Algebra u osnovnoj i srednjoj školi

Pahanić, Goran

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Goran Pahanić

Algebra u osnovnoj i srednjoj školi

Diplomski rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Goran Pahanić

Algebra u osnovnoj i srednjoj školi

Diplomski rad

Mentor: prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2021.

Sadržaj

Uvod **1**

1 Razvoj algebarskih vještina **2**

1.1 Mentalna algebra 2

1.2 Supstitucija vrijednosti 3

1.3 Negativni brojevi 5

1.4 Pojednostavljivanje 5

1.5 Proširivanje i faktorizacija 7

1.6 Oznake funkcija 9

1.7 Razlomci 9

2 Slagalice i problemi: Stvaranje i rješavanje problema **13**

2.1 Kreiranje i rješavanje linearnih jednadžbi 13

2.2 Sustavi linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice 18

2.3 Kvadratne jednadžbe 20

3 Proporcionalnost **24**

4 Poveznica s geometrijom **27**

4.1 Veze između algebre i geometrije 27

Literatura **32**

Uvod

Većinu ljudi kada pitamo što je algebra ili koje su njene karakteristike, reći će da je algebra upotreba slova ili simbola za brojeve. Teško im je opisati značenje i svrhu algebre. No, algebra je važna grana matematike čija se važnost sve više naglašava u školskom kurikulumu matematike. Počinje se uvoditi u prvom razredu osnovne škole. Osim što je moćan alat za rješavanje problema iz stvarnoga života, bitna osobina algebre je i njena primjena u puzzlama i problemima te objašnjenjima i dokazima unutar same matematike. Kao što mnogi nastavnici matematike znaju, veliki broj učenika ne uspije shvatiti važnost algebre, niti vide njezinu svrhu i korisnost pa samim time ne vide ni smisao u učenju algebre. Zato je učenje algebre izazov za učenike, ali je i poučavanje algebre izazov za nastavnike. Nema recepta za učenje i podučavanje algebre. Jako je bitna motivacija učenika. Zato je algebru potrebno podučavati konkretnim motivacijskim problemima i zadatcima koji su učeniku poznati i bliski, odnosno, onim problemima i zadatcima u kojima učenici vide svrhu i značenje algebre.

U kurikulumu za Matematiku, donešenom 2019. godine, algebra je jedna od pet obuhvaćenih domena i definirana je na sljedeći način: *"Algebra je jezik za opisivanje pravilnosti u kojemu slova i simboli predstavljaju brojeve, količine i operacije, a varijable se upotrebljavaju pri rješavanju matematičkih problema."*

Kroz domenu Algebra i funkcije, od nižih razreda osnovne škole pa sve do završnih razreda srednje, učenici se služe različitim vrstama prikaza; grade algebarske izraze, tablice i grafove radi generaliziranja, tumačenja i rješavanja problemskih situacija. Uočavaju nepoznanice i rješavaju jednadžbe i nejednadžbe računski provođenjem odgovarajućih algebarskih procedura, grafički i služeći se tehnologijom kako bi otkrili njihove vrijednosti i protumačili ih u danome kontekstu. Određenim algebarskim procedurama koriste se i za primjenu formula i provjeravanje pretpostavki. Prepoznavanjem pravilnosti i opisivanjem ovisnosti dviju veličina jezikom algebre učenici definiraju funkcije koje proučavaju, tumače, uspoređuju, grafički prikazuju i upoznaju njihova svojstva. Modeliraju situacije opisujući ih algebarski, analiziraju i rješavaju matematičke probleme i probleme iz stvarnoga života koji uključuju pravilnosti ili funkcijske ovisnosti.[1]

[1] Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematika za osnovne i srednje škole, Narodne novine, 2019.

