Analitičke funkcije kompleksne varijable

Turšćak, Mirna

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Mirna Turšćak

Analitičke funkcije kompleksne varijable

Završni rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Mirna Turšćak

Analitičke funkcije kompleksne varijable

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Soldo

Osijek, 2021.

Sažetak

U ovome radu bavit ćemo se analitičkim funkcijama kompleksne varijable. Upoznat ćemo se najprije s pojmovima koje moramo poznavati kako bi mogli definirati analitičnost funkcije: limes funkcije, neprekidnost funkcije i derivabilnost funkcije. Zatim, nakon same definicije analitičnosti funkcije, vidjet ćemo zahtjeve koji moraju biti ispunjeni da bi funkciju mogli nazvati analitičkom te ćemo na taj način doći do Cauchy-Riemannovih uvjeta, a zatim ćemo se susresti i s pojmom harmonijskih funkcija i Laplaceovom parcijalnom diferencijabilnom jednadžbom. Rad ćemo završiti s nekoliko elemntarnih analitčkih funkcija.

Ključne riječi

limes, neprekidnost, derivabilnost, analitička funkcija, harmonijska funkcija, Cauchy-Riemannovi uvjeti, Laplaceova parcijalna diferncijabilna jednadžba

Analytic functions of a complex variable

Summary

In this paper, we will deal with an analytic functions of a complex variable. Firstly, we will get acquainted with the concepts we need to know in order to be able to define analyticity: limit of function, continuity of function and derivability of function. Then, after the definition of analyticity, we will see the requirements that must be satisfied in order to call a function analytic. Thus, we will come to Cauchy-Riemann conditions, consider the harmonic functions and the Laplace partial differentiable equation. We will finish the paper with a few elementary analytic functions.

Keywords

limit, continuity, derivability, analytic function, harmonic function, Cauchy-Riemann conditions, Laplace partial differential equation

Sadržaj

Uvod

Kompleksni brojevi i funkcije kompleksne varijable često su ljudima vrlo apstraktan pojam. Nismo ni svjesni koliko je problema svakodnevice riješeno upravo zbog toga što postoje kompleksni brojevi, funkcije kompleksne varijable i analitičke funkcije kompleksne varijable. Izmjenični napon opisuje se kao uređen par faze i amplitude što se može shvatiti kao kompleksan broj u kompleksnoj ravnini; strujni krug opisan je s naponom i strujom što ponovno možemo zapisati kao uređen par te promatrati kao kompleksan broj u kompleksnoj ravnini. U kvantnoj mehanici elementarne čestice izgledaju kao valovi, a svi valovi imaju amplitude koje su kompleksne veličine i samim time sve oko sebe što poznajemo možemo opisati preko kompleksnih brojeva. Više informacija o primjeni kompleksnih brojeva na našu svakodnevicu može se pronaći u [2].

U prvom poglavlju upoznat ćemo osnovne pojmove kao što su limes funkcije, neprekidnost funkcije i derivacija funkcije. Svaki od njih ima određenu ulogu u definiranju analitičnosti funkcije i zato ne možemo ni pokušati upoznati analitičnost funkcije bez da najprije upoznamo ove pojmove. Kroz drugo poglavlje saznat ćemo što je to analitička funkcija, što analitička funkcija povlači, ali i što mora vrijediti da bi funkcija bila analitička. Upoznat ćemo se s Cauchy-Riemannovim uvjetima ili jednadžbama, dotaknut ćemo se i harmonijskih funkcija te spomenuti i Laplaceovu parcijalnu diferncijabilnu jednadžbu. U trećem, i posljednjem, poglavlju ovog rada dotaknut ćemo se nekih elementarnih funkcija koje su analitičke i čije poznavanje nam može pomoći pri promatranju drugih funkcija.

1 Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju upoznat ćemo osnovne pojmove potrebne za definiranje analitičnosti funkcije. Najprije ćemo se prisjetiti nekih osnovnih definicija i svojstava kompleksnih brojeva, a zatim ćemo preći na definiranje i promatranje limesa funkcije, neprekidnosti funkcije i derivacije funkcije.

Definicija 1. *Neka je D neprazan proizvoljan skup točaka u kompleksnoj ravnini. Ako sa z označimo bilo koju točku toga skupa D, onda z nazivamo kompleksan broj.*

Kompleksne brojeve znamo zbrajati, oduzimati, množiti, dijeliti, konjugirati, potencirati, korjenovati, prikazivati ih u trigonometrijskom obliku te su mogućnosti s kompleksnim brojevima razne. Svojstva kompleksnih brojeva mogu se pronaći u [3] u Poglavlju 3. Prije nego pređemo na funkcije kompleksne varijable, prisjetimo se same definicije funkcije.

Definicija 2. *Neka su D i K bilo koja dva neprazna skupa. Postupak f koji svakom elementu $x \in D$ pridružuje točno jedan element $y \in K$ zovemo funkcija ili preslikavanje sa D u K i pišemo $f : D \to K$ ili $x \mapsto f(x), x \in D$.*

Skup D iz definicije funkcije zovemo domena funkcije f, a skup K zovemo kodomena funkcije f. Ukoliko je domena funkcije skup kompleksnih brojeva, onda kažemo da promatramo funkciju kompleksne varijable. Ukoliko je kodomena funkcije skup kompleksnih brojeva, kažemo da promatramo kompleksnu funkciju. Kada su i domena i kodomena kompleksne varijable, promatramo kompleksnu funkciju kompleksne varijable. Kako su u skupu kompleksnih brojeva (nadalje oznaka $\mathbb{C}$) sadržani i skupovi prirodnih, cijelih, racionalnih i realnih brojeva, mi ćemo promatrati funkcije kojima su i domena i kodomena kompleksni brojevi. Ako simbolično označimo $w = f(z), z \in \mathbb{C}$, z zovemo nezavisna varijabla, a w zavisna varijabla.

Primjer 1. *Pogledajmo funkcije:*

a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = z^4 + 8z^2 + 12$.
   Ovo je polinom četvrtog stupnja s realnim koeficijentima (no znamo da je $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$). Kada bi ga izjednačili s nulom, dobili bi četiri moguća rješenja: $i\sqrt{2}$, $-i\sqrt{2}$, $i\sqrt{6}$ te $-i\sqrt{6}$, a možemo ih još i zapisati kao $0 + i\sqrt{2}$, $0 - i\sqrt{2}$,$0 + i\sqrt{6}$ te $0 - i\sqrt{6}$. Prisjetimo se kako se 0 zove realni dio prethodnog kompleksnog broja, a $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$ i $-\sqrt{6}$ su odgovarajući imaginarni djelovi dobivenog kompleksnog broja. Ovdje je domena jednaka cijelom skupu $\mathbb{C}$.

b) $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(w) = \frac{z+5i}{2+i-z}$.
   Ovo je racionalna funkcija kod koje moramo pripaziti na samu domenu. Naime, kako se u nazivniku nalazi $2 + i - z$, a mi ne znamo dijeliti s nulom, moramo izbaciti tu mogućnost iz domene, točnije moramo staviti da $2 + i - z \neq 0$, a iz toga slijedi da $z \neq 2 + i$. Domena funkcije g je tada $\mathbb{C} \backslash \{2 + i\}$.

Funkcije kompleksne varijable možemo prikazati i kao $u(z) = f(z) + ig(z)$, tj. $u(x+iy) = f(x,y) + ig(x,y)$, gdje su sada f i g funkcije dvaju realnih varijabli. (To možemo direktno povezati s time što kompleksne brojeve $z = x + iy$ možemo zapisati kao uređene parove realnih brojeva, tj. kao (x,y)).

1.1 Limes funkcije

Promatramo li limes funkcije realne varijable, znamo da on predstavlja približnu vrijednost funkcije kada se jedna točka "približava" drugoj. Limesi funkcija kompleksnih varijabli ne razlikuju se previše od limesa funkcija realne varijable, no bitno je promotriti dio kada se jedna točka "približava" drugoj. U kompleksnom svijetu ako se točka z_1 približava točki z_2, to znači da modul točke $z_1 - z_2$ smanjuje, tj. $|z_1 - z_2|$ postaje sve manji.

Definicija 3. *Neka je $f = w(z)$ funkcija definirana u svim točkama z iz D osim možda u točki z_0. Kažemo da je limes funkcije f kada se z približava z_0 jednak w_0 ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ kada je $0 < |z - z_0| < \delta$.*

Oznaka za limes je: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ ili još $f(z) \to w_0$, za $z \to z_0$. Ako takav w_0 iz definicije ne postoji, kažemo da limes u točki z_0 ne postoji.

Napomena 1 (vidjeti [3], Remark 3.2.1.)**.** *Ako limes funkcije u točki postoji, on je jedinstven.*

Dokaz.
Tvrdimo da je limes jedinstven. Dokaz toga provedimo polazeći od pretpostavke da to nije istina, točnije da $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_1$ i $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_2$. Prema definiciji limesa znamo da tada za bilo koji $\epsilon > 0$ postoje $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ takvi da:

$$\begin{aligned} |f(z) - w_1| &< \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{kada je} \quad 0 < |z - z_0| < \delta_1, \\ |f(z) - w_2| &< \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{kada je} \quad 0 < |z - z_0| < \delta_2. \end{aligned}$$

Ako stavimo da je $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$, onda imamo:

$$\begin{aligned} |w_2 - w_1| &= |[f(z) - w_1] - [f(z) - w_2]| \\ &\leq |f(z) - w_1| + |f(z) - w_2| \\ &\leq \varepsilon \quad \text{kada je} \quad 0 < |z - z_0| < \delta. \end{aligned}$$

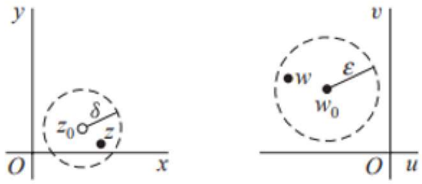
Kako po definiciji znamo da je $\varepsilon > 0$ (ali taj ε se uvijek bira tako da bude proizvoljno malen, tj. $\varepsilon \in \langle 0, 1 \rangle$), onda slijedi $|w_2 - w_1| = 0$, odnosno $w_2 - w_1 = 0$, a tada slijedi da je $w_2 = w_1$. □

Pogledajmo sada primjenu definicije limesa na primjeru.

Primjer 2. *Koristeći definiciju, pokažimo da je* $\lim\limits_{z \to (-1+5i)} \dfrac{(z^2 + 10i + 24)}{z + (1 - 5i)} = -2 + 10i.$

Rješenje: Stavimo $f(z) = \dfrac{(z^2 + 10i + 24)}{z + (1 - 5i)}$. Domena funkcije f je $\mathbb{C}\backslash\{-1+5i\}$. Promotrimo što se događa s funkcijom f ako se z približava točki $-1+5i$. Brojnik možemo raspisati kao $z^2+10i+24 = [z+(1-5i)]\cdot[z-(1-5i)]$, a kada to uvrstimo u izraz za funkciju f, dobivamo $f(z) = \dfrac{[z + (1 - 5i)] \cdot [z - (1 - 5i)]}{z + (1 - 5i)} = z-(1-5i)$. Neka je dan $\varepsilon > 0$ i $|f(z)-(-2+10i)| < \varepsilon$, odnosno $|z - (1 - 5i) + 2 - 10i| = |z + 1 - 5i| < \varepsilon$. Trebamo pronaći δ za koji vrijedi: ako je $|z + (1 - 5i)| < \delta$, onda je $|f(z) + 2 - 10i| < \varepsilon$. Ako stavimo da je $\delta = \varepsilon$, onda ovo vrijedi, tj. dobivamo da je $|f(z) + 2 - 10i| = |z + (1 - 5i)| < \delta = \varepsilon$ kada je $|z + (1 - 5i)| < \delta$.

Geomtrijska interpretacija definicije limesa govori nam kako za svaku ϵ-okolinu točke w_0 postoji δ-okolina točke z_0 takva da svaka točka iz te δ-okoline točke z_0 ima sliku u ε-okolini točke w_0.



Slika 1: Geometrijska interpretacija limesa (slika preuzeta iz [1], Figure 23).

Kako kod svakog kompleksnog broja možemo promatrati njegov realan i njegov imaginaran dio, isto možemo učiniti i s limesom funkcije. Pogledajmo teorem koji nam govori više o zasebnom promatranju realnog i imaginarnog djela limesa funkcije.

Teorem 1 (vidjeti [3], Theorem 3.2.1.)**.** *Neka je D neprazan skup te neka je $w = f(z) = u(z)+iv(z)$ definirana svuda na domeni D osim možda u točki z_0. Tada je $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0 = u_0 + iv_0$ ako i samo ako $\lim\limits_{z\to z_0} u(z) = u_0$, $\lim\limits_{z\to z_0} v(z) = v_0$.*

Dokaz.
Prvo ćemo pokazati jedan smjer teorema, a zatim drugi. Krenimo od pretpostavke da $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0 = u_0 + iv_0$. Ako iskoristimo definiciju znamo da

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \quad \text{kada je} \quad 0 < |z - z_0| < \delta. \tag{1}$$

Uočimo kako je:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2} \leq \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |z_2 - z_1|, \tag{2}$$
$$\sqrt{(y_2 - y_1)^2} \leq \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |z_2 - z_1|. \tag{3}$$
$$\tag{4}$$

Istovremeno znamo prema nejednakosti trokuta da je $|z_2 - z_1| \leq |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$. Izraz $|f(z) - w_0|$ možemo zapisati i kao $|f(z) - w_0| = |(u - u_0) + i(v - v_0)|$, a onda prema (1) znamo da $|(u - u_0) + i(v - v_0)| < \varepsilon$. Ako uzmemo u obzir to i (2) dobivamo:

$$|u(z) - u_0| < \varepsilon,$$
$$|v(z) - v_0| < \varepsilon,$$

kada je $0 < |z - z_0| < \delta$, a to je ništa drugo već sama definicija limesa. Onda slijedi $\lim_{z \to z_0} u(z) = u_0$, $\lim_{z \to z_0} v(z) = v_0$.

Sada pokažimo drugi smjer. Ponovno krećemo s pretpostavkom da limes postoji, no u ovom slučaju pretpostavimo da postoje $\lim_{z \to z_0} u(z) = u_0$, $\lim_{z \to z_0} v(z) = v_0$. Tada prema definiciji slijedi:

$$|u(z) - u_0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{kada je} \quad 0 < |z - z_0| < \delta_1, \tag{5}$$

$$|v(z) - v_0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{kada je} \quad 0 < |z - z_0| < \delta_2. \tag{6}$$

Odaberimo $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Tada ponovno koristeći (2) imamo:

$$|f(z) - w_0| \leq |u(z) - u_0| + |v(z) - v_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{kada je} \quad 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Pogledamo li definiciju limesa, gornja nejednakost zapravo nam govori kako je $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$. Time smo pokazali oba smjera ovog teorema. $\square$

Rekli smo da kompleksne brojeve možemo promatrati kao uređene parove realnih brojeva. Tako i limes funkcije kompleksne varijable možemo promatrati kao limese funkcija dvaju realnih varijabli. Tada $\lim_{z \to z_0} u(z) = u_0$ možemo zapisati kao $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = u_0$, a $\lim_{z \to z_0} v(z) = v_0$ kao $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$. Prethodni teorem govori nam kako limese funkcija kompleksne varijable možemo razdvojiti na realan i imaginaran dio, a oni su onda ništa drugo nego limesi funkcija dvaju realnih varijabli. Kako bi nam sam teorem bio jasniji pogledajmo idući primjer.

