** | **Tema** |
|---|---|---|
| 1 | Kako se shvaćanje omjera razlikuje od ostalih vrsta zaključivanja? | Omjeri |
| 2 | Što je omjer? | |
| 3 | Što predstavlja omjer kao mjera nekog svojstva u svakodnevnom životu? | |
| 4 | Na koji su način omjeri povezani s razlomcima? | |
| 5 | Na koji su način omjeri povezani s količnikom? | |
| 6 | Što je proporcija? | Proporcije |
| 7 | Koji su ključni aspekti proporcionalnog zaključivanja? | Prop. zaključivanje |
| 8 | Što je stopa i kako je povezana s proporcionalnim zaključivanjem? | |
| 9 | Koja je poveznica između algoritma unakrsnog množenja i proporcionalnog zaključivanja? | |
| 10 | Kada je prikladno zaključivati proporcionalno? | |

Tablica 1: Prikaz podjele osnova razumijevanja proporcionalnosti

## 2.1 Razlika shvaćanja omjera u odnosu na ostale vrste zaključivanja

Zaključivanje s omjerima podrazumijeva postojanje i koordiniranje dvama veličinama. Prisustvo dviju veličina aspekt je zaključivanja s omjerima kojeg odrasli ljudi s osnovnim matematičkim vještinama razumiju uglavnom podsvjesno i implicitno. Zbog toga se najčešće ne prepoznaje važnost takvog zaključivanja sve dok se ne uoči ko-

liko je kod djece takvo zaključivanje nerazvijeno. Prije nego li učenici budu spremni zaključivati pomoću omjera, oni obično zaključuju na osnovi jedne veličine. Takav način zaključivanja naziva se *jednoznačno zaključivanje*. U nastavku slijedi jedan takav primjer (Lobato, 2010).
Učenicima šestoga razreda prikazana je slika na kojoj se nalazi jedno pakiranje soka od naranče te im je rečeno da je sok napravljen od narančinog koncentrata i vode. Pored navedenog soka, na slici su se nalazile i dvije čaše: jedna velika i jedna mala čaša, obje napunjene sokom od naranče iz pakiranja. Učenicima je zatim postavljeno sljedeće pitanje: hoće li okus narančinog soka u obje čaše biti jednakog intenziteta ili pak misle da će sok iz jedne čaše imati jači okus naranče nego li sok iz druge čaše.

Rezultati su iznenađujući. Polovica razreda je odgovorila netočno: smatrali su kako okus narančinog soka intenzitetom neće biti isti u obje čaše. Jedan je dio tih učenika tvrdio da će sok u većoj čaši imati jači okus naranče, dok je drugi dio učenika tvrdio da će se u manjoj čaši nalaziti sok jačeg intenziteta. Njihovi odgovori i objašnjenja upućuju na to da su učenici bili usredotočeni na samo jednu veličinu (voda ili narančin koncentrat) ili na obje veličine, ali bez uspostavljene koordinacije među njima.

Primjerice, jedan je učenik objasnio kako će sok u većoj čaši imati jači okus zato što je čaša veća pa će sadržavati i više naranče. Neki su učenici tvrdili kako će sok iz manje čaše imati jači okus naranče jer je čaša manjeg volumena pa će stoga primiti manje vode te će tada u toj čaši biti više mjesta za narančin koncentrat.

## 2.2 Omjer

Postoje dva načina za formiranje omjera, no važno je naglasiti kako oba načina uključuju koordinaciju dvama veličinama:

- omjer kao multiplikativna usporedba dviju veličina
- spajanje dviju veličina u sastavnu cjelinu na način da se sačuva multiplikativna veza među njima.

### 2.2.1 Omjer kao multiplikativna usporedba

Pogledajmo sljedeći primjer.

**Primjer 1.** *Na Slici 1. nacrtana su dva crva. Promotrimo njihove duljine te ih potom usporedimo.*

Na slici se lako uočava kako je crv A dugačak 6 mjernih jedinica, dok je crv B dugačak 4 mjerne jedinice. Njihova duljina može biti uspoređena na dva načina: **aditivno** i **multiplikativno**.

**Aditivna usporedba** na danom primjeru odgovara na pitanja poput:

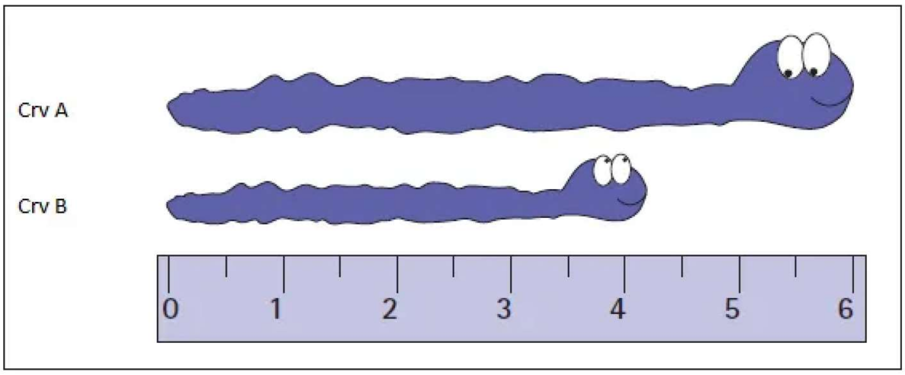
- Za koliko je crv A dulji od crva B?
  (Crv A je za 2 mjerne jedinice dulji od crva B.)

- Za koliko je crv B kraći od crva A?
  (Crv B je za 2 mjerne jedinice kraći od crva A.)

**Multiplikativna usporedba** odgovara na pitanja poput:

- Koliko je puta crv A dulji od crva B?
  (Duljina crva A iznosi $1\frac{1}{2}$ od duljine crva B.)

- Koji dio od duljine crva A predstavlja duljinu crva B?
  (Duljina crva B iznosi $\frac{2}{3}$ ukupne duljine crva A.)




Slika 1: Usporedba duljina

Važno je napomenuti da je multiplikativna usporedba omjer, dok aditivna usporedba to nije. Općenito, formiranje multiplikativne usporedbe podrazumijeva pitanja, kao što pokazuje prethodni primjer, poput: „Koliko je puta jedna veličina veća od druge veličine“ ili „Koji dio jedne veličine predstavlja druga veličina?“.

U matematici postoji nekoliko oznaka za prikazivanje omjera. U prethodnom smo primjeru mogli omjer duljine crva A u odnosu na duljinu crva B zapisati na sljedeće načine: $1\frac{1}{2}$:1, $1\frac{1}{2}$ prema 1 ili jednostavnije $1\frac{1}{2}$. Također, mogli su se upotrijebiti i zapisi poput: 3:2, 3 prema 2 ili $\frac{3}{2}$, kao i 6:4, 6 prema 4 ili $\frac{6}{4}$ .

Analogno, omjer duljine crva B u odnosu na duljinu crva A mogli smo zapisati na sljedeće načine: 2:3, 2 prema 3 ili $\frac{2}{3}$, kao i 4:6, 4 prema 6 ili $\frac{4}{6}$. U tom slučaju, ispravno je zapisati i 1:$1\frac{1}{2}$, ili 1 prema $1\frac{1}{2}$.

### 2.2.2 Omjer kao sastavna cjelina

Drugi način formiranja omjera postiže se spajanjem odnosno sastavljanjem dviju veličina u novu cjelinu. Sposobnost formiranja omjera kao sastavne cjeline ne znači nužno da je učenik usvojio sofisticiranost razumijevanja proporcionalnosti. To znači da je učenik usvojio tek osnovni i temeljni koncept, koji se kasnije može koristiti kao poveznica sa drugim osnovnim razumijevanjima, a sve u svrhu razvijanja razumijevanja na kojem se temelji proporcionalno zaključivanje.

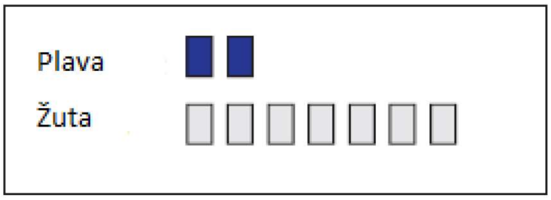
No, kako će u primjeni navedena dva načina shvaćanja omjera (kao multiplikativne usporedbe i kao sastavne cjeline) pomoći učenicima pri rješavanju problema?

Sljedeći primjer potiče nas upravo na razmatranje korisnosti prethodno navedenih dvaju koncepata.

**Primjer 2.** *Smjesa zelene boje dobiva se miješanjem dvije limenke plave boje i sedam limenki žute boje. Koje su preostale moguće kombinacije broja limenki plave i žute boje čijim bi miješanjem nastala jednaka nijansa zelene boje?*

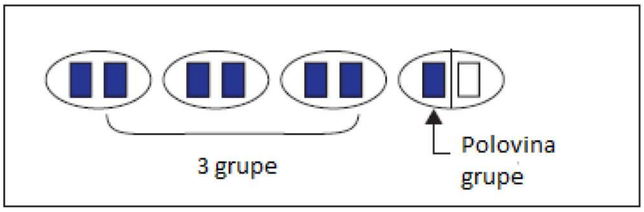
Problem ćemo riješiti na dva različita načina: koristeći multiplikativnu usporedbu, a zatim koristeći i sastavnu cjelinu.

Kako bismo riješili dani problem uz primjenu multiplikativne usporedbe, koristan može biti i prikaz na Slici 2.



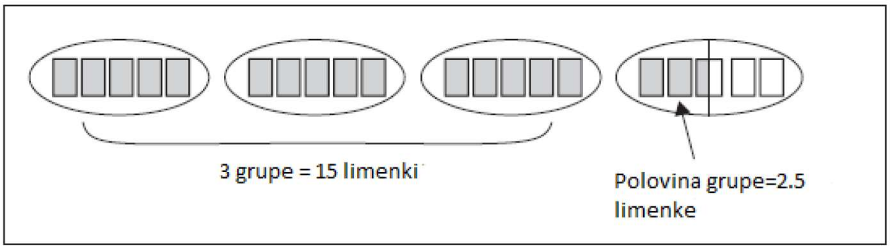

Slika 2: 2 limenke plave boje i 7 limenki žute boje

Za početak, potrebno je odrediti koliko puta, u danoj količini smjese, ima više žute boje u odnosu na plavu boju. Jedan od načina jest da se formiraju grupe s po dvije limenke plave boje. Zatim, potrebno je odrediti odgovarajući broj takvih grupa koje bi sadržavale ukupno sedam limenki plave boje. Da bi se izjednačila količina plave i žute boje, zaključujemo da je potrebno ukupno $3\frac{1}{2}$ grupa s limenkama plave boje (Slika 3).
Prema tome, omjer žute i plave boje u smjesi iznosi 3.5:1.




Slika 3: Grupe s limenkama plave boje

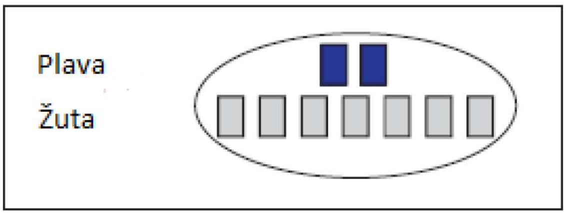
Koristeći prethodni omjer moguće je pronaći i druge kombinacije plave i žute boje čijim će miješanjem nastati ista nijansa zelene boje.
Primjerice, uzmemo li 5 limenki plave boje, tada ćemo trebati pomiješati 3.5 puta više limenki žute boje (u odnosu na plavu).
Kao što je prikazano na Slici 4, to znači da ukupno imamo 3.5 grupe, od kojih će svaka grupa sadržavati po 5 limenki, što znači da je ukupno potrebno 17.5 takvih limenki.




Slika 4: Ukupan broj limenki u grupama od po 5 limenki

Prema tome, jedan od načina za dobivanje iste nijanse zelene boje, kao u zadanom primjeru, jest da se pomiješa 5 limenki plave boje i 17.5 limenki žute boje.

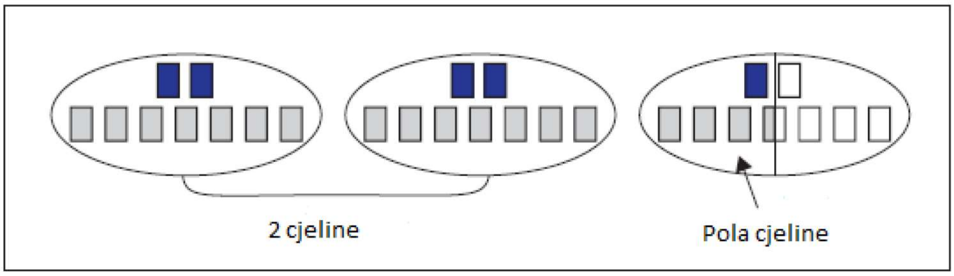
Riješimo sada isti problem formirajući sastavnu cjelinu.
Prvo, spojimo 2 limenke plave boje i 7 limenki žute boje kako bi se dobila 2:7 cjelina odnosno smjesa (Slika 5).




Slika 5: Sastavna cjelina

Zatim, potrebno je tu cjelinu ili umnožavati ili dijeliti (ovisno o uvjetu pojedinog zadatka) kako bi se pronašao odgovarajući broj limenki žute boje, koji bi se pomiješao s 5 limenki plave boje.

U ovom slučaju, udvostručavanjem te cjeline dobiju se ukupno 4 limenke plave boje i 14 limenki žute boje. Obzirom da je potrebna još jedna limenka plave boje, podijelit ćemo treću cjelinu na dva jednaka dijela.
Tim postupkom dobivamo još 1 limenku plave boje i 3.5 limenki žute boje (Slika 6).
Dakle, 2.5 cjeline sadrže ukupno 5 limenki plave boje i 17.5 limenki žute boje.




Slika 6: 2.5 cjeline zelene boje dobivene s 5 limenki plave boje

Pojam omjera kao multiplikativne usporedbe ili sastavne cjeline može se razlikovati od definicije omjera u raznim literaturama.
Primjerice, omjer je uobičajeno definiran kao usporedba dviju veličina, no takva definicija je prilično nepotpuna jer iz konteksta nije jasno je li ta usporedba aditivna ili multiplikativna.
Omjer je ponekad definiran kao usporedba u kojoj se koristi dijeljenje dvaju brojeva te je često izražen u obliku razlomka. Takva definicija navodi učenike da koriste izraze poput $\frac{a}{b}$ ili $a \div b$, no definicija kao takva ima nekoliko nedostataka.
Naime, moguće je formirati omjer bez izvođenja operacije dijeljenja ili uvođenja razlomaka.
Primjena zapisa $\frac{a}{b}$ ili $a \div b$ pri rješavanju problema, ne znači nužno da je učenik misaono oblikovao omjer između veličina a i b.

## 2.3 Primjena omjera u svakodnevnom životu

Primjene omjera u prethodnim primjerima pokazuju kako se omjer često koristi za mjerenje raznih karakteristika iz svakodnevnog života.
Primjerice, omjer narančinog koncentrata i vode zapravo predstavlja mjeru intenziteta okusa naranče u dobivenom soku.
Za primjer možemo uzeti i rampu za invalidska kolica. Visina rampe i duljine horizontalnog dijela rampe (bazni dio) predstavlja mjeru strmosti odnosno nagiba rampe.
Formiranje omjera kao mjere različitih karakteristika iz svakodnevnog života podrazumijeva izoliranje promatrane karakteristike od ostalih karakteristika.

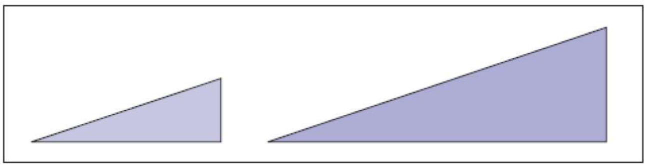
Uobičajeno se termin „omjer kao mjera“ koristi za omjere pomoću kojih se vrše mjerenja karakteristika iz svakodnevnog života. Formiranje takvog omjera uključuje dva procesa koja nisu numerička:

1. izoliranje karakteristika (atributa)
2. razumijevanje efekta promjene veličine neke karakteristike, kako bi se pomoću omjera mogla izmjeriti njezina vrijednost.

Razmotrimo redom svaki od navedenih procesa.

### 2.3.1 Izoliranje karakteristika

Prije nego li se omjer može iskoristiti kao mjera nekog svojstva, najprije treba znati izolirati to svojstvo od ostalih mjerivih svojstava u problemu.
No, takav proces može biti iznimno zahtjevan i izazovan za učenike.
U jednom je istraživanju, srednjoškolskim učenicima postavljen problem mjerenja strmosti rampe za invalidska kolica (Lobato, 2008).
Više od pola učenika imalo je teškoće sa izoliranjem svojstva, kojeg predstavlja strmost rampe, od ostalih svojstava. Mnogo se učenika izjasnilo kako je važno uočiti duljinu kosog dijela rampe pri mjerenju strmine, raspravljajući kako je dulja rampa ujedno i puno teža za uspon.
Radi boljeg razumijevanja ovog problema, promotrimo dvije rampe koje nisu identične, ali imaju isti nagib (Slika 7).

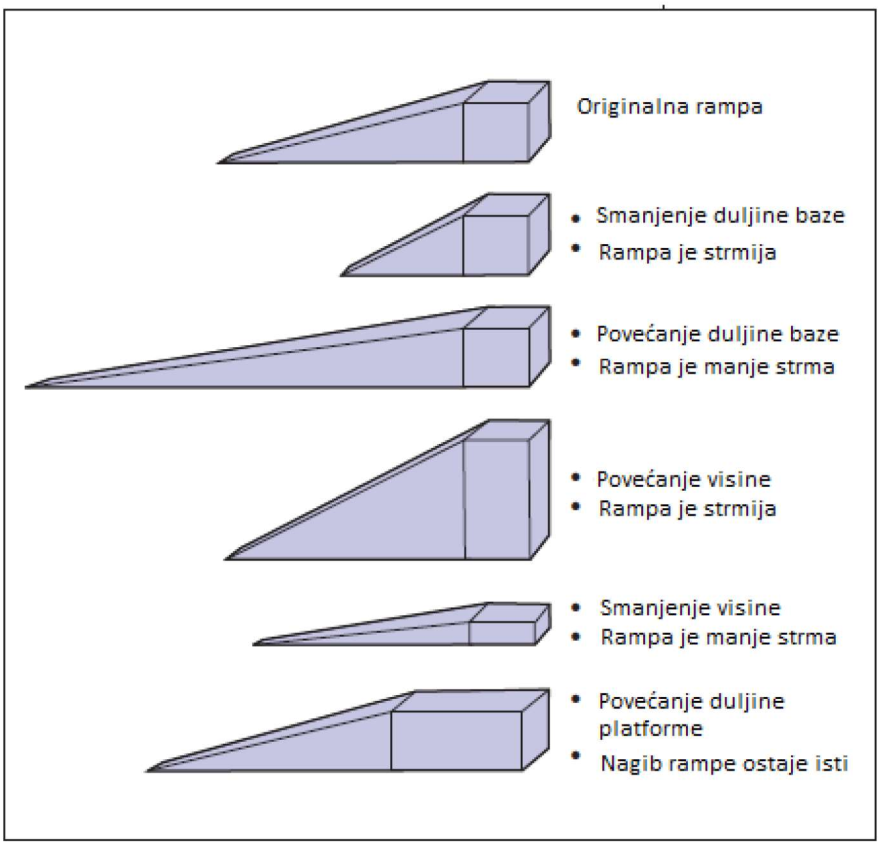


Slika 7: Dvije ne-identične rampe istog nagiba

Učenici mogu pomisliti kako je rampa s desne strane strmija jer je viša, dulja ili teža za uspon. Primjerice, ako učenici ne izoliraju svojstvo strmosti od napora potrebnog za uspon preko rampe, tada mogu doći do netočnog zaključka, a to je da obje rampe nemaju istu strminu (jer će rampa na desnoj strani iziskivati više napora).

### 2.3.2 Razumijevanje efekta promjene veličine

Promotrimo ponovno primjer s rampom za invalidska kolica. Ako učenici formiraju omjer pomoću visine rampe i duljine baznog dijela, tada je svojstvo koje omjer mjeri upravo nagib rampe. Ako bi rampa imala platformu pri vrhu, tada bi učenici trebali razumjeti da će smanjivanje duljine baze rampe (dok su visina i platforma ostale nepromijenjene) povećati nagib rampe, ali povećanje duljine baze će smanjiti nagib rampe kao što je prikazano na prvoj i drugoj promjeni originalne rampe (Slika 8).




Slika 8: Utjecaj promjene jedne veličine na nagib rampe

Slično, povećanje visine rampe (dok bazni dio ostaje nepromijenjen) rezultirat će povećanjem nagiba rampe. Također, smanjivanjem visine rampe i nagib će se smanjivati, kao što je prikazano na trećoj i četvrtoj promjeni originalne rampe.
Povećanje ili smanjenje duljine platforme, pri vrhu rampe, neće utjecati na nagib te rampe.

## 2.4 Povezanost omjera i razlomaka

U matematici postoji nekoliko veza između omjera i razlomaka:

- omjeri su često izraženi u obliku razlomka, iako omjeri i razlomci nemaju uvijek identično značenje
- omjeri se često koriste kako bi se napravila usporedba u „dio - dio" odnosu, dok se razlomci u tu svrhu ne koriste
- omjeri i razlomci kao skupovi mogu se smatrati ne-disjunktnima
- omjeri se često mogu interpretirati pomoću razlomaka

Obzirom da se omjeri mogu prikazati u obliku razlomka, većina učenika pogrešno smatra kako je omjer samo drugačiji naziv za razlomak. Upotreba razlomaka u problemima koji uključuju omjere mogu uzrokovati nejasnoće kod učenika. Primjerice, raspravljajući o rješenju sljedećeg primjera učenik može do rješenja doći upotrebom ekvivalentnih razlomaka.

**Primjer 3.** *Sok od naranče proizvodi se na način da omjer broja čaša narančinog koncentrata i vode iznosi 2 prema 3. Koliko će u tom slučaju, za proizvodnju soka, trebati čaša narančinog koncentrata ako se upotrijebi 9 čaša vode?*

Učenik može dani problem postaviti na sljedeći način:

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{9}$$

te potom zaključiti da je rješenje 6 jer su razlomci $\frac{2}{3}$ i $\frac{6}{9}$ ekvivalentni.

Uzmimo sada za primjer recept začina za salatu koji se sastoji od octa i ulja, u omjeru 2 prema 5.
Omjer octa prema ulju možemo zapisati kao 2:5, 2 prema 5 ili $\frac{2}{5}$.
U ovom kontekstu, razlomak $\frac{2}{5}$ predstavlja „dio-dio" omjer. Razlomak kojim bismo

izrazili dio začina koji čini samo ulje je $\frac{5}{7}$ te kao takav predstavlja „dio-cjelina“ omjer. Isto tako, razlomak $\frac{2}{7}$ izražava udio octa u začinu, koji također predstavlja „dio-cjelina“ omjer.

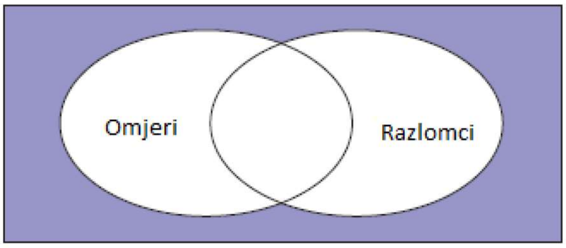
Primjer omjera koji nije razlomak je tzv. *omjer zlatnog reza*:

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Takav omjer predstavlja iracionalan broj, dok su razlomci racionalni brojevi.

Omjeri mogu obuhvaćati i više od dva pojma, kao što je omjer broja pakiranja punomasnog mlijeka, polumasnog mlijeka i broja pakiranja nemasnog mlijeka u nekoj prodavaonici (npr. 5:3:1).

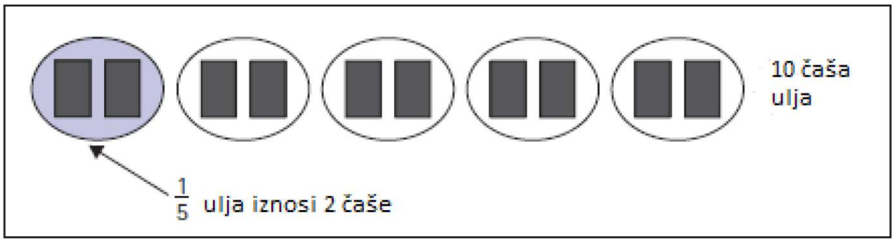
Predočimo li omjere i razlomke kao skupove, tada se u presjeku tih skupova nalaze omjeri koji su formirani kao „dio-cjelina“ (Slika 9).
Primjerice, omjer octa prema svim ostalim sastojcima u začinu za salatu, 2:7, ujedno predstavlja i razlomak (dvije sedmine začina čini ocat).




Slika 9: Skupovi

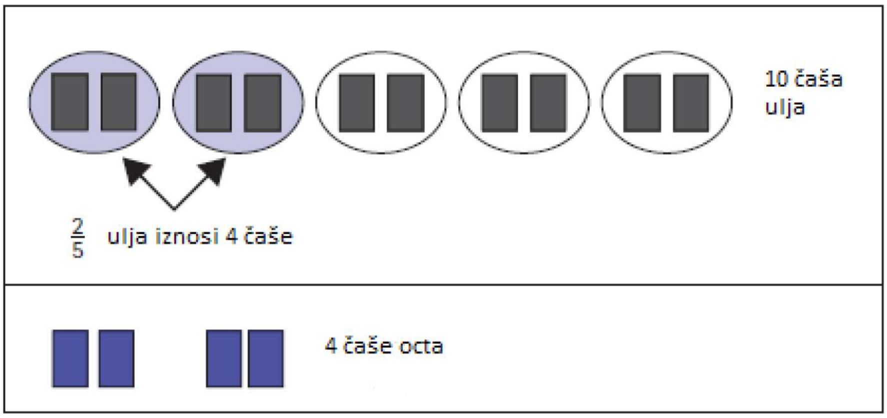
Važno je naglasiti kako omjer npr. 2:5 ne ukazuje na samo jednu određenu količinu octa ili ulja u određenom receptu. Slijedeći upute takvog recepta možemo koristiti: 2 čaše octa i 5 čaša ulja ili 4 čaše octa i 10 čaša ulja ili 1 čašu octa i $2\frac{1}{2}$ čaša ulja itd. Također, pomoću tog recepta možemo načiniti isti začin koristeći: 6 žlica octa i 15 žlica ulja ili $\frac{1}{2}$ decilitra octa i $1\frac{1}{4}$ decilitra ulja itd.

Pretpostavimo da se recept za salatu sastoji od 4 čaše octa i 10 čaša ulja. Činjenicu da $\frac{2}{5}$ od 10 iznosi 4 ilustrirajmo vizualno (Slika 10).




Slika 10: Jedna petina od 10 čaša

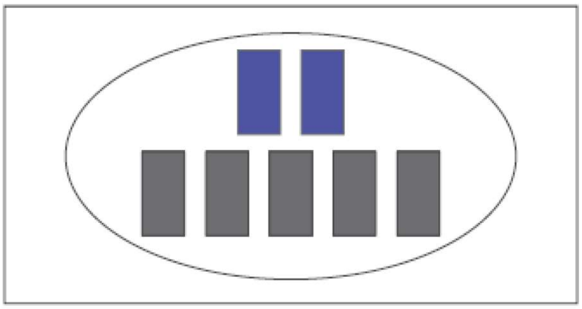
Slika 10. prikazuje 10 čaša podijeljenih u 5 jednakih grupa (petine). Dakle, jedna petina od 10 čaša iznosi 2 čaše.
Slika 11. prikazuje dvije petine od 10 čaša, odnosno 4 čaše. Količina octa u ovom receptu (4 čaše) iznosi ukupno $\frac{2}{5}$ od ukupne količine ulja (10 čaša). Stoga zaključujemo kako omjer 2:5 u ovom slučaju može biti interpretiran u obliku razlomka $\frac{2}{5}$.
To znači da se u začinu za salatu u ovom receptu osim ulja nalazi i ocat, kojeg ukupno ima $\frac{2}{5}$ od količine ulja, bez obzira na to koju se određenu količinu octa i ulja koristi.



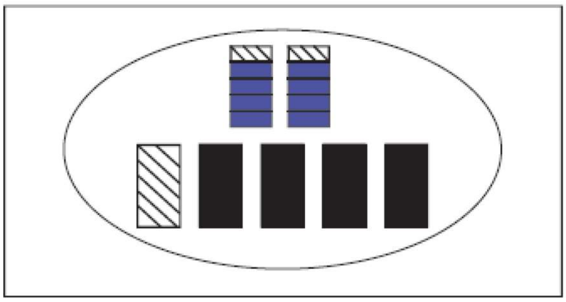

Slika 11: Dvije petine od 10 čaša

Postoji još jedan način kako omjer 2:5 interpretirati kao razlomak $\frac{2}{5}$. Pretpostavimo da su nam potrebne 2 čaše octa i 5 čaša ulja kako bi se napravio začin za salatu. Slika 12. prikazuje spajanje dane količine octa i ulja u jednu cjelinu. Omjer 2:5 možemo sačuvati i u slučaju ako novonastalu cjelinu podijelimo na 5 jednakih dijelova. To

ćemo napraviti tako da podijelimo i količinu octa i količinu ulja na 5 jednakih dijelova. Dijeljenjem 5 čaša ulja na 5 jednakih dijelova dobiva se 1 čaša ulja u svakom dijelu. No, dijeljenje 2 čaše octa na 5 jednakih dijelova nešto je zahtjevniji postupak. Jedan način jest podjela prve čaše octa na 5 jednakih dijelova, tada svaki dio sadrži $\frac{1}{5}$ čaše. Primjenjujući navedeni proces i na drugu čašu, dobivamo još $\frac{1}{5}$ čaše u svakom dijelu. Dakle, podjelom 2 čaše ulja na 5 jednakih dijelova dobivamo $\frac{2}{5}$ čaše ulja u svakom dijelu.
Stoga, začin za salatu napravljen od $\frac{2}{5}$ čaše octa i 1 čaše ulja (Slika 13) čuva omjer 2:5 između octa i ulja.



Slika 12: Sastavna cjelina (2 čaše octa i 5 čaša ulja)



Slika 13: Jedna petina cjeline iznosi $\frac{2}{5}$ čaše octa i čaša ulja

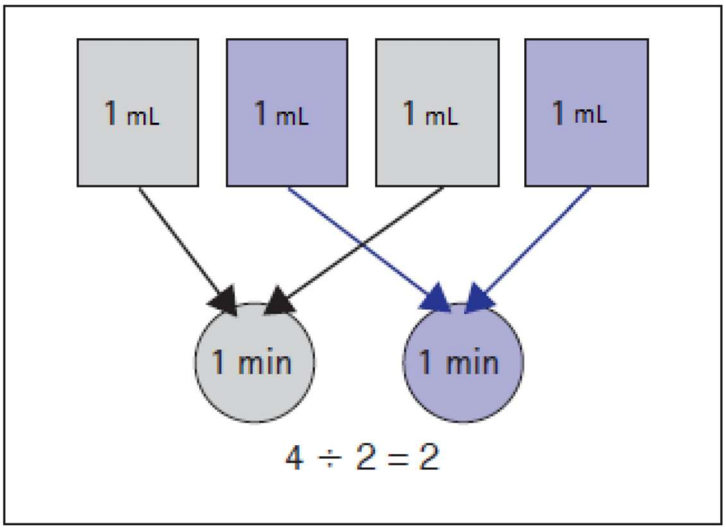
Dakle, omjer 2:5 može se interpretirati razlomkom $\frac{2}{5}$ na dva različita načina:

- u receptu, količina octa uvijek iznosi $\frac{2}{5}$ od količine ulja, bez obzira na danu količinu octa i ulja (potrebno je omjer 2:5 razmatrati kao multiplikativnu usporedbu jer $\frac{2}{5}$ od 5 iznosi 2)

- "sparivanje": ako upotrebljavamo $\frac{2}{5}$ čaše octa, prateći recept, tada je potrebna 1 čaša ulja (nužno je omjer 2:5 promatrati kao sastavnu cjelinu, a zatim podijeliti tu cjelinu na 5 jednakih dijelova)

## 2.5 Povezanost omjera i količnika

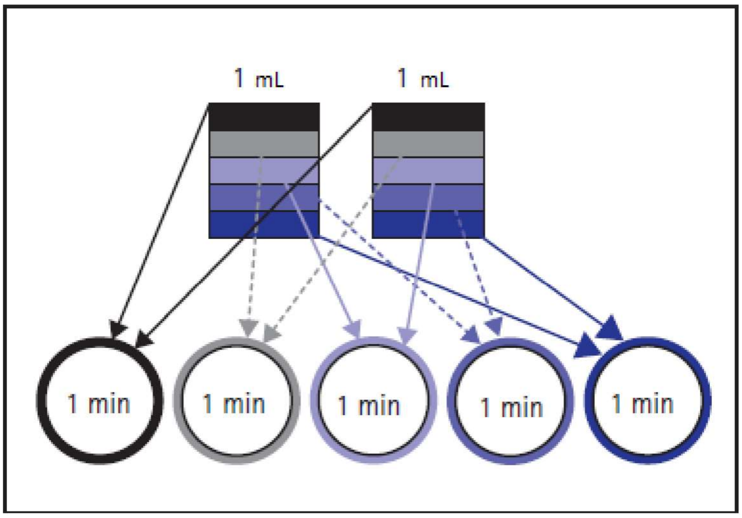
Kao što se omjeri mogu interpretirati pomoću razlomaka, isto se tako mogu interpretirati i pomoću količnika. Primjerice, zamislimo slučaj u kojem je slavina oštećena te zbog toga voda kapanjem istječe cijeli dan. Pretpostavimo da 4 mililitra vode isteku svake 2 minute, tada je brzina istjecanja izražena omjerom 4:2. Ako se ispod slavine postavi posuda za skupljanje vode, tada će se u posudi skupiti 8 mililitara vode nakon 4 minute, 20 mililitara nakon 10 minuta, 120 mililitara nakon 1 sata itd.
Omjer 4:2 može se interpretirati kao količnik.
U navedenom primjeru, promatramo broj mililitara vode podijeljenih na minute. Slika 14. ilustrira količnik 4÷2 kao jednaku podjelu 4 mililitra vode na 2 minute. Osjenčane strelice na Slici 14. prikazuju postupak dijeljenja. Količnik iznosi 2, što znači da 2 mililitra vode isteknu svake minute.




Slika 14: 4 mL vode jednako podijeljena na 2 minute

Zamislimo sada istu situaciju, ali sa drugačijim omjerom. Pretpostavimo da 2 mililitra vode isteku svakih 5 minuta. Ponovno, omjer 2:5 se može interpretirati kao količnik

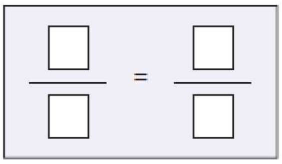
$(2 \div 5)$, gdje je broj mililitara vode (2) podijeljen između broja minuta (5). Slika 15. ilustrira navedeni proces. Prvi mililitar vode podijeljen je na 5 jednakih dijelova tako da je svaka $\frac{1}{5}$ mililitra "povezana" sa svakom od ukupno 5 minuta. Isti je postupak primijenjen i na drugi mililitar vode. Sveukupno, dvije jedne petine mililitra, odnosno $\frac{2}{5}$ mililitra, podudaraju se s istom minutom. Prema tome, u ovom slučaju količnik $2 \div 5$ znači da $\frac{2}{5}$ mililitra vode iskaplje svake minute, odnosno da 0.4 mililitra vode iskaplje u jednoj minuti.
Interpretacija omjera količnikom može biti posebno korisna u smislu proporcije, koja predstavlja jednakost dvaju omjera.




Slika 15: 2 mL vode jednako podijeljena na 5 minuta

## 2.6 Proporcije

Kada se, koristeći udžbenike, učenici susretnu s problemom koji uključuje proporcije, tada ih se najčešće potiče na postavljanje proporcije u formi kao što je prikazano na slici 16. Međutim, učenici koji nisu misaono usvojili omjere (ili kao sastavnu cjelinu ili kao multiplikativnu usporedbu) proporciju mogu protumačiti samo kao predložak, u koji trebaju unijeti brojeve.



Slika 16: Predložak za postavljanje proporcije

Promotrimo sljedeći primjer:

**Primjer 4.** *Klaun prehoda 10 centimetara za 4 sekunde. Koliki će put prijeći žaba u 8 sekundi, ako se kreće istom brzinom kao klaun?*

Učenici bi vjerojatno točno postavili proporciju te bi potom riješili zadani problem:

$$\frac{udaljenost(cm)}{vrijeme(s)} \qquad \frac{10}{4} = \frac{x}{8}$$

i zaključili da će žaba u 8 sekundi prijeći put duljine 20 $cm$. Ali, ovim postupkom učenici najčešće ne razmišljaju o postavljanju omjera. Većina će učenika. koji nemaju dovoljno razvijeno proporcionalno zaključivanje, intuitivno pomisliti kako će žaba biti brža u odnosu na klauna jer je žaba prešla dulji put - to je primjer jednoznačnog zaključivanja (spomenutog u poglavlju 2.1.). Isto tako, učenici mogu intuitivno pomisliti kako će žaba biti brža jer su brojevi 20 i 8 veći nego odgovarajući brojevi kod klauna - to je primjer tzv. cjelobrojnog zaključivanja.
Većini učenika vrlo je teško shvatiti da dani pojam u danoj situaciji ostaje isti dok se istovremeno vrijednosti vremenskog trajanja i udaljenosti mijenjaju.
Razumijevanje proporcije kao jednakosti dvaju omjera uključuje nekoliko povezanih ideja. Učenici najprije trebaju razumjeti značenje znaka jednakosti u simboličkom izrazu proporcije. Sljedeći primjer potiče fokusiranje upravo na taj problem.

Razmotrimo proporciju iz prethodnog primjera:

$$\frac{10}{4} = \frac{20}{8}$$

Pitamo se koje značenje ima znak jednakosti u danom kontekstu? Odnosno, što

postižemo znakom jednakosti u problemu prijeđenog puta (hodanja)?
U ovom kontekstu, znak jednakosti ukazuje na to da su brzine kretanja klauna i žabe jednake. Interpretiramo li omjere $\frac{10}{4}$ i $\frac{20}{8}$ kao količnike $10 \div 4$ i $20 \div 8$, zaključujemo kako oba predstavljaju brzinu od 2.5 centimetra u sekundi.

Nastavnici ponekad objašnjavaju znak jednakosti isticanjem kako se razlomak $\frac{20}{8}$ kraćenjem može zapisati kao $\frac{10}{4}$.
Jasno je kako su učenici u stanju skraćivati razlomke korištenjem algoritma koji zahtijeva samo razumijevanje prirodnih brojeva (dijeljenje 20 sa 2 i dijeljenje 8 sa 2). No, učenici koji rabe isključivo ovakav postupak rješavanja problema nisu shvatili da 10:4 i 20:8 kao omjeri predstavljaju istu brzinu. Nadalje, upotrebom termina „razlomak“ umjesto „omjer“ ne znači da učenik misaono interpretira omjere kao razlomke. Umjesto toga, učenici trebaju razumjeti jedno od značenja razlomka objašnjenih u poglavlju 2.4.
Primjerice, omjer 10:4 može se interpretirati razlomkom u kontekstu hodanja: $\frac{10}{4}$ prehodanih centimetara u 1 sekundi. To znači da je omjer 10:4 utemeljen na spajanju 10 centimetara i 4 sekunde u sastavnu cjelinu, a onda i na dijeljenju te cjeline na četiri jednaka dijela. Podjelom 4 sekunde na 4 jednaka dijela dobiva se 1 sekunda u svakom od tih dijelova. Nadalje, podjela 10 centimetara na 4 jednaka dijela podrazumijeva podjelu svakog centimetra na četvrtine te potom zbrajanja $\frac{1}{4}$ od svakog centimetra. Tada svaki od jednakih dijelova sadrži ukupno $\frac{10}{4}$ centimetara. Dakle, razlomak $\frac{10}{4}$ predstavlja udaljenost koju klaun ili žaba prehoda za 1 sekundu.
Slično, omjer 20:8 može biti interpretiran kao $\frac{20}{8}$ centimetara u 1 sekundi. Uočavanje činjenice kako razlomci $\frac{10}{4}$ i $\frac{20}{8}$ predstavljaju jednaku udaljenost prehodanu u 1 sekundi, uključuje jedno od slijedećih zaključivanja: budući da je $\frac{1}{8}$ polovina od $\frac{1}{4}$, vrijedi da su dvije jedne osmine jednake $\frac{1}{4}$. Prema tome, deset grupa, od kojih svaka sadrži $\frac{2}{8}$ bit će jednako vrijednosti od deset grupa od kojih svaka sadrži $\frac{1}{4}$, dakle $\frac{20}{8} = \frac{10}{4}$.

## 2.7 Ključni aspekti proporcionalnog zaključivanja

Proporcionalno zaključivanje složen je proces i uključuje razumijevanja poput:

- ekvivalentni se omjeri mogu načiniti ponavljanjem i/ili podjelom sastavne cjeline
- ako se jedna veličina u omjeru pomnoži ili podijeli nekim brojem, tada se i druga veličina mora pomnožiti ili podijeliti istim tim brojem kako se proporcionalni odnos među veličinama ne bi promijenio
- navedena dva tipa omjera (sastavne cjeline i multiplikativne usporedbe) međusobno su povezani

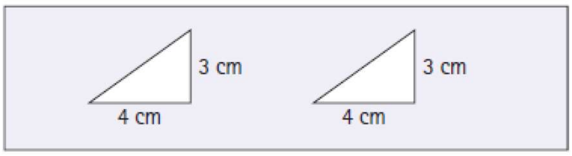
Ideja formiranja omjera kao sastavne cjeline fundamentalni je koncept koji, sam po sebi, nije indikativan za napredno proporcionalno zaključivanje. Pojedina istraživanja pozivaju se na to da je umijeće formiranja sastavne cjeline zapravo faza koja prethodi zaključivanju s omjerima. U nastavku slijede neke od ključnih aspekata proporcionalnog zaključivanja.

### 2.7.1 Stvaranje ekvivalentnih omjera

Na početku razvijanja proporcionalnog zaključivanja učenici ponavljaju i/ili dijele sastavnu cjelinu kako bi stvorili skup ekvivalentnih omjera. Proučimo sljedeći primjer.

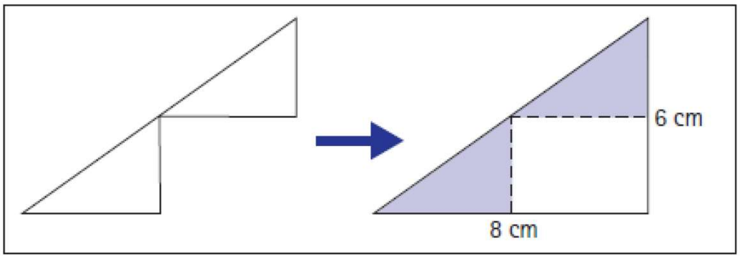
**Primjer 5.** *Visina rampe iznosi 3 cm, a duljina njezinog baznog dijela iznosi 4 cm. Pronađimo dimenzije nekoliko rampi koje će imati isti nagib kao početna rampa.*

Ako učenici načine kopiju zadane rampe, tada će obje rampe imati isti nagib jer ni visina ni duljina baznog dijela rampe nije promijenjena (Slika 17.)



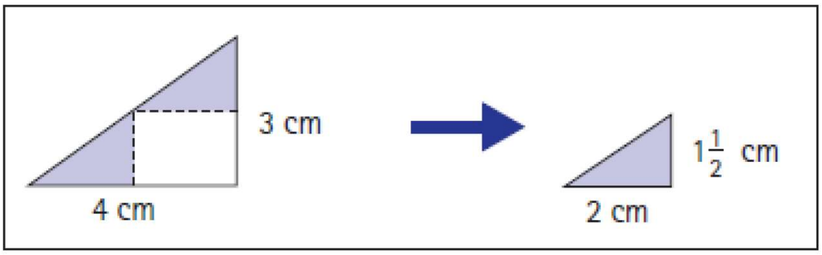

Slika 17: Identične rampe

Poravnavanjem rampe i njezine kopije „vrh do vrha" (Slika 18) neće se promijeniti nagib niti jedne rampe. Dobivena rampa, visine 6 *cm* i duljine baznog dijela 8 *cm*, ima isti nagib kao početna rampa. Iterativnim procesom mogu se dobiti dimenzije i




Slika 18: Nova rampa nastala prema primjeru originalne rampe

drugih rampi istog nagiba: rampa visine 12 *cm* i duljine baze 16 *cm*, rampa visine 21 *cm* i duljine baze 28 *cm* itd.
Također, učenici mogu podijeliti originalnu rampu kako bi se formirala nova rampa istog nagiba. Podjela visine i duljine baze originalne rampe na dva jednaka dijela rezultira novom rampom s duljinom visine $1\frac{1}{2}$ *cm* i duljinom baznoga dijela 2 *cm* (Slika 19).