Poglavlje 1

Razvoj algebarskih vještina

1.1 Mentalna algebra

Supstitucija vrijednosti, pojednostavljivanje izraza, proširenje i faktorizacija, rješavanje jednadžbi i crtanje grafova su sve važne vještine koje učenik treba razumjeti i biti tečan u njima kako bi napredovao u algebri. Biti tečan u nekoj algebarskoj vještini znači biti sposoban izvesti je brzo i precizno kao odmah dostupan odgovor u odgovarajućoj situaciji. Učenje takvih vještina nije samo sebi svrha već jedan od ključnih zahtjeva za sposbnost korištenja i primjene algebre. Kada jednostavne vještine postanu automatske, učenik se može koncentrirati na "mišljenje višeg reda" koje je potrebno primjeniti na zanimljivim i težim problemima. Nažalost, većina udžbenika i tekstova se temelji samo na postizanju tih vještina bez da ih se koristi na načine koji su značajni i shvatljivi učeniku. Vještine se trebaju razvijati zajedno s njihovom primjenom tako da su njihovo značenje i svrha te motivacija učenika neprestano jačaju. Ipak, vještine se moraju vježbati kako bi se razvila potrebna tečnost i to maštovitije i poticajnije nego u prosječnim školskim udžbenicima.

Pravilno razumijevanje algebarskih procesa je ovisno o odgovarajućem razumijevanju aritmetičkih operacija. Pomoći i učiti učenike da računaju mentalno je posebno važno jer vježbanje računskih operacija i temeljnih principa s jednostavnim brojevima osiguravaju uspjeh. Vježbanje mentalnih metoda u sljedećem primjeru stalno se poziva na distributivnost.

Primjer 1.1 $7 \cdot 17$ *se mentalno računa na sljedeći način:* $7 \cdot 10 + 7 \cdot 7$.

Primjer 1.2 $8 \cdot 98$ *se mentalno računa na sljedeći način:* $8 \cdot 100 - 8 \cdot 2$.

Primjer 1.3 $7 \cdot 3.5 + 3 \cdot 3.5$ *i* $7 \cdot 237 + 3 \cdot 237$ *daju jasan primjer algebarskom pojednostavljenju* $7a + 3a = 10a$.

Vještina mentalne aritmetike se najbolje razvijaju kad se učenike traži izvođenje jednostavnih računskih operacija s minimalnim pisanjem i da se učenike uključi u diskusiju o metodama koje su koristili za izračunavanje zadatka.
Algebarske vještine se mogu provjeriti i vježbati istom tehnikom kao kod mentalne aritmetike - kratkim i jednostavnim algebarskim pitanjima s ključnim informacijama napisanim na ploči. Pažnja bi trebala biti na pronalsku grešaka i diskutiranju tih

grešaka redom kako ih dođemo do njih. Učenici na taj način dobiju povratnu informaciju koju inače ne dobiju na testovima u kojima je pozornost usmjerena na točnim odgovorima i broju bodova. Pitanja trebaju biti kratka i jednostavna jer tečnost i razumijevanje se najbolje razvijaju i jačaju kad je pažnja usmjerena na ključnu ideju u zadatku bez zbunjivanja s čudnim, velikim brojevima ili kompliciranim izrazima. Važno je osigurati da se već usvojene vještine stalno vježbaju i provjeraju jer se na taj način jačaju.

Primjer 1.4 *Primjeri pitanja koje možemo zadati učenicima za stjecanje spomenutih vještina:*

1. *Nađi* n *ako je* $2n - 1 = 19$.
2. *Koji je sljedeći neparan broj nakon broja* $2n + 1$*?*
3. *Zbroji* $a + b$ *i* $b + c$.
4. *Izračunaj* $a + 2b + c$*, ako je* $a = 4$*,* $b = 2$ *i* $c = 1$.
5. *Koja je* y *- koordinata točke koja leži na pravcu* $y = 3x + 1$ *ako je* $x = 4$*?*
6. *Pronađi* x *- koordinatu točke koja se nalazi na pravcu* $y = 3x + 1$ *za* $y = 16$*?*