Primjer 3. *Izračunajmo* $\lim_{z \to (2+7i)} (z^3 - 5z^2 + 2i)$.

Rješenje: Stavimo li da je $f(z) = (z^3 - 5z^2 + 2i)$ te $z = x + iy$, imamo:

$$\begin{aligned}
f(z) &= z^3 - 5z^2 + 2i \\
&= (x + iy)^3 - 5(x + iy)^2 + 2i \\
&= (x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3) - 5(x^2 + i2xy - y^2) + 2i \\
&= x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3 - 5x^2 - i10xy + 5y^2 + 2i \\
&= (x^3 - 3xy^2 - 5x^2 + 5y^2) + i(3x^2y - y^3 - 10xy + 2).
\end{aligned}$$

Prema Teoremu 1, možemo posebno promatrati realan dio funkcije f, a posebno imaginaran dio funkcije f.

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y) \to (2,7)} (x^3 - 3xy^2 - 5x^2 + 5y^2) &= 2^3 - 3 \cdot 2 \cdot 7^2 - 5 \cdot 2^2 + 5 \cdot 7^2 \\
&= 8 - 294 - 20 + 245 \\
&= -61, \\
\lim_{(x,y) \to (2,7)} (3x^2y - y^3 - 10xy + 2) &= 3 \cdot 2^2 \cdot 7 - 7^3 - 10 \cdot 2 \cdot 7 + 2 \\
&= 84 - 343 - 140 + 2 \\
&= -397.
\end{aligned}$$

Sada slijedi:

$$\lim_{z\to(2+7i)} z^3-5z^2+2i = \lim_{(x,y)\to(2,7)}(x^3-3xy^2-5x^2+5y^2)+i\cdot\lim_{(x,y)\to(2,7)}(3x^2y-y^3-10xy+2)$$
$$= -61-i397.$$

Za kraj ovog djela, pogledajmo još neka bitna svojstva rada s limesima funkcije.

Teorem 2 (vidjeti [3], Theorem 3.2.3.). *Ako je* $\lim_{z\to z_0} f(z)=u_0$ *i* $\lim_{z\to z_0} g(z)=v_0$*, onda:*

a) $\lim_{z\to z_0}[f(z)+g(z)]=u_0+v_0$,

b) $\lim_{z\to z_0}[f(z)-g(z)]=u_0-v_0$,

c) $\lim_{z\to z_0}[f(z)\cdot g(z)]=u_0\cdot v_0$,

d) $\lim_{z\to z_0} k\cdot f(z)=k\cdot u_0$ *gdje je* k *konstanta ,*

e) $\lim_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{u_0}{v_0}$.

Dokaz.
Pogledati u [3], dokaz Teorema 3.2.3. □

1.2 Neprekidnost funkcije

Definicija 4. *Kažemo da je funkcija* $w=f(z)$ *definirana na skupu* D *neprekidna u točki* $z_0\in D$ *ako je* $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$.

Ako funkcija nije neprekidna u točki z_0, kažemo da je ona prekidna u točki z_0. Kako bi nam sama definicija bila jasnija, pogledajmo idući primjer.

Primjer 4. *Ispitajmo je li funkcija* $f(z)=\frac{z^2-2}{i\cdot z+5}$ *neprekidna u točki* $-1-2i$.

Rješenje: Izračunajmo najprije limes funkcije:

$$\lim_{z\to(-1-2i)} f(z)=\lim_{z\to(-1-2i)}\frac{z^2-2}{i\cdot z+5}=\frac{(-1-2i)^2-2}{i\cdot(-1-2i)+5}=\frac{-5+4i}{7-i}.$$

Pogledajmo sada vrijednost funkcije u $(-1-2i)$:

$$f(-1-2i)=\frac{(-1-2i)^2-2}{i\cdot(-1-2i)+5}=\frac{-5+4i}{7-i}.$$

Vidimo da su vrijednosti limesa i funkcije jednaki pa stoga možemo reći da je funkcija f neprekidna u točki $-1-2i$.

Pogledamo li definiciju neprekidnosti, vidimo da ona zahtjeva tri stvari kako bi funckija bila neprekidna u točki z_0, a to su:

a) $\lim_{z \to z_0} f(z)$ postoji;

b) funkcija f definirana je u z_0;

c) $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Iz toga i definicije limesa slijedi da je funkcija neprekidna u točki $z_0 \in D$ ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da ako je $|z - z_0| < \delta$, onda je $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Bitno je uočiti da δ ovisi o odabiru ε i o samoj točki z_0.

Definicija 5. *Funkcija je neprekidna na svojoj domeni D ako je neprekidna u svakoj točki skupa D.*

Koristeći se Teoremom 2, možemo dobiti i neka svojstva neprekidnosti.

Teorem 3 (vidjeti [4], Theorem 2.4). *Ako su f i g neprekidne funkcije u točki z_0, onda su i slijedeće funkcije neprekidne u toči z_0:*

a) cf, gdje je c kompleksna konstanta,

b) $f + g$,

c) $f - g$,

d) $f \cdot g$,

e) $\frac{f}{g}$, za $g(z_0) \neq 0$.

Dokaz.
Pogledati dokaz Teorema 2.4. u [4], stranica 123. □

Upoznali smo pojam neprekidnosti. Pogledajmo sada pojam uniformne neprekidnosti.

Definicija 6. *Funkciju f čija je domena skup D zovemo uniformno neprekidna funkcija ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takav da za sve z_1 i z_2 iz D vrijedi da je $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ kada je $|z_1 - z_2| < \delta$.*

Bitno je uočiti da kod uniformne neprekidnosti δ ovisi samo o odabiru ε i vrijedi za sve točke iz domene (prisjetimo se da je kod pojma neprekidnosti δ ovisio i o ε i o odabiru točke u kojoj ćemo promatrati neprekidnost). Uniformna neprekidnost je samim time jača tvrdnja te ako je funkcija uniformno neprekidna, znamo da je ona i neprekidna. Ako znamo da je funkcija neprekidna, to nam ne daje dovoljno informacija da bi zaključili da je ona i uniformno neprekidna, tj. ona može, ali ne mora biti i uniformno neprekidna. Drugim riječima, uniformna neprekidnost implicira neprekidnost, ali obrat ne vrijedi.

Primjer 5 (vidjeti [3], Example 3.3.2.). *Pokažimo da je funkcija $f(z) = z^2$ uniformno neprekidna na $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq 1\}$.*

Rješenje: Pogledajmo:

$$\begin{aligned}|f(z_1) - f(z_2)| &= |{z_1}^2 - {z_2}^2| = |z_1 - z_2||z_1 + z_2| \leq (|z_1| + |z_2|)\,|z_1 - z_2| \\ &\leq (1+1)\,|z_1 - z_2| = 2|z_1 - z_2|.\end{aligned}$$

Ako stavimo da je $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, onda iz $|z_1 - z_2| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ za svake dvije točke $z_1, z_2 \in D$ vrijedi $|f(z_1) - f(z_2)| \leq 2|z_1 - z_2| < 2 \cdot \delta = 2 \cdot \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Time je zadovoljena definicija uniformne neprekidnosti pa je funkcija f uniformno neprekidna.

1.3 Derivacija funkcije

Definicija 7. *Neka je f funkcija kompleksne varijable čija je domena neprazan skup D i neka je z_0 neka točka iz D. Ako limes $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ postoji, nazivamo ga derivacija funkcije f u točki z_0 te ga označavamo s $f'(z_0) = \dfrac{df(z_0)}{dz}$.*

Ako $z - z_0$ označimo s Δz onda izraz iz prethodne definicije možemo zapisati kao $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ što je nekada lakše koristiti u raznim razmatranjima derivabilnosti funkcije.

Primjer 6. *Koristeći definiciju pokažimo da je funkcija $f(z) = z - i$ derivabilna na cijeloj svojoj domeni.*

Rješenje: Uzmimo proizvoljni $z_0 \in \mathbb{C}$. Pogledajmo najprije $f(z_0+\Delta z) = z_0+\Delta z-i$. Tada je izraz $f(z_0+\Delta z)-f(z_0) = z_0+\Delta z-i-z_0+i = \Delta z$. U tom slučaju $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \dfrac{\Delta z}{\Delta z} = 1$. Kako to vrijedi za proizvoljnu točku z_0, to vrijedi za svaku točku z iz domene funkcije f (što je cijeli skup $\mathbb{C}$) pa je ona derivabilna u svakoj točki svoje domene.

Pogledajmo i teorem koji povezuje derivabilnost funkcije i neprekidnost funkcije, a koji će nam biti potreban za daljnja razmatranja.

Teorem 4 (vidjeti [3], Theorem 3..4.1.)**.** *Ako funkcija f ima derivaciju u točki z_0, onda je f neprekidna u točki z_0.*

Dokaz.
Pogledati dokaz Teorema 2.4. u [3], stranica 79. □

Primjer 7. *Promotrimo funkciju $f(z) = \frac{1}{z-2i}$ i točku $z_0 = 1 + i$.*

Rješenje: Provjerimo najprije je li f derivabilna u točki z_0:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} &= \lim_{z\to z_0}\frac{1}{z-(1+i)}\left(\frac{1}{z-2i}-\frac{1}{1+i-2i}\right)\\
&= \lim_{z\to z_0}\frac{1}{z-(1+i)}\left(\frac{1}{z-2i}-\frac{1}{1-i}\right)\\
&= \lim_{z\to z_0}\frac{1}{z-(1+i)}\cdot\frac{1-i-(z-2i)}{(z-2i)(1-i)}\\
&= \lim_{z\to z_0}\frac{1}{z-(1+i)}\cdot\frac{(1+i)-z}{(z-2i)(1-i)}\\
&= \lim_{z\to z_0}\frac{1}{z-(1+i)}\cdot\frac{-[z-(1+i)]}{(z-2i)(1-i)}\\
&= \lim_{z\to(1+i)}\frac{-1}{(z-2i)(1-i)} = \frac{-1}{((1+i)-2i)(1-i)}\\
&= \frac{-1}{(1-i)(1-i)} = \frac{-1}{-2i} = \frac{1}{2i}\cdot\frac{-2i}{-2i} = \frac{-i}{2}.
\end{aligned}$$

Vidimo da limes postoji pa funkcija f je derivabilna u točki z_0. Sada bi prema prethodnom teoremu funkcija trebala biti i neprekidna u točki z_0. Pogledajmo $f(z_0)$:

$$f(z_0) = \frac{1}{z_0-2i} = \frac{1}{1+i-2.i} = \frac{1}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i}{2}.$$

Sada je:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{z-2i} = \frac{1}{(1+i)-2i} = \frac{1}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i}{2}.$$

Vidimo da je $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$ pa je funkcija f neprekidna u točki z_0.

Sada kada smo upoznali osnovne pojmove koji nas vode do analitičnosti kompleksne funkcije, napokon možemo preći na tu cjelinu.

2 Analitičnost funkcije

U ovom poglavlju upoznat ćemo se s definicijom analitičnosti funkcije te pogledati neke osnovne operacije i radnje s analitičkim funkcijama. Susrest ćemo se i s pojmom harmonijske funkcije te s Cauchy-Riemannovim uvjetima. Za kraj ćemo pogledati Laplaceovu parcijalnu diferencijabilnu jednadžbu.

Definicija 8. *Za funkciju kažemo da je analitička u točki z_0 ako ima derivaciju u točki z_0 i u svakoj točki iz neke okoline točke z_0.*

Definicija 9. *Za funkciju kažemo da je analitička na cijeloj svojoj domeni D ako je analitička u svakoj točki iz skupa D.*

Ako se prisjetimo Primjera 6, znamo da je funkcija $f(z) = z - i$ derivabilna na cijeloj svojoj domeni, što znači da je derivabilna u svakoj točki svoje domene. Prema prethodne dvije definicije slijedi da je ta funkcija analitička na cijeloj svojoj domeni. Ako je funkcija analitička, za nju možemo još reći da je holomorfna ili regularna. Napomenimo samo da ako je funkcija analitička u svakoj točki iz neke okoline točke z_0, ali ne i u samoj točki z_0, onda tu točku nazivamo singularna točka ili singularitet.

Teorem 5 (vidjeti [3], Theorem 3.5.1.)**.** *Ako su funkcije f i g analitičke na skupu D, onda su i funkcije $f+g$, $f-g$, fg i $\frac{f}{g}$ analitičke te vrijedi:*

a) $\dfrac{d}{dz}[f+g] = \dfrac{df}{dz} + \dfrac{dg}{dz}$,

b) $\dfrac{d}{dz}[f-g] = \dfrac{df}{dz} - \dfrac{dg}{dz}$,

c) $\dfrac{d}{dz}[fg] = f\dfrac{dg}{dz} + g\dfrac{df}{dz}$,

d) $\dfrac{d}{dz}\left[\dfrac{f}{g}\right] = \dfrac{g\dfrac{df}{dz} - f\dfrac{dg}{dz}}{g^2}$.

Dokaz.
Krećemo od pretpostavke da su f i g analitičke na cijelom skupu D - to znači da su analitičke u svakoj točki iz skupa D pa odaberimo proizvoljnu točku z_0. Koristeći se već ranije obrađenim Teoremima 2 i 4 dobivamo:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0}\frac{[f(z)+g(z)]-[f(z_0)+g(z_0)]}{z-z_0} &= \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} + \lim_{z\to z_0}\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}\\ &= f'(z_0)+g'(z_0)\end{aligned}$$

što je upravo ono što tvrdimo u a). Analogno bi išlo za razliku, tj. za b). Pređimo na c) dio:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0}\frac{[f(z)g(z)]-[f(z_0)g(z_0)]}{z-z_0} &= \lim_{z\to z_0}\frac{[f(z)g(z)]-[f(z_0)g(z_0)]+f(z)g(z_0)-f(z)g(z_0)}{z-z_0}\\ &= \lim_{z\to z_0} f(z)\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} + \lim_{z\to z_0} g(z_0)\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\\ &= f(z_0)g'(z_0)+g(z_0)f'(z_0)\end{aligned}$$

te sada za kraj pogledajmo i d) dio uz pretpostavku da je $g(z_0) \neq 0$. Zbog pretpostavke da $g'(z_0)$ postoji i Teorema 4 znamo da je g neprekidna u točki z_0. Imamo:

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} \frac{1}{z - z_0} \left[\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{g(z_0)} \right] &= \lim_{z \to z_0} -\frac{1}{g(z_0)} \left[\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \right] \frac{1}{g(z)} \\ &= -\frac{g'(z_0)}{[g(z_0)]^2} \end{aligned}$$

iz čega vidimo da je

$$\left[\frac{1}{g(z)} \right]' = -\frac{g'(z)}{[g(z)]^2} \quad \text{za} \quad g(z) \neq 0,$$

a onda samo iskoristimo činjenicu da je $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ te primjenjujući svojstvo c) dobivamo tvrdnju d). $\square$

U prethodnom teoremu prošli smo kroz deriviranje zbroja, razlike, produkta i kvocijenta dvaju analitičkih funkcija. Još jedan čest i vrlo koristan matematički alat pri baratanju funkcijama je komponiranje funkcija. Pogledajmo što se događa s deriviranjem kompozicije dvaju analitičkih funkcija. Slijedeći teorem poznat je i po imenu *chain rule*.

Teorem 6 (vidjeti [3], Theorem 3.5.2.). *Ako je $\eta = g(z)$ analitička funkcija ovisna o z na domeni D s vrijednostima u R te ako je $w = f(\eta)$ analitička funkcija ovisna o η na domeni R, onda je $w = f[g(z)]$ analitička funkcija ovisna o z na domeni D i ima derivaciju danu s :*

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\eta} \cdot \frac{d\eta}{dz}.$$

Dokaz.
Pogledati dokaz Teorema 3.5.2. u [3], stranica 81. $\square$

2.1 Cauchy-Riemannovi uvjeti

U prethodnim razmatranjima ustanovili smo kako funckiju kompleksne varijable možemo promatrati i kao dvije funkcije dvaju realnih varijabli te ćemo se time ovdje koristiti. Sljedeći teorem govori nam o nužnom uvjetu potrebnom da bi funckija bila analitička.

Teorem 7 (vidjeti [4], Theorem 3.4.). *Pretpostavimo da je $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ diferencijabilna funkcija u točki $z = x + iy$. Tada u točki z postoje prve parcijalne derivacije funkcija u i v te one zadovoljavaju Cauchy-Riemannove jednadžbe:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad i \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Dokaz.
Zapišemo li $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ i $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, onda slijedi:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x + i\Delta y}. \end{aligned}$$

U teoremu smo pretpostavili da postoji derivacija u točki z, tj, gornji limes postoji i onda Δz može težiti ka nuli iz nama "pogodnog" smjera. Odaberimo da Δz teži ka nuli u horizotnalnom smjeru, točnije promjena se događa samo po x-osi pa imamo da je $\Delta z = \Delta x$, a $\Delta y = 0$ upravo iz razloga što se promjena događa samo po x-osi. Tada imamo:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) + iv(x+\Delta x, y) - u(x,y) - iv(x,y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Kako postoji $f'(z)$, to znači da u zadnjoj jednakosti postoje oba limesa, a upravo ti limesi su ništa drugo nego definicija parcijalne derivacije prvog reda funkcija u i v po varijabli x. Za sada znamo kako postoje $\frac{\partial u}{\partial x}$ i $\frac{\partial v}{\partial x}$ te da je $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$. Mogli bi sada promatrati slučaj kada Δz teži ka nuli po vertikali, točnije slučaj kada je $\Delta x = 0$ te $\Delta z = i\Delta y$. Tada imamo:

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{i\Delta y}.$$

Kako postoji $f'(z)$, to znači da postoje oba limesa u zadnjoj jednakosti, a upravo ti limesi su ništa drugo nego definicija parcijalne derivacije prvog reda funkcija u i v po varijabli y. Sada znamo još i da postoje $\frac{\partial u}{\partial y}$ i $\frac{\partial v}{\partial y}$ te da je $f'(z) = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$. Izjednačimo li sada realne i imaginarne djelove obaju izraza za $f'(z)$ dobivamo još i da je :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{i} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

□

U samom teoremu krećemo s pretpostavkom da je funkcija f u nekoj točki diferencijabilna pa taj teorem ne možemo koristiti kako bi odredili je li funkcija diferencijabilna u nekoj točki, ali možemo ga koristiti kako bismo otkrili gdje nije diferencijabilna. Također, iz ovog teorema možemo zaključiti kako odabir funkcija u i v kod analitičke funkcije $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ne može biti proizvoljan jer odgovarajuće parcijalne derivacije moraju biti jednake.

Primjer 8. *Pogledajmo funkcije:*

a) $f(z) = z - i$,

b) $g(z) = |z|$.

Rješenje:

a) Ako zapišemo $z = x + iy$, imamo $f(x+iy) = x + iy - i = x + i(y-1)$. Ako to razdvojimo na realni i imaginarni dio dobivamo $u(x,y) = x$ i $v(x,y) = y - 1$. Za ovu funkciju već znamo da je analitička pa provjerimo vrijede li Cauchy-Riemannovi uvjeti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 1 \quad \text{te} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \quad \text{te} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1. \end{aligned}$$

Iz ovoga je očito

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{i} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

i vidimo da su Cauchy-Riemannovi uvjeti zadovoljeni.

b) Ako zapišemo $z = x + iy$, imamo $g(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ako to razdvojimo na realan i imaginaran dio, dobivamo $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ i $v(x, y) = 0$. Pogledamo li parcijalne derivacije funkcija u i v dobivamo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{te} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{te} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

iz čega je očito da Cauchy-Riemannovi uvjeti nisu ispunjeni. Kako su ti uvjeti nužni za analitičnost funkcije f, slijedi da $f(z) = |z|$ nije analitička funkcija.

Upoznali smo nužan uvjet za analitičnost proizvoljne funkcije f, odnosno znamo da su ispunjeni Cauchy-Riemannovi uvjeti kada je funckija analitička. Upoznajmo se sada s dovoljnim uvjetom za analitičnost funkcije f.

Teorem 8 (vidjeti [3], Theorem 3.6.2.). *Funkcija $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ je analitička na svojoj domeni D ako postoje parcijalne derivacije $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$, neprekidne su i zadovoljavaju Cauchy-Riemannove uvjete.*

Dokaz.
Pogledati dokaz Teorema 3.6.2. u [3], stranica 85. □

Pogledajmo već dosada analiziranu analitičku funkciju $f(z) = z - i$. Da dosada nismo zaključili da je analitička, iz prethodnog teorema to bi bilo vrlo lako zaključiti. Naime, iz Primjera 8 znamo da $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ postoje, da su one jednake konstantama (1 ili 0) pa su kao takve to neprekidne funkcije i vidjeli smo da zadovoljavaju Cauchy-Riemannove uvjete pa ponovno dolazimo do zaključka da funkcija $z - i$ je analitička. Kako bi nam prethodni teorem bio jasniji, pogledajmo njegovu direktnu primjenu.