Slika 19: Podjela originalne rampe

Učenici se vrlo lako mogu uvjeriti da je nova rampa istog nagiba kao i početna-umnožavanjem nove rampe i slaganjem dijelova jedan do drugog dok se ne dobije početna rampa.
Slično, podjelom duljine visine i duljine baze originalne rampe na trećine dobila bi se nova rampa s visinom duljine 1 *cm* i bazom duljine $1\frac{1}{3}$ *cm*.

Učenici pri rješavanju ovakvih i sličnih zadataka mogu koristiti istovremeno i umnožavanje i podjelu. Primjerice, pretpostavimo da učenici trebaju odrediti visinu nove rampe s baznim dijelom duljine 5 *cm* i istog nagiba kao početna (3:4) rampa. Ovako formuliran problem znatno je zahtjevniji učenicima zbog relativno male razlike (4 *cm* i 5 *cm*). U ovakvom slučaju učenici mogu koristiti istovremeno i iteraciju i podjelu.

Uzmimo sada za primjer razmišljanje srednjoškolskog učenika - Marka. Marko je shvatio da je duljina baznog dijela nove rampe za 1 $cm$ dulja od odgovarajućeg dijela originalne rampe. Odlučio je pronaći duljinu visine rampe koja ima baznu duljinu 1 $cm$ i isti nagib kao originalna rampa. Podijelio je originalnu rampu (3:4) na 4 jednaka dijela i dobio rampu $\frac{3}{4}$:1. Zatim je novonastalu rampu umnožio 5 puta i „posložio“ jednu do druge te dobio novu rampu s duljinom baznog dijela 5 $cm$. Dakle, visina nove rampe iznosi $\frac{15}{4}$ $cm$ budući da je sadržavala 5 rampi, a svaka rampa ima visinu duljine $\frac{3}{4}$ $cm$.

### 2.7.2 Povezanost dvaju tipova omjera

U prethodnim se primjerima najčešće fokus proporcionalnog zaključivanja temeljio na razumijevanju omjera kao sastavnih cjelina, jer je taj način učenicima uglavnom lakši. Međutim, podjednako je važno da učenici nauče kako upotrebljavati i multiplikativne usporedbe u tu svrhu, a onda uočiti i povezanost tih dvaju tipova omjera.
Primjerice, razmotrimo prikazane podatke za visinu i duljinu baznih dijelova rampi, međusobno ekvivalentnih nagiba, o kojima se raspravljalo u prethodnim primjerima (Tablica 2).

| Visina (cm) | Duljina baznog dijela (cm) |
|---|---|
| 3 | 4 |
| 6 | 8 |
| 9 | 12 |
| 12 | 16 |
| 21 | 28 |
| 27 | 36 |
| 1.5 | 2 |
| $\frac{3}{4}$ | 1 |
| 1 | $\frac{4}{3}$ |
| $3\frac{3}{4}$ | 5 |

Tablica 2: Podaci o rampama međusobno ekvivalentnih nagiba

U svakom paru podataka visina čini $\frac{3}{4}$ od duljine baznog dijela te duljina baznog dijela čini $\frac{4}{3}$ duljine visine rampe. Oba navedena omjera $\frac{3}{4}$ i $\frac{4}{3}$ predstavljaju multiplikativne

usporedbe. Kako bi formirali omjer $\frac{3}{4}$, učenici se mogu pitati: „Koji dio duljine baznog dijela čini visina?“ Za formiranje omjera $\frac{4}{3}$ učenici se mogu pitati: „Koliko je puta duljina baznog dijela rampe veća nego visina?“
Uporaba multiplikativne usporedbe vrlo je korisna i važna strategija proporcionalnog zaključivanja.
Kako bi se pronašla duljina baznog dijela rampe koja ima visinu 16 $cm$ i istog je nagiba kao i originalna rampa (3:4), učenici mogu jednostavno pomnožiti duljinu visine s $\frac{4}{3}$, odnosno:

$$16cm \cdot \frac{4}{3} = 21\frac{1}{3}cm$$

Važno je da učenici povezuju međusobno sastavnu cjelinu i multiplikativnu usporedbu. Najlakši je način da učenici shvate tu povezanost razmatranjem bilo kojeg od dva jedinična omjera $\frac{3}{4}$:1 ili 1:$\frac{4}{3}$. U nastavku promotrimo primjer jednog učeničkog zaključivanja. Učenik je formirao sastavnu cjelinu od 1 $cm$ (visine) i $\frac{4}{3}$ $cm$ (duljina baznog dijela). Udvostručenjem omjera 1:$\frac{4}{3}$ učenik je dobio rampu visine 2 $cm$ i duljinom baze $2\frac{2}{3}$ $cm$. Utrostručenjem omjera zaključio je da tada rampa ima visinu 3 $cm$, a duljinu baze 4 $cm$. Razmatrajući slučaj kada rampa ima visinu duljine 8 $cm$, učenik zaključuje kako je tada visina sastavljena od osam grupa po 1 $cm$. Za svaki 1 $cm$ visine, potrebno je $\frac{4}{3}$ $cm$ duljine baze. Dakle, potrebno osam grupa po $\frac{4}{3}$ $cm$, što znači da treba pomnožiti $8 \cdot \frac{4}{3}$ $cm$.
Ovakvim razmatranjem možemo zaključiti da učenik razumije da je duljina baze svake od ekvivalentnih rampi $\frac{4}{3}$ puta veća od visine rampe. To ujedno znači i da je učenik uspostavio multiplikativnu usporedbu između tih dviju veličina - proširenjem početno upotrijebljene sastavne cjeline.
Koristeći povezanost navedenih dvaju tipova omjera učenici mogu postaviti jednadžbu koja će predstavljati odnos među dvjema veličinama - za bilo koju rampu istog nagiba kao originalna:

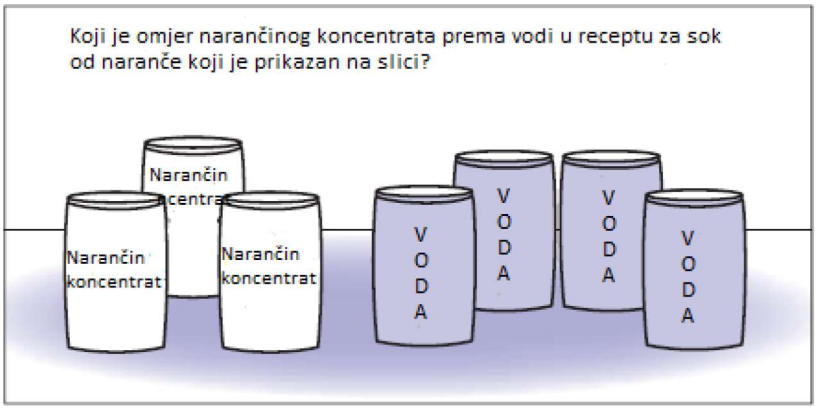
$$H \cdot \frac{4}{3} = L$$

gdje je H oznaka za visinu, a L oznaka duljine baze.

## 2.8 Stope kao omjeri

Stopa kao omjer predstavlja usporedbu mjera dviju **različitih** veličina, kao što su: stopa rasta, brzina, gustoća i slično. Važno je naglasiti kako u tom slučaju svaka veličina ima zasebnu mjernu jedinicu.
U prethodnim primjerima ovoga rada omjeri su najčešće bili upotrebljavani u svrhu zaključivanja s dva ekvivalentna omjera (proporcije). No, u ovom ćemo se dijelu rada usredotočiti na formiranje skupa ekvivalentnih omjera, što je također jedno od obilježja proporcionalnog zaključivanja. Važno je skrenuti pozornost na ovakvu vrstu omjera jer ih najčešće školski udžbenici ne sadrže, odnosno sadržaj se zaustavlja na dvama ekvivalentnim omjerima (proporcijama). Zbog toga učenici mogu ostati nedovoljno pripremljeni za zaključivanje koje rezultira mnoštvom ekvivalentnih omjera. Kada učenici formiraju skup od beskonačno mnogo ekvivalentnih omjera, tada kažemo da su upotrebljavali *stopu*.
Thompson (1994) zagovara ovu neuobičajenu upotrebu naziva *stopa* kako bi istaknuo skup od beskonačno mnogo ekvivalentnih omjera.
No, dva su druga značenja termina *stopa* češća. Kao što je navedeno, *stopa* je često definirana kao usporedba mjera dviju veličina različitih vrsta (npr. količina goriva u litrama koja je potrošena na 100 km prijeđenog puta), što predstavlja suprotnost od „klasičnog“ omjera, koji je najčešće definiran kao usporedba dviju veličina iste vrste (npr. omjer broja žutih i plavih limenki).
Stopa se također često koristi kod omjera u kojem je jedna od veličina vrijeme (npr. broj prijeđenih kilometara po satu).

Thompson ističe kako jedno shvaćanje omjera - kao multiplikativne usporedbe ili sastavne cjeline, ima prednost nad drugim shvaćanjima omjera zbog toga što razliku „ista cjelina nasuprot različite cjeline“ čini nevažnom.
U raznim primjerima, moguće je naizmjenično iskoristiti kontekst oba tipa. Naime, u primjeru s rampom, cjeline koje obuhvaćaju duljinu baze i visine su jednake (centimetri), ali u kontekstu brzine - cjeline koje obuhvaćaju udaljenost i vrijeme su različite (centimetri i sekunde).
Razmotrimo problem omjera narančinog koncentrata i vode u receptu za sok od naranče (Slika 20).




Slika 20: Problem recepta prikazan slikovno

Možemo pretpostaviti kako će učenici odgovoriti da je omjer prikazanih sastojaka na slici 3:4. Dani su problem mogli shvatiti na najmanje tri različita načina:

1. *Ne kao omjer.* Učenici su mogli zbrojiti 3 limenke narančinog koncentrata i 4 limenke vode koristeći samo vještinu zbrajanja. Nakon toga zapisuju 3:4 ili $\frac{3}{4}$ bez konceptualnog formiranja omjera.

2. *Kao omjer.* Učenici su mogli formirati sastavnu cjelinu od 3 limenke narančinog koncentrata i 4 limenke vode te udvostručiti 3:4 cjelinu kako bi utvrdili da će smjesa narančinog soka napravljena od 6 limenke koncentrata i 8 limenki vode imati isti intenzitet okusa. Međutim, učeničko zaključivanje može biti ograničeno i usmjereno prema pronalasku lako uočljivih ekvivalentnih omjera (udvostručavanje ili prepolavljanje).

3. *Kao stopa.* Učenici su mogli koristiti proporcionalno zaključivanje za određivanje količine narančinog koncentrata i vode. Primjerice, učenik može zaključiti da je potrebno $5\frac{1}{4}$ limenki narančinog koncentrata za 7 limenki vode, 1 limenka narančinog koncentrata za $1\frac{1}{3}$ limenki vode, $\frac{1}{3}$ limenki narančinog koncentrata za $\frac{4}{9}$ limenki vode itd.

Razlikovanje omjera i stope može potaknuti nastavnike na procjenu učeničkog stupnja razvijenosti zaključivanja na način da se postavljaju problemi koji će ih dodatno motivirati na formiranje opširnijeg skupa ekvivalentnih omjera, uključujući i omjere s „težim“ brojevima.

## 2.9 Veza algoritma unakrsnog množenja i proporcionalnog zaključivanja

Generaliziranjem nekoliko načina zaključivanja mogu se dobiti algoritmi za rješavanje problema s proporcijama.

Uporaba i razumijevanje algoritama važan je dio matematike jer algoritam omogućuje općenit i učinkovit način za rješavanje važnih vrsta problema. Najpoznatiji algoritam za rješavanje problema s proporcijama je onaj u kojem su zadane tri vrijednosti i jedna nepoznanica - *algoritam unakrsnog množenja.* No, kod učenika ovaj je algoritam rijetko temeljen na stvaranju i traženju smisla danog problema. Naime, pridavanje smisla značenjima pojedinih veličina iz svakodnevnog života potisnuto je prilikom izvođenja algoritma unakrsnog množenja.

Razmotrimo sljedeći primjer:

Na deklaraciji kutije krekera sa sirom piše kako 6 krekera sadrži 70 kalorija. Koliko u tom slučaju 20 krekera sadrži kalorija?

Učenici mogu postaviti proporciju:

$$\frac{kalorije}{krekeri} \qquad \frac{70}{6} = \frac{x}{20}$$

i izvršiti unakrsno množenje te doći do jednadžbe:

$$6x = 70 \cdot 20$$

Međutim, razmotrimo li produkt $70 kalorija \cdot 20 krekera$, uočit ćemo da sam po sebi nema nikakvog značenja jer odnos „kalorija-kreker" nema smisla, ali greškom ga se izjednačava s odnosom „kalorija *po* krekeru". Stoga, izvođenje algoritma unakrsnog množenja podrazumijeva, u jednom dijelu izvođenja, nedostatak pridavanja smisla danom problemu.

No, alternativne metode rješavanja potiču stvaranje smisla i mogu se poopćiti za bilo koje vrijednosti danih veličina. Primjer jedne takve metode temelji se na povezanosti omjera s količnikom. U primjeru s krekerima, zadan je omjer broja kalorija prema broju krekera, koji iznosi 70:6. Taj omjer možemo interpretirati kao količnik

$70 \div 6 \approx 11.67$ koji predstavlja broj kalorija po jednom krekeru.
Obzirom da 20 krekera sadrži 20 puta više kalorija nego 1 kreker, zaključujemo kako tada 20 krekera sadrži ukupno $20 \cdot 11.67 \approx 233$ kalorije.

**Primjer 6.** *Ako 6 krekera sadrži 70 kalorija, koliko će krekera ukupno sadržavati 300 kalorija?*

U ovakvim slučajevima učenici najčešće podijele 70 sa 6, a djelomično je razlog tome to što je učenicima iz osnovnoškolskog iskustva prirodnije podijeliti veći broj manjim brojem. Međutim, pitanje glasi koliki broj krekera osoba treba pojesti kako bi unijela 300 kalorija. Zbog toga treba odrediti dio krekera kojeg osoba treba pojesti kako bi unijela 1 kaloriju. Svakih 6 krekera sadrži 70 kalorija ukupno, što znači da je pripadni omjer 6:70.
Učenici koji su usvojili interpretaciju omjera kao količnika $6 \div 70 \approx 0.086$ shvaćaju da taj količnik predstavlja količinu krekera koji daje 1 kaloriju. Dakle, ukupan broj krekera koje osoba mora pojesti da bi unijela 300 kalorija je: $300 \cdot 0.086 \approx 26$.

Postoji mnoštvo drugih načina za rješavanje problema s proporcijama koji su također usmjereni na stvaranje smisla. Cilj je prethodna dva primjera bio ilustrirati poopćene alternative algoritmu unakrsnog množenja koje potiču i zahtijevaju traženje smisla u problemu.

Prije nego li učenici pokušaju primijeniti proporcionalno zaključivanje u kontekstu nekog problema, trebaju biti kompetentni odlučiti jesu li veličine u problemu zaista proporcionalno povezane ili nisu.

## 2.10 Prikladnost upotrebe proporcionalnog zaključivanja

Često se događa da površni znakovi prisutni u kontekstu problema zapravo ne daju dovoljno dokaza o postojanju proporcionalnih odnosa među veličinama.

Pri rješavanju problema, svoje odluke o upotrebi proporcionalnog zaključivanja učenici trebaju temeljiti na prirodnosti veličina u pojedinoj situaciji. Često se pri odlučivanju je li u problemu prisutna proporcija oslanjaju na neke od sljedećih vrsta površnih znakova:

- u problemu se pojavljuju 3 poznate vrijednosti i jedna nepoznata vrijednost
- u problemu se pojavljuju ključne riječi poput: *brzina, stopa, prema*
- problem se pojavljuje u poglavlju omjeri i proporcije

Zadaci u nastavku ilustriraju takve slučajeve:

1. Ako jedan igrač nogometa ima masu 225 $kg$, koliku će ukupnu masu imati tri igrača?
2. Jedan čovjek može oličiti spavaću sobu za 3 sata. Za koliko će vremena dva čovjeka oličiti sobu ako obojica rade istom brzinom?
3. Marko i Ana vole zajedno trčati po atletskoj stazi jer oboje trče jednakom brzinom. Danas je Ana krenula trčati prije nego je Marko izašao iz svlačionice. Ana je otrčala 6 krugova dok je Marko otrčao 3 kruga. Koliko je krugova otrčala Ana ako je Marko otrčao 12 krugova?

Ako učenici smatraju da trebaju postaviti proporciju svaki put kada su poznate tri vrijednosti, a istovremeno je jedna vrijednost nepoznata, tada će za 1. zadatak postaviti proporciju na sljedeći način:

$$\frac{1}{225} = \frac{3}{x}$$

Tada zaključuju kako je rješenje $x = 675\ kg$.
Važno je da učenici najprije logički, odnosno koristeći činjenice iz svakodnevnoga života, razmisle o danom problemu prije nego li započnu račun s brojevima. Konkretno, u ovome je slučaju vrlo malo vjerojatno da će svaki nogometaš imati jednaku tjelesnu masu koja iznosi 225 $kg$. Znatno razumnije bilo bi utvrditi tjelesnu masu svakog igrača te tada zbrojiti dobivene podatke. U ovome bi problemu imalo smisla upotrijebiti proporcionalno zaključivanje, primjerice, u slučaju kada bi prosječna tjelesna masa nogometaša iznosila 225 $kg$ te se tada na temelju tog podatka može odrediti aproksimativna vrijednost ukupne tjelesne mase triju igrača.

Strategija postavljanja proporcije kad god su u zadatku zadane tri vrijednosti, a četvrta je nepoznata, još je više problematična na primjeru zadatka 2. Postavljanje proporcije:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{x}$$

rezultira netočnim rješenjem $x = 6$ sati. U proporcionalnim odnosima dviju veličina, obje se veličine istom brzinom ili smanjuju ili povećavaju. Kako bi se utvrdilo događa li se to u određenoj situaciji, potrebno je razmotriti što se događa ako se jedna veličina poveća. Ako se u zadatku 2 više ljudi priključi bojenju sobe - tada će trebati manje vremena da bi se soba obojila. Dakle, odnos između broja radnika i količine vremena potrebnog za bojenje sobe nije direktno proporcionalan.
Bez detaljnijeg razmatranja pojedinosti problema, učenici ponekad postave proporciju čim u iskazu problema uoče riječi poput: *prema, brzina, stopa* i slično. Zbog toga bi, zadatku 3, učenici mogli postaviti sljedeću proporciju:

$$\frac{6}{x} = \frac{3}{12}$$

navodeći ih da pogrešno zaključe kako je Ana završila 24 kruga.

U slučaju kada su dvije veličine proporcionalno vezane, tada su one u „više-prema-jednom" odnosu. U kontekstu zadatka 3 to bi značilo da Ana pretrči 2 kruga za svaki Markov pretrčani krug (do trenutka kada je Ana završila 6 krugova) jer je $6 = 2 \cdot 3$. No, ovakav se odnos ne nastavlja daljnjim trčanjem po atletskoj stazi. Ključan je podatak u zadatku da Marko i Ana trče *jednakom brzinom.* Dakle, kada Ana pretrči 7 krugova, Marko će pretrčati 4 kruga ($7 \neq 2 \cdot 4$). Situacija u danom problemu je zapravo aditivne prirode. Ako Marko pretrči 3 kruga, trebat će pretrčati još 9 krugova kako bi ukupno pretrčao 12 krugova. Zaključak je kako će Ana pretrčati $6 + 9 = 15$ krugova, dok Marko pretrči 12 krugova.

# 3 Istraživanje

Prema kurikulumu nastavnog predmeta Matematika, omjeri i proporcije dio su matematičkog sadržaja viših razreda osnovne škole. Kako bih provjerila učeničku usvojenost, općenito, pojma "proporcionalnost", a time i vještinu primjene proporcionalnog zaključivanja, provela sam kratko istraživanje nad učenicima osmoga razreda osnovne škole. U nastavku ću navesti zadatke koje su učenici rješavali, kao i postupke pomoću kojih su se zadaci mogli riješiti.

**Zadatak 1.** *Koje su od navedenih veličina proporcionalne, a koje obrnuto proporcionalne?*

- *vrijeme čitanja knjige i broj pročitanih stranica*
- *prijeđeni kilometri i količina potrošenog benzina*
- *vrijeme provedeno na mobitelu i potrošnja baterije*
- *broj pločica za popločavanje terase i površina pločica.*

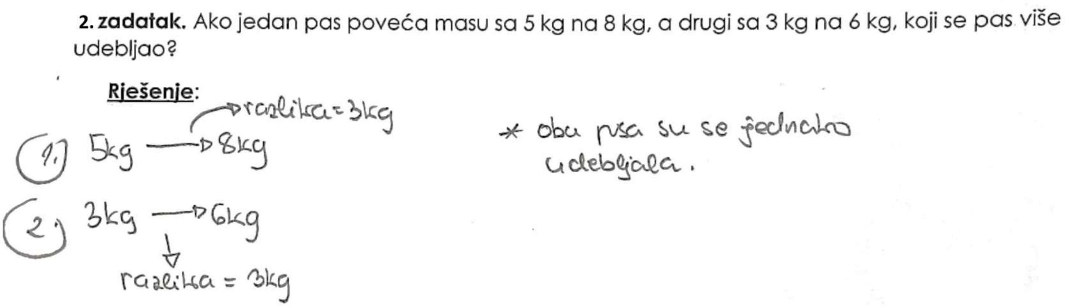
Proporcionalne veličine u zadatku su: vrijeme čitanja knjige i broj pročitanih stranica, prijeđeni kilometri i količina potrošenog benzina i vrijeme provedeno na mobitelu i potrošnja baterije.

Obrnuto proporcionalne veličine su broj pločica za popločavanje terase i površina pločica.

Ovaj je zadatak točno riješilo 7 učenika, a netočno ga je riješilo 6 učenika. U netočnim učeničkim rješenjima najčešće se događalo da su pod proporcionalne veličine naveli "broj pločica za popločavanje terase i površina pločica", a "vrijeme čitanja knjige i broj pročitanih stranica" i "prijeđeni kilometri i količina potrošenog benzina" pod obrnuto proporcionalne veličine.

**Zadatak 2.** *Ako jedan pas poveća masu sa 5 kg na 8 kg, a drugi sa 3 kg na 6 kg, koji se pas više udebljao?*

U ovom zadatku postoje dva točna odgovora. Primijenimo li pri rješavanju zadatka aditivnu usporedbu među veličinama, tada ćemo zaključiti da su se oba psa jednako udebljala (svaki po 3 $kg$). Međutim, primijenimo li pri rješavanju multiplikativnu usporedbu, tada je zaključak nešto drugačiji. U tom se slučaju drugi pas više udebljao, nego prvi, jer se njegova masa s početka udvostručila.
Kako bismo multiplikativnom usporedbom zaključili da su se oba psa jednako udebljala, tada bi prvi pas trebao povećati masu sa 5 $kg$ na 10 $kg$.
Pri rješavanju ovog zadatka devet je učenika upotrebljavalo aditivnu usporedbu, dok je multiplikativnu usporedbu koristilo njih četvero. U nastavku slijede neka od učeničkih rješenja:


**2. zadatak.** Ako jedan pas poveća masu sa 5 kg na 8 kg, a drugi sa 3 kg na 6 kg, koji se pas više udebljao?

Rješenje:

razlika=3kg

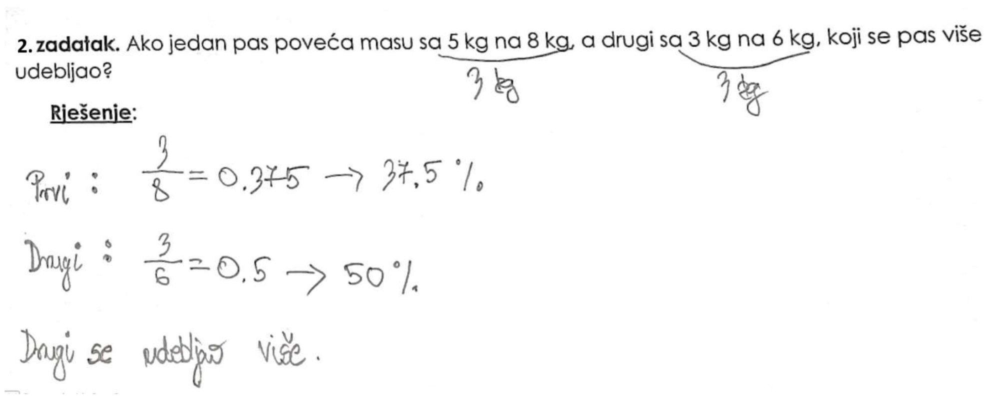
1. 5kg → 8kg

2. 3kg → 6kg

razlika = 3kg

* oba psa su se jednako udebljala.

Slika 21: Prikaz učeničkog rješenja - aditivni pristup


**2. zadatak.** Ako jedan pas poveća masu sa $\underbrace{\text{5 kg na 8 kg}}_{3\text{ kg}}$, a drugi sa $\underbrace{\text{3 kg na 6 kg}}_{3\text{ kg}}$, koji se pas više udebljao?

Rješenje:

Prvi : $\frac{3}{8} = 0.375 \rightarrow 37.5\%$

Drugi : $\frac{3}{6} = 0.5 \rightarrow 50\%$

Drugi se udebljao više.

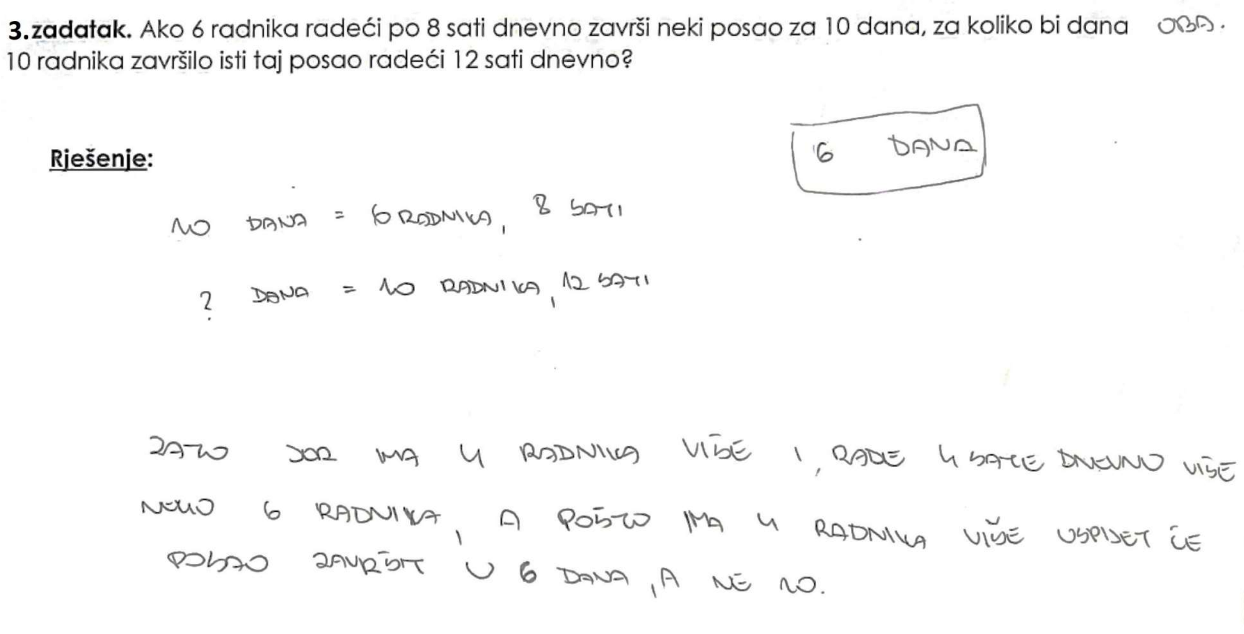
Slika 22: Prikaz učeničkog rješenja - multiplikativni pristup

**Zadatak 3.** *Ako 6 radnika radeći po 8 sati dnevno završi neki posao za 10 dana, za koliko bi dana 10 radnika završilo isti taj posao radeći 12 sati dnevno?*

U zadatku je najprije trebalo izračunati koliko je ukupno sati potrebno kako bi 6 radnika obavilo posao. Množenjem broja radnih sati dnevno i ukupnog broja radnih dana, lako se dolazi do zaključka kako će 6 radnika raditi ukupno 80 sati da bi završili posao.

Ukoliko bi isti posao radilo više radnika po više sati dnevno - slijedi kako će za završetak istog posla trebati i manje dana. Ako bi posao radio samo jedan radnik tada bi mu bilo potrebno ukupno 480 sati rada $(6 \cdot 80)$. Sada se lako dolazi do zaključka da bi 10 radnika isti posao radilo ukupno 48 sati $(480 \div 10)$. Prema tome, ako bi 10 radnika radilo po 12 sati dnevno tada bi oni isti posao završili za 4 dana $(48 \div 12)$.

Učenici su ovaj zadatak većinom riješili netočno. Dio se učenika vodio aditivnim pristupom, što ih je dovelo do netočnog rješenja (Slika 23). Neki su učenici koristili multiplikativni pristup, no postupak rješavanja je prilično matematički neprecizan i manjkav. Unatoč tome, dvoje je učenika ipak uspjelo točno riješiti zadatak (Slika 24).



**3.zadatak.** Ako 6 radnika radeći po 8 sati dnevno završi neki posao za 10 dana, za koliko bi dana 10 radnika završilo isti taj posao radeći 12 sati dnevno? OBA.

**Rješenje:**

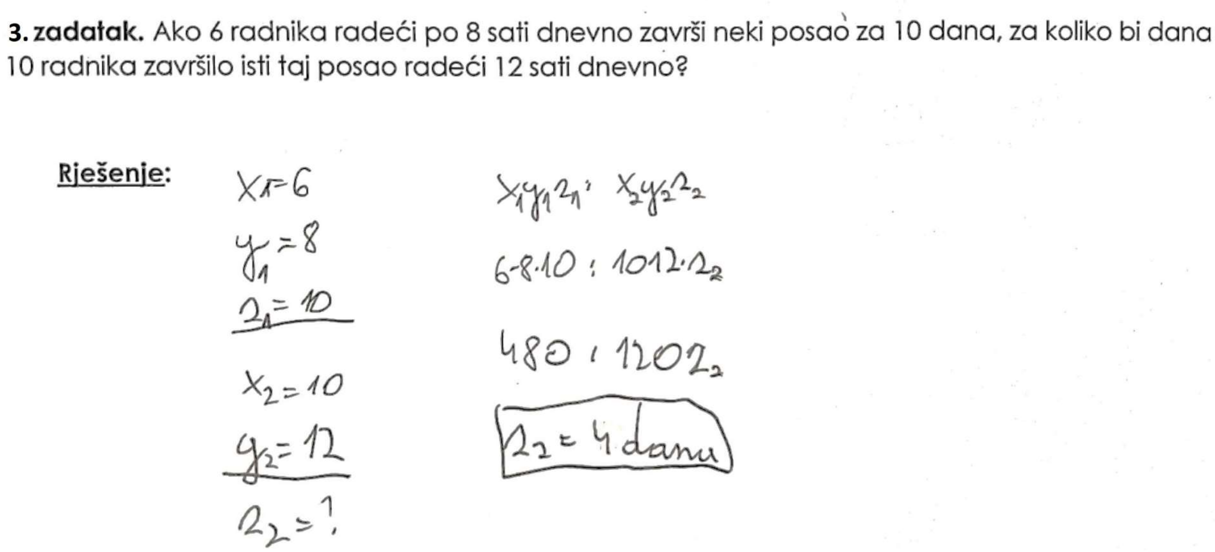
6 DANA

10 DANA = 6 RADNIKA, 8 SATI

? DANA = 10 RADNIKA, 12 SATI

ZATO JER IMA 4 RADNIKA VIŠE I, RADE 4 SATE DNEVNO VIŠE NEGO 6 RADNIKA, A POŠTO IMA 4 RADNIKA VIŠE USPIJET ĆE POSAO ZAVRŠIT U 6 DANA, A NE 10.

Slika 23: Prikaz učeničkog rješenja - aditivni pristup



**3. zadatak.** Ako 6 radnika radeći po 8 sati dnevno završi neki posao za 10 dana, za koliko bi dana 10 radnika završilo isti taj posao radeći 12 sati dnevno?

**Rješenje:**

$x_1 = 6$

$y_1 = 8$

$z_1 = 10$

$x_2 = 10$

$y_2 = 12$

$z_2 = ?$

$x_1 y_1 z_1 : x_2 y_2 z_2$

$6 \cdot 8 \cdot 10 : 10 \cdot 12 \cdot z_2$

$480 : 120 z_2$

$\boxed{z_2 = 4 \text{ dana}}$

Slika 24: Prikaz učeničkog rješenja - multiplikativni pristup

# 4 Procjena razvijenosti proporcionalnog zaključivanja kod učenika

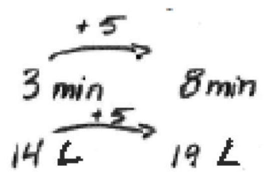
OGAP (OnGoing Assessment Project) okviri temelje se na istraživanjima matematičkog obrazovanja o tome kako učenici usvajaju određene matematičke koncepte. Okviri prikazuju najčešće učeničke pogreške te predrasude ili pogrešna shvaćanja koja mogu ometati učenje novih pojmova ili rješavanje problema.
Sve dok učenici usvajaju nove koncepte i strukture te dok se susreću sa složenijim situacijama pri rješavanju problema, strategije koje učenici pritom koriste mogu varirati između **proporcionalnih, prijelaznih i neproporcionalnih** strategija. Ovakav koncept je vrlo važan jer može doprinijeti kvalitetnijoj procjeni učeničkog napretka. Primjerice, učenik može uspješno riješiti problem koji uključuje jediničnu stopu koristeći proporcionalnu strategiju. Međutim, kada se učeniku zada primjerice problem s usporedbom gustoće, tada postoji mogućnost da se učenik vrati na neproporcionalnu strategiju.
OGAP okvir za određivanje proporcionalnog zaključivanja navodi nekoliko primjera koji mogu poslužiti kao procjena svake od navedenih strategija.

## 4.1 Neproporcionalne strategije

- Učenik upotrebljava aditivnu umjesto multiplikativne usporedbe:

  **Primjer 7.** *Marko tuširanjem potroši 14 litara vode u 3 minute. Koliko će litara vode Marko potrošiti ako se tušira 8 minuta?*

  Aditivni pristup rezultira netočnim rješenjem, primjerice: (Slika 25)




Slika 25: Prikaz učeničkog rješenja - aditivni pristup

- Učenik uspoređuje brojeve umjesto omjera:

**Primjer 8.** *Grad A ima 480 rakuna na 60 kvadratnih kilometara, a grad B ima 380 rakuna na 40 kvadratnih kilometara. Koji grad ima više rakuna po kvadratnom kilometru?*

Aditivni pristup rezultira netočnim rješenjem, primjerice:
$480 - 60 = 420$
$380 - 40 = 340$
Broj 420 je veći od 340, što znači da grad A ima više rakuna.

- Učenik nagađa ili koristi računske operacije bez međusobne smislene povezanosti
- Učenik koristi netočne omjere
- Učenik pomoću proporcije rješava probleme koji ne uključuju proporcionalnost

## 4.2 Prijelazno - proporcionalne strategije

Razlikujemo dvije vrste prijelaznih strategija:

1. Rane prijelazne strategije

    - Učenik koristi vizualne modele:

      **Primjer 9.** *Ana pakira jabuke za prodaju. Da bi se napunile tri kutije potrebne su dvije košare jabuka. Koliko će Ani trebati kutija ako želi zapakirati 7 košara jabuka?*

      Vizualnim prikazom učenik dolazi do točnog rješenja (Slika 26):


Slika 26: Prikaz učeničkog rješenja - vizualni pristup

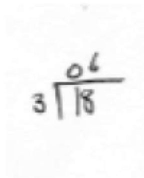
2. Prijelazne strategije

- Učenik koristi multiplikativni odnos pomoću tablice:

  **Primjer 10.** *Ivan tuširanjem potroši 18 litara vode u 3 minute. Koliko će litara vode Ivan potrošiti ako se tušira 13 minuta?*

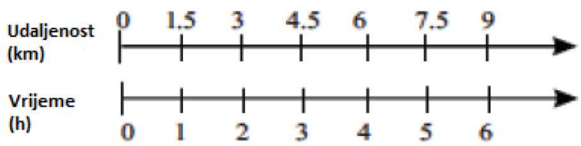
  Pomoću tablice (Slika 27) učenik zaključuje da će za 13 minuta tuširanja Ivan potrošiti 78 litara vode.

| Minute | Litre |
|---|---|
| 3 | 18 |
| 6 | 36 |
| 9 | 54 |
| 12 | 72 |
| 13 | 78 |



Slika 27: Prikaz učeničkog rješenja - tablica omjera

- Učenik koristi dvostruki brojevni pravac (Slika 28)




Slika 28: Dvostruki brojevni pravac

## 4.3 Proporcionalne strategije

- Učenik pronalazi i primjenjuje jedinični omjer:
  U tom slučaju učenik bi Primjer 10. riješio na sljedeći način:

$$\frac{6L}{1min} \cdot \frac{13}{13} = \frac{78L}{13min}$$

- Učenik primjenjuje multiplikativnu usporedbu:

$$\frac{18L}{3min} \cdot \frac{4\frac{1}{3}}{4\frac{1}{3}} = \frac{78L}{13min}$$

- Učenik upotrebljava izraz $y = k \cdot x$, $k > 0$, grafički prikaz ili tablice:
  Uzmimo, primjerice, da Ivan pri tuširanju potroši 14 litara vode u 3 minute. Zanima nas izračun ukupne potrošnje vode pri tuširanju koje traje 8 minuta - primjenom gore navedenog načina rješavanja problema.

$$y = k \cdot x, \quad k > 0$$

$$y = \frac{4\frac{2}{3}L}{1min} \cdot 8min$$

$$y = 37\frac{1}{3}L$$

- Učenik ispravno postavlja proporciju i dolazi do točnog rješenja

- Učenik uspoređuje pojednostavljene razlomke, stope ili omjere

# Zaključak

Kvalitetno razumijevanje omjera i proporcija znatno olakšava probleme u svakodnevnom životu kao što su: izračunavanje mjerila na karti, usporedba cijena proizvoda, rad sa postotcima, izračunavanje brzine kretanja nekog objekta i slično. Zbog toga se omjeri i proporcije često primjenjuju u brojnim drugim znanostima poput fizike, biologije i geografije. Obzirom da postoji više različitih strategija koje se mogu primjenjivati pri rješavanju zadataka koji zahtijevaju proporcionalno zaključivanje, važno je da nastavnici matematike učenike što više potiču na korištenje vlastitih ideja pri rješavanju zadataka. Isto tako, važno je da učenici koriste i vizualno predočavanje problema kako bi ih lakše razumjeli. Kod učenika je najbitnije razvijati metode koje se temelje na intuitivnosti i konceptualnosti, a tek nakon toga uvoditi metode mehaničke prirode. Pri rješavanju zadataka koji se temelje na omjerima i proporcijama najviše prevladavaju multiplikativne usporedbe, do kojih dolazimo dijeljenjem odnosno množenjem jedne veličine drugom. Proporcionalno zaključivanje složen je proces te se kod učenika razvija postupno. Učenici koji imaju dobro razvijeno proporcionalno zaključivanje s lakoćom će razumjeti veze izmedu promjena veličina te će se lakše snalaziti u razlikama izmedu proporcionalnih i neproporcionalnih veličina.

# Literatura


[1] Lj. Jukić Matić, A. Gudelj, *Zašto je ta proporcionalnost tako teška?*, Matematika i škola, Časopis za nastavu matematike, Osijek 2017.

[2] *Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj*, Ministarstvo znanosti i obrazovanja, Narodne novine, broj 7/2019.

[3] J. Lobato, A. B. Ellis, R. Charles, R. M. Zbiek, *Developing Essential Understanding of Ratios, Proportions, and Proportional Reasoning for Teaching Mathematics: Grades 6-8*, NCTM, Reston, VA. 2020

[4] J. Lobato, *When Students Don't Apply the Knowledge You Think They Have, Rethink Your Assumptions about Transfer*, In M. Carlson C. Rasmussen (Eds.), Making the Connection: Research and Teaching in Undergraduate Mathematics Education (pp. 289-304). Mathematical Association of America. doi:10.5948/UPO9780883859759.023, 2008.

[5] M. M. Petit, R. E. Laird, M. F. Wyneken, F. R. Huntoon, M. D. Abele-Austin, J. D. Sequeira, *A Focus on Ratios and Proportions: Bringing Mathematics Education Research to the Classroom*, Routledge, 2020.

[6] Z. Šikić, V. D. Žitko, I. G. Jakopović, B. Goleš, Z. Lobor, M. Marić. T. Nemeth, G. Stajčić, M. Vuković, *Matematika 7*, Profil, Zagreb 2020.

[7] P. W. Thompson, *The Development of the Concept of Speed and Its Relationship to Concepts of Rate*, In The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics, edited by Guershon Harel and Jere Confrey, pp. 181–234. Albany, N.Y.: State University of New York Press, 1994.

## Sažetak

Proporcionalno zaključivanje prekretnica je u kognitivnom razvoju svakog učenika, a započinje razumijevanjem multiplikativnih veza. Postoje dva načina za formiranje omjera: omjer kao mutiplikativna usporedba dviju veličina i omjer kao cjelina sastavljena od dviju veličina na način da se sačuva multiplikativna veza među tim veličinama. Složenost proporcionalnog zaključivanja očituje se u činjenici kako sposobnost izvođenja algoritma unakrsnog množenja ne rezultira nužno i sposobnošću dobrog proporcionalnog zaključivanja. Takva vrsta zaključivanja uključuje i mnoga druga shvaćanja poput značenja omjera kao multiplikativne usporedbe te uspostavljanje veza izmedu omjera, razlomaka i količnika. Omjeri su često izraženi u obliku razlomka, iako omjeri i razlomci nemaju uvijek identično značenje. U provedenom istraživanju među učenicima 8. razreda vidljivo je kako učenici pri rješavanju zadataka s omjerima i proporcijama uglavnom koriste aditivni pristup rješavanja, što pokazuje da multiplikativna veza kod većine učenika nije u potpunosti usvojena. Postoje tri vrste strategija za rješavanje zadataka koji obuhvaćaju omjere i proporcije: neproporcionalne, prijelazno - proporcionalne i proporcionalne strategije. Pomoću navedenih strategija nastavnici imaju mogućnost procijeniti stupanj razvijenosti proporcionalnog zaključivanja svakog pojedinog učenika.

**Ključne riječi:** omjeri, proporcije, proporcionalno zaključivanje, strategije, aditivnost, multiplikativnost

# Summary

Proportional reasoning is a turning point in the cognitive development of each student, and begins with an understanding of multiplicative connections. There are two ways to form a ratio: a ratio as a multiplicative comparison of two quantities and a ratio as a whole composed of two quantities in such a way as to preserve the multiplicative relationship between these quantities. The complexity of proportional reasoning is manifested in the fact that the ability to perform a cross-multiplication algorithm does not necessarily result in the ability of good proportional reasoning. This type of inference involves many other understandings such as the meaning of ratios as multiplicative comparisons and the establishment of relationships between ratios, fractions, and quotients. Ratios are often expressed in the form of fractions, although ratios and fractions do not always have identical meanings. The research conducted among 8th grade students shows that students mostly use an additive approach to solving problems with proportions, which shows that the multiplicative relationship in most students is not fully adopted. There are three types of problem-solving strategies that include proportions and proportions: non-proportional, transitional-proportional, and proportional strategies. Using these strategies, teachers have the opportunity to assess the degree of development of proportional reasoning of each individual student.



**Keywords:** ratios, proportions, proportional reasoning, strategies, additivity, multiplicity

# Životopis

Zovem se Marija Sudarić i rođena sam 29. prosinca 1993. godine u Osijeku. Živim u Višnjevcu, gdje sam ujedno pohađala Osnovnu školu "Višnjevac", a koju završavam 2008. godine. Iste godine upisujem I. gimnaziju u Osijeku. Po završetku gimnazije, upisujem integrirani nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku.