Frenetov trobrid krivulje

Cvijetović, Anđela

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Anđela Cvijetović

Frenetov trobrid krivulje

Završni rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Anđela Cvijetović

Frenetov trobrid krivulje

Završni rad

Mentor: doc.dr.sc. Ljiljana Primorac Gajčić

Osijek, 2021.

Sažetak

U ovom radu, bavit ćemo se Frenetovim trobridom krivulje $c : I \to \mathbb{R}^3$, $I \subseteq \mathbb{R}$, koji predstavlja desnu ortonormiranu bazu od $\mathbb{R}^3_{c(t)}$, tj. prostora svih vektora u točki $c(t)$, $t \in I$. Najprije ćemo navesti teoriju linearne algebre koju ćemo koristiti kroz rad. Uvest ćemo neke važne pojmove u diferencijalnoj geometriji, poput regularnosti krivulje, duljine luka krivulje, reparametrizacije, zakrivljenosti i torzije. Nakon definicije i osnovnih svojstava Frenetovog trobrida krivulje, navest ćemo Frenetove formule koje povezuju vektorska polja Frenetovog trobrida s njihovim derivacijama. Kroz nekoliko primjera, vidjet ćemo primjenu formula za zakrivljenost i torziju krivulje te odrediti Frenetov trobrid nekih krivulja.

Ključne riječi

regularna krivulja, parametar duljine luka, reparametrizacija krivulje, Frenetov trobrid krivulje, zakrivljenost, torzija, Frenetove formule

Frenet frame of a curve

Summary

In this work, we will consider Frenet frame of a curve $c : I \to \mathbb{R}^3$, $I \subseteq \mathbb{R}$, which represents right orthonormal base of $\mathbb{R}^3_{c(t)}$, space of all vectors in a point $c(t)$, $t \in I$. First of all, we are going to state theory of linear algebra that will be used throughout the work. We will introduce some important concepts in differential geometry, such as regular curve, arc length, reparametrization of a curve, curvature and torsion of a curve. After definition and basic properties of Frenet frame, we are going to list Frenet formulas, which connect vector fields of the Frenet frame with their derivations. Throughout few examples, we will see the application of formulas for curvature and torsion and also determine Frenet frame of some curves.

Key words

regular curve, arc length, reparametrization, Frenet frame of a curve, curvature, torsion, Frenet formulas

Sadržaj

Uvod

Svrha ovoga rada je definirati Frenetov trobrid krivulje. U prvom poglavlju dana je teorija linearne algebre koja se primjenjuje u radu. Navedene su definicije skalarnog i vektorskog produkta, te njihova svojstva i dana je definicija vektora u točki, odnosno vektorskog polja. U drugom poglavlju, dana je definicija krivulje, odnosno regularne krivulje, te je definirana reparametrizacija krivulje. Pokazano je da se svaka regularna krivulja može reparametrizirati specijalnim parametrom – parametrom duljine luka. Navedeni su i primjeri koji prate dane definicije. U trećem poglavlju definirana su vektorska polja tangente, normale i binormale krivulje, odnosno definiran je Frenetov trobrid krivulje. Dane su definicije Frenetovog trobrida za krivulje parametrizirane parametrom duljine luka, kao i za krivulje parametrizirane općim parametrom. Navedene su i definicije zakrivljenosti i torzije krivulje. Nadalje, dokazana su i određena svojstva Frenetovog trobrida, te su navedene formule koje povezuju vektorska polja takvog trobrida s njihovim derivacijama. Dana su i dva primjera određivanja Frenetovog trobrida krivulje.

1 Pojmovi iz linearne algebre

Najprije ćemo navesti definicije osnovnih operacija s vektorima kako bi bilo jednostavnije pratiti rad, [1].

Definicija 1. *Neka su $A = (x_1, y_1, z_1)$ i $B = (x_2, y_2, z_2)$ dvije točke u prostoru $\mathbb{R}^3$. Tada udaljenost dvaju točaka označavamo sa $d(A, B)$ i računamo formulom*

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Definicija 2. *Neka je $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ vektor čija je početna točka $A = (x_1, y_1, z_1)$, a krajnja točka $B = (x_2, y_2, z_2)$. Normu (duljinu) vektora definiramo kao udaljenost između njegove početne i krajnje točke te označavamo $||\vec{v}|| = d(A, B)$. Dakle, norma vektora $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ dana je formulom*

$$||\vec{v}|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Svaki se vektor može na jedinstven način prikazati preko vektora baze. Pri tom obično koristimo zapis: $\vec{v} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$. Tada vrijedi:

$$a_x = x_2 - x_1, \quad a_y = y_2 - y_1, \quad a_3 = z_2 - z_1.$$

Prema tome, norma vektora $\vec{v} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = (a_x, a_y, a_z)$ računa se formulom

$$||\vec{v}|| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Definicija 3. *Neka su $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ i $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ vektori iz $\mathbb{R}^3$ i $\varphi = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$. Skalarni produkt (umnožak) vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednak je umnošku njihovih normi i kosinusa kuta između njih:*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \cos\varphi.$$

Formula po kojoj se također računa skalarni produkt vektora $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ i $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Definicija 4. *Za nekolinearne vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ te φ kut među njima, definiramo vektorski produkt (umnožak) $\vec{a} \times \vec{b}$ kao vektor sa sljedećim svojstvima:*

1. $||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \sin\varphi$.
2. *$\vec{a} \times \vec{b}$ je okomit na vektor $\vec{a}$ i na $\vec{b}$.*
3. *Trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ čini desni sustav.*

Definicija 5. *Vektorski umnožak dvaju vektora zadanih svojim komponentama $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ i $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ definira se pomoću determinante*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

koja nam daje eksplicitni izraz $\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$.

Definicija 6. *Neka je*

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \\ \vec{b} &= b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}, \\ \vec{c} &= c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}. \end{aligned}$$

Mješoviti produkt (umnožak) vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ je skalar $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ kojeg definiramo pomoću determinante

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

te dobivamo eksplicitnu formulu za računanje mješovitog produkta

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (a_y b_z - a_z b_y)c_x + (a_z b_x - a_x b_z)c_y + (a_x b_y - a_y b_x)c_z.$$

Primijetimo, korištenjem formule za vektorski i skalarni produkt dobivamo isti izraz:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \left[(a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}\right] \cdot (c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}) \\ &= (a_y b_z - a_z b_y)c_x + (a_z b_x - a_x b_z)c_y + (a_x b_y - a_y b_x)c_z. \end{aligned}$$

1.1 Vektor u točki

U ovom dijelu ćemo navesti definiciju vektora u točki, odnosno tangencijalnog potprostora od $\mathbb{R}^n$ te vektorskog polja i način njegova zadavanja. Poznavanje ovih pojmova će nam olakšati daljnje razmatranje teme.

Definicija 7. *Uređeni par (p,v), $v \in \mathbb{R}^n$ nazivamo vektor u točki $p \in \mathbb{R}^n$ (ili tangencijalni vektor od $\mathbb{R}^n$ u točki p). Vektorski dio uređenog para (p,v) je vektor v.*
Oznaka za vektor v u točki p je v_p.
Skup svih vektora u točki $p \in \mathbb{R}^n$ označavamo sa $\mathbb{R}^n_p$ ili $T_p\mathbb{R}^n$ (tangencijalni potprostor od $\mathbb{R}_n$).

Definiranjem sljedećih operacija, skup svih vektora u točki p organiziramo u unitarni prostor:
-zbrajanje vektora u točki p:

$$v_p + w_p = (v + w)_p,$$

-množenje vektora sa skalarom λ:

$$\lambda v_p = (\lambda v)_p,$$

-skalarno množenje vektora u točki p:

$$v_p \cdot w_p = (v \cdot w)_p.$$

Ovako definiran unitarni prostor $\mathbb{R}^n_p$ ($T_p\mathbb{R}^n$) nazivamo prostorom vektora smještenih u točku p ili tangencijalnim prostorom od $\mathbb{R}^n$ u točki p.

Definicija 8. *Preslikavanje koje svakoj točki $p \in U$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, pridružuje vektor u toj točki*

$$X(p) = (p, x) = x_p$$

nazivamo vektorsko polje X na otvorenom skupu $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definicija 9. *Neka je $c : I \to \mathbb{R}^n$ krivulja. Preslikavanje koje svakom $t \in I$ pridružuje vektor y(t) u točki c(t) zovemo vektorsko polje duž krivulje c.*

Dakle, vektorsko polje zadajemo kao vektorsku funkciju skalarne varijable.

2 Krivulje

2.1 Definicija i primjeri

Krivulju promatramo kao skup točaka u ravnini ili u prostoru. Najjednostavnije krivulje koje poznajemo su pravac, parabola, kružnica...
Uobičajeno je krivulju $c : I \to \mathbb{R}^3$, gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval, zapisati pomoću vektorske jednadžbe

$$c(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$$

ili pomoću parametarske jednadžbe

$$x = x(t); y = y(t); z = z(t).$$

Navedimo sada definiciju krivulje kako bismo mogli promatrati njena svojstva te uvedimo neke od osnovnih pojmova koje vežemo uz krivulju.

Definicija 10. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval. Glatko preslikavanje $c : I \to \mathbb{R}^n$ nazivamo krivulja (parametrizirana krivulja) u $\mathbb{R}^n$.*

Parametriziranu krivulju fizikalno interpretiramo kao trag koji čestica ostavlja pri gibanju prostorom, u vremenu t. Dakle, jednadžba $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ predstavlja česticu koja se u trenutku t nalazi u točki $(x(t), y(t), z(t))$.
Za derivacije krivulje $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ćemo pisati:

$$\frac{dc}{dt}(t) = \dot{c}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)), \tag{1}$$

$$\frac{d^2c}{dt^2}(t) = \ddot{c}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)). \tag{2}$$

Analogno pišemo i označavamo za krivulje u $\mathbb{R}^n$.

Definicija 11. *Vektor derivacije krivulje c, u oznaci $\dot{c}(t)$, naziva se tangencijalni vektor ili vektor brzine krivulje c u točki $c(t)$. Skalar $||\dot{c}(t)||$ nazivamo brzinom krivulje c u točki $c(t)$.*

Primjer 1. *Pravac možemo zadati kao preslikavanje $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ izrazom*

$$c(t) = p \cdot t + q, \quad p, q \in \mathbb{R}^n.$$

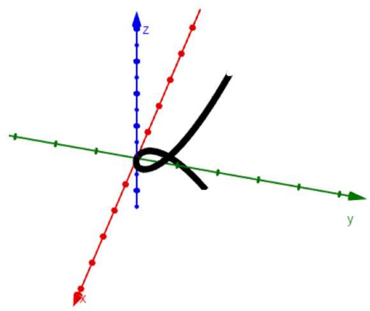
Primjer 2. *Kružnica u ravnini, radijusa r sa središtem u (p,q), zadana je preslikavanjem $c : \langle 0, 2\pi \rangle \to \mathbb{R}^2$,*

$$c(t) = (p + r \sin t, q + r \cos t).$$

Istaknimo da s prethodnim preslikavanjem zapravo nismo zadali cijelu kružnicu. Kako u definiciji krivulje domena mora biti otvoren skup, dobivenoj "kružnici" nedostaje točka $(p, q + r)$. Dakle, prethodnim preslikavanjem smo zapravo zadali dio kružnice.

Primjer 3. *Prostorna kubna parabola zadana je kao preslikavanje $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,*

$$c(t) = (t, t^2, t^3).$$



Slika 1: Prostorna kubna parabola

2.2 Regularna krivulja

U ovome ćemo poglavlju upoznati bitno svojstvo krivulje - regularnost. Ono je jedan od uvjeta za definiranje Frenetovog trobrida krivulje, što je glavni cilj ovoga rada.

Definicija 12. *Za krivulju $c : I \to \mathbb{R}^n$ kažemo da je regularna u točki $t \in I$ ako je $\dot{c}(t) \neq 0$. Ako je $\dot{c}(t) \neq 0$ za svaki $t \in I$, onda krivulju nazivamo regularnom.*
Točku $t \in I$ u kojoj je $\dot{c}(t) = 0$ nazivamo singularnom.

Uvodeći pojam parametrizirane krivulje, smatrali smo da je krivulja parametrizirana općim parametrom t. Ipak, krivulja se može parametrizirati i specijalnim parametrom, parametrom duljine luka. Prije nego što navedemo takvu parametrizaciju, definirajmo najprije duljinu luka krivulje te reparametrizaciju parametrizirane krivulje.

Definicija 13. *Neka je $I = \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$ otvoren interval. Duljina luka krivulje $c : I \to \mathbb{R}^n$ je realan broj*

$$s = \int_a^b ||\dot{c}(u)||du.$$

Napomena 1. *Za krivulju $c : I \to \mathbb{R}^n$ kažemo da je parametrizirana duljinom luka ili da je jedinične brzine ako je $||\dot{c}(t)|| = 1$, za svaki $t \in I$.*

Dakle,ako je $||\dot{c}(t)|| = 1$, za svaki $t \in I$ znači da čestica po krivulji putuje jediničnom brzinom. To povlači da je prijeđeni put (označimo ga sa s) jednak proteklom vremenu (oznaka t). Prema tome, može se smatrati da je krivulja parametrizirana duljinom luka s umjesto vremenom t. Odatle dolazi naziv za takve krivulje, a i oznaka. Naime, za krivulje parametrizirane duljinom luka uobičajeno je pisati $c(s)$ umjesto $c(t)$, te $c'(s)$ umjesto $\dot{c}(t)$.

Pokažimo računski da za krivulje parametrizirane duljinom luka vrijedi da je duljina luka krivulje c jednaka duljini intervala I:

$$s(t) = \int_a^b ||\dot{c}(u)||du = \int_a^b 1 \cdot du = b - a.$$

Definicija 14. *Ako postoji glatki difeomorfizam $\varphi : \widetilde{I} \to I$ takav da vrijedi $\tilde{c} = c \circ \varphi$ tj.*

$$\tilde{c}(\tilde{t}) = c(\varphi(\tilde{t})) = c(t), \tilde{t} \in \widetilde{I}, t \in I,$$

tada se krivulja $\tilde{c} : \widetilde{I} \to \mathbb{R}^n$ naziva reparametrizacijom parametrizirane krivulje $c : I \to \mathbb{R}^n$.

Napomena 2. *Ako je krivulja c regularna, onda je i njena reparametrizacija $\tilde{c}$ također regularna. Pokažimo to:*

- *Derivacija inverza postoji i neprekidna je:*

$$\frac{d(\varphi^{-}1)(t)}{dt} = \dot{\varphi^{-}1}(t) = \frac{1}{\dot{\varphi}(\tilde{t})}$$

pa slijedi $\varphi(\tilde{t}) \neq 0$.

- *Korištenjem pravila za derivaciju kompozicije imamo:*

$$\dot{\tilde{c}}(\tilde{t}) = \frac{d\tilde{c}}{d\tilde{t}}(\tilde{t}) = \frac{d(c(\varphi(\tilde{t})))}{d\tilde{t}} = \frac{dc(t)}{dt}\frac{d\varphi(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = \dot{c}(t) \cdot \dot{\varphi}(\tilde{t})$$

jer je c regularna ($\dot{c}(t) \neq 0$) i $\varphi(\tilde{t}) \neq 0$ slijedi $\dot{\tilde{c}}(\tilde{t}) \neq 0$.

Postavlja se pitanje kakva se krivulja može reparametrizirati duljinom luka. Odgovor nam daje idući teorem.

Teorem 1. *Svaka se regularna krivulja c može reparametrizirati duljinom luka (jediničnom brzinom).*

Dokaz: Neka je $c : I \to \mathbb{R}^n$ parametrizirana krivulja te neka je $s : I \to \mathbb{R}$ funkcija duljine luka definirana sa

$$s(t) = \int_a^t ||\dot{c}(u)||du.$$

Deriviranjem funkcije duljine luka imamo: $\dot{s}(t) = ||\dot{c}(t)|| > 0$ (zbog norme), pa slijedi da je s strogo rastuća funkcija.
Druga derivacija funkcije s postoji:

$$\ddot{s}(t) = \frac{\dot{c}(t) \cdot \ddot{c}(t)}{||\ddot{c}(t)||},$$

pa je s glatka i postoji inverz $t = t(s)$ koji je također glatka funkcija. Vrijedi:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\dot{s}} = \frac{1}{||\dot{c}(t)||} > 0.$$

Definirajmo funkciju $\tilde{c}(s) = c(t(s))$, dakle, krivulju c reparametriziramo funkcijom $t = t(s)$. Preostaje pokazati da parametrizacija $\tilde{c}$ ima jediničnu brzinu. Vrijedi:

$$||\dot{\tilde{c}}(s)|| = ||\dot{c}(t) \cdot t'(s)|| = ||\dot{c}(t)|| \cdot \frac{1}{||\dot{c}(t)||} = 1.$$

□

U nastavku pogledajmo reparametrizaciju duljinom luka nekih osnovnih krivulja.

Primjer 4. *Reparametrizirajmo duljinom luka pravac zadan sa $c(t) = (t, pt + q), p, q \in \mathbb{R}$ u $\mathbb{R}^2$.*
Odredimo najprije vektor prve derivacije krivulje c i njegovu normu.

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= (1, p), \\ ||\dot{c}(t)|| &= \sqrt{1 + p^2} \end{aligned}$$

Nađimo funkciju duljine luka:

$$s(t) = \int_0^t ||\dot{c}(u)||du = \int_0^t \sqrt{1 + p^2} \cdot du = \sqrt{1 + p^2} \cdot t.$$

Odredimo inverz:

$$t = t(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot s.$$

Sada imamo:

$$\tilde{c}(s) = c(t(s)) = (\frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot s, \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \cdot s + q).$$

Primjer 5. *Reparametrizirajmo duljinom luka kružnicu zadanu sa*

$$c(t) = (p + r\cos t, q + r\sin t), \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

gdje je r polumjer kružnice, a (p, q) njeno središte.
Odredimo vektor prve derivacije krivulje c i normu toga vektora.

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= (-r\sin t, r\cos t), \\ ||\dot{c}(t)|| &= \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos t} = r^2. \end{aligned}$$

Funkcija duljine luka:

$$s(t) = \int_0^t ||\dot{c}(u)||du = \int_0^t r \cdot du = r \cdot t \Longrightarrow t(s) = \frac{1}{r} \cdot s = \frac{r}{s}.$$

Sada je:

$$\tilde{c}(s) = c(t(s)) = (p + r\cos\frac{s}{r}, q + r\sin\frac{s}{r}), \quad s \in \langle 0, 2r\pi \rangle.$$

Primjer 6. *Reparametrizirajmo običnu cilindričnu spiralu $c(t) = (a\cos t, a\sin t, bt), t \in \mathbb{R}$, gdje su a i b konstante, $a > 0$.*
Odredimo najprije vektor prve derivacije krivulje c i njegovu normu.

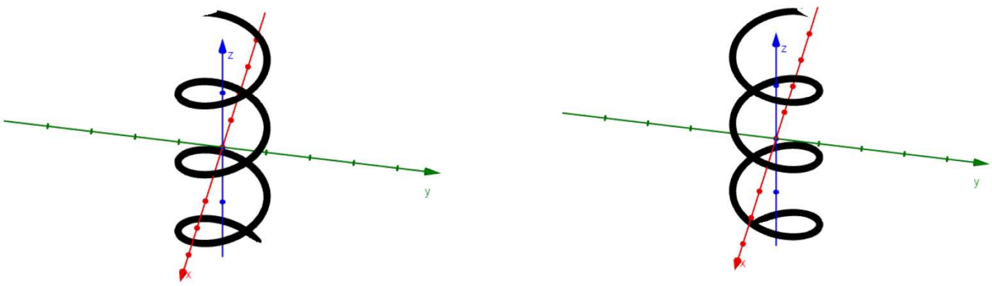
$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= (-a\sin t, a\cos t, b), \\ ||\dot{c}(t)|| &= \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos t + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}. \end{aligned}$$

Pronađimo funkciju duljine luka:

$$s(t) = \int_0^t ||\dot{c}(u)||du = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}du = \sqrt{a^2+b^2}\cdot t \Longrightarrow t(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot s.$$

Imamo:

$$\tilde{c}(s) = c(t(s)) = (a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}).$$



Slika 2: Prikaz desne (b>0) i lijeve (b<0) cilindrične spirale.

Napomena 3. *Prema teoriji, uvijek je moguće reparametrizirati krivulju parametrom duljine luka. Međutim, u praksi to nije uvijek moguće. Pri takvoj reparametrizaciji, može se dogoditi da se funkcija duljine luka ne može eksplicitno odrediti tj. da se integral ne može riješiti. Također, krivulju nećemo moći reparametrizirati duljinom luka ako se inverz funkcije duljine luka ne može eksplicitno odrediti.*

3 Frenetov trobrid

Nakon što smo upoznali pojam krivulje, regularnosti, parametrizacije krivulje te poznavajući neke osnovne operacije s vektorima, možemo definirati i izvesti polja Frenetovog trobrida za krivulje parametrizirane duljinom luka. Također, u obliku dvije propozicije, navest ćemo osnovna svojstva Frenetovog trobrida - ortonormiranost i neovisnost o reparametrizaciji.

Definicija 15. *Neka je $c : I \to \mathbb{R}^3$ regularna krivulja parametrizirana duljinom luka. Tangencijalno polje krivulje c definiramo formulom*

$$T(s) = c'(s).$$

Polje vektora glavnih normala definiramo kao

$$N(s) = \frac{c''(s)}{||c''(s)||}, ||c''(s)|| \neq 0,$$

a polje binormala kao

$$B(s) = T(s) \times N(s).$$

Definicija 16. *Uređena trojka $(T(s), N(s), B(s))$ zove se Frenetov trobrid krivulje c i čini desnu ortonormiranu bazu od $\mathbb{R}^3_{c(s)}$.*

Napomena 4. *Za $s_0 \in I$, vektore $T(s_0)$, $N(s_0)$ i $B(s_0)$ zovemo vektor tangente, vektor glavne normale i vektor binormale krivulje c u točki $c(s_0)$.*
Pravce određene tim vektorima zovemo tangentom, glavnom normalnom i binormalom krivulje c u točki $c(s_0)$.

3.1 Osnovna svojstva Frenetovog trobrida

Propozicija 1. *Neka je $c : I \to \mathbb{R}^3$ krivulja kojoj zakrivljenost ne iščezava. Frenetov trobrid $(T(s), N(s), B(s))$ je ortonormiran.*

Dokaz. Potrebno je pokazati da su polja Frenetovog trobrida međusobno okomita, te da su jedinične duljine.
Pokažimo da su polja T i N okomita. Kako je c parametrizirana duljinom luka, vrijedi:

$$c'(s) \cdot c'(s) = (c'(s))^2 = 1.$$

Deriviranjem imamo:

$$2 \cdot c'(s) \cdot c''(s) = 0.$$

Slijedi:

$$T \cdot N = 0.$$

Polje binormala B je okomito na T i N jer je definirano kao njihov vektorski produkt.
Preostaje pokazati da su polja Frenetovog trobrida jedinične duljine.

Uočimo da prema definiciji vrijedi $||T(s)|| = 1$ i $||N(s)|| = 1$. Kako je polje binormala B definirano kao $B = T \times N$, prema svojstvima vektorskog produkta imamo:

$$||B(s)|| = ||T(s) \times N(s)|| = ||T(s)|| \cdot ||N(s)|| \cdot \sin \angle(T(s), N(s)) = ||T(s)|| \cdot ||N(s)|| \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) = 1.$$

Time smo dokazali ortonormiranost Frenetovog trobrida. $\square$

Propozicija 2. *Frenetov trobrid ne ovisi o reparametrizaciji.*

Dokaz. Neka je $c : I \to \mathbb{R}^3$ krivulja parametrizirana parametrom duljine luka s te neka je $\tilde{c} : J \to \mathbb{R}^3$ reparametrizacija od c. Iz definicije reparametrizacije krivulje, postoji glatka bijekcija $\varphi : J \to I$ kojoj je inverz gladak takva da je $\tilde{c}(s) = c(\varphi(s))$ i $\varphi(s) > 0$, za svaki $s \in J$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\tilde{T}(s) &= \frac{\dot{\tilde{c}}(s)}{||\dot{\tilde{c}}(s)||} = \frac{\dot{c}(\varphi(s))\varphi'(s)}{||\dot{c}(\varphi(s))\varphi'(s)||} = \frac{\dot{c}(\varphi(s))\varphi'(s)}{||\dot{c}(\varphi(s))||\varphi'(s)} = \frac{\dot{c}(\varphi(s))}{||\dot{c}(\varphi(s))||} = T(\varphi(s)) \\
\tilde{N}(s) &= \frac{\dot{\tilde{T}}(s)}{||\dot{\tilde{T}}(s)||} = \frac{\dot{T}(\varphi(s))\varphi'(s)}{||\dot{T}(\varphi(s))\varphi'(s)||} = \frac{\dot{T}(\varphi(s))\varphi'(s)}{||\dot{T}(\varphi(s))||\varphi'(s)} = \frac{\dot{T}(\varphi(s))}{||\dot{T}(\varphi(s))||} = N(\varphi(s)) \\
\tilde{B}(s) &= \tilde{T}(s) \times \tilde{N}(s) = T(\varphi(s)) \times N(\varphi(s)) = B(\varphi(s))
\end{aligned}$$

i time smo pokazali da Frenetov trobrid ne ovisi o reparametrizaciji. $\square$

Uvedimo sada nazive za ravnine određene vektorima Frenetovog trobrida.

Definicija 17. *Neka je $c : I \to \mathbb{R}^3$ krivulja regularna u $s \in I$. Ravnina kroz točku $c(s)$ razapeta vektorima:*

1. *$T(s)$ i $N(s)$ naziva se oskulacijska ravnina u točki $c(s)$,*
2. *$T(s)$ i $B(s)$ naziva se rektifikacijska ravnina u točki $c(s)$,*
3. *$N(s)$ i $B(s)$ naziva se normalna ravnina u točki $c(s)$.*

Iz činjenice da je Frenetov trobrid ortonormiran slijedi da je $T(s)$ vektor normale normalne ravnine, $N(s)$ vektor normale rektifikacijske ravnine i $B(s)$ vektor normale oskulacijske ravnine.

3.2 Fleksija i torzija

U sljedećem poglavlju, definirat ćemo dvije veličine kojima možemo zadati krivulju - fleksiju(zakrivljenost) i torziju(sukanje).
Možemo naslutiti kako različite krivulje imaju različite zakrivljenosti. Na primjer, pravac kao ravna crta ima zakrivljenost jednaku 0, dok kružnica manjeg radijusa ima veću zakrivljenost od zakrivljenosti kružnice većeg radijusa.

Propozicija 3. *Ako je tangencijalni vektor krivulje $c : I \to \mathbb{R}^n$ konstantan, onda je krivulja pravac.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\dot{c}(t) = a, a \in \mathbb{R}^n$. Integracijom imamo:

$$c(t) = \int \dot{c}(t)dt = at + b, b \in \mathbb{R}^n.$$

Ako je $a \neq 0$, onda je krivulja c pravac s vektorom smjera a kroz točku b.
Ako je $a = 0$, onda c degenerira u točku. □

Ovom propozicijom naslućujemo da je smisleno zakrivljenost krivulje geometrijski definirati kao realnu funkciju koja opisuje promjenu jediničnog tangencijalnog vektora krivulje.

Definicija 18. *Neka je $c : I \to \mathbb{R}^3$ krivulja parametrizirana duljinom luka s. Tada funkciju $\kappa : I \to \mathbb{R}$ definiranu izrazom*

$$\kappa(s) = ||c''(s)||$$

nazivamo zakrivljenost ili fleksija krivulje c u točki c(s).

Prethodnu definiciju ćemo iskoristiti u Primjeru 7. za računanje zakrivljenosti obične cilindrične spirale.
Kako bismo potvrdili pretpostavku s početka Poglavlja 3.2 tj. da se radi o pravcu ako je zakrivljenost jednaka nuli, dokazat ćemo sljedeću propoziciju.

Propozicija 4. *Regularna krivulja je pravac ako i samo ako je $\kappa = 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je krivulja c pravac zadan standardnom parametrizacijom $c(s) = s + a, a \in \mathbb{R}^n$. Deriviranjem je: $c''(s) = 0$ i očito $\kappa = 0$.
Obratno, pretpostavimo li da je $\kappa = 0$, slijedi $c''(s) = 0$. Uzastopnim integriranjem, uz uvjet da je c parametrizirana duljinom luka, slijedi $c(s) = s + a$, $a \in \mathbb{R}^n$. □

Definirajmo sada za krivulje parametrizirane duljinom luka i sljedeću funkciju:

Definicija 19. *Funkcija $\tau : I \to \mathbb{R}$ definirana izrazom*

$$\tau(s) = -N(s) \cdot B'(s)$$

naziva se torzija ili sukanje krivulje c parametrizirane duljinom luka s.

Primjer 7. *Odredite Frenetov trobrid, zakrivljenost i torziju obične cilindrične spirale parametrizirane duljinom luka s.*

Obična cilindrična spirala parametrizirana općim parametrom t zadana je

$$c(t) = (a\cos t, a\sin t, b\,t), \quad a, b\,konst., a > 0.$$

U Primjeru 6. smo ju reparametrizirali duljinom luka s i imamo:

$$c(s) = (a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}).$$

Kako bismo odredili tangencijalno polje T i polje vektora glavnih normala N krivulje c, odredimo vektor prve i druge derivacije krivulje c te normu vektora druge derivacije.

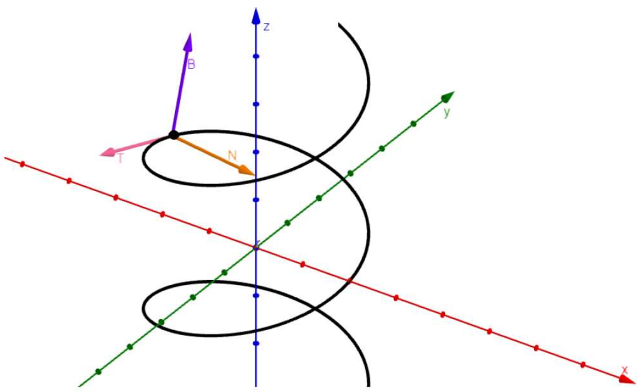
$$\begin{aligned}
c'(s) &= \Big(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot(-\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}), \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big)\\
c''(s) &= \Big(\frac{a}{a^2+b^2}\cdot(-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}), \frac{a}{a^2+b^2}\cdot(-\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}), 0\Big)\\
||c''(s)|| &= \sqrt{\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2}\cdot\cos^2\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{a^2}{(a^2+b^2)^2}\cdot\sin^2\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} + 0^2}\\
&= \sqrt{\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2}\cdot 1} = \frac{a}{a^2+b^2}
\end{aligned}$$

Koristeći izraze iz Definicije 15. slijedi:

$$\begin{aligned}
T(s) &= c'(s) = \Big(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot(-\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}), \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big),\\
N(s) &= \frac{c''(s)}{||c''(s)||} = \frac{1}{\frac{a}{a^2+b^2}}\cdot\Big(\frac{a}{a^2+b^2}\cdot(-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}), \frac{a}{a^2+b^2}\cdot(-\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}), 0\Big)\\
&= \Big(-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\Big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(s) &= T(s)\times N(s)\\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot(-\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}) & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ -\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 \end{vmatrix}\\
&= \vec{k}\Big(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin^2\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos^2\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big)\\
&- \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big(-\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\vec{i} - (-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}})\cdot\vec{j}\Big)\\
&= \Big(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big).
\end{aligned}$$

Ovime smo odredili Frenetov trobrid $(T(s), N(s), B(s))$ obične cilindrične spirale parametrizirane duljinom luka s.



Slika 3: Frenetov trobrid obične cilindrične spirale

Preostaje odrediti zakrivljenost κ i torziju τ.
Prema Definiciji 18., zakrivljenost κ krivulje c je dana s:

$$\kappa(s) = ||c''(s)|| = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Pronađimo derivaciju polja binormala B, kako bismo odredili torziju τ.

$$B'(s) = \Big(\frac{b}{a^2+b^2} \cdot \cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{a^2+b^2} \cdot \sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\Big).$$

Sada je:

$$\begin{aligned}
\tau(s) &= -N(s) \cdot B'(s) \\
&= -(-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}) \cdot \frac{b}{a^2+b^2} \cdot \cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} - (-\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}) \cdot \frac{b}{a^2+b^2} \cdot \sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} + 0 \\
&= \frac{b}{a^2+b^2} \cdot \cos^2\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{a^2+b^2} \cdot \sin^2\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
&= \frac{b}{a^2+b^2}.
\end{aligned}$$

Dakle, odredili smo zakrivljenost $\kappa(s) = \frac{a}{a^2+b^2}$ i torziju $\tau(s) = \frac{b}{a^2+b^2}$ obične cilindrične spirale parametrizirane duljinom luka s.

Obzirom da krivulju nije uvijek moguće eksplicitno reparametrizirati duljinom luka s, uvedimo formulu za zakrivljenost krivulja parametriziranih općim parametrom t.

Propozicija 5. *Neka je $c : I \to \mathbb{R}^3$ regularna krivulja parametrizirana općim parametrom t. Tada je njena zakrivljenost u točki $c(t)$ jednaka*

$$\kappa(t) = \frac{||\dot{c} \times \ddot{c}||}{||\dot{c}||^3}.$$

Dokaz. Znamo da vrijedi:

$$\kappa(t) = \tilde{\kappa}(s)$$

tj. zakrivljenosti krivulje c zadane općim parametrom t definirana je kao zakrivljenosti njene reparametrizacije $\tilde{c}$ parametrom duljine luka s, $c(t) = \tilde{c}(s)$. Deriviranjem ovog izraza imamo:

$$\tilde{c}' = \frac{d\tilde{c}}{ds} = \frac{dc}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \dot{c} \cdot \frac{dt}{ds}.$$

Zatim deriviranjem prethodnog izraza po varijabli s imamo:

$$\tilde{c}'' = \ddot{c} \cdot (\frac{dt}{ds})^2 + \dot{c} \cdot \frac{d^2t}{ds^2}.$$

Prema definiciji duljine luka krivulje ($s = \int_a^b ||\dot{c}(u)||du$), deriviranjem slijedi:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= ||\dot{c}(t)|| \\ \Longrightarrow \frac{dt}{ds} &= \frac{1}{||\dot{c}(t)||}. \end{aligned} \tag{3}$$

Složenim deriviranjem izraza (3) imamo:

$$\begin{aligned} \frac{d^2t}{ds^2} &= \frac{d(||\dot{c}||^{-1})}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \\ &= -\frac{\dot{c} \cdot \ddot{c}}{||\dot{c}(t)||^3} \cdot \frac{1}{||\dot{c}(t)||} \\ &= -\frac{\dot{c} \cdot \ddot{c}}{||\dot{c}(t)||^4}. \end{aligned}$$

Sada je:

$$\begin{aligned} \tilde{c}'' &= \ddot{c} \cdot \frac{1}{||\dot{c}||^2} + \dot{c} \cdot \Big(-\frac{\dot{c} \cdot \ddot{c}}{||\dot{c}||^4} \Big) \\ &= \frac{1}{||\dot{c}||^4} \Big(||\dot{c}||^2 \cdot \ddot{c} - (\dot{c} \cdot \ddot{c}) \cdot \dot{c} \Big) \\ &= \frac{1}{||\dot{c}||^4} \Big((\dot{c} \cdot \dot{c}) \cdot \ddot{c} - (\dot{c} \cdot \ddot{c}) \cdot \dot{c} \Big). \end{aligned}$$

Primjenimo sljedeću formulu: $a \times (b \times c) = (a \cdot c) \cdot b - (a \cdot b) \cdot c$ i imamo:

$$\tilde{c}'' = \frac{1}{||\dot{c}||^4} \cdot (\dot{c} \times (\dot{c} \times \ddot{c})).$$

Budući da su $\dot{c}$ i $\dot{c} \times \ddot{c}$ okomiti, slijedi:

$$\begin{aligned} ||\tilde{c}''|| &= \frac{1}{||\dot{c}||^4} \cdot ||\dot{c} \times (\dot{c} \times \ddot{c})|| \\ &= \frac{1}{||\dot{c}||^4} \cdot \Big(||\dot{c}|| \cdot ||\dot{c} \times \ddot{c}|| \cdot \sin \angle(\dot{c}, \dot{c} \times \ddot{c}) \Big) \\ &= \frac{||\dot{c} \times \ddot{c}||}{||\dot{c}||^3}. \end{aligned}$$

Dakle, imamo:

$$\kappa(t) = \tilde{\kappa}(s) = ||\tilde{c}''|| = \frac{||\dot{c} \times \ddot{c}||}{||\dot{c}||^3},$$

čime smo dokazali tvrdnju.

$\square$

U sljedećem primjeru, razmotrit ćemo zakrivljenost kružnice i ovisnost zakrivljenosti κ o radijusu r.

Primjer 8. *Zakrivljenost kružnice radijusa $r>0$ je konstantna i jednaka $\frac{1}{r}$.*
Neka je $c : \langle 0, 2\pi \rangle \to \mathbb{R}^3$ kružnica zadana s $c(t) = s + r\cos t \cdot r_1 + r\sin t \cdot r_2$, pri čemu je $s \in \mathbb{R}^3$ vektor središta kružnice, a $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^3$ ortonormirani vektori koji razapinju ravninu u kojoj leži kružnica c. Deriviranjem imamo:

$$\dot{c}(t) = -r\sin t \cdot r_1 + r\cos t \cdot r_2,$$

$$\ddot{c}(t) = -r\cos t \cdot r_1 - r\sin t \cdot r_2.$$

Sada je:

$$\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t) = r^2 \sin^2 t \cdot (r_1 \times r_2) - r^2 \cos^2 t \cdot (r_2 \times r_1).$$

Kako je $a \times b = -(b \times a)$, slijedi:

$$\begin{aligned}
\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t) &= r^2 \cdot (r_1 \times r_2), \\
||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)|| &= r^2 \cdot ||r_1 \times r_2|| = r^2, \\
||\dot{c}(t)||^2 &= \dot{c}(t) \cdot \dot{c}(t) = r^2 \sin t \cdot ||r_1||^2 - 2r^2 \sin t \cos t (r_1 \cdot r_2) + r^2 \cos^2 t \cdot ||r_2||^2 = r^2, \\
\Rightarrow ||\dot{c}(t)||^3 &= r^3.
\end{aligned}$$

Uvrstimo u formulu za zakrivljenost:

$$\kappa(t) = \frac{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||}{||\dot{c}(t)||^3} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}$$

i dobili smo da je zakrivljenost kružnice obrnuto proporcionalna radijusu kružnice.

Ranije smo uveli funkciju torzije za krivulje parametrizirane duljinom luka s. Definirajmo sada torziju za krivulje parametrizirane općim parametrom t.

Propozicija 6. *Neka je $c : I \to \mathbb{R}^3$ krivulja parametrizirana općim parametrom t, kojoj zakrivljenost ne iščezava. Tada vrijedi:*

$$\tau = \frac{(\dot{c} \times \ddot{c}) \cdot \dddot{c}}{||\dot{c} \times \ddot{c}||^2} = \frac{det(\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c})}{||\dot{c} \times \ddot{c}||^2}.$$

3.3 Frenetove formule

U nastavku ćemo za krivulje parametrizirane duljinom luka s izvesti vezu između vektorskih polja Frenetovog trobrida i njihovih derivacija, koje zajedničkim imenom zovemo Frenetove formule.

Teorem 2 (Frenetove formule)**.** *Neka je c krivulja parametrizirana duljinom luka s kojoj zakrivljenost κ ne iščezava i neka je τ njezina torzija. Tada vrijedi:*

$$\begin{aligned} T' &= \kappa \cdot N, && (4) \\ N' &= -\kappa \cdot T + \tau \cdot B, && (5) \\ B' &= -\tau \cdot N. && (6) \end{aligned}$$

Dokaz. Neka je $T' = a_1 \cdot T + a_2 \cdot N + a_3 \cdot B$, gdje su a_1, a_2, a_3 neke glatke realne funkcije. Po definiciji normalnog vektorskog polja imamo:

$$N = \frac{c''}{||c''||} = \frac{T'}{\kappa} \Longrightarrow T' = \kappa \cdot N.$$

Zbog jedinstvenosti prikaza vektora pomoću vektora baze, slijedi: $a_1 = a_3 = 0, a_2 = \kappa$ i time smo pokazali izraz (4).
Neka je sada $N' = b_1 \cdot T + b_2 \cdot N + b_3 \cdot B$. Pomnožimo li ovaj izraz skalarno sa N, dobivamo $N \cdot N' = b_2$. Kako je N jedinično polje, $N^2 = 1$, deriviranjem je $N \cdot N' = 0$. Sada slijedi $b_2 = 0$.
Nadalje, primjetimo da iz $T \cdot N = 0$ deriviranjem slijedi:

$$T' \cdot N + T \cdot N' = 0 \Longrightarrow T \cdot N' = -T' \cdot N = -a_2 = -\kappa.$$

Prema tome je $b_1 = -\kappa$.
Zatim, $N \cdot B = 0$, pa deriviranjem imamo:

$$N' \cdot B + B \cdot N = 0 \Longrightarrow N' \cdot B = -N \cdot B' = \tau.$$

Zaključujemo: $b_3 = \tau$ i pokazali smo izraz (5).
Neka je $B' = c_1 \cdot T + c_2 \cdot N + c_3 \cdot B$. Skalarnim množenjem B, imamo $c_3 = B' \cdot B$, a kako je B jedinično polje, slijedi $c_3 = 0$. Iz definicije torzije $\tau = -N \cdot B'$, slijedi $c_2 = -\tau$. Kako je $c_1 = B' \cdot T$, deriviranjem izraza $B \cdot T = 0$, imamo

$$B' \cdot T = -B \cdot T' = 0 \Longrightarrow c_1 = 0.$$

Time smo pokazali izraz (6) i dokazali ovaj teorem. □

Ranije smo definirali Frenetov trobrid $(T(s), N(s), B(s))$ krivulje parametrizirane duljinom luka s. Izvedimo sada izraze za Frenetov trobrid krivulja parametriziranih općim parametrom t. Najprije ćemo definirati dopustive krivulje jer je to uvjet za konstruiranje Frenetovog trobrida $(T(t), N(t), B(t))$ u svakoj točki krivulje.

Definicija 20. *Za krivulju $c : I \to \mathbb{R}^3$ parametriziranu općim parametrom kažemo da je dopustiva krivulja ako su polja $\dot{c}$ i $\ddot{c}$ linearno nezavisna.*

Primijetimo, radeći s krivuljama parametriziranim duljinom luka, postavili bismo pretpostavku da zakrivljenost krivulje ne iščezava. Pokazat ćemo da je taj zahtjev ekvivalentan gornjoj definiciji dopustive krivulje za krivulje parametrizirane općim parametrom.
Naime, dva polja su nezavisna, ako je njihov vektorski produkt različit od nul-vektora, odnosno, norma vektorskog produkta različita od 0. Zaista, za krivulje parametrizirane duljinom luka imamo:

$$0 \neq ||\dot{c} \times \ddot{c}||^2 = (\dot{c} \times \ddot{c}) \cdot (\dot{c} \times \ddot{c}) = \begin{vmatrix} \dot{c} \cdot \dot{c} & \dot{c} \cdot \ddot{c} \\ \ddot{c} \cdot \dot{c} & \ddot{c} \cdot \ddot{c} \end{vmatrix} = ||\dot{c}||^2 \cdot ||\ddot{c}||^2 - (\dot{c} \cdot \ddot{c}) = ||\ddot{c}||^2.$$

Propozicija 7. *Neka je $c : I \to \mathbb{R}^3$ dopustiva krivulja . Tada vrijedi:*

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{\dot{c}(t)}{||\dot{c}(t)||}, \\ N(t) &= B(t) \times T(t), \\ B(t) &= \frac{\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)}{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||}. \end{aligned}$$

Dokaz. Neka je $\tilde{c}$ reparametrizacija krivulje c duljinom luka, $\tilde{c}(s) = c(t)$. Označimo $(\tilde{T}(s), \tilde{N}(s), \tilde{B}(s))$ Frenetov trobrid reparametrizirane krivulje $\tilde{c}$, a sa $(T(t), N(t), B(t))$ Frenetov trobrid krivulje c. Deriviranjem imamo:

$$\dot{c}(t) = \tilde{c}'(s) \cdot \frac{ds}{dt} = \tilde{c}'(s) \cdot \dot{s}.$$

Primjenimo Frenetove formule:

$$\dot{c}(t) = \tilde{T}(s) \cdot ||\dot{c}(t)|| = T(t) \cdot ||\dot{c}(t)|| \Longrightarrow T(t) = \frac{\dot{c}(t)}{||\dot{c}(t)||}.$$

Time smo dokazali prvi izraz.
Nadalje, deriviranjem i koristeći Frenetove formule za krivulje parametrizirane duljinom luka:

$$\begin{aligned} \ddot{c} &= \tilde{c}''(s) \cdot \dot{s}^2 + \tilde{c}'(s) \cdot \ddot{s} \\ &= \tilde{\kappa}(s) \cdot \tilde{N}(s) \cdot \dot{s}^2 + \tilde{T}(s) \cdot \ddot{s} \\ &= \kappa(t) \cdot N(t) \cdot \dot{s}^2 + T(t) \cdot \ddot{s}. \end{aligned}$$

Sada je

$$\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t) = \kappa(t)\dot{s}^3 T(t) \times N(t) = \kappa(t)\dot{s}^3 B(t).$$

Budući da je $B(t)$ jedinično polje, a pozitivan faktor $\kappa(t)\dot{s}^3$ osigurava jednaku orijentaciju vektora lijeve i desne strane prethodne jednakosti, slijedi

$$B(t) = \frac{\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)}{||\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)||}.$$

Izraz za $N(t)$ slijedi iz desne tj. pozitivne orjentiranosti Frenetovog trobrida $(T(t), N(t), B(t))$. $\square$

Primjer 9. *Odredite Frenetov trobrid, zakrivljenost i torziju kubne parabole* $c(t) = (t, t^2, t^3)$, *parametrizirane općim parametrom* t, *u točki* $(1, 1, 1)$.
Najprije zaključujemo: $c(t) = (1, 1, 1) \Rightarrow t = 1$.
Izračunajmo sada derivacije krivulje c:

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= (1, 2t, 3t^2), \\ \ddot{c}(t) &= (0, 2, 6t), \\ \dddot{c}(t) &= (0, 0, 6). \end{aligned}$$

Za t=1 slijedi:

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= (1, 2, 3), \\ \ddot{c}(t) &= (0, 2, 6). \end{aligned}$$

Kako bismo odredili Frenetov trobrid krivulje c, koristit ćemo izraze iz prethodne propozicije. Stoga, pronađimo najprije normu vektora prve derivacije krivulje c te vektorski produkt $\dot{c} \times \ddot{c}$ *i njegovu normu, kako bismo odredili tangencijalno polje* T *i polje binormala* B.

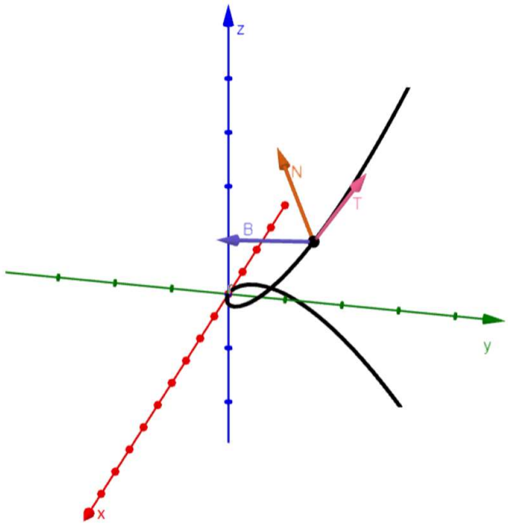
$$||\dot{c}(t)|| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4} \quad \Rightarrow \quad ||\dot{c}(1)|| = \sqrt{14}$$

$$\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot (12t^2 - 6t^2) - (6t\vec{j} - 2\vec{k})) = (6t^2, -6t, 2)$$

$$\begin{aligned} \dot{c}(1) \times \ddot{c}(1) &= (6, -6, 2) \\ ||\dot{c}(1) \times \ddot{c}(1)|| &= \sqrt{36 + 36 + 4} = \sqrt{76} \end{aligned}$$

Sada možemo odredimo Frenetov trobrid kubne parabole u točki $(1, 1, 1)$.

$$\begin{aligned} T(1) &= \frac{\dot{c}(1)}{||\dot{c}(1)||} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3) \\ B(1) &= \frac{\dot{c}(1) \times \ddot{c}(1)}{||\dot{c}(1) \times \ddot{c}(1)||} = \frac{1}{\sqrt{76}}(6, -6, 2) \\ N(1) &= B(1) \times T(1) = \frac{1}{\sqrt{14 \cdot 76}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14 \cdot 76}}(-22, -16, 18) \end{aligned}$$



Slika 4: Frenetov trobrid kubne parabole u točki $(1,1,1)$

Preostaje izračunati $det(\dot{c},\ddot{c},\dddot{c})$ *da bismo odredili zakrivljenost* κ *i torziju* τ*.*

$$det(\dot{c}(t),\ddot{c}(t),\dddot{c}(t)) = \begin{vmatrix} 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12$$

Slijedi:

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{||\dot{c}(t)\times\ddot{c}(t)||}{||\dot{c}(t)||^3} = \frac{36t^4+36t^2+4}{(\sqrt{1+4t^2+9t^4})^3} \quad \Rightarrow \quad \kappa(1) = \frac{\sqrt{76}}{(\sqrt{14})^3}, \\ \tau(t) &= \frac{det(\dot{c}(t),\ddot{c}(t),\dddot{c}(t))}{||\dot{c}(t)\cdot\ddot{c}(t)||^2} = \frac{12}{36t^4+36t^2+4} \quad \Rightarrow \tau(1) = \frac{12}{76} = \frac{3}{19}. \end{aligned}$$

Time smo izračunali zakrivljenost κ *i torziju* τ *u točki* $(1,1,1)$ *te primjenjujući izraze iz Propozicije 7., odredili smo Frenetov trobrid kubne parabole parametrizirane općim parametrom* t*.*

Navedimo Frenetove formule za krivulje parametrizirane općim parametrom.

Teorem 3 (Frenetove formule za krivulje parametrizirane općim parametrom)**.** *Neka je* $c : I \to \mathbb{R}^3$ *dopustiva krivulja parametrizirana općim parametrom sa zakrivljenošću* κ *i torzijom* τ*. Tada vrijedi:*

$$\begin{aligned} \dot{T}(t) &= ||\dot{c}||\kappa(t)N(t), \\ \dot{N}(t) &= ||\dot{c}||(-\kappa(t)T(t)+\tau(t)B(t)), \\ \dot{B}(t) &= ||\dot{c}||(-\tau(t)N(t)). \end{aligned}$$

Literatura

[1] N. Elezović, *Linearna algebra*, Element, Zagreb, 1995.

[2] Ž. Milin Šipuš, S. Vidak, *Uvod u diferencijalnu geometriju*, PMF - Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, interna skripta

[3] J. Sedlar, *Diferencijalna geometrija*, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije u Splitu, interna skripta

[4] B. Žarinac-Frančula, *Diferencijalna geometrija*, Zbirka zadataka i repetitorij, Školska knjiga, Zagreb, 1990.