1.2 Supstitucija vrijednosti

Važan dio pravilnog razumijevanja algebre jest sposobost kretanja između simboličnog izraza ili jednadžbe i brojevnog uzorka i veze. Sposobnost supstituiranja vrijednosti i evaluacije izraza se trebaju razviti prirodno kada se s učenicima radi s izrazima i zadatcima koji za njih imaju značenje. Zadatci dizajnirani za vježbanje supstitucije su obično puno učinkovitiji ako se koriste kao sredstvo do cilja, a ne kao sam cilj. Mnogi učenici imaju poteškoća sa supstituiranjem vrijednosti čak i u najjednostavnijim primjerima što je očito u sljedećem primjeru:

Primjer 1.5 *Koliko je* $5 \cdot t^2$ *ako je* $t = 2$*?*

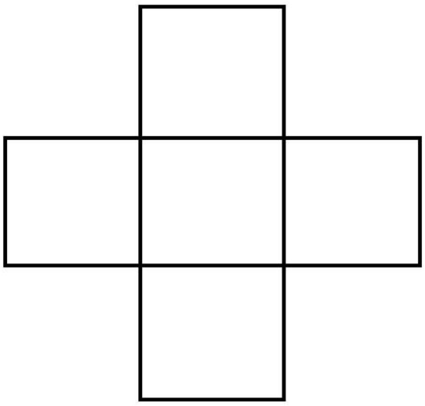
Uobičajena pogreška učenika je da će prvo pomnožiti vrijednost broja t s brojem 5 pa zatim kvadrirati dobiveni rezultat umjesto da prvo kvadriraju t i onda pomnože. Raspravu s učenicima možemo započeti pitanjem da provjere koliko je $5 \cdot 2^2$ mentalno. Neki učenici će dati točan odgovor 20, no neki neće točno odgovoriti pa će reći 100 što dovodi do kognitivnog konflikta. Time se dobije značajna mogućnost da s učenicima raspravljamo kako doći do točnog rješenja. U sljedećem primjeru dane su dvije kontrastne kratke vježbe u kojima je potrebno koristiti supstituciju.

Primjer 1.6 (Prva vježba) $5t^2$ *- zapamti da se prvo treba kvadrirati pa onda množiti s* 5*. Npr. Za* $t = 3$*,* $5t^2 = 5 \cdot 3^2 = 5 \cdot 9 = 45$.
Procijeni sljedeće:

1. $5t^2$ *ako je* $t = 7$.
2. $2a^2$ *ako je* $a = 4$.

3. $6y^2$ *ako je* $y = 2$.
4. $\frac{1}{2}x^2$ *ako je* $x = 6$.
5. $2p^2 + 3q^2$ *ako je* $p = 3$ *i* $q = 5$.

Primjer 1.7 (Druga vježba) *Slika prikazuje mrežu kocke s otvorom.*



Slika 1.1: Mreža šuplje kocke

1. *Izračunaj vanjsko oplošje kocke na slici ako je duljina brida* $3cm$.
2. *Ako je duljina brida kocke dana s* d, *objasnite zašto je oplošje jednako* $5d^2$.
3. *Izračunaj oplošje ako je* $d = 10$.
4. *Nađi vrijednost* d *ako je površina* $180cm^2$.

Prva vježba je napravljena tako da učeniku ojača korištenje rutinskih operacija, dok u drugoj vježbi jasan je kontekst i zašto se prvo izvodi kvadriranje. Prvi tip zadataka nastavnike i učenike fokusira na dobivanje točnog odgovora, dok u drugom tipu zadataka učenici ojačavaju razumijevanje jer povezuju formulu s idejom površine koja se može slikovno prikazati i time je učeniku jasna svrha ovakvog tipa zadataka. No, ne može se sugerirati niti da je druga vježba model za uspješno poučavanje algebre niti da prva vježba nema nikakvo značenje za učenje iste. Ali ne može se posebno osloniti na vježbanje vještina kroz prvi tip zadatka jer takav tip zadataka u konačnici nema jasnu svrhu učeniku niti djeluje motivirajuće na učenike.

U ranijim stadijima učenja algebre teško je shvatiti što znače slova i općenito reprezentacija simbolima. Stoga je bolje podučavanje bazirati na puno rada s malim brojevima, tek ponekom referencom na veće brojeve kako bi učenicima ilustrirali neku ideju traženu u zadatku. Uvođenje razlomaka i negativnih brojeva prije nego što su učenici tečni s jednostavnim računskim operacijama stvara učeniku krivu sliku o algebri i kako je ona sama teška, dok teškoće leže baš u tome što učenici nisu tečni u u rješavanju zadataka s razlomcima i negativnim brojevima. Na primjer, neki problemi u učenju rješavanja sustava jednadžbi mogu se izbjeći u početnim stadijima učenja ako se prvo bazira na zadatke koji uključuju zbrajanje i čija su rješenja u skupu prirodnih brojeva ili 0. Kada se usvoje opći principi i kad učenici steknu samopouzdanje u rješavanju jednostavnih sustava, puno je lakše proširiti sustave na sustave s razlomcima i negativnim brojevima.

Neuspjeh razvijanja razumijevanja i tečnosti s negativnim brojevima i razlomcima, često je velika prepreka uspjehu s algebrom, iako se puno može i treba učiniti prije nego nam razlomci i negativni postanu krucijalni za rješavanje zadataka.

1.3 Negativni brojevi

Obično se učenici prvi puta susreću s negativnim brojevima kada trebaju označiti poziciju ispod nule na brojevnom pravcu što je najbolje učenicima objasniti na praktičnim primjerima, recimo, temeprature ili nekakvim matematičkim situacijama koje uključuju koordinate. No, negativni brojevi kao oznake na brojevnom pravcu, učenicima predstavljaju nekoliko problema. Konceptualne teškoće proizlaze kad se uvode računske operacije s negativnim brojevima. Zbrajanje se često smatra pomakom na brojevnom pravcu iako se tada brojevi koriste na dva različita načina: za oznaku pozicije i oznaku pomaka (u smislu duljine i smjera) i većina učenika nema problema s ovakvim načinom objašnjenja zbrajanja. Ali oduzimanje objašnjeno kroz pomake na brojevnom pravcu nije baš tako lako shvatljivo učenicima. I nije problem naći razliku na brojevnom pravcu. Problem je koji je predznak rješenja jer nije očito je li rješenje pozitivno ili negativno. Nadalje, učenicima je pojam oduzimanja bliži "uzimanju" od nečega nego ideja razlike. Oznake i način na koji je nešto rečeno su također izvor problema.

1.4 Pojednostavljivanje

U ranom učenju algebre nije poželjno previše formalnog pojednostavljivanja jer je učenicima teško opravdati zašto učimo pojednostavljivanje, osim što možemo reći da će nam trebati kasnije. Učenici se bolje motiviraju ako vide svrhu onoga što rade u onom trenutku kada rade to. Potrebna vještina pojednostavljivanja treba se razvijati i vježbati kroz zadatke u kojima pojednostavljujemo na zanimljive načine. Mnoge zablude povezane s tretiranjem slova kao objektima proizlaze iz udžbenika u kojima pojednostavljivanje nije povezano s ekvivalentnim oblicima brojevnih veza. Biti sposoban rješavati zadatke sa simbolima bez čestog referenciranja brojeva je esencijalni cilj, ali ako se ta numerička veza ne povezuje često u ranijim stadijima učenja dolazi do nerazumijevanja.

U većini školskih udžbenika zadatci su takvi da učenici provode puno vremena pojednostavljajući izraze kao što je $3n+2n-1$ bez da razvijaju smisao odakle takav izraz ili što bi mogao značiti odgovor $5n-1$. Kako bi učenici razumjeli rješavanje ovakvih zadataka potrebno je više naglašavati takve numeričke veze.

Primjer 1.8 *Pojednostavi* $3n+2n-1$.
Ovom navedenom primjeru se može pristupiti tako da se učenike pita da napišu prvih 5 *višekratnika broja* 3 *i uz njih prvih* 5 *neparnih brojeva. Ako zbrojimo odgovarajuće parove brojeva, kao što vidimo na Slici 1.2., dobit ćemo zanimljiv skup rješenja gdje se*

	n	3n	2n - 1	3n + 2n -1
$3 + 1 = 4$	1	3	1	4
$6 + 3 = 9$	2	6	3	9
$9 + 5 = 14$	3	9	5	14
$12 + 7 = 19$	4	12	7	19
$15 + 9 = 24$	5	15	9	24

Slika 1.2: Primjer pojednostavljivanja

znamenka jedinica izmjenjuje između 4 *i* 9*. Postavlja se pitanje zašto je to tako. Ako se rezultate posloži u tablicu, dobit će se jasan vizualan prikaz identiteta* $3n + 2n - 1 = 5n - 1$*. Ovaj uzorak znamenaka jedinica u zadnjem stupcu je objašnjen i jasno je da je svaki rezultat višekratnik broja* 5 *umanjen za* 1*.*

Sljedeća dva primjera su također dizajnirana da stvore snažnu vezu između pojednostavljivanja i numeričkih nizova koji proizlaze iz zadanog izraza. U oba slučaja je očit uzorak koji stimulira znatiželju. Uloga pojednostavljivanja je korisna jer nudi objašnjenje promatranoga i potvrđuje općeniti rezultat.

Primjer 1.9 *Pojednostavi* $n - 2 + n + 1$ *da dobiješ* $2n - 1$*.*
U ovakvom primjeru jedna od teškoća na koju učenik može naići jest da predznak minus pridruži krivom izrazu i oduzme drugi n *od prvoga* n *jer misli da broj* 2 *ne može oduzeti od* n*. Stoga poništi* n*, zbroji* 2 *i* 1 *i za rezultat dobije* 3*. Ako zadatak prikažemo kao u Slici 1.3. učenik jasno vidi da je taj rezultat netočan. Isto tako, učeniku je jasnije kojem izrazu pridružuje minus. Npr., ako* $n = 5$ *uvrstimo u izraz* $5 - 2 + 5 + 1$ *očito je da* 2 *oduzimamo od* 5*.*

Primjer 1.10 *Pojednostavi* $(n + 3) - (n - 1)$ *tako da rezultat bude* 4*.*
U ovakvom primjeru bitno je znati riješiti se zagrade. U slučaju da učenik zagrade "ignorira" dobit će izraz $n + 3 - n - 1$ *i rezultat* 2 *jer će učenik poništiti* n*. U tabličnom prikazu učeniku je jasnija upotreba zagrada kod oduzimanja. Ako s učenikom diskutiramo o raznim numeričkim primjerima kao npr.* $8 - (5 + 2)$ *i* $8 - (5 - 2)$*, pomoći ćemo mu da vidi da je* $a - (b + c) = a - b - c$ *i* $a - (b - c) = a - b + c$*. Tada je jasno da je* $(n + 3) - (n - 1) = n + 3 - n + 1 = 4$*.*

Za većinu učenika, jedno objašnjenje neće biti dostatno da osigura razumijevanje i tečnost učenika u pojednostavljivanju. Vrijeme provedeno u rješavanju nekoliko zanimljivih primjera koji se brzo i točno mogu pojednostaviti je prijeko potrebno i radi motivacije učenika. Još neki primjeri za pojednostavljivanje sa značajnim kontekstom mogu biti:

- $(2n - 1) + (2n + 1) = 4n$ da se pokaže da je suma dva uzastopna neparna broja višekratnik broja 4.

n	n - 2	n + 1	(n - 2) + (n + 1)
1	⁻1	2	1
2	0	3	3
3	1	4	5
4	2	5	7
5	3	6	9

Slika 1.3: Primjer pojednostavljivanja

n	n + 3	n - 1	(n + 3) - (n - 1)
1	4	0	4
2	5	1	4
3	6	2	4
4	7	3	4
5	8	4	4

Slika 1.4: Primjer pojednostavljivanja

- $(a + 2b + c) + (b + 2c + d) = a + 3b + 3c + d$ problem magičnog broja.
- $a + b + a + b = 2a + 2b$ opseg pravokutnika.
- Udvostruči $x + 7$ i oduzmi 20 od $10x + 50$ brojevna slagalica.

Svaki od ovih primjera sugerira razne mogućnosti koje stvaraju priliku za pojednostavljivanje s običnim linearnim jednadžbama.

1.5 Proširivanje i faktorizacija

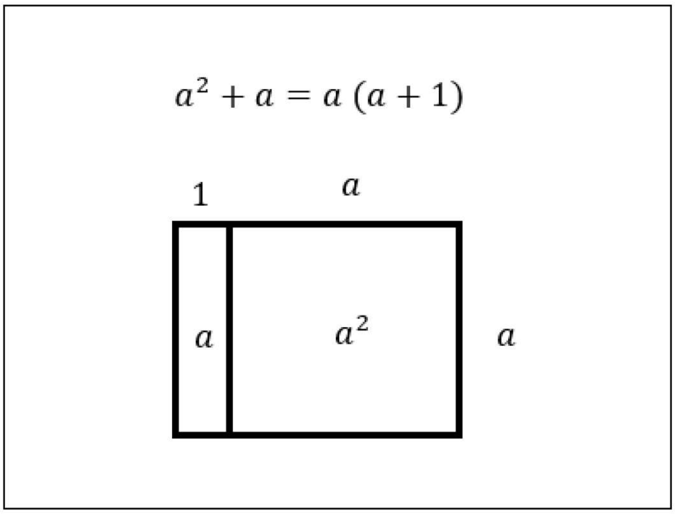
Opseg pravokutnika se može izraziti na dva načina, kao $2a+2b$ ili kao $2(a+b)$. Učenici će brzo razumjeti zapise kao dva različita načina za računanje opsega i brzo će razumjeti ekvivalentnost ovih izraza s jednostavnim numeričkim primjerima. No, smisao ekvivalencije ovih izraza će se lagano izgubiti ako se s učenicima rade primjeri s nepovezanim izrazima koje treba proširiti ili faktorizirati. Zato je važno prezentirati ove vještine na načine koji naglašavaju ekvivalentnost među parovima izraza koje promatramo i tako pomoći učenicima da cijene korisnost različitih izraza. U sljedećem primjeru promatraju se mogućnosti koje proizlaze iz istraživanja dva jednostavna ekvivalentna izraza.

Primjer 1.11 *Zbroj nekog broja i njegovog kvadrata uvijek daje paran rezultat.*

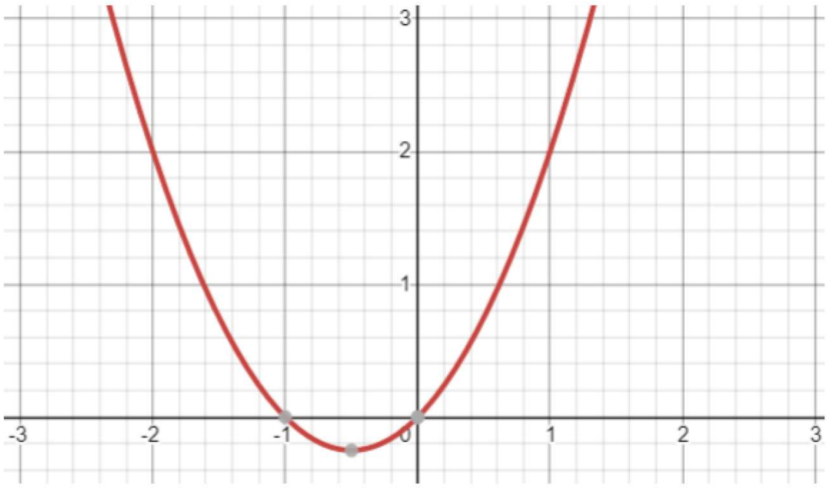
$$3^2 + 3 = 12 \qquad 8^2 + 8 = 72 \qquad 99^2 + 99 = 9900$$

Jednostavno objašnjenje za to je da bilo kada zbrajamo dva parna broja ili dva neparna broja za rezultat dobijemo paran broj. Algebarski pristup stvara drugu perspektivu: iz izraza $n^2 + n = n(n+1)$ jasno je da je suma broja i njegova kvadrata ekvivalentna umnošku dva uzastopna broja, n i $n+1$. Očito je da je bilo koji takav par uvijek paran pa je tvrdnja dokazana. Ovom identitetu možemo pristupiti i mentalno te na jednostavan način učeniku riječima objasniti prilično tešku kalkulaciju kao npr. da je $99^2 + 99$ isto kao da 99 lotova po 99 i onda još jedan dodatan 99 čine 100 lotova po 99 ukupno.

Još jedan način gledanja na gornji identitet jest da o njemu misllimo kao o površini kvadrata i nadodanoj traci s jedne strane kvadrata kao što je prikazano na Slici 1.5. U drugom kontekstu učenici mogu promatrati graf dan jednadžbom oblika $y = x^2 + 2$ prikazan na Slici 1.6. Drugi oblik ovog grafa, $y = x(x+1)$ je koristan jer nam odmah pokazuje gdje parabola siječe x - os.



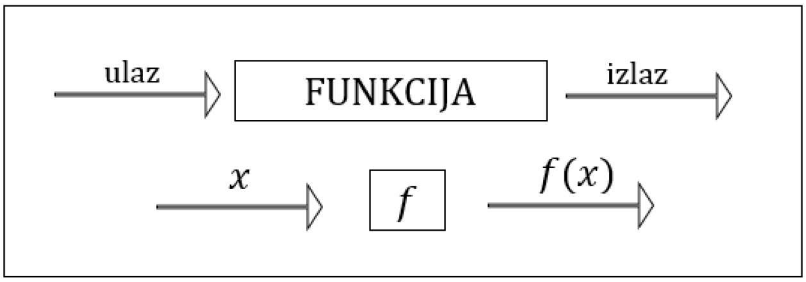
Slika 1.5: Zbroj broja i njegova kvadrata



Slika 1.6: Graf $y = x^2 + x$

1.6 Oznake funkcija

Ideja matematičke funkcije kao ulazno - izlaznog uređaja se učenicima može uvesti u nižim razredima osnovne škole. Učenike se zatim uvodi u oznake funkcija, tj. da za neki



Slika 1.7: Funkcija kao ulazno - izlazni uređaj

x funkcija daje izlaz $f(x)$. Tada funkciju možemo prikazati kao algebarski izraz npr. funkciju "kvadrat i nadodaj 1" prikazati kao $f(x) = x^2 + 1$. Velika prednost uvođenja oznaka funkcije u nižim razredima osnovne škole je ta što na jednostavan način ukazuje na vrijednost funkcije za određenu vrijednost varijable kao npr. $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(3) = 10$ za funkciju $f(x) = x^2 + 1$.

1.7 Razlomci

Jednakost je osnovna ideja kod razlomaka: različiti oblici kao $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{15}{20}$ imaju jednaku vrijednost. Da učenik razumije ovu ideju i vezu između pravih i nepravih razlomaka je bitno kako bi učenik mogao zbrajati i oduzimati razlomke i pojednostaviti rezultat.

Primjer 1.12 *Zbroji* $\frac{5}{6}$ *i* $\frac{5}{12}$.

$$\frac{5}{6} + \frac{5}{12} = \frac{10}{12} + \frac{5}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}.$$

Ovakvi primjeri se trebaju dobro izvježbati kako bi mogli uvesti algebarske razlomke.

Primjer 1.13 *Pojednostavi:*

$$\frac{x+2}{x+4}.$$

Učenici imaju poteškoća s ovako jednostavnim zadatcima. Jedna od češćih grešaka jest kad učenici pojednostavljuju izraz i skrate 2 i 4 sa zajedničkim djeliteljem 2 i za rezultat dobiju $\frac{x+1}{x+2}$. Još gora greška je kad učenici skrate x i u brojniku i u nazivniku. Takve greške nastaju jer učenik ne uspijeva vidjeti da je u razlomku moguće skratiti zajedničke faktore cijelog izraza. Kako bi učenicima bolje objasnili kraćenje možemo za x uzeti neku brojevnu vrijednost i uvrstiti u razlomak. U sljedećoj tablici vidi se efekt supstituiranja brojeva na čestim primjerima u kojima učenici griješe. Učenicima možemo zadati da ispune praznu tablicu pojednostavljujući brojevne razlomke gdje god je to moguće. Raspravu tada možemo temeljiti na pitanjima kako rezultat ukazuje koje algebarske izraze pojednostaviti i kako se to postiže tražeći najveći zajednički faktor.

	1	2	3	4	5
$\frac{x+1}{x+2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$
$\frac{x+2}{x+4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$	$\frac{7}{9}$
$\frac{2x+2}{2x+4}$	$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$	$\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$	$\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$	$\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$	$\frac{12}{14}=\frac{6}{7}$
$\frac{2x+4}{3x+6}$	$\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$	$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$	$\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$	$\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$	$\frac{14}{21}=\frac{2}{3}$

Slika 1.8: Pojednostavljivanje algebarskih izraza

Zbrajanje i oduzimanje algebarskih razlomaka se treba vježbati kako bi se razvile potrebne vještine i sposobnost da ih se primjeni u problemskim situacijama. Mnogo je načina kako takve zadatke učiniti prihvatljivim i značajnim za učenika. Recimo, dodajući niz razlomaka njihovim recipročnim vrijednostima učenici vide svrhu u rješavanju takvog zadatka. Ako se brojnik i nazivnik razlikuju za 1, dobit će se zanimljiv uzorak "2 i nešto" što možemo vidjeti na Slici 1.9.

$\frac{1}{2}+\frac{2}{1}=2\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=2\frac{1}{6}$	$\frac{3}{4}+\frac{4}{3}=2\frac{1}{12}$	$\frac{4}{5}+\frac{5}{4}=2\frac{1}{20}$	$\frac{5}{6}+\frac{6}{5}=2\frac{1}{30}$
$\frac{n}{n+1}+\frac{n+1}{n}=2+\frac{1}{n\,(n+1)}$				

Slika 1.9: "2 i nešto"

Ako učenicima pokažemo da je ovakav identitet točan, učenici vide značajan kontekst za učenje kako manipulirati algebarskim izrazima. Razumijevanje koraka po kojima transformiramo jednu stranu identiteta u drugu, u bilo kojem smjeru, pojačava se kad se uspoređuju odgovarajući koraci s numeričkim razlomcima kao u zadatku na Slici 1.10.

$\frac{3}{4}+\frac{4}{3}=\frac{9+16}{12}=\frac{25}{12}=\frac{24+1}{12}=2\frac{1}{12}$
$\frac{n}{n+1}+\frac{n+1}{n}=\frac{n^2+(n+1)^2}{n(n+1)}=\frac{2n^2+2n+1}{n(n+1)}=\frac{2n(n+1)+1}{n(n+1)}=2+\frac{1}{n(n+1)}$

Slika 1.10: Zbrajanje algebarskih razlomaka

* * *

Algebarske ideje su direktna ekstenzija numeričkih operacija i veza i ovise o razumijevanju i fluentnosti s brojevima. Vještina mentalne aritmetike i razumijevanje i tečnost koje su ključne za uspjeh u algebri. Kad se prođe inicijalno učenje u kojem je dovoljno raditi s pozitivnim brojevima, dolazi rad s negativnim brojevima i razlomcima i jako je bitno da ih učenici dobro shvate i da dobro računaju s njima jer nekim učenicima neