

# Neke osobite točke trokuta

---

**Majdenić, Ivana**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2021**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:600803>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-11-23**



**mathos**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)



Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

**Ivana Majdenić**

## **Neke osobite točke trokuta**

Završni rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

**Ivana Majdenić**

## **Neke osobite točke trokuta**

Završni rad

Mentor: prof. dr. sc. Zdenka Kolar Begović

Osijek, 2021.

## Sažetak

Kada se cevijane od posebnog značaja u trokutu (težišnice, simetrale kutova itd.) sijeku, točka njihova presjeka često se naziva posebnom točkom trokuta. Takve točke oduvijek su bile zanimljive geometričarima. Stoga ćemo u ovom završnom radu posebnu pažnju posvetiti Gergonneovoj i Nagelovoj točki trokuta. Razmatrat će se i Tarryjeva i Brocardove točke trokuta. Promatrat će se i veze spomenutih točaka i nekih drugih elemenata trokuta.

**Ključne riječi:** Gergonneova točka, Nagelova točka, Brocardove točke, Tarryjeva točka

## Some particularly points of triangle

### Abstract

When cevians of special importance intersect in a triangle (medians, angle bisectors, etc.), their intersect point is often called the special point of the triangle. Such points have always been of interest to geometers. Therefore, in this thesis we will pay attention to the Gergonne and Nagel point of the triangle. Tarry point and Brocard points of the triangle will also be considered. Thesis will observe the connections of the mentioned points and some other elements of triangle.

**Keywords:** Gergonne point, Nagel point, Brocard points, Tarry point

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Gergonneova i Nagelova točka trokuta</b>	<b>2</b>
2.1	Izotomične točke . . . . .	8
2.2	Nagelov pravac . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Brocardove točke</b>	<b>11</b>
3.1	Brocardova kružnica . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Tarryjeva točka</b>	<b>16</b>

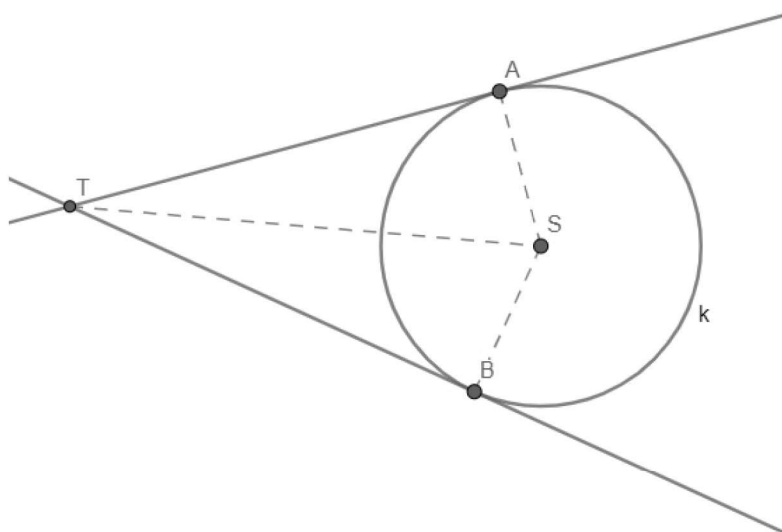
# 1 Uvod

U ovom radu bavimo se nekim posebnim točkama geometrije trokuta. Na početku rada razmatramo Gergonneovu i Nagelovu točku trokuta. Razmatramo konstrukciju navedenih točaka, te dokazujemo njihovu egzistenciju. Zatim definiramo svojstvo izotomičnosti točaka koje veže Gergonneovu i Nagelovu točku trokuta. Posebno promatramo još jedno svojstvo Nagelove točke i upoznajemo se s pojmom Nagelov pravac. Nadalje se bavimo Brocardovim točkama. Proučavamo njihovu konstrukciju i dokazujemo njihovu egzistenciju. U nastavku navodimo neka svojstva Brocardovih točaka. Posebno promatramo Brocardovu kružnicu te navodimo njezinu vezu s Brocardovim točkama. Na kraju se bavimo Tarryjevom točkom trokuta. Navodimo njezinu konstrukciju i dokazujemo egzistenciju, te gledamo svojstva koja zadovoljava.

## 2 Gergonneova i Nagelova točka trokuta

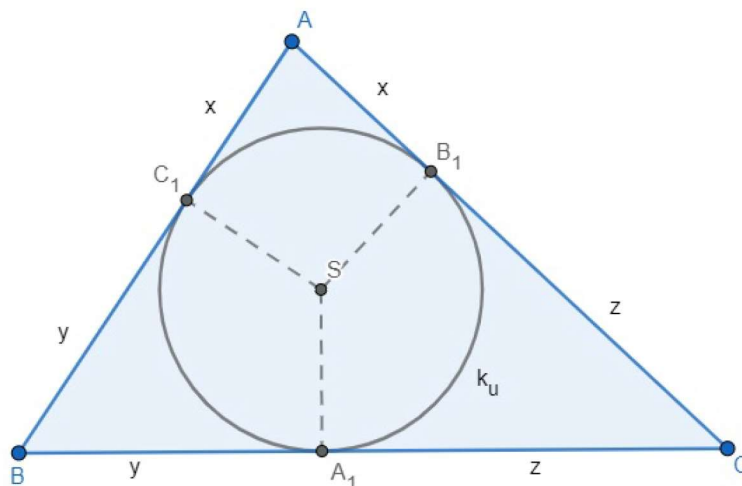
U ovom poglavlju rada ćemo razmatrati Gergonneovu i Nagelovu točku trokuta. Najprije navedimo definicije i leme koje će nam biti potrebne za uvođenje Gergonneove i Nagelove točke, te za dokaze svojstava navedenih točaka.

**Lema 2.1.** *Odsječci tangenata povučениh iz neke točke na kružnicu su jednaki, tj. uz oznake kao na slici 1. vrijedi  $|TA| = |TB|$ .*



Slika 1. Tangente na kružnicu

Nađimo sada udaljenosti vrhova trokuta od dirališta trokutu upisane kružnice i stranica trokuta  $ABC$  (slika 2).



Slika 2. Trokutu upisana kružnica

Uočimo da su pravci na kojima leže stranice trokuta  $ABC$  tangente upisane kružnice. Prema lemi 2.1 vrijedi  $|AB_1| = |AC_1|$ ,  $|BA_1| = |BC_1|$  i  $|CA_1| = |CB_1|$ . Uvedimo oznake  $x = |AB_1| = |AC_1|$ ,  $y = |BA_1| = |BC_1|$  i  $z = |CA_1| = |CB_1|$ . Uočimo da tada vrijedi  $y + z = a$ ,

$x + z = b$  i  $x + y = c$ , gdje su  $a$ ,  $b$  i  $c$  duljine stranica trokuta  $ABC$ . Rješavanjem tog sustava dobije se

$$x = \frac{1}{2}(b + c - a), \quad y = \frac{1}{2}(a + c - b), \quad z = \frac{1}{2}(a + b - c).$$

Lako se vidi da vrijedi sljedeća lema.

**Lema 2.2.** *Neka su  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$  dirališta upisane kružnice  $k_u$  trokuta  $ABC$  redom sa stranicama  $\overline{CB}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$ . Tada je*

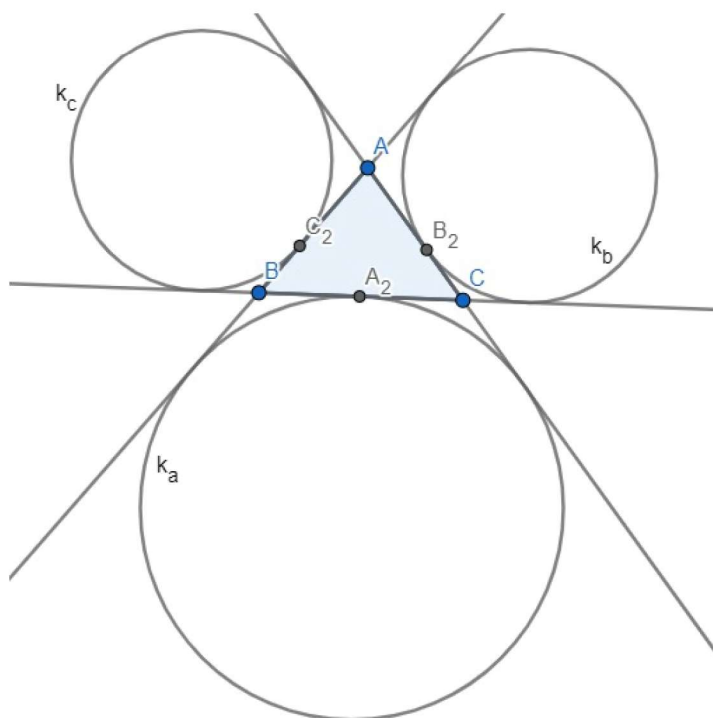
$$|AB_1| = |AC_1| = s - a, \quad |BA_1| = |BC_1| = s - b, \quad |CA_1| = |CB_1| = s - c$$

gdje je  $s = \frac{a+b+c}{2}$ .

Prisjetimo se sada definicije pripisane kružnice trokuta jer su nam pripisane kružnice vezane uz Nagelovu točku.

**Definicija 2.3.** Kružnicu koja dira stranicu  $a$  trokuta  $ABC$  s vanjske strane i produžetke preostalih dviju stranica  $b$ ,  $c$  zovemo pripisanom kružnicom trokuta  $ABC$  i označavamo  $k_a$ .

Analogno se definiraju i pripisane kružnice  $k_b$  i  $k_c$  trokuta  $ABC$ . Svaki trokut ima tri pripisane kružnice, kao što je pokazano na slici 3.



Slika 3. Trokutu pripisane kružnice

Vrijedi sljedeća lema.

**Lema 2.4.** *Neka su  $A_2$ ,  $B_2$  i  $C_2$  redom dirališta pripisanih kružnica  $k_a$ ,  $k_b$  i  $k_c$  trokuta  $ABC$  sa stranicama  $\overline{CB}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$ . Tada je*

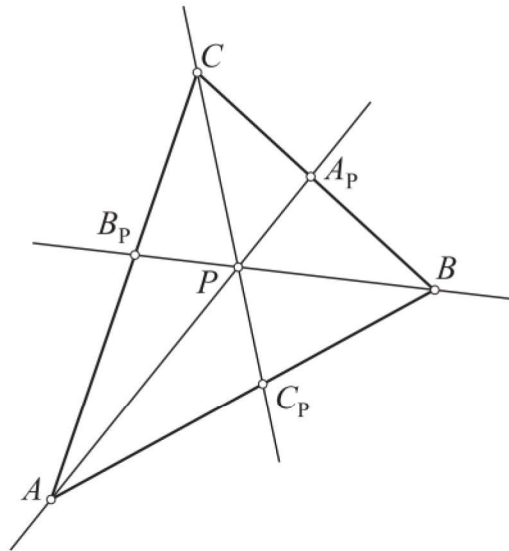
$$|BC_2| = |CB_2| = s - a, \quad |AC_2| = |CA_2| = s - b, \quad |AB_2| = |BA_2| = s - c.$$



Za razmatranje Gergonneove i Nagelove točke trokuta od velike koristi bit će sljedeća tvrdnja, poznati Cevin teorem.

**Lema 2.5** (Ceva). *Neka su  $A_p, B_p, C_p$  točke na stranicama  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$  trokuta  $ABC$ . Pravci  $AA_p, BB_p, CC_p$  prolaze jednom točkom ako i samo ako vrijedi*

$$\frac{|AC_p|}{|C_pB|} \cdot \frac{|BA_p|}{|A_pC|} \cdot \frac{|CB_p|}{|B_pA|} = 1.$$



Slika 4. Cevin teorem ([1])

**Teorem 2.6** (Gergonne). [1] *Neka su  $A_1, B_1, C_1$  dirališta upisane kružnice trokuta  $ABC$  redom sa stranicama  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$  trokuta  $ABC$ . Tada se pravci  $AA_1, BB_1, CC_1$  sijeku u jednoj točki (slika 5).*

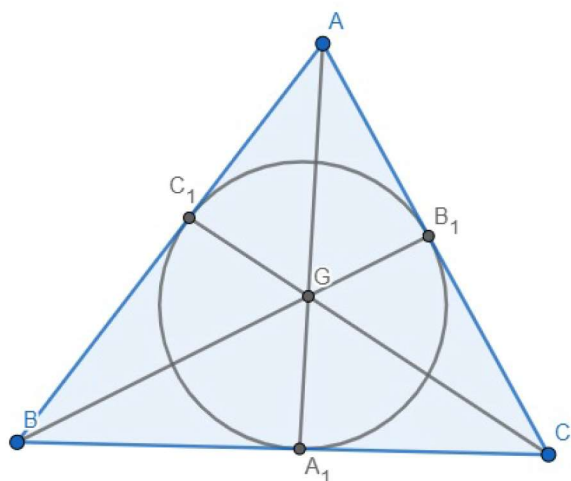
*Dokaz.* Po lemi 2.1 vrijedi

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{s-a}{s-c} \cdot \frac{s-b}{s-a} \cdot \frac{s-c}{s-b} = 1,$$

pa tvrdnja slijedi prema Cevinom teoremu. □

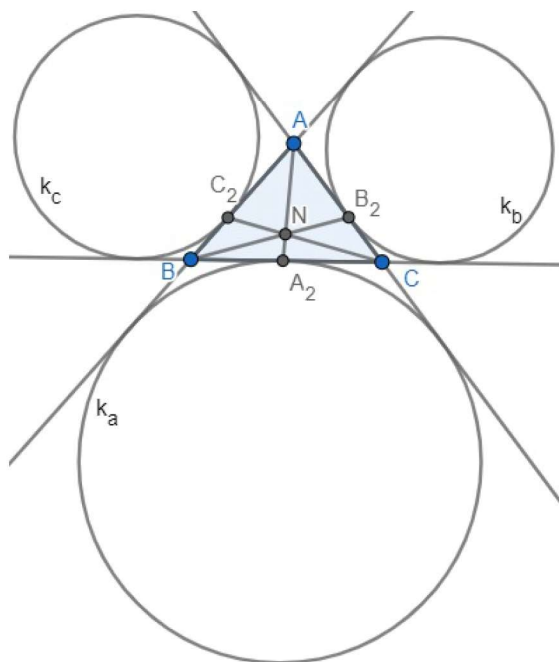
Točka u kojoj se sijeku pravci  $AA_1, BB_1, CC_1$  iz teorema 2.6 zove se *Gergonneova točka* (slika 5).

Dokažimo sada sljedeću tvrdnju o pravcima koji prolaze vrhovima trokuta i diralištima stranica trokuta i trokutu pripisane kružnice ([1], [4]).



Slika 5. Gergonneova točka trokuta  $ABC$

**Teorem 2.7** (Nagel). *Neka su  $A_2, B_2, C_2$  dirališta pripisanih kružnica trokuta  $ABC$  redom sa stranicama  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ . Tada se pravci  $AA_2, BB_2, CC_2$  sijeku u jednoj točki.*



Slika 6. Nagelova točka trokuta  $ABC$

*Dokaz.* Neka je  $2s = a + b + c$  opseg trokuta. Po lemi 2.4 vrijedi

$$|BC_2| = |CB_2| = s - a, \quad |AC_2| = |CA_2| = s - b, \quad |AB_2| = |BA_2| = s - c.$$

Dakle,

$$\frac{|AC_2|}{|C_2B|} \cdot \frac{|BA_2|}{|A_2C|} \cdot \frac{|CB_2|}{|B_2A|} = \frac{s-b}{s-a} \cdot \frac{s-c}{s-b} \cdot \frac{s-a}{s-c} = 1.$$

Prema Cevinom teoremu slijedi da se pravci  $AA_2, BB_2, CC_2$  sijeku u jednoj točki.  $\square$

Točka u kojoj se sijeku pravci  $AA_2, BB_2, CC_2$  iz teorema 2.7 zove se *Nagelova točka*.

Uočimo da vrijedi

$$|AB| + |BA_2| = c + (s - c) = s = b + (s - b) = |AC| + |CA_2|,$$

pa točka  $A_2$  raspolavlja opseg trokuta. Analogno je s točkama  $B_2$  i  $C_2$ . Drugim riječima, Nagelova točka je presjek pravaca koji spajaju vrhove  $A, B, C$  redom s polovištima opsega  $A_2, B_2, C_2$ .

Osim dirališta  $A_2, B_2, C_2$  pripisanih kružnica  $k_a, k_b$  i  $k_c$  sa stranicama trokuta  $ABC$  navedimo još šest dirališta.

Neka su:

$Y_a, Z_a$ , dirališta pripisane kružnice  $k_a$  s pravcima na kojima leže stranice  $\overline{CA}, \overline{AB}$ ;

$X_b, Z_b$ , dirališta pripisane kružnice  $k_b$  s pravcima na kojima leže stranice  $\overline{BC}, \overline{AB}$ ;

$X_c, Y_c$ , dirališta pripisane kružnice  $k_c$  s pravcima na kojima leže stranice  $\overline{BC}, \overline{CA}$ .

Spojimo pojedini vrh danog trokuta  $ABC$  sa svim onim diralištima koja leže na suprotnoj stranici ili produženju te stranice trokuta. Tako dobijemo devet spojnica:

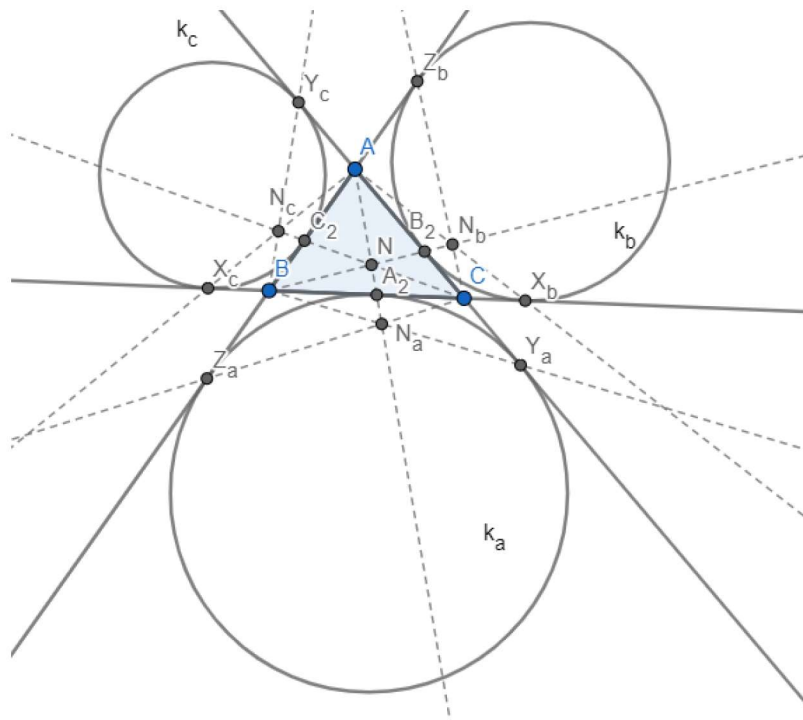
$$\begin{array}{ccc} \overline{AA_2}, & \overline{AX_b}, & \overline{AX_c}, \\ \overline{BY_a}, & \overline{BB_2}, & \overline{BY_c}, \\ \overline{CZ_a}, & \overline{CZ_b}, & \overline{CC_2}. \end{array} \quad (2.1)$$

Od tih spojnica spomenuli smo  $\overline{AA_2}, \overline{BB_2}$  i  $\overline{CC_2}$  za uvođenje Nagelove točke. Pogledajmo što je s preostalim spojnicama.

**Teorem 2.8.** [3] *Preostalih šest spojnica iz (2.1) sijeku se po tri u još tri točke  $N_a, N_b, N_c$ . Neka se*

$$\begin{array}{lll} AA_2, & BY_a, & CZ_a, & \text{sijeku u točki } N_a, \\ AX_b, & BB_2, & CZ_b, & \text{sijeku u točki } N_b, \\ AX_c, & BY_c, & CC_2, & \text{sijeku u točki } N_c. \end{array}$$

Točke  $N_a, N_b, N_c$  zovemo *vanjskim Nagelovim točkama*.

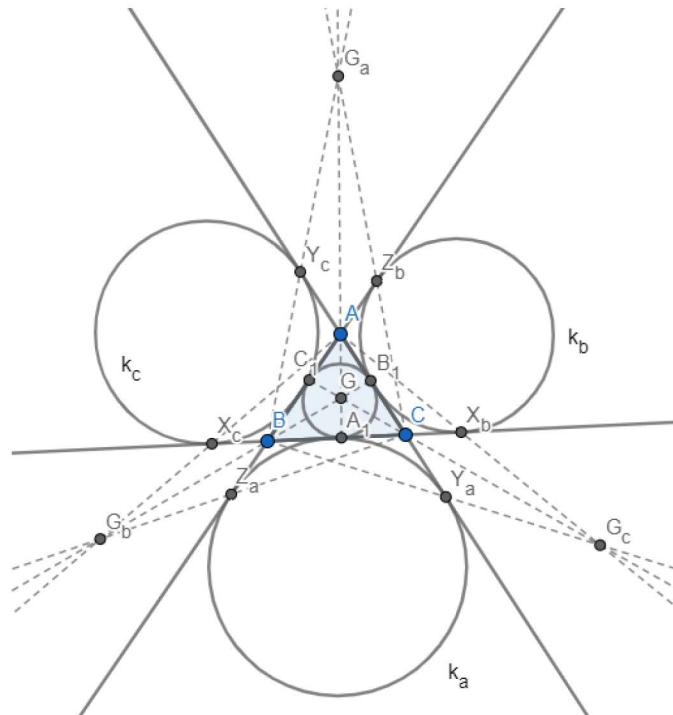


Slika 7. Vanjske Nagelove točke trokuta  $ABC$

**Teorem 2.9.** [3] Neka su  $AA_1$ ,  $BB_1$  i  $CC_1$  pravci iz teorema 2.6, a  $AA_2$ ,  $BY_a$ ,  $CZ_a$ ,  $AX_b$ ,  $BB_2$ ,  $CZ_b$ ,  $AX_c$ ,  $BY_c$ ,  $CC_2$  pravci iz (2.1). Tada se odgovarajuća tri sijeku u točkama  $G_a$ ,  $G_b$  i  $G_c$

$$\begin{array}{l} \overline{AA_1}, \overline{BY_c}, \overline{CZ_b} \text{ u točki } G_a; \\ \overline{AX_c}, \overline{BB_1}, \overline{CZ_a} \text{ u točki } G_b; \\ \overline{AX_b}, \overline{BY_a}, \overline{CC_1} \text{ u točki } G_c. \end{array}$$

Točke  $G_a$ ,  $G_b$ ,  $G_c$ , zovemo *vanjskim Georgonneovim točkama* trokuta  $ABC$ .



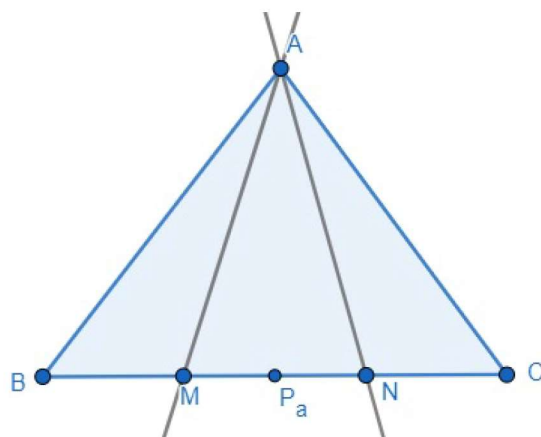
Slika 8. Vanjske Gergonneove točke trokuta  $ABC$

## 2.1 Izotomične točke

Upoznajmo se s pojmom izotomičnih točaka i pogledajmo sljedeću definiciju.

**Definicija 2.10.** [3] Dvije točke na istoj stranici danog trokuta koje su jednako udaljene od polovišta te stranice zovemo izotomičnim točkama tog trokuta.

Izotomične pravce dobivamo tako da spojimo par izotomičnih točaka na nekoj stranici trokuta sa suprotnim vrhom. Uočavamo, ako imamo trokut  $ABC$  i točke  $M$  i  $N$  na pravcu  $BC$  koje su simetrične u odnosu na polovište  $P_a$  dužine  $\overline{BC}$ , da tada vrijedi  $|BM| = |CN|$  i  $|BN| = |CM|$  (slika 9).

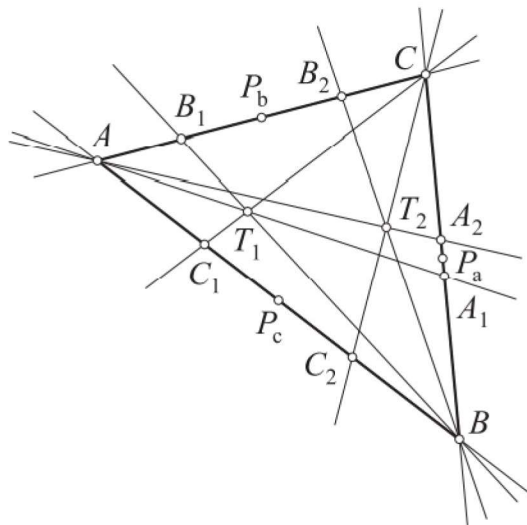


Slika 9. Izotomične točke

Navedimo teorem koji vrijedi za izotomične pravce.



**Teorem 2.11.** [1] Neka su  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$  redom točke na pravcima  $BC$ ,  $AC$  i  $AB$  takve da se tri pravca  $AA_1$ ,  $BB_1$  i  $CC_1$  sijeku u jednoj točki. Tada se njima izotomični pravci  $AA_2$ ,  $BB_2$  i  $CC_2$  također sijeku u jednoj točki (vidjeti sliku 10.).



Slika 10. Ilustracija teorema 2.11 ([1])

*Dokaz.* Kako se pravci  $AA_1$ ,  $BB_1$  i  $CC_1$  sijeku u jednoj točki, označimo je s  $T_1$ , to prema Cevinom teoremu vrijedi

$$\frac{|AB_1|}{|CB_1|} \cdot \frac{|CA_1|}{|BA_1|} \cdot \frac{|BC_1|}{|AC_1|} = 1.$$

Definiramo točke  $A_2$ ,  $B_2$  i  $C_2$  na stranicama trokuta takve da su pravci  $AA_2$ ,  $BB_2$  i  $CC_2$  izotomični pravcima  $AA_1$ ,  $BB_1$  i  $CC_1$  redom. Prema razmatranjima od ranije vrijedi:

$$\begin{aligned} |AB_1| &= |CB_2|, & |CB_1| &= |AB_2| \\ |CA_1| &= |BA_2|, & |BA_1| &= |CA_2| \\ |BC_1| &= |AC_2|, & |AC_1| &= |BC_2|. \end{aligned}$$

Stoga je

$$\frac{|CB_2|}{|AB_2|} \cdot \frac{|BA_2|}{|CA_2|} \cdot \frac{|AC_2|}{|BC_2|} = 1,$$

te se prema Cevinom teoremu pravci  $AA_2$ ,  $BB_2$  i  $CC_2$  sijeku u jednoj točki, koju smo označili s  $T_2$ . □

Točke  $T_1$  i  $T_2$  iz teorema 2.11 zovemo *izotomično konjugiranim točkama* trokuta ABC.

Dakle, postoji beskonačno mnogo parova točaka izotomičnih u odnosu na trokut koji promatramo.

Pogledajmo teorem koji povezuje Gergonneovu i Nagelovu točku.

**Teorem 2.12.** [1] Gergonneova i Nagelova točka su međusobno izotomične točke.

*Dokaz.* Iz lema 2.2 i 2.4 slijedi

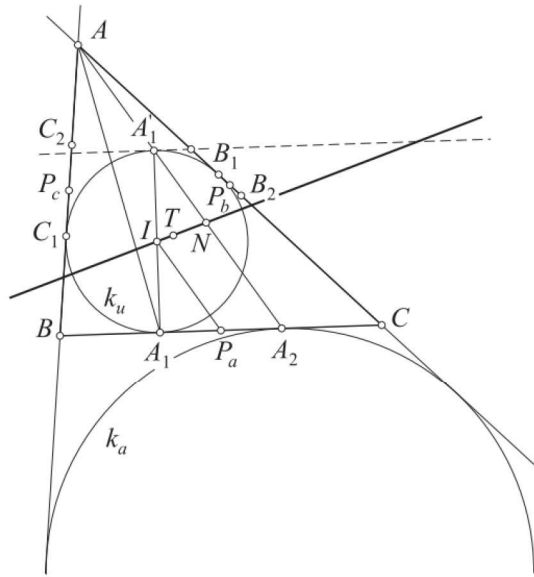
$$\begin{aligned} |AC_1| &= |BC_2| = s - a, \\ |BA_1| &= |CA_2| = s - b, \\ |CB_1| &= |AB_2| = s - c. \end{aligned}$$

Tvrđnja slijedi iz teorema 2.11. □

## 2.2 Nagelov pravac

U ovom dijelu dokazat ćemo da Nagelova točka leži na pravcu kroz središte trokutu upisane kružnice i težište.

**Teorem 2.13.** [1] *Neka je dan trokut  $ABC$ , te neka je  $T$  njegovo težište,  $I$  središte trokutu upisane kružnice i  $N$  Nagelova točka. Tada te tri točke leže na jednom pravcu i vrijedi  $|TN| = 2 \cdot |TI|$ .*



Slika 11. Nagelova točka trokuta ([1])

*Dokaz.* Označimo trokutu upisanu i pripisane kružnice te njihova dirališta sa stranicama trokuta, kao ranije, te označimo polovišta stranica  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$  trokuta  $ABC$  redom s  $P_a$ ,  $P_b$  i  $P_c$ . Ako istaknemo elemente kao na slici 11., možemo uočiti da su upisana kružnica  $k_u$  i pripisana kružnica  $k_a$  trokuta  $ABC$  upisane u kut  $\sphericalangle BAC$ . Zbog toga su te dvije kružnice homotetične, a centar homotetije je točka  $A$ .

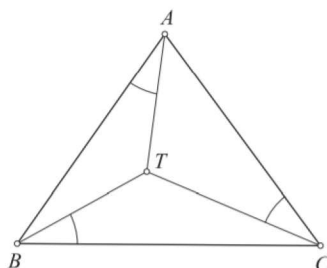
Neka je  $A'_1$  dijametralno suprotna točka točki  $A_1$  na kružnici  $k_u$ , pa vrijedi  $|A_1I| = |IA'_1|$ . Zbog homotetije točke  $A$ ,  $A'_1$  i  $A_2$  su kolinearne. Kako su  $AA_1$  i  $AA_2$  izotomični pravci, vrijedi  $|A_1P_a| = |A_2P_a|$ . Zaključujemo da je  $\overline{IP_a}$  srednjica trokuta  $A_1A_2A'_1$ , pa je zbog toga pravac  $IP_a$  paralelan pravcu  $A_2A'_1$ .

Neka je  $h$  homotetija s centrom u točki  $T$  i koeficijentom  $-2$ . Znamo da težište dijeli težišnicu  $\overline{AP_a}$  u omjeru  $2 : 1$ , te računajući od vrha trokuta, homotetija  $h$  preslikava točku  $P_a$  u točku  $A$ . Homotetijom  $h$  pravac  $IP_a$  preslikava se u njemu paralelan pravac koji prolazi točkom  $A$ , odnosno u pravac  $AA_2$ . Analogno se pravac  $IP_b$  preslikava u pravac  $BB_2$ . Zaključujemo da se točka  $I$  pri homotetiji  $h$  preslikava u sjecište pravaca  $AA_2$  i  $BB_2$ , a to je Nagelova točka  $N$ . Time je dokazano  $|NT| = 2 \cdot |IT|$ . □

Nagelov pravac je pravac koji prolazi kroz središte upisane kružnice trokuta, težište i Nagelovu točku.

### 3 Brocardove točke

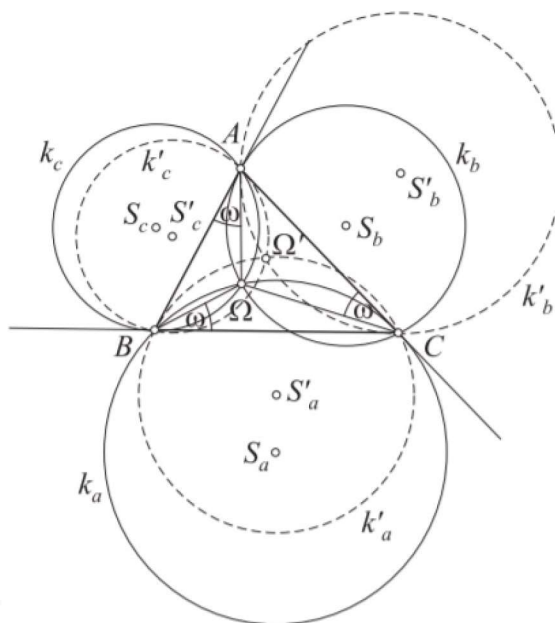
Neka je točka  $T$  unutar trokuta  $ABC$ . Točku  $T$  spojimo s vrhovima trokuta i promotrimo kutove koje dužine  $\overline{TA}$ ,  $\overline{TB}$  i  $\overline{TC}$  zatvaraju sa stranicama  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  i  $\overline{CA}$ . Dokazat ćemo da postoji točka za koju su sva tri promatrana kuta jednaka. Također se može dokazati da postoji točka  $T'$  tako da dužine  $\overline{T'A}$ ,  $\overline{T'B}$  i  $\overline{T'C}$  zatvaraju sa stranicama  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BA}$  i  $\overline{CB}$  sukkladne kutove.



Slika 12. [2]

Dokažimo teorem koji će nam omogućiti dokaz postojanja točaka s navedenim svojstvom.

**Teorem 3.1.** [2] Za dani trokut  $ABC$  dane su tri kružnice:  $k_a$  koja prolazi točkom  $B$  i dira stranicu  $\overline{AC}$  u točki  $C$ ,  $k_b$  koja prolazi točkom  $C$  i dira stranicu  $\overline{AB}$  u točki  $A$ ,  $k_c$  koja prolazi točkom  $A$  i dira stranicu  $\overline{BC}$  u točki  $B$  (slika 13.). Kružnice  $k_a$ ,  $k_b$  i  $k_c$  sijeku se u jednoj točki.



Slika 13. [2]

*Dokaz.* Promatrajmo kružnice  $k_a$  i  $k_c$ . Navedene kružnice imaju zajedničku točku  $B$  i još jednu točku trokuta  $ABC$  koju označimo s  $\Omega$ . Kako je  $BC$  tangenta kružnice  $k_c$ ,  $\sphericalangle A\Omega B = 180^\circ - \beta$  i analogno  $\sphericalangle B\Omega C = 180^\circ - \gamma$ . Slijedi  $\sphericalangle A\Omega C = 360^\circ - (180^\circ - \beta) - (180^\circ - \gamma) = \beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$ , gdje su  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  unutrašnji kutovi trokuta  $ABC$ . Slijedi da točka  $\Omega$  pripada luku kružnice  $k_b$  unutar trokuta  $ABC$ , čime je dokazan teorem.  $\square$



**Teorem 3.2.** [2] Za dani trokut  $ABC$  dane su tri kružnice:  $k'_a$  koja prolazi vrhom  $C$  i dira stranicu  $\overline{AB}$  u vrhu  $B$ ,  $k'_b$  koja prolazi točkom  $A$  i dira stranicu  $\overline{BC}$  u točki  $C$ ,  $k'_c$  koja prolazi točkom  $B$  i dira stranicu  $\overline{AC}$  u točki  $A$ . Kružnice  $k'_a$ ,  $k'_b$  i  $k'_c$  sijeku se u jednoj točki  $\Omega'$  (slika 13.).

Dokaz ove tvrdnje provodi se slično dokazu prethodne tvrdnje.

Dokažimo sada tvrdnju o točkama s traženim svojstvima, koja smo već spomenuli.

**Teorem 3.3.** [2] Neka su  $\Omega$  i  $\Omega'$  točke iz teorema 3.1 i 3.2. Tada vrijede tvrdnje:

i)  $\sphericalangle\Omega AB = \sphericalangle\Omega BC = \sphericalangle\Omega CA$  i točka  $\Omega$  je jedina točka s tim svojstvom.

ii)  $\sphericalangle\Omega' AC = \sphericalangle\Omega' CB = \sphericalangle\Omega' BA$  i točka  $\Omega'$  je jedina točka s tim svojstvom (slika 13.).

*Dokaz.* i) Kut  $\sphericalangle\Omega AB$  jednak je polovini središnjega kuta kružnice  $k'_c$  nad tetivom  $\overline{\Omega B}$ . Kako je  $BC$  tangenta kružnice  $k'_c$  taj središnji kut jednak je  $2\sphericalangle\Omega BC$  odakle slijedi  $\sphericalangle\Omega BC = \sphericalangle\Omega AB$ . Analogno se dokaže  $\sphericalangle\Omega BC = \sphericalangle\Omega CA$ .

Neka je  $\Omega_1$  točka za koju vrijedi  $\sphericalangle\Omega_1 AB = \sphericalangle\Omega_1 BC$ , tada će kružnica na kojoj leže točke  $\Omega_1$ ,  $A$  i  $B$  dirati  $BC$  u točki  $B$ . Tada se  $\Omega_1$  nalazi na kružnici  $k'_c$ . Analogno, iz uvjeta  $\sphericalangle\Omega_1 BC = \sphericalangle\Omega_1 CA$  slijedi da se točka  $\Omega_1$  nalazi na  $k'_a$ . Dakle, vrijedi  $\Omega_1 = \Omega$ .

Dokaz pod ii) se provodi slično. □

**Definicija 3.4.** [2] Za dani trokut  $ABC$  točku  $\Omega$  za koju vrijedi  $\sphericalangle\Omega AB = \sphericalangle\Omega BC = \sphericalangle\Omega CA$  zovemo *prvom* ili *pozitivnom Brocardovom točkom* trokuta  $ABC$ , a točku  $\Omega'$  za koju vrijedi  $\sphericalangle\Omega' AC = \sphericalangle\Omega' CB = \sphericalangle\Omega' BA$  zovemo *drugom* ili *negativnom Brocardovom točkom* trokuta  $ABC$ .

Kako bismo razmatrali neka svojstva Brocardovih točaka navedimo najprije definiciju izogonalnih pravaca i izogonalno konjugiranih točaka.

**Definicija 3.5.** [2] Par pravaca koji prolaze vrhom kuta i sa simetralom tog kuta čine sukladne kutove naziva se izogonalama tog kuta.

Također se može dokazati da ako se tri pravca položena vrhovima danog trokuta  $ABC$  sijeku u jednoj točki  $T_1$ , tada se i njihove izogonale također sijeku u nekoj točki, označimo je s  $T_2$ . Točke  $T_1$  i  $T_2$  zovemo *izogonalno konjugiranim točkama* trokuta  $ABC$ .

Za Brocardove točke vrijedi sljedeća tvrdnja.

**Teorem 3.6.** [2] Brocardove točke  $\Omega$  i  $\Omega'$  su izogonalno konjugirane točke.

*Dokaz.* Neka je  $\Omega_1$  izogonalno konjugirana točka Brocardovoj točki  $\Omega$ . Tada prema razmatranjima od ranije, vrijedi

$$\sphericalangle\Omega AB = \sphericalangle\Omega_1 AC, \quad \sphericalangle\Omega BC = \sphericalangle\Omega_1 BA, \quad \sphericalangle\Omega CA = \sphericalangle\Omega_1 CB$$

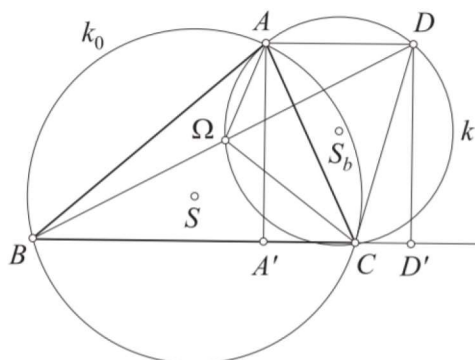
i jer je  $\Omega$  Brocardova točka vrijedi  $\sphericalangle\Omega AB = \sphericalangle\Omega BC = \sphericalangle\Omega CA$ , slijedi

$$\sphericalangle\Omega_1 AC = \sphericalangle\Omega_1 BA = \sphericalangle\Omega_1 CB.$$

Vidimo da je  $\Omega_1 = \Omega'$  što je i trebalo dokazati. □

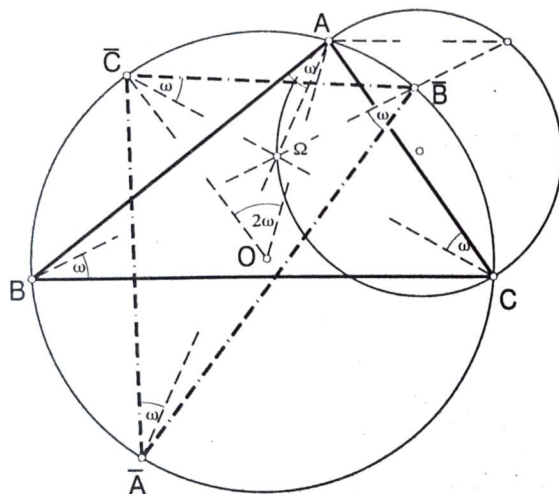
**Definicija 3.7.** [2]  $\sphericalangle\Omega AB = \sphericalangle\Omega' AC$  zove se Brocardov kut trokuta  $ABC$  i označava s  $\omega$ .

Pogledajmo još jedan način konstrukcije prve Brocardove točke. Konstruirajmo kružnicu  $k$  i kroz točku  $A$  paralelu s  $BC$ . Označimo s  $D$  drugo sjecište te paralele i kružnice  $k$ . Tada  $BD$  siječe kružnicu  $k$  u točki  $\Omega$ . Uočimo da vrijedi  $\sphericalangle\Omega BC = \sphericalangle\Omega DA$ . Jer su  $\sphericalangle\Omega DA$  i  $\sphericalangle\Omega CA$  obodni kutovi nad tetivom  $\Omega A$  kružnice  $k$ , slijedi  $\sphericalangle\Omega DA = \sphericalangle\Omega CA$ . Jer je  $AB$  tangenta kružnice  $k$  kut  $\sphericalangle\Omega AB$  je jednak obodnom kutu nad tetivom  $\Omega A$ , to jest vrijedi  $\sphericalangle\Omega AB = \sphericalangle\Omega CA$ . Dakle, spomenuti kutovi su Brocardovi kutovi.



Slika 14. [2]

Uvedimo oznake koje su nam potrebne za sljedeći teorem. Prvo, neka je dan trokut  $ABC$  s opisanom kružnicom  $k_0$  i pozitivnom Brocardovom točkom  $\Omega$ . Spojimo li vrhove danog trokuta  $ABC$  s točkom  $\Omega$ , tada te spojnice sijeku kružnicu  $k_0$  redom u točkama  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$ . Sljedeći teorem povezuje trokute  $ABC$  i  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ , te pozitivnu i negativnu Brocardovu točku.



Slika 15. Ilustracija teorema 3.8 ([4])

**Teorem 3.8.** [3] *Trokuti  $ABC$  i  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$  su sukladni, a pozitivna Brocardova točka  $\Omega$  trokuta  $ABC$  ujedno je negativna Brocardova točka trokuta  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ .*

*Dokaz.* Neka je  $\Omega$  pozitivna Brocardova točka trokuta  $ABC$ , te vrijedi

$$\sphericalangle\Omega CA = \sphericalangle\Omega AB = \sphericalangle\Omega BC = \omega.$$

Uočimo da su  $\sphericalangle\Omega AB$  i  $\sphericalangle\bar{A}\bar{B}\bar{B}$  obodni kutevi nad tetivom  $\bar{A}\bar{B}$ , pa slijedi

$$\sphericalangle\bar{A}\bar{B}\bar{B} = \sphericalangle\Omega AB = \omega.$$

Analogno pokažemo

$$\sphericalangle \bar{B}\bar{C}\bar{C} = \sphericalangle \bar{C}\bar{A}\bar{A} = \omega.$$

Slijedi da je  $\Omega$  negativna Brocardova točka trokuta  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ .

Preostaje pokazati da su trokuti  $ABC$  i  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$  sukladni.

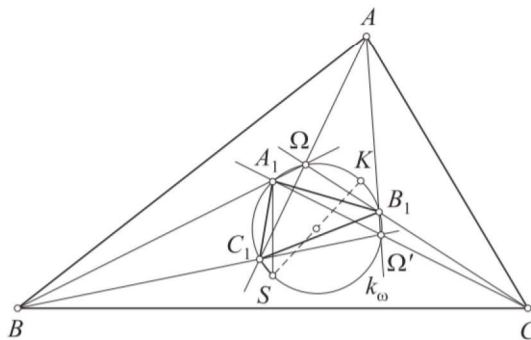
Uočimo da vrijedi  $\sphericalangle \bar{C}\bar{C}\bar{B} = \sphericalangle \bar{C}\bar{B}\bar{B}$ , jer su oni obodni kutovi nad istom tetivom  $\bar{B}\bar{C}$ , što povlači sukladnost kutova  $\gamma$  i  $\bar{\beta}$ . Analogno dobijemo sukladnost kutova  $\alpha$  i  $\bar{\gamma}$  te  $\beta$  i  $\bar{\alpha}$ .

Neka je  $O$  središte opisane kružnice trokutu  $ABC$ .  $\sphericalangle \bar{C}O\bar{A}$  je središnji kut nad tetivom  $\bar{C}\bar{A}$ , te je on jednak  $2\sphericalangle \bar{C}\bar{A}\bar{A}$ . Možemo pisati  $\sphericalangle \bar{C}O\bar{A} = 2\omega$ . Slijedi da trokut  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$  možemo dobiti rotacijom trokuta  $ABC$  oko središta  $O$  za kut  $2\omega$ , pa su zbog toga trokuti  $ABC$  i  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$  sukladni.  $\square$

### 3.1 Brocardova kružnica

Navest ćemo još jedan pojam vezan uz Brocardove točke trokuta. Povucimo pravce  $A\Omega$ ,  $B\Omega$ ,  $C\Omega$ ;  $A\Omega'$ ,  $B\Omega'$ ,  $C\Omega'$  koji spajaju obje Brocardove točke s vrhovima danog trokuta  $ABC$ . Pravci  $A\Omega$  i  $B\Omega'$  sijeku se u točki koju označimo s  $C_1$ , pravci  $B\Omega$  i  $C\Omega'$  sijeku se u točki koju označimo s  $A_1$  i pravci  $C\Omega$  i  $A\Omega'$  sijeku se u točki koju označimo s  $B_1$  (slika 16.). Uočimo da dobivene točke određuju trokut  $A_1B_1C_1$ .

Pogledajmo sljedeće dvije definicije.



Slika 16. Brocardova kružnica trokuta  $ABC$  ([2])

**Definicija 3.9.** [2] Neka su  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$  vrhovi jednakokračnih trokuta konstruiranih nad stranicama danog trokuta  $ABC$  kao osnovicama, u unutrašnjosti danog trokuta, a s kutom uz bazu jednakom Brocardovom kutu. Trokut  $A_1B_1C_1$  zovemo prvim Brocardovim trokutom trokuta  $ABC$ .

**Definicija 3.10.** [2] Kružnicu  $k_\omega$  opisanu prvom Brocardovom trokutu trokuta  $ABC$  zovemo Brocardovom kružnicom trokuta  $ABC$  (slika 16.).

Sljedeći teorem povezuje Brocardove točke i Brocardovu kružnicu.

**Teorem 3.11.** [2] Brocardove točke trokuta leže na njegovoj Brocardovoj kružnici.

*Dokaz.* Promotrimo trokut  $AB\Omega$ . Vrijedi  $\sphericalangle A\Omega B = 180^\circ - \beta$ , te za vanjski kut trokuta  $AB\Omega$  slijedi

$$\sphericalangle A_1\Omega C_1 = \beta. \quad (3.1)$$

Na isti način, promatramo li trokut  $BC\Omega'$  dobivamo

$$\sphericalangle A_1\Omega' C_1 = \beta. \quad (3.2)$$



Također vrijedi

$$\sphericalangle A_1SC_1 = \beta \quad (3.3)$$

jer su krakovi tog kuta okomiti na  $BC$  i  $AB$ . Uočimo da kutove (3.1), (3.2) i (3.3) možemo promatrati kao obodne kutove nad tetivom  $\overline{A_1C_1}$  iste kružnice. Dakle, točke  $A_1$ ,  $C_1$ ,  $\Omega$ ,  $\Omega'$  i  $S$  leže na jednoj kružnici. Označimo ju s  $k_\omega$  (pogledati sliku 16.).

Slično dobijemo  $\sphericalangle B_1\Omega C_1 = \alpha$ ,  $\sphericalangle B_1\Omega' C_1 = 180^\circ - \alpha$  i  $\sphericalangle B_1SC_1 = 180^\circ - \alpha$  odakle slijedi da točke  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $\Omega$ ,  $\Omega'$  i  $S$  leže na jednoj kružnici. Označimo je s  $k_{\omega'}$ . Znamo da se točke  $C_1$ ,  $\Omega$ ,  $\Omega'$  i  $S$  nalaze na kružnici  $k_\omega$ , pa se one podudaraju.  $\square$

## 4 Tarryjeva točka

Prije nego što pogledamo teorem koji nam opisuje konstrukciju Tarryjeve točke, navedimo teorem koji će nam trebati za dokaz.

**Teorem 4.1.** [2] Dani trokut  $ABC$  i prvi Brocardov trokut  $A_1B_1C_1$  su slični.

**Teorem 4.2.** [3] Povučemo li iz vrhova  $A$ ,  $B$  i  $C$  danog trokuta  $ABC$  okomice na odgovarajuće stranice  $\overline{B_1C_1}$ ,  $\overline{C_1A_1}$ ,  $\overline{A_1B_1}$  prvog Brocardova trokuta  $A_1B_1C_1$  tada se te tri okomice sijeku u jednoj točki  $R$  koja leži na trokutu  $ABC$  opisanoj kružnici  $k_0$  (slika 17.).

*Dokaz.* Neka se okomica iz točke  $A$  na stranicu  $\overline{B_1C_1}$  i okomica iz točke  $B$  na stranicu  $\overline{A_1C_1}$  sijeku u točki  $R$  (slika 17.). Kako je  $AR \perp B_1C_1$  i  $BR \perp A_1C_1$ , vrijedi  $\sphericalangle ARB = \sphericalangle A_1C_1B_1$ .

Prema teoremu 4.1 znamo da je  $\sphericalangle A_1C_1B_1 = \sphericalangle ACB = \gamma$ , pa su  $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ARB$  obodni kutovi nad tetivom  $AB$  opisane kružnice trokutu  $ABC$ .

Analogno zaključimo spuštanjem okomica iz točaka  $B$  i  $C$ . Njihovo sjecište označimo s  $\bar{R}$ , te se ono mora nalaziti na kružnici  $k_0$  i na okomici iz  $B$ . Slijedi  $R = \bar{R}$ .  $\square$

Točka sjecišta okomica povučenih iz vrhova trokuta  $ABC$  na odgovarajuće stranice prvog Brocardovog trokuta zove se *Tarryjeva točka* trokuta  $ABC$ .

Prije nego što pogledamo i dokažemo neka svojstva Tarryjeve točke, navedimo teorem koji će nam trebati za dokaz kolinearne težišta, središta Brocardove kružnice i Tarryjeve točke.

**Teorem 4.3.** [3] Dani trokut  $ABC$  i prvi Brocardov trokut  $A_1B_1C_1$  imaju zajedničko težište  $T$ .

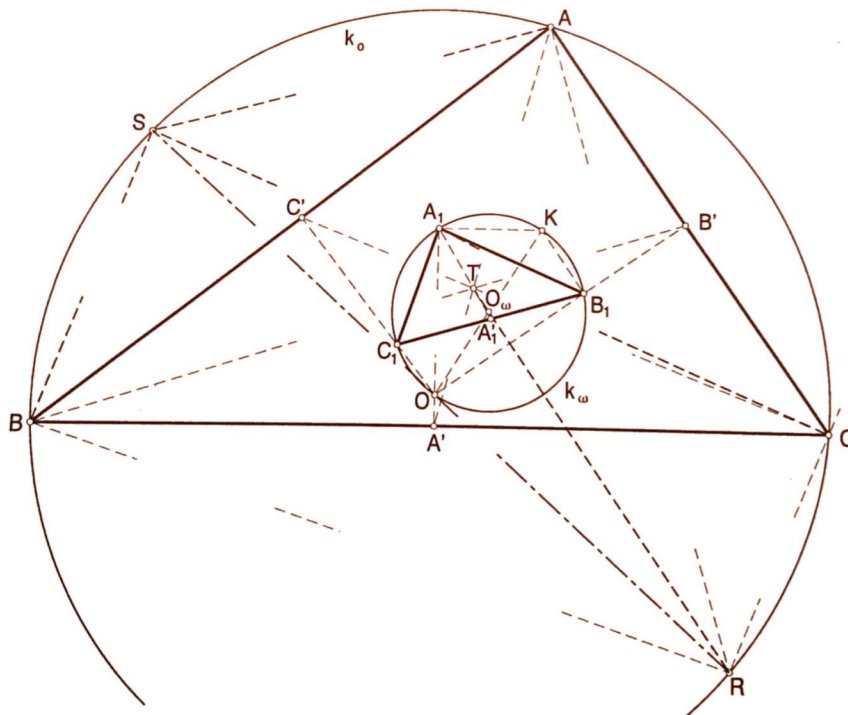
**Teorem 4.4.** [3] Za dani trokut  $ABC$  su težište  $T$ , središte  $O_\omega$  Brocardove kružnice i Tarryjeva točka  $R$  kolinearne su točke.

*Dokaz.* Kako po teoremu 4.1 znamo da su prvi Brocardov trokut  $A_1B_1C_1$  i trokut  $ABC$  slični oni definiraju jednu sličnost ravnine.

Pogledajmo sliku 17. i dokažimo da se Tarryjeva točka  $R$  preslikava s tom sličnošću u središte  $O$  opisane kružnice  $k_0$  danog trokuta  $ABC$ . Uočavamo da se  $A$  preslika u  $A_1$ ,  $B$  u  $B_1$  i  $C$  u  $C_1$ , a onda i  $k_0$  u  $k_\omega$ . Znamo da se pri toj sličnosti  $\overline{AA'}$  preslikava na  $\overline{A_1A'_1}$ . Tada se točka  $T$  preslikava u samu sebe, jer znamo da je točka  $T$  težište i danog trokuta  $ABC$  i prvog Brocardovog trokuta  $A_1B_1C_1$  (teorem 4.3).

Znamo da zbog sličnosti vrijedi  $\sphericalangle RAB = \sphericalangle OA_1B_1$ . Kako se  $R$  nalazi na kružnici  $k_0$ , a ona se preslikava na  $k_\omega$ , slika točke  $R$  je  $O$ .

Trokuti  $OA'T$  i  $O_\omega A'_1 T$  su slični jer znamo da se  $O$  preslikava u  $O_\omega$ . Iz toga slijedi  $\sphericalangle OTA' = \sphericalangle O_\omega T A'_1$ . No, s druge strane je  $\sphericalangle RTA' = \sphericalangle OTA'_1$ , pa je i  $\sphericalangle OTA' = \sphericalangle O_\omega T A'_1$ , odakle slijedi kolinearne točaka  $T$ ,  $O_\omega$  i  $R$ .  $\square$



Slika 17. [3]

**Teorem 4.5.** [3] *Povučemo li vrhovima  $A$ ,  $B$ ,  $C$  danog trokuta paralele redom sa stranicama prvog Brocardova trokuta, tada se te tri paralele sijeku u točki  $S$  koja leži na opisanoj kružnici  $k_0$  danog trokuta dijametralno suprotno Tarryjevoj točki  $R$ .*

*Dokaz.* Pogledajmo paralelu  $AS$  sa stranicom  $\overline{B_1C_1}$  prvog Brocardova trokuta. Ona je okomita na spojnicu  $\overline{AR}$ . Slijedi da paralela  $AS$  mora sjeći opisanu kružnicu  $k_0$  trokuta  $ABC$  u točki  $S$  dijametralno suprotno točki  $R$ . Analogno točkom  $S$  prolaze i ostale dvije paralele.  $\square$

Točku  $S$  zovemo *Steinerovom točkom*.

## Literatura

- [1] H. Halas, M. Bombardelli, *Izotomične točke trokuta*, Matematičko fizički list, 239 (2010), 3, 158-165.
- [2] Z. Kolar-Begović, G. Knez, *Brocardove figure trokuta*, Matematičko fizički list, 68 (269), 2017, 17-23.
- [3] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.
- [4] D. Veljan, *Cevin teorem i "osobite" točke trokuta*, Matematičko-fizički list, broj 174, 1993, str. 65-71.