Primjene diferencijalnih jednadžbi 1. reda u fizici

Perić, Iva

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Iva Perić

Primjene diferencijalnih jednadžbi prvog reda u fizici

Završni rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Iva Perić

Primjene diferencijalnih jednadžbi prvog reda u fizici

Završni rad

mentor: prof.dr.sc Krešimir Burazin
komentor: dr.sc. Ivana Crnjac

Osijek, 2021.

Sažetak

U ovom radu proučavat ćemo diferencijalne jednadžbe prvog reda. Brojne su primjene ovih jednadžbi u fizici, biologiji, medicini i dr. U radu ćemo se fokusirati na primjene diferencijalnih jednadžbi prvog reda u fizici. Na početku rada definirat ćemo obične diferencijalne jednadžbe prvog reda te iskazati najbitnije teoreme vezane za njih. Zatim ćemo napraviti klasifikaciju spomenutih jednadžbi te metode za njihovo rješavanje. Na kraju ćemo navesti različite primjere fizikalnih problema koje se svode na diferencijalne jednadžbe prvog reda.

Ključne riječi: diferencijalne jednadžbe prvog reda, radioaktivni raspad, Newtonov zakon hlađenja, strujni krugovi, problem miješanja, gravitacijska sila, gibanje planeta, slobodni pad

Abstract

In this paper, we shall study differential equations of the first order. There are numerous applications of these equations in physics, biology, medicine and other. We shall focus on applications of differential equations of the first order in physics. First, we shall define ordinary differential equations of the first order and show the most important theorems related to them. Then we shall make a classification of these equations and methods to address them. Finally, we shall cite different examples of physical problems that apply to the differential equations of the first order.

Key words: differential equations of first order, radioactive decay, Newton's cooling law, the circuitry, mixing problem, gravitational force, planetary motion, free fall

Sadržaj

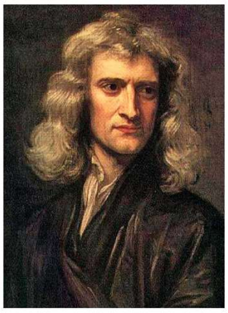
1 Uvod

Diferencijalna jednadžba je jednadžba koja nepoznatu funkciju povezuje s njezinim derivacijama. Razni su primjeri diferencijalnih jednadžbi, a pojavljuju se u mnogim znanstvenim granama poput kemije, fizike, biologije, medicine, elektrotehnike, itd. Diferencijalnim jednadžbama možemo opisati mnoge pojave kao što su primjerice gibanje nekog tijela, titranje, radioaktivni raspad atoma, istjecanje fluida, zagrijavanje tijela, strujni krug i slično. U ovome radu iskazat ćemo neke primjene diferencijalnih jednadžbi 1. reda u fizici.

Počeci diferencijalnih jednadžbi vezani su uz otkriće diferencijalnog računa. Počinje ga spominjati Isaac Newton 1671. u svome djelu *Methodus fluxionum et Serierum Infinitarum*. Leonhard Euler smatra se začetnikom opće teorije diferencijalnih jednadžbi, a bavio se problemom vibrirajuće žice. Kasnije je Jean Le Rond d'Alembert taj problem prikazao kao parcijalnu diferencijalnu jednadžbu. Prema nekim zapisima, proučavanje diferencijalnih jednadžbi započinje 1675. kada Gottfried Wilhelm von Leibniz zapisuje jednadžbu:

$$\int x dx = \frac{1}{2}x^2.$$

Ulogu u ovom razdoblju imao je i Joseph Louis Lagrange koji je otkrio tzv. metodu varijacije konstanti (koju ćemo pojasniti u poglavlju 3.2), te braća Bernoulli [8].



(a) Isaac Newton

(b) Leonhard Euler

Slika 1: Značajni znanstvenici (preuzeto iz [15, 16])

U drugom poglavlju navest ćemo osnovne činjenice vezane za obične diferencijalne jednadžbe 1. reda. Razni su tipovi te metode rješavanja ovih jednadžbi, a navedeni su u trećem poglavlju. Zadnji dio rada usmjeren je na primjene diferencijalnih jednadžbi 1. reda u fizici. Tu ćemo spomenuti pojave iz kojih se neki zaključci mogu dobiti pri rješavanju diferencijalnih jednadžbi.

2 Obične diferencijalne jednadžbe prvog reda

Pojam obične diferencijalne jednadžbe je vezan za jednadžbe u kojima se osim nepoznate funkcije y pojavljuju i njezine derivacije. Implicitni oblik diferencijalne jednadžbe glasi

$$F(t, y(t), y'(t), .., y^{(n)}(t)) = 0,$$

pri čemu n nazivamo redom diferencijalne jednadžbe. Diferencijalnu jednadžbu možemo promatrati i u eksplicitnom obliku,

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), .., y^{(n-1)}(t)).$$

Ukoliko se u navedenoj jednadžbi pojavljuje najviše prva derivacija nepoznate funkcije, tada tu jednadžbu nazivamo **obična diferencijalna jednadžba 1. reda**. U ovom radu koncentrirat ćemo se upravo na ODJ 1. reda te ćemo sve definicije i teoreme u ovom poglavlju iskazati za takve jednadžbe.
Teoriju osnovnih diferencijalnih jednadžbi započinjemo uvođenjem pojma rješenja. Sljedeća definicija govori nam o nužnim uvjetima za postojanje rješenja ODJ 1. reda.

Definicija 2.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren i $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ dana funkcija. Za funkciju $u\colon I \to \mathbb{R}$ kažemo da je* ***rješenje*** *obične diferencijalne jednadžbe*

$$y' = f(t, y) \tag{1}$$

ukoliko vrijedi:
1) $I \subseteq \mathbb{R}$ je otvoren interval
2) $u \in C^1(I)$
3) $(\forall t \in I) \quad (t, u(t)) \in \Omega$
4) $(\forall t \in I) \quad u'(t) = f(t, u(t))$.

Ukoliko je uz početnu diferencijalnu jednadžbu (1) zadan i početni uvjet

$$y(t_0) = y_0,\ t_0 \in I \tag{2}$$

tada taj problem nazivamo **Cauchyjeva zadaća** i zapisujemo ga u obliku

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{3}$$

Definicija 2.2. *Za funkciju $u\colon I \to \mathbb{R}$ kažemo da je rješenje Cauchyjeve zadaće (3) ako je ona rješenje pripadne jednadžbe (1) za $t_0 \in I$, te ukoliko zadovoljava početni uvjet (2).*

Spomenut ćemo i jedan od najbitnijih teorema koji govori o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja za područje običnih diferencijalnih jednadžbi. Njegov dokaz može se pronaći u [5].

Teorem 2.1. *(Picardov teorem)*
Neka vrijede sljedeće pretpostavke:
a) $S := [t_0 - a, t_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subseteq \mathbb{R}^2$ *za* t_0, $y_0 \in \mathbb{R}$, a, $b \in \mathbb{R}^+$ *te neka je* $f : S \to \mathbb{R}$ *neprekidna i vrijedi*

$$|f(t, y)| \leq M, \ (t, y) \in S,$$

gdje je $M > 0$.
b)f *je Lipschitzova po* y *varijabli s Lipschitzovom konstantom koja ne ovisi o varijabli* t *tj.*

$$(\exists c > 0)(\forall t \in [t_0 - a, t_0 + a])(\forall y_1, y_2 \in [y_0 - b, y_0 + b])$$

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq c|y_1 - y_2|.$$

Tada Cauchyjeva zadaća (3) ima lokalno jedinstveno rješenje $u \in C^1(\langle t_0 - T, t_0 + T\rangle) \cap C([t_0 - T, t_0 + T])$ *za* $T = min\{a, \frac{b}{M}\}$.

Postoje i drugi teoremi vezani za egzistenciju rješenja ODJ, poput Cauchyjevog i Peanovog teorema, a njih se, kao i više o općoj teoriji diferencijalnih jednadžbi, može pronaći u [1, 5].

3 Tipovi diferencijalnih jednadžbi

Radi lakšeg pronalaska rješenja, diferencijalne jednadžbe je potrebno klasificirati. U ovom poglavlju spomenut ćemo neke tipove diferencijalnih jednadžbi 1. reda. Svi teoremi, korolari, definicije i leme navedeni u ovom poglavlju mogu se pronaći u [1, 5, 9, 14].

3.1 Jednadžbe sa separiranim varijablama

U slučaju da je u jednadžbi (1) funkcija f posebnog oblika, točnije ako je zadana jednadžba

$$y' = g(t)h(y), \tag{4}$$

pri čemu su g i h proizvoljne funkcije, govorimo o jednadžbama sa separiranim varijablama. Za takav tip jednadžbi dovoljno je samo matematički analizirati funkciju jedne varijable. U sljedećoj lemi reći ćemo nešto o rješenju jednadžbe sa separiranim varijablama.

Lema 3.1. *Neka su* I, V *otvoreni intervali,* $t_0 \in I$, $y_0 \in V$, *te neka je* $g \in C(I, \mathbb{R})$ *i* $h \in C(V, \mathbb{R})$ *takva da je* $h(y) \neq 0$. *Ako je* $u \colon J \subseteq I \to \mathbb{R}$ *rješenje Cauchyjeve zadaće*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = g(t)h(y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{5}$$

onda je

$$\int_{y_0}^{u(t)} \frac{d\xi}{h(\xi)} = \int_{t_0}^{t} g(\tau)d\tau, \ t \in J. \tag{6}$$

Formula (6) izvedena je uz pretpostavku da rješenje Cauchyjevog problema postoji. Sljedeći teorem nam daje uvjete na jedinstvenost rješenja Cauchyjeve zadaće (5).

Teorem 3.1. *Neka su I, V otvoreni intervali, $t_0 \in I$, $y_0 \in V$, te neka je $g \in C(I, \mathbb{R})$ i $h \in C(V, \mathbb{R})$ takva da je $h(y) \neq 0$. Tada Cauchyjeva zadaća*

$$\begin{cases} y' = g(t)h(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ima jedinstveno rješenje.

Na osnovu Teorema 3.1 moguće je reći nešto i o skupu svih rješenja jednadžbe (4). Neka su funkcije $G\colon I \to \mathbb{R}$, $H\colon V \to \mathbb{R}$ zadane formulama

$$G(t) = \int_{t_0}^{t} g(\tau)d\tau,\ t \in I, \tag{7}$$

$$H(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{d\xi}{h(\xi)},\ y \in V. \tag{8}$$

Može se pokazati da je (uz oznake i uvjete Teorema 3.1, te funkcije G i H zadane formulama (7) i (8)) funkcija $v \in C^1(J, \mathbb{R})$, $J \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval, rješenje diferencijalne jednadžbe (4) ako i samo ako postoji $c \in \mathbb{R}$ tako da je

$$H(v(t)) - G(t) = c,\ t \in J.$$

Primjer 3.1.1. *Promotrimo Cauchyjevu zadaću*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -e^{-y}\sin t \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Gornja zadaća pripada zadaćama oblika (5), pri čemu su funkcije g i h dane s

$$g(t) = -\sin t,\ t \in \mathbb{R} = I$$
$$h(y) = e^{-y},\ y \in \mathbb{R} = V.$$

Funkcije g i h su neprekidne funkcije i $h(y) > 0$, $y \in V$, pa su funkcije

$$G(t) = \int_0^t -\sin\tau d\tau = \cos t,\ t \in \mathbb{R},$$
$$H(y) = \int_0^y e^{\xi}d\xi = e^y - 1,\ y \in \mathbb{R}.$$

dobro definirane. Slijedi da je rješenje y zadane Cauchyjeve zadaće dano s

$$H(y) - G(t) = C,\ C \in \mathbb{R},$$

tj.

$$e^y - 1 - \cos t = C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Dakle, skup svih rješenja zadane diferencijalne jednadžbe dan je izrazom

$$y = \ln(1 + \cos t + C),\ C \in \mathbb{R}.$$

Uzimajući u obzir početni uvjet, slijedi da je je $c = -1$ pa je rješenje Cauchyjeve zadaće $y = \ln(\cos t)$.

Postoje razne diferencijalne jednadžbe koje se supstitucijom mogu svesti na jednadžbe sa separiranim varijablama. Takva je, primjerice, homogena diferencijalna jednadžba tj. jednadžba oblika

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{t}\right),$$

pri čemu je $\varphi \in C(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval, koja se supstitucijom $z(t) = \dfrac{y(t)}{t}$, $t \in I$ svodi na jednadžbu sa separiranim varijablama.

3.2 Linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda

Linearna diferencijalna jednadžba 1. reda glasi:

$$y' = P(t)y + Q(t), \tag{9}$$

pri čemu su P, $Q \in C(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval. Pridružimo li jednadžbi (9) vrijednost $Q \equiv 0$, jednadžbu

$$y' = P(t)y$$

nazivamo homogenom, a u suprotnom za jednadžbu kažemo da je nehomogena. Jedna od metoda za rješavanje takvih jednadžbi je Lagrangeova metoda. Najprije rješavamo pridruženu homogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu koja pripada jednadžbama sa separiranim varijablama, a njeno rješenje glasi

$$y = ce^{\int P(t)dt},\ c \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Prema Lagrangeovoj metodi rješenje jednadžbe (9) tražimo u obliku

$$y = c(t)e^{\int P(t)dt}, \tag{11}$$

gdje je $c(t)$ diferencijabilna funkcija s neprekidnom derivacijom koju je potrebno odrediti. Takva metoda zove se **metoda varijacije konstanti**. Uvrstimo li jednadžbu (11) u (9) dobivamo jednadžbu koja glasi:

$$c'(t)e^{\int P(t)dt} + c(t)e^{\int P(t)dt}P(t) = P(t)c(t)e^{\int P(t)dt} + Q(t),$$

odakle slijedi

$$c(t) = \int Q(t)e^{-\int P(t)dt}dt + D,\ D \in \mathbb{R}.$$

Uvrstimo li sada gornji izraz u (10), dobivamo konačno rješenje

$$y(t) = e^{\int P(t)dt}\left[\int Q(t)e^{-\int P(t)dt} + D\right],\ D \in \mathbb{R}.$$

Rješenje kod takvih jednadžbi je globalno jedinstveno, što bi značilo da je dano na cijelom intervalu I. O tome nam govori sljedeći teorem.

Teorem 3.2. *Neka je I otvoren interval, $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ te $a,\ b \in C(I)$. Tada Cauchyjeva zadaća*

$$\begin{cases} y' = P(t)y + Q(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ima jedinstveno globalno rješenje dano formulom

$$u(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}\left[\int_{t_0}^{t} b(s)e^{-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}ds + y_0\right],\ t \in I.$$

Promotrimo primjer jedne linearne diferencijalne jednadžbe.

Primjer 3.2.1. *Neka je dana diferencijalna jednadžba*

$$y' - \frac{y}{t} = 2t^3. \tag{12}$$

Riješimo li pripadnu homogenu diferencijalnu jednadžbu

$$y' = \frac{y}{t},$$

za rješenje dobivamo

$$y = ct,\ c \in \mathbb{R}.$$

Koristeći Lagrangeovu metodu tražimo rješenje jednadžbe (12) u obliku

$$y = c(t)t.$$

Uvrstimo li to u jednadžbu (12) dobivamo

$$c'(t)t + c(t) - \frac{c(t)t}{t} = 2t^3,$$

iz čega slijedi

$$c(t) = 2\left(\frac{t^3}{3} + D\right),\ D \in \mathbb{R}.$$

Rješenje dane jednadžbe glasi

$$y(t) = 2t\left(\frac{t^3}{3} + D\right),\ D \in \mathbb{R}.$$

Slično kao u prethodnom poglavlju, postoje jednadžbe koje se svode na linearne diferencijalne jednadžbe. Primjer takvih jednadžbi je Bernoulijeva diferencijalna jednadžba oblika

$$y' + P(t)y = Q(t)y^{\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,\ 1\}.$$

Supstitucijom $z = y^{1-\alpha}$, $z = z(t)$, jednadžba postaje linearna i rješavamo ju koristeći Teorem (3.2).

3.3 Egzaktne diferencijalne jednadžbe

Prije nego definiramo egzaktnu diferencijalnu jednadžbu prisjetimo se nekih pojmova iz analize. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ područje, te neka su f_1 i $f_2 \in C^1(\Omega)$.

Definicija 3.1. *Polje $\vec{f} = (f_1, f_2)$ je potencijalno na području Ω ako postoji skalarna funkcija $F(x, y)$ za koju vrijedi*

$$\vec{f}(x, y) = \nabla F(x, y), \quad (x, y) \in \Omega.$$

Skalarnu funkciju F nazivamo potencijalom vektorskog polja $\vec{f}$. U tom je slučaju

$$f_1 = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad f_2 = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Sljedeća lema reći će nam kako ćemo prepoznati kada je neko polje potencijalno te formulu za njegov potencijal.

Lema 3.2. *Neka za otvorene intervale I, V te funkcije $f_1, f_2 \in C^1(I \times V, \mathbb{R})$ vrijedi uvjet*

$$\partial_2 f_1(t, y) = \partial_1 f_2(t, y), \; (t, y) \in I \times V.$$

Za funkciju $F\colon I \times V \to \mathbb{R}$ zadanu formulom

$$F(t, y) = \int_{t_0}^{t} f_1(\tau, y_0) d\tau + \int_{y_0}^{y} f_2(t, \xi) d\xi, \; (t, y) \in I \times V,$$

za $t_0 \in I$, $y_0 \in V$ je onda

$$\partial_1 F(t, y) = f_1(t, y),$$
$$\partial_2 F(t, y) = f_2(t, y).$$

Drugim riječima, tada je polje $\vec{f}$ potencijalno i F je njegov potencijal.

Sada možemo definirati egzaktnu diferencijalnu jednadžbu.

Definicija 3.2. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ područje, f_1, $f_2 \in C(\Omega)$ takve da je $(\forall (t, y) \in \Omega)\; f_2(t, y) \neq 0$. Običnu diferencijalnu jednadžbu oblika*

$$y' = \frac{-f_1(t, y)}{f_2(t, y)} \tag{13}$$

nazivamo egzaktna, ukoliko je vektorsko polje $\vec{f} = (f_1, f_2)$ potencijalno.

Diferencijalnu jednadžbu (13) možemo zapisati i u tzv. diferencijalnoj formi

$$f_1(t, y) dx + f_2(t, y) dy = 0. \tag{14}$$

Napomenimo još da se jednadžba (14) uz $f_1, f_2 \in C^1(\Omega)$ uvijek može svesti na egzaktnu diferencijalnu jednadžbu množenjem s odgovarajućom funkcijom μ. Preciznije, postoji funkcija $\mu\colon \Omega \to \mathbb{R}$ takva da vrijedi

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu f_1) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu f_2).$$

Funkciju μ nazivamo Eulerov multiplikator, a često ga je vrlo teško (pa čak i nemoguće) odrediti.

Primjer 3.3.1. *Promotrimo diferencijalnu jednadžbu*

$$(6xy^2)dx + (6x^2y)dy = 0.$$

Kako je

$$\frac{\partial(6xy^2)}{\partial y} = \frac{\partial(6x^2y)}{\partial x},$$

jednadžba je egzaktna, a njeno rješenje dano je s $F(x,y) = c$, $c \in \mathbb{R}$, *gdje je* F *pripadni potencijal polja* $\vec{f} = (f_1, f_2)$. *Ovdje je*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 6xy^2, \tag{15}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 6x^2y. \tag{16}$$

Integriramo li jednakost (15) po prvoj varijabli, slijedi

$$F(x,y) = 3y^2x^2 + \varphi(y).$$

Koristeći jednadžbu (16) dobivamo $\varphi(y) = y + D$, $D \in \mathbb{R}$. *Možemo zaključiti da nam je konačno rješenje oblika*

$$3y^2x^2 + y = D, \ D \in \mathbb{R}.$$

4 Diferencijalne jednadžbe u fizici

Primjena diferencijalnih jednadžbi ima mnogo, no mi ćemo se fokusirati na primjene diferencijalnih jednadžbi 1. reda u fizici [3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13].

4.1 Radioaktivni raspad

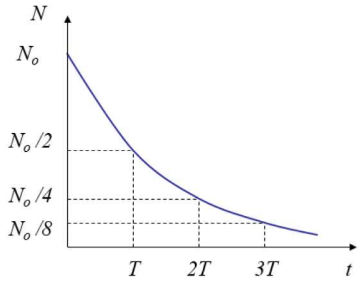
U prirodi postoje stabilne i nestabilne atomske jezgre. Razlika među njima je u omjeru broja protona i neutrona. Kod stabilnih jezgri njihova proporcija protona i neutrona je optimalna što se može vidjeti kod npr. vodika koji sadrži jedan proton i jedan neutron. Kod nestabilnih atomskih jezgri (a to su svi atomi teži od elementa bizmuta) dolazi do težnje jezgri ka stabilnijem stanju. Oni se spontano raspadaju tako da izbacuju čestična ili fotonska zračenja te prelaze u energijski stabilnija stanja. Taj proces nazivamo radioaktivni raspad. Ne može se sa sigurnošću predvidjeti kada će se pojedina radioaktivna jezgra raspasti, niti se na to može utjecati. Postoji zakon pomoću kojeg se nakon nekog vremena izračuna broj jezgri koje će se raspasti. Neka N(t) predstavlja broj jezgri koje se još nisu raspale u uzorku u trenutku t. Zakon radioaktivnog raspada kaže da je promjena dN u broju jezgri proporcionalna samom broju N i vremenu dt. Uz zadanu konstantu raspada λ imamo:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt. \tag{17}$$

Gornja jednadžba pripada separiranim diferencijalnim jednadžbama, čije rješenje glasi

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \tag{18}$$

pri čemu je N_0 početni broj jezgri.



Slika 2: Vremenska ovisnost radioaktivnog raspada (preuzeto iz [7])

Slika 2 prikazuje vremensku ovisnost radioaktivnog raspada. Ukoliko sa $T_{1/2}$ označimo vrijeme poluraspada (tj. vrijeme za koje se raspala polovina jezgara), koristeći zakon radioaktivnog raspada (18) dobivamo iznos za λ i ona iznosi $\frac{\ln 2}{T}$.

Primjer 4.1.1. *U početnom trenutku dva radioaktivna uzorka, A i B, imaju jednak broj jezgara. Nakon dva dana, broj neraspadnutih jezgara uzorka A je dva puta veći od broja neraspadnutih jezgara uzorka B. Vrijeme poluraspada uzorka B je 1,5 dana. Koliko je vrijeme poluraspada uzorka A?*
Označimo sa $N_A, N_B, T_{1/2,A}$ i $T_{1/2,B}$ broj jezgara uzoraka A i B te vremena njihovih poluraspada redom. Znamo da nam se brojevi jezgara ponašaju kao:

$$N_A(2) = 2N_B(2).$$

Uvrštavajući u to formule zakona radioaktivnog raspada, dobivamo

$$N_{0A}e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2,A}}\cdot 2} = 2N_{0B}e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2,B}}\cdot 2},$$

iz čega slijedi

$$\frac{-2\ln 2}{T_{1/2,A}} = \ln 2 - 2\frac{\ln 2}{T_{1/2,B}}.$$

Pri tome, vrijeme poluraspada uzorka A je

$$T_{1/2,A} = \frac{\ln 4}{\frac{\ln 4}{T_{1/2,B}} - \ln 2},$$

odnosno $T_{1/2,A} = 6$ dana.

4.2 Newtonov zakon hlađenja

Newtonov zakon hlađenja govori nam o izmjeni topline sustava s njegovom okolinom u zadanom vremenu. Ukoliko sa $T(t)$ označimo temperaturu tijela u trenutku t, a sa T_{okol} temperaturu okoline (pri čemu pretpostavljamo da je ona konstantna), zakon glasi:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_{okol}), \tag{19}$$

tj. brzina promjene temperature proporcionalna je razlici temperature objekta i temperature okoline, pri čemu je $k > 0$ koeficijent proporcionalnosti. Jednadžba (19) pripada separiranim diferencijalnim jednadžbama, a njezino rješenje glasi

$$T(t) = T_{okol} + ce^{kt}, c \in \mathbb{R}.$$

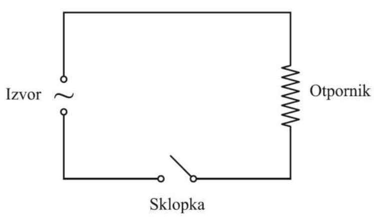
Primjer 4.2.1. *U hotelskoj sobi konstantne temperature* $20°C$ *policija je u ponoć otkrila tijelo žrtve. Temperatura tijela bila je* $27°C$*, a dva sata kasnije* $24°C$*. Uz pretpostavku da je standardna temperatura čovjekova tijela* $35.5°C$*, odredite kada se otprilike dogodio zločin.*
Primjenom Newtonovog zakona hlađenja dobivamo da je temperatura tijela u trenutku t opisana funkcijom

$$T(t) = 20 + ce^{kt}, c \in \mathbb{R}. \tag{20}$$

Iskoristimo li početne uvjete $T(0) = 27°$ *i* $T(2) = 24°C$*, dobivamo konstante* $c = 7$ *i* $k = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{7}$*. Kako nas zanima posljednji trenutak u kojem je žrtva bila živa, uvrštavajući njezinu temperaturu pri normalnim uvjetima* $T(t) = 36.5°C$ *u (20) slijedi* $t \approx -3$*, što implicira da se zločin dogodio oko 21 sat.*

4.3 Strujni krug

Najjednostavniji strujni krug sastoji se od izvora električne energije te od otpornika koji se koristi tom energijom. Zatvorimo li sklopku struja će poteći kroz otpornik te uzrokovati pad napona koji je dan formulom



Slika 3: Strujni krug (preuzeto iz [10])

$$E_R = RI, \tag{21}$$

gdje je R otpor, a I jakost električne struje. Nadalje, promjena napona proizvedena u zavojnici proporcionalna je brzini promjene struje i induktivitetu L, tj.

$$E_L = L\frac{dI}{dt}. \tag{22}$$

Izvor napona, $E(t)$, može biti konstantan i varijabilan. Primjenom Kirchoffovog zakona električnog napona koji kaže da je suma električnih napona unutar zatvorene petlje električne mreže jednak nuli tj. da je napon izvora kojim se napaja strujni krug jednak zbroju padova napona po ostalim elementima strujnoga kruga, slijedi

$$E_R + E_L - E(t) = 0,$$

odnosno

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t). \tag{23}$$

Iz gornje jednadžbe vidimo da je jakost struje u jednostavnom strujnom krugu opisana linearnom diferencijalnom jednadžbom 1. reda. S druge strane, ako strujni krug sadrži otpornik i kondenzator kapaciteta C, onda je pad napona preko kondenzatora E_C jednak $\dfrac{Q}{C}$ pa Kirchhoffov zakon glasi

$$E_R + E_C = E(t).$$

Kako su jakost električne struje I i naboj Q povezani relacijom

$$I = \frac{dQ}{dt},$$

slijedi

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E(t),$$

što je ponovno diferencijalna jednadžba 1. reda u kojoj je nepoznata funkcija naboja $Q(t)$.

Primjer 4.3.1. *Odredimo jakost struje u strujnom krugu otpora $R = 6\Omega$, induktivnosti $L = 2H$, u kojemu baterija daje varijabilan napon E(t)=30t V, a prekidač je uključen u trenutku $t = 0$.*
Uvrštavanjem zadanih vrijednosti u jednadžbu (23) dobivamo

$$\frac{dI}{dt} + 3I = 15t. \tag{24}$$

Rješenje pripadne homogene jednadžbe

$$\frac{dI}{dt} + 3I = 0$$

dano je s

$$I(t) = ce^{-3t},\ c \in \mathbb{R}.$$

Kako bismo pronašli rješenje jednadžbe (24) koristimo metodu varijacije konstanti. Zanima nas vrijednost diferencijabilne funkcije $c(t)$. Uvrstimo li izraz $I(t) = e^{-3t}c(t)$ u (24), sređivanjem dobivamo da je

$$c(t) = \frac{5}{3}e^{3t}(3t - 1) + D,\ D \in \mathbb{R}.$$

Iz početnog uvjeta dobivamo konstantu $D = \frac{5}{3}$, pa dobiveno rješenje glasi

$$I(t) = \frac{5}{3}(e^{-3t} + 3t - 1).$$

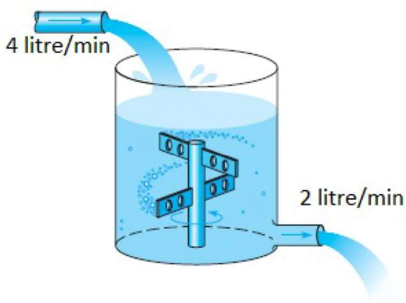
4.4 Problem miješanja

Problem miješanja uključuje spremnik stalnog volumena ispunjen otopinom neke tvari. Pretpostavimo da istovremeno u spremnik određenom brzinom ulijevamo istu otopinu sa zadanom koncentracijom tvari te da otopina iz spremnika istječe nekom brzinom. Jednadžba kojom opisujemo ovaj problem glasi

$$y'(t) = v_u(t) - v_i(t),$$

pri čemu je $y(t)$ količina tvari u spremniku u trenutku t, $v_u(t)$ brzina kojom tvar utječe u spremnik, $v_i(t)$ brzina kojom tvar istječe iz spremnika. Promotrimo primjer jednog problema mješanja.

Primjer 4.4.1. *Spremnik sadrži otopinu slane vode koja se u početku sastoji od 20 kg soli otopljene u 10 l vode. Svježa voda ulijeva se u spremnik brzinom 4 l/min, a otopina, držana ujednačeno miješanjem, istječe brzinom 2 l/min. Pronađimo količinu soli u spremniku nakon 5 minuta.*



Slika 4: Voda se ulijeva u spremnik dok dobro miješana otopina istječe (preuzeto iz [2])

Neka je $y(t)$ količina soli u kilogramima u vremenu t (u minutama). Volumen vode za vrijeme t je

$$V = 10 + 4t - 2t = 10 + 2t.$$

Kako u spremnik ulijevamo vodu, to je $v_u = 0$. Brzinu kojom sol istječe iz spremnika dobivamo tako da pomnožimo koncentraciju soli u spremniku s brzinom kojom smjesa istječe iz posude. Koncentracija soli dana je izrazom

$$\frac{y(t)}{V} = \frac{y(t)}{10 + 2t}.$$

Slijedi

$$\frac{dy}{dt} = v_u - v_i = -\frac{y}{10 + 2t} \cdot 2 = -\frac{2y}{10 + 2t},$$

što je jednadžba sa separiranim varijablama. Rješenje gornje jednadžbe dano je s

$$y(t) = c \cdot (10 + 2t)^{-1},\ c \in \mathbb{R}.$$

Iz početnog uvjeta, $y(0) = 20$, slijedi da je $c = 200$. Prema tome, količina soli u spremniku opisana je izrazom

$$y(t) = \frac{200}{10 + 2t}.$$

Iz gornje jednadžbe dobivamo da će spremnik nakon 5 minuta sadržavati 10 kg soli.

4.5 Gravitacijska sila

U 17. st. dolazi do velikog poboljšanja u području nebeske mehanike. Veliku ulogu u tom području imao je Isaac Newton. Koristeći izraz za centripetalnu silu,

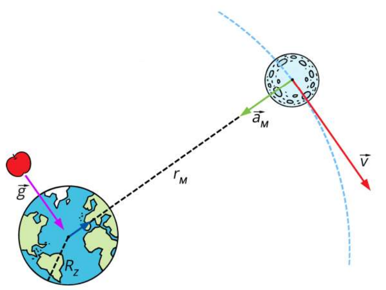
$$F_{cp} = ma_{cp} = \frac{mv^2}{r} = \frac{4\pi^2 rm}{T^2},$$

gdje je m masa planeta, r udaljenost od planeta do Sunca te T period ophoda planeta oko Sunca, treći Keplerov zakon koji kaže da je omjer kvadrata ophodnoga vremena i kuba srednje udaljenosti planeta od Sunca jednak za sve planete Sunčeva sustava, tj.

$$\frac{T^2}{r^3} = k,$$

Newton je dobio izraz za gravitacijsku silu

$$F_{cp} = \frac{4\pi^2}{k}\frac{m}{r^2} \quad \text{odnosno} \quad F \sim \frac{m}{r^2}.$$



Slika 5: Prikaz gibanja Mjeseca oko Zemlje(preuzeto iz [13])

Svoju provjeru izvršio je na gibanju Mjeseca oko Zemlje. Krenuo je od toga da se Zemljina sila teža proteže i na Mjesec. Primjenjujući treći Newtonov zakon koji kaže da se uz svaku silu koja je nastala zbog međudjelovanja tijela s drugim tijelom pojavljuje protusila na drugo tijelo, iznosom jednaka sili koja djeluje na prvo tijelo, ali suprotnog smjera, dolazi do izraza za silu kojom se međusobno privlače planeti i Sunce, a pokazuje da je sila proporcionalna masama promatranih tijela, točnije, dobiva da je

$$F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

gdje je G gravitacijska konstanta, iznosi $6.67 \cdot 10^{-11} Nm^2kg^{-2}$, m_1 i m_2 mase tijela, a r međusobna udaljenost između središta dvaju tijela.
Ukoliko prikažemo udaljenost r s pomoću koordinata x i y u koordinatnom sustavu, funkcija gravitacije između dva objekta mase m_1 i m_2 glasi

$$F(x,y) = Gm_1 m_2 \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right).$$

Uočimo da je gornje polje potencijalno, pa diferencijalna jednadžba za gravitaciju glasi

$$Gm_1m_2\left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}+\left(\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)\frac{dy}{dx}\right)=0,$$

što je egzaktna diferencijalna jednadžba. Rješenje ove jednadžbe je potencijalna funkcija

$$U(x,y)=-\frac{Gm_1m_2}{(x^2+y^2)^{1/2}}=c,\; c\in\mathbb{R},$$

što predstavlja gravitacijsku potencijalnu energiju.

4.5.1 Gibanje planeta

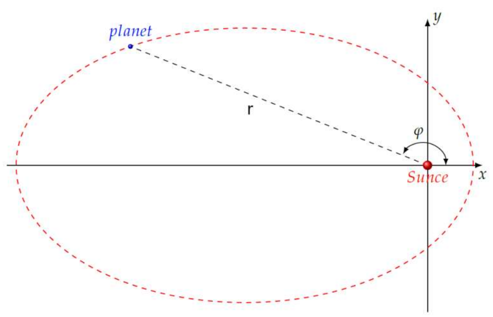
Osim Newtona, jedan od značajnijih znanstvenika koji je pridonio razvoju astronomije je Johanes Kepler. Iznio je svoju teoriju da se planeti oko Sunca ne gibaju po kružnicama već po elipsama i da se po njima planeti kreću prema određenim zakonitostima. To je naglasio u svojem prvom zakonu nazvanom Keplerov zakon 1609. godine. U ovom odlomku pokušat ćemo doći do činjenice njegove teorije tj. da se planeti gibaju po elipsama.
Newtonov zakon gravitacije kaže da je

$$F=ma=-\frac{km}{r^2}\mathbf{r},$$

gdje je m masa planeta, r srednja udaljenost od planeta do Sunca, k univerzalna konstanta, **r** jedinični vektor u smjeru r te a akceleracija planeta.
Označimo s

$$(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta),$$

pri čemu je θ kut između x-osi i udaljenosti r. Funkcije $\theta=\theta(t), r=r(t)$ se mijenjaju zbog pomicanja planeta u trenutku t.



Slika 6: Položaj planeta (preuzeto iz [4])

Radijalna komponenta akceleracije a_r i transverzalna komponenta akceleracije a_θ dane su sa

$$a_r=a_x\cos\theta+a_y\sin\theta,\quad a_\theta=-a_x\sin\theta+a_y\cos\theta. \tag{25}$$

Pretpostavimo da je $a_r{=}{-}k/r^2$ i $a_\theta{=}0$. Kako je akceleracija druga derivacija puta po vremenu, imamo da je

$$\begin{aligned}
x' &= r'\cos\theta - r\sin\theta\theta' \\
a_x &= x'' = r''\cos\theta - r'\sin\theta\theta' - r'\sin\theta\theta' - r\cos\theta\theta'^2 - r\sin\theta\theta'' \\
y' &= r'\sin\theta + r\cos\theta\theta', \\
a_y &= y'' = r''\sin\theta + r'\cos\theta\theta' + r'\cos\theta\theta' - r\sin\theta\theta'^2 + r\cos\theta\theta'' \\
&= r''\sin\theta + 2r'\theta'\cos\theta - \theta'^2 r\sin\theta + \theta'' r\cos\theta.
\end{aligned}$$

Uvrstimo li dobivene vrijednosti u (25), za a_r dobivamo

$$\begin{aligned}
a_r &= r''\cos^2\theta - 2r'\theta'\sin\theta\cos\theta - \theta'^2 r\cos^2\theta - \theta''\sin\theta\cos\theta \\
&+ r''\sin^2\theta + 2r'\theta'\sin\theta\cos\theta - \theta'^2 r\sin^2\theta + \theta'' r\sin\theta\cos\theta \\
&= r'' - (\theta')^2 r,
\end{aligned}$$

dok a_θ postaje

$$\begin{aligned}
a_\theta &= -r''\sin\theta\cos\theta + 2r'\theta'\sin^2\theta + (\theta')^2 r\sin\theta\cos\theta + \theta'' r\sin^2\theta \\
&+ r''\sin\theta\cos\theta + 2r'\theta'\cos^2\theta - (\theta')^2 r\sin\theta\cos\theta + \theta'' r\cos^2\theta \\
&= 2r'\theta' + \theta'' r.
\end{aligned}$$

Koristeći činjenicu da je $a_r = \dfrac{-k}{r^2}$ i $a_\theta = 0$ slijedi

$$r'' - (\theta')^2 r = -\frac{k}{r^2} \tag{26}$$

$$2r'\theta' + \theta'' r = 0. \tag{27}$$

Jednadžba (27) upućuje da

$$2rr'\theta' + \theta'' r^2 = d(r^2\theta') = 0 \quad \text{tj.} \quad r^2\theta' = h,\ h \in \mathbb{R}.$$

Želimo put planete pa trebamo dobiti jednadžbu uključujući varijable r i θ. Ukoliko r promatramo kao funkciju od θ, slijedi

$$\begin{aligned}
r' &= \frac{dr}{d\theta}\theta' = \frac{dr}{d\theta}\frac{h}{r^2}, \\
r'' &= \frac{d^2r}{d\theta^2}\theta'\frac{h}{r^2} - 2\frac{dr}{d\theta}\frac{h}{r^2}r' = \frac{d^2r}{d\theta^2}\frac{h}{r^2}\frac{h}{r^2} - 2\frac{dr}{d\theta}\frac{h}{r^3}\frac{dr}{d\theta}\frac{h}{r^2} \\
&= -\frac{h^2}{r^2}\left(\frac{2}{r^3}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\frac{d^2r}{d\theta^2}\right).
\end{aligned}$$

Uvedimo supstituciju u=1/r. Tada je

$$\begin{aligned}
\frac{du}{d\theta} &= -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} \\
\frac{d^2u}{d\theta^2} &= \frac{2}{r^3}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\frac{d^2r}{d\theta^2} = -\frac{r^2 r''}{h^2} = -\frac{r''}{h^2u^2}.
\end{aligned}$$

Dakle, jednadžba (26) povlači da je

$$-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - \left(\frac{h}{r^2}\right)^2 r = -\frac{k}{r^2}$$

$$-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - u^3h^2 = -ku^2, u \neq 0,$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{h^2}.$$

Stoga je

$$u = 1/r = B\cos(\theta - \delta) + \frac{k}{h^2} = C_1 \sin\theta + C_2\cos\theta + \frac{k}{h^2},$$

gdje su B, C_1 i C_2 proizvoljne konstante, a $\delta = 0$ jer tada r postiže najveću vrijednost.
Imamo

$$r = \frac{1}{k/h^2 + B\cos(\theta - \delta)} = \frac{1}{k/h^2 + C_1\sin\theta + C_2\cos\theta}.$$

Zato je

$$\begin{aligned}\frac{k}{h^2}r + C_1 r\sin\theta + C_2 r\cos\theta = \frac{k}{h^2}r + C_1x + C_2y &= 1\\ \frac{k}{h^2}r &= 1 - C_1x - C_2y\\ \frac{k^2}{h^4}\left(x^2+y^2\right) &= (1 - C_1x - C_2y)^2,\end{aligned}$$

što predstavlja jednadžbu elipse i time smo dokazali našu tvrdnju.

4.6 Slobodni pad uz otpor zraka

Postoji mnogo vrsta gibanja oko nas. To su primjerice jednoliko ubrzano, usporeno, gibanje s konstantnom brzinom itd. Nas će u ovom dijelu zanimati jedan od najpoznatijih primjera gibanja tijela, gibanje s konstantnim ubrzanjem s kojim neko tijelo pada pri utjecaju Zemljine gravitacijske sile. Njega nazivamo slobodni pad, a to stalno ubrzanje je gravitacijska akceleracija i iznosi $g = 9.81m/s^2$.
U sljedećem dijelu navest ćemo kako matematički dobiti izraz za visinu s koje tijelo pada pri slobodnom padu uz otpor zraku te tako vidjeti njegovu povezanost s diferencijalnim jednadžbama.
Označimo visinu s koje tijelo pada u trenutku t s $y(t)$. Otpor zraka ovisi o obliku tijela i drugim parametrima, ali uglavnom najznačajni utjecaj ima sila suprotna gibanju koja je proporcionalna brzini tijela. Tako je ukupna sila koja djeluje na tijelo

$$F = ma = mg - kv$$

tj.

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v. \tag{28}$$

Gornja jednadžba pripada linearnim diferencijalnim jednadžbama 1. reda. Riješimo najprije pripadnu homogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = 0.$$

Njeno rješenje glasi

$$v = Ce^{-\frac{k}{m}t},\ C \in \mathbb{R}.$$

Koristeći metodu varijacije konstanti, uvrstimo li $v = C(t)e^{-\frac{k}{m}t}$ u (28) dobivamo da je

$$C(t) = \frac{gm}{k}\left(e^{\frac{kt}{m}} + D\right),\ D \in \mathbb{R}.$$

Konačno rješenje jednadžbe (28) glasi

$$v(t) = \frac{gm}{k} + e^{-\frac{kt}{m}}D,\ D \in \mathbb{R}.$$

Iz početnog uvjeta ($v(0) = v_0$) možemo izračunati konstantu D. Za nju dobivamo vrijednost $D = v_0 - \frac{mg}{k}$. Sada imamo

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{mg}{k} + \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-kt/m}.$$

No, napomenimo da je

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_0^t vdt = \frac{mg}{k}t - \frac{m}{k}\left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)\left(e^{-kt/m} - 1\right).$$

Dakle, vrijedi

$$y = y_0 + \frac{mg}{k}t + \frac{m}{k}\left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)\left(1 - e^{-kt/m}\right).$$

Taj izraz predstavlja visinu s koje tijelo pada pri slobodnom padu.

Literatura

[1] M. Alić, Obične diferencijalne jednadžbe, Zagreb, 2001.

[2] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, USA, 2001.

[3] S. R. Cherry, J. A. Sorenson, M. E. Phelps, Physics in Nuclear Medicine, Saunders, 2003.

[4] Z. Glumac, Klasična mehanika: kratak uvod, 2006.

[5] I. Ivanšić, Fourierovi redovi. Diferencijalne jednadžbe, Osijek, 2000.

[6] J. M. Mahaffy, Elementary Differential Equations, Lecture Notes - Exact and Bernoulli Differential Equation, Department of Mathematics and Statistics, San Diego University, 2021.

[7] J. Planinić, Osnove fizike I. (Mehanika), Zagreb, 2005.

[8] J. E. Sasser, History of ordinary differential equations the first hundred years, Mathematics and Applied Sciences, University of Cincinnati

[9] G. F. Simmons, Differential Equations with Applications and Historical Notes, New York, 2017.

[10] Z. Šikić, Diferencijabilne jednadžbe, Zagreb, 2006.

[11] W. F. Trench, Elementary diferential equations with boundary value problems, 2001.

[12] Differential Equations I, MATB44H3F lecture notes, Department of Mathematics, University of Toronto, 2011.

[13] `https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/8b109d99-b37e-4aa4-821c-ab1d3c48e3d6/html/24168_Opci_zakon_gravitacije.html`, (17.5.2021.)

[14] `http://www.grad.hr/nastava/matematika/mat2/node21.html`, (11.3.2000.)

[15] `https://hr.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton` (3.9.2021.)

[16] `https://sco.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler` (23.2.2021.)