Primjer 9. *Provjerimo je li funkcija $f(z) = \frac{z^2 - 2z + 1}{3}$ analitička funkcija.*

Rješenje: Zapišemo li $z = x + iy$, dobivamo

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{(x + iy)^2 - 2(x + iy) + 1}{3} = \frac{x^2 + i2xy - y^2 - 2x - i2y + 1}{3} \\ &= \frac{x^2 - y^2 - 2x + 1}{3} + i\frac{2xy - 2y}{3} \end{aligned}$$

odakle vidimo da je $u(x, y) = \frac{x^2 - y^2 - 2x + 1}{3}$ i $v(x, y) = \frac{2xy - 2y}{3}$. Parcijalne derivacije funkcija u i v su slijedeće:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x - 2}{3} \quad \text{te} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2y}{3},$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2y}{3} \quad \text{te} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2x - 2}{3}.$$

Vidimo da one postoje te da je svaka od njih pravac, a pravci su neprekidne funkcije. Sada imamo zadovoljeno dvije trećine uvjeta koji moraju biti ispunjeni da bi funkcija bila analitička. Provjerimo još vrijede li Cauchy-Riemannovi uvjeti. Jasno se vidi da je $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ i $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Dakle, funkcija f je analitička.

Ovdje valja spomenuti još jedan teorem koji nam iz analitičnosti funkcije govori ponešto i o njezinim derivacijama te koji će nam koristiti u daljnjim razmatranjima.

Teorem 9 (vidjeti [3], Teorem 5.13.1.). *Neka je funkcija f analitička na cijeloj svojoj domeni D. Tada postoje sve derivacije funkcije f i one su analitičke na cijelom skupu D.*

Dokaz.
Pogledati dokaz Teorema 5.13.1. u [3], stranica 185. □

Kompleksne brojeve možemo prikazati u više oblika, a među njima je i polarni oblik $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdje je r modul kompleksnog broja, a φ argument kompleksnog broja (za dodatni podsjetnik pogledati poglavlje 1.5. Polar form of Complex Numbers u [3], stranice 14. i 15.). Tada $f(z)$ možemo zapisati kao $f(z) = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi)$. Postoje i Cauchy-Riemannovi uvjeti u polarnom obliku te oni izgledaju ovako:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi},$$

a derivaciju funkcije f onda možemo zapisati na slijedeći način:

$$f'(z) = e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right).$$

2.2 Harmonijske funkcije i Laplaceova parcijalna diferencijalna jednadžba

U prethodnim razmatranjima ustanovili smo da odabir funkcija u i v kod analitičke funkcije $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ne može biti proizvoljan baš zbog toga što one moraju zadovoljavati Cauchy-Riemannove uvjete - od trenutka kada odlučimo kako će izgledati realni dio funkcije f, tj. kako će izgledati u zapravo smo postavili uvjet na to kako mora izgledati imaginaran dio funkcije f, tj. kako mora izgledati v. Prema Teoremu 9 znamo da ako je f analitička funkcija na svojoj domeni D, onda derivacije $f', f'', \ldots$ postoje na skupu D, a ono nama bitnije - postoje parcijalne derivacije svakog reda funkcija u i v i sve one su neprekidne funkcije na skupu D. Deriviranjem Cauchy-Riemannovih uvjeta dobivamo:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{7}$$

a onda koristeći se Schwarzovim teoremom znamo da je $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$ te iz (7) i Schwarzovog teorema slijedi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{8}$$

Upravo jednadžbu (8) nazivamo Laplaceova parcijalna diferencijalna jednadžba.

Definicija 10. *Funkciju u dvaju realnih varijabli zovemo harmonijska funkcija na domeni D ako za sve $x, y \in D$ postoje sve druge parcijalne derivacije, one su neprekidne te zadovoljavaju Laplaceovu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu.*

Slijedeći teorem daje nam poveznicu između analitičke funkcije kompleksne varijable i harmonijskih funkcija realnih varijabli.

Teorem 10 (vidjeti [3], Teorem 3.7.1.)**.** *Ako je $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analitička funkcija na domeni D, onda su u i v harmonijske funkcije na skupu D.*

Dokaz.
U gornjem proučavanju vidjeli smo kako za realan dio funkcije $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ Laplaceova parcijalna diferencijalna jednadžba vrijedi. Ako pomnožimo funkciju f sa $-i$,onda je v realan dio analitičke funkcije $-if$ te i za nju vrijedi Laplaceova parcijalna diferencijalna jednadžba. Kako je f analitička funkcija, onda prema Teoremu 9 znamo da postoje sve derivacije funkcije f, tj. sve derivacije funkcija u i v te da su one analitičke na skupu D. Tada iz definicije analitičnosti i Teorema 4 slijedi da su te derivacije neprekidne. Iz svega navedenog zaključujemo da su funkcije u i v harmonijske funkcije. □

Ovaj teorem najbolje pokazuje kako kod analitičke funkcije f moramo paziti pri odabiru funkcija u i v (odnosno pri odabiru realnog i imaginarnog djela funkcije f) jer za njih mora vrijediti Laplaceova parcijalna diferencijalna jednadžba, tj.:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Bitno je za uočiti to da ako je funkcija analitička, onda su realan i imaginarni dio te funkcije harmonijske funkcije, no ako su realan i imaginaran dio neke kompleksne funkcije harnomijske funkcije, to nije dovoljan uvjet da bi funkcija bila analitička.

Primjer 10. *Provjerimo jesu li realni i imaginarni dio funkcije $f(z) = z^2 - 2iz + 1$ harmonijske funkcije.*

Rješenje: Ako zapišemo $z = x + iy$, onda je $f(x + iy) = (x + iy)^2 - 2i(x + iy) + 1 = x^2 + i2xy - y^2 - i2x + 2y + 1 = (x^2 - y^2 + 2y + 1) + i(2xy - 2x)$ odakle sada slijedi da je $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2y + 1$ realan dio i $v(x, y) = 2xy - 2x$ odgovarajući imaginaran dio. Provjerimo zadovoljavaju li te funkcije Laplaceovu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 + (-2) = 0,$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 + 0 = 0.$$

Realan i imaginaran dio ove funkcije su polinomi prvog i drugog stupnja te oni imaju derivaciju svakog reda i te derivacije su neprekidne (jer su one ili polinom prvog stupnja ili kosntanta). Uz ove zaključke možemo tvrditi da su funkcije u i v harmonijske funkcije.

3 Elementarne funkcije kompleksne varijable

U elementarne funkcije ubrajamo: eksponencijalnu funkciju, logaritamsku funkciju, kompleksnu potenciju i trigonometrijske funkcije. Sve od navedenih funkcija su analitičke i malo ćemo ih detaljnije upoznati jer upravo koristeći činjenicu da su ove funkcije analitičke i koristeći se Teoremom 5 dobit ćemo dosta jak kriterij za ispitivanje analitičnosti bilo koje funkcije. Kako? Pokušat ćemo proizvoljne funkcije rastaviti na zbroj, razliku, produkt ili kvocijent naših elementarnih funkcija i zbog Teorema 5 znat ćemo odmah da je ta nova funkcija analitička. To je puno brže nego da provjeravamo sve uvjete iz definicije analitičnosti i tako si uvelike skraćujemo posao.

3.1 Eksponencijalna funkcija kompleksne varijable

Zapišemo li naš kompleksan broj z kao $z = x + iy$, onda imamo $e^z = e^{x+iy}$. Kako tu eksponencijalnu funkciju želimo definirati tako da vrijede ista pravila potenciranja kao i kod eksponencijalne funkcije realne varijable, iz činjenice da je u realnom svijetu $e^{x+y} = e^x e^y$ slijedi $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$. Sada se koristimo Eulerovom formulom

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

te iz tog dobivamo da je $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$. Upravo ovim izrazom definirana je eksponencijalna funkcija kompleksne varijable.

Teorem 11 (vidjeti [3], Teorem 4.1.1.). *Ako su $z_1 = x_1 + iy_1$ i $z_2 = x_2 + iy_2$ kompleksni brojevi, onda je $e^{z_1 z_2} = e^{z_1+z_2}$.*

Dokaz.
Iskoristimo najprije definiciju eksponencijalne funkcije kompleksne varijable:

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2).$$

Zatim iskoristimo komutativnost, adicijske formule i svojstva eksponencijalne funkcije realne varijable:

$$\begin{aligned} e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) &= e^{x_1+x_2}[\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 \\ &\quad + i(\sin y_1 \cos y_2 + \sin y_2 \cos y_1)] \\ &= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)] \\ &= e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

□

Još neka od svojstava eksponencijalne funkcije kompleksne varijable su:

a) za sve kompleksne brojeve z vrijedi $e^z \neq 0$;

b) $|e^{iy}| = 1$ i $|e^z| = e^x$;

c) nužan i dovoljan uvjet da $e^z = 1$ je taj da je $z = 2k\pi i$ pri čemu je k cijeli broj;

d) nužan i dovoljan uvjet da $e^{z_1} = e^{z_2}$ je taj da je $z_1 - z_2 = 2k\pi i$ pri čemu je k cijeli broj;

e) e^z je periodična funkcija s osnovnim periodom $2\pi i$, tj. $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z$.

Sve tvrdnje preuzete su iz Teorema 4.1.2. iz [3].

Sada kada malo bolje poznajemo eksponencijalnu funkciju kompleksne varijable, pokažimo da je ona stvarno analitička.

Teorem 12 (vidjeti [3], Teorem 4.1.3.)**.** *Eksponencijalna funkcija e^z je analitička za sve kompleksne brojeve z te vrijedi $\frac{d}{dz}(e^z) = e^z$.*

Dokaz.
Označimo eksponencijalnu funkciju kao $f(z) = e^z$. Zapišemo li $z = x + iy$, dobivamo da je $f(z) = f(x + iy) = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$. Ovako zapisanu funkciju možemo razdvojiti na realan i imaginaran dio te dobiti dvije funkcije dvaju realnih varijabli. Stoga stavimo da $u(x, y) = e^x \cos y$ i $v(x, y) = e^x \sin y$. Parcijalne derivacije funkcija u i v postoje i vrijedi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y.$$

One su produkt neprekidnih funkcija pa su prema Teoremu 3 i one neprekidne. Sada još moramo provjeriti vrijede li Cauchy-Riemannovi uvjeti:

$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y$ mora biti jednako $\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$ što i je pa je ovaj uvjet ispunjen;
$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y$ mora biti jednako $-\frac{\partial v}{\partial x} = -(e^x \sin y)$ što vidimo da je pa je i ovaj uvjet ispunjen.

Iz svega navedenog slijedi da je eksponencijalna funckija analitička. Prema prethodnim razmatranjima znamo da $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$ i onda slijedi:

$$\frac{d}{dz}(e^z) = f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z.$$

Time smo pokazali sve tvrdnje ovog teorema. □

3.2 Logaritamska funkcija kompleksne varijable

Pogledajmo jednadžbu $e^z = w$ gdje je w kompleksan broj različit od 0. Kako bi si pojednostavili rješavanje ove jednadžbe, stavimo da je $z = x+iy$ i zapišimo oba kompleksna broja preko eskponencijalne funkcije:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}.$$

Uz oznaku da je r modul od w i φ argument od w slijedi

$$w = re^{i\varphi}.$$

Znamo da su dva kompleksna broja jednaka ako su im jednaki moduli i argumenti pa iz prethodnog raspisa slijedi $e^x e^{iy} = re^{i\varphi}$ odakle vidimo da $e^x = r$ i $y = \varphi + 2n\pi$ (jer su sinus i kosinus periodičke funkcije s osnovnim periodom 2π), gdje je n cijeli broj. Kako tražimo naš z, cilj nam je pronaći kako izgledaju imaginaran i realan dio. Imaginaran smo već dobili, no realan još nemamo. Pogledajmo:

$$\begin{aligned} e^x &= r \quad \backslash \ln \\ \ln e^x &= \ln r \\ x &= \ln r. \end{aligned}$$

Sada znamo da je z koji zadovoljava $e^z = w$ oblika $z = \ln r + i(\varphi + 2n\pi)$, a zbog 2π periodičnosti vidimo da taj z nije jedinstven već postoji beskonačno mnogo rješenja te jednadžbe.

Teorem 13 (vidjeti [3], Teorem 4.4.1.)**.** *Za bilo koji kompleksan broj $w \neq 0$ postoji kompleksan broj z takav da je $e^z = w$. Točnije, jedan takav kompleksan broj z je $\ln|z| + i \arg z$, a bilo koji takav z je dan s $\ln|z| + i \arg z + 2n\pi i$, gdje je n cijeli broj.*

Dokaz.
Kako je w kompleksan broj, znamo da ga možemo prikazati preko njegovog modula i argumenta. Označimo modul od w s $|w|$ te argument od w s $\arg w = \varphi$ pri čemu $|w| > 0$, $\pi < \varphi \leq \pi$ (ove granice postavljamo kako bi kompleksni logaritam bio neprekidna funkcija). [Za više informacija pogledati Problem 53 u [4]]. Sada imamo:

$$e^{\ln|w| + i \arg w} = e^{\ln|w|} e^{i \arg w} = e^{\ln|w|} e^{i\varphi}.$$

Prvi dio izraza poznajemo još iz realnog svijeta (kad pogledamo $e^{\ln|w|}$,$|w|$ je realan broj i tu se radi o realnom logaritmu) i kako je inače $e^{\ln x} = x$ tako je ovdje $e^{\ln|w|} = |w|$. Slijedi da je $e^{\ln|w| + i \arg w} = |w|e^{i\varphi} = w$ pa iz toga slijedi da je $z = \ln|w| + i \arg|w|$ rješenje od $e^z = w$ čime smo pokazali jedan dio tvrdnje teorema. Za drugi dio tvrdnje teorema pretpostavimo da su w i w_1 rješenja jednadžbe $e^w = z$. Iz toga slijedi da je $e^{w_1} = e^w$ te kada podijelimo s e^w dobivamo $e^{w_1 - w} = 1$. Iz svojstava eksponencijalne funckije slijedi da je $w_1 - w = 2n\pi i$ iz čega vidimo da je $w_1 = w + 2n\pi i$ i time smo pokazali sve tvrdnje ovog teorema. $\square$

Upravo izrazom $\ln r + i(\varphi + 2n\pi)$, gdje je $|w| > 0, \pi < \varphi \leq \pi$ definiran je kompleksni logaritam. Izraz $\ln|w| + i \arg w$ zovemo glavna vrijednost ili glavna grana logaritma. Uočimo kako to dobijemo kada uvrstimo da je $n = 0$ pa se to zove još i nulta grana. Izraz $\ln|w| + i \arg w + 2n\pi$ zovemo n-ta grana logaritma. Neka od svojstava kompleksnog logaritma, gdje su z_1 i z_2 kompleksni brojevi te n cijeli broj, su:

a) $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$;

b) $\ln\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \ln z_1 - \ln z_2$;

c) $\ln z_1^n = n \ln z_1$.

Sve tvrdnje preuzete su iz Teorema 4.3. iz [4].

Sada kada malo bolje poznajemo logaritamsku funkciju kompleksne varijable, pokažimo da je ona analitička.

Teorem 14 (vidjeti [3], Teorem 4.4.3.). *Glavna grana kompleksnog logaritma $f(z) = \ln|z| + i \arg z$ je analitička funkcija i njena derivacija dana je s $f'(z) = \frac{1}{z}$.*

Dokaz.
Zapišimo kompleksan broj $z = re^{i\varphi}$ pri čemu je $\pi < \varphi \leq \pi$, $r > 0$. Sada je $f(z) = \ln|z| + i \arg z = \ln r + i\varphi$. Odavde vidimo kako je realan dio funkcije $u(r, \varphi) = \ln r$, a imaginaran $v(r, \varphi) = \varphi$. Parcijalne derivacije funkcija u i v postoje i vrijedi:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 1.$$

Sve ove parcijalne derivacije su neprekidne funkcije (jer se radi ili o konstantnim funkcijama ili o racionalnoj funkciji koja je dobro definirana). Provjerimo još Cauchy-Riemannove uvjete:

$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}$ mora biti jednako $\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \cdot 1 = \frac{1}{r}$ što i je pa je ovaj uvjet ispunjen;
$\frac{\partial v}{\partial r} = 0$ mora biti jednako $-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{1}{r} \cdot 0 = 0$ što vidimo da je pa je i ovaj uvjet ispunjen.

Iz svega navedenog slijedi da je logaritamska funkcija analitička. Pogledajmo i derivaciju:

$$f'(z) = e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{e^{i\varphi}}\left(\frac{1}{r} + i \cdot 0\right) = \frac{1}{re^{i\varphi}} = \frac{1}{z}.$$

Dakle, teorem je u potpunosti dokazan. $\square$

Na isti način na koji smo pokazali analitičnost glavne grane logaritma mogli bi pokazati i analitičnost drugih grana te bi na analogan način mogli doći do zaključka da je derivacija bilo koje grane logaritma jednaka $\frac{1}{z}$.

3.3 Kompleksna potencija

Definicija 11. *Ako je $z \neq 0$ i w bilo koji kompleksni broj, definiramo z^w kao $z^w = e^w \log z$, gdje je $\log z = \ln|z| + i \arg z + 2n\pi i, -\pi < \arg z \leq \pi, n \in \mathbb{Z}$.*

Kako je n cijeli broj $e^{w \log z} = e^{w(\ln|z| + i \arg z + 2n\pi i)}$ ima beskonačno mnogo vrijednosti. Glavna vrijednost bit će $e^{\log z}$ pri čemu pod $\log z$ mislimo na glavnu vrijednost logaritma. Iz same definicije kompleksne potencije, vidimo koliko je ta funkcija usko vezana s logaritamskom funkcijom. Neka od svojstava ove funkcije su:

a) $z^{w_1}z^{w_2} = z^{w_1+w_2}$, gdje je $z \neq 0, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$;

b) $(z_1z_2)^w = {z_1}^w {z_2}^w e^{2\pi i w n_1(z_1,z_2)}$;

c) $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^w = \dfrac{{z_1}^w}{{z_2}^w} e^{2\pi i w n_2(z_1,z_2)}$,

pri čemu su $n_1(z_1,z_2)$ i $n_2(z_1,z_2)$ cijeli brojevi definirani u Teoremu 4.4.2. u [3]:

$$n_1(z_1,z_2) = \begin{cases} -1, & \text{ako} \quad \pi < \arg z_1 + \arg z_2 \leq 2\pi, \\ 0, & \text{ako} \quad -\pi < \arg z_1 + \arg z_2 \leq \pi, \\ 1, & \text{ako} \quad -2\pi < \arg z_1 + \arg z_2 \leq -\pi \end{cases},$$

$$n_2(z_1,z_2) = \begin{cases} -1, & \text{ako} \quad \pi < \arg z_1 - \arg z_2 < 2\pi, \\ 0, & \text{ako} \quad -\pi < \arg z_1 - \arg z_2 \leq \pi, \\ 1, & \text{ako} \quad -2\pi < \arg z_1 - \arg z_2 \leq -\pi \end{cases}.$$

Sve tvrdnje preuzete su iz Teorema 4.4.4. i Teorema 4.4.5 iz [3].

Teorem 15 (vidjeti [3], Teorem 4.4.6.)**.** *Funkcija z^w, gdje je w bilo koji fiksni kompleksan broj, je analitička na domeni D koja se sastoji od svih točaka kompleksne ravnine osim onih koje leže na nepozitivnoj realnoj osi. Štoviše,*

$$\frac{d}{dz}(z^w) = wz^{w-1}.$$

Dokaz.
Pogledati objašnjenje na stranici 113. u [3]. □

3.4 Trigonometrijske funkcije kompleksne varijable

Do trigonometrijskih funkcija kompleksne varijable dolazimo zbrajanjem i oduzimanjem izraza

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

i

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i \sin x,$$

gdje je x realan broj. Zbrajanjem dobivamo: $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, a oduzimanjem: $\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$. Zamijenimo li realan broj x kompleksnim brojem z, dobivamo kompleksni kosinus i sinus:

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, z \in \mathbb{C}.$$

Preko kompleksnog kosinusa i sinusa definiramo i:

a)

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad \text{za} \quad z \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z};$$

b)

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} \quad \text{za} \quad z \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\,.$$

Neka od svojstava trigonometrijskih kompleksnih funkcija su:

a) $\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z;$

b) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1;$

c) $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2;$

d) $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2;$

e) $\sin 2z = 2\sin z \cos z, \quad \cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z;$

f) $\sin(z + 2\pi) = \sin z, \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z.$

Sada kada malo bolje poznajemo trigonometrijske funkcije kompleksne varijable, pokažimo da su one i analitičke.

Teorem 16 (vidjeti [3], Teorem 4.2.1.)**.** *Funkcije* $\sin z$ *i* $\cos z$ *su analitičke funkcije za svaki kompleksan broj z. Štoviše,*

$$\frac{d}{dz}(\sin z) = \cos z, \quad \frac{d}{dz}\cos z = -\sin z.$$

Dokaz.
Ako zapišemo $z = x + iy$, onda imamo $e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{ix-y}$, pa sada ako stavimo da je $a = -y + ix$ dobivamo da je $e^{iz} = e^{a}$, a to je ništa drugo nego eksponencijalna funkcija za koju prema Teoremu 12 znamo da je analitička . Na isti način raspišemo i e^{-iz} te analogno zaključimo da je i to analitička funkcija. Sada prema Teoremu 5 slijedi da su kompleksni kosinus i sinus kao zbroj odnosno kao razlika analitičkih funkcija ponovno analitičke funkcije. Pogledajmo sada derivaciju (za ovaj raspis koristimo se Teoremom 4.1.4. iz [3]):

$$\frac{d}{dz}\cos z = \frac{d}{dz}\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} \cdot \frac{i}{i} = \frac{-e^{iz} + e^{-iz}}{2i} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z,$$
$$\frac{d}{dz}\sin z = \frac{d}{dz}\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = i \cdot \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

□

Analitičnost funkcija tg i ctg slijedi iz prethodnog teorema i Teorema 5. Odgovarajuću derivaciju dobijemo prema pravilima deriviranja spomenutima u Teoremu 5.

Literatura

[1] J.W. Brown, R.V. Churchill, *Complex variables and Applications, Eighth Ediotion*, The McGraw-Hill Companies, New York, 2009.

[2] M. Ilić, *Kompleksni brojevi u svakodnevnom životu*, Sveučilište u Splitu, Pomorski fakultet, Split, 2017.

[3] L.L. Pennisi, *Elements of complex variables*, University of Illinois, Chicago, 1963.

[4] P.D. Shanahan, D.G. Zill, *A First Course in Complex Analysis with Applications*, Loyola Marymount University, Sudbury, 2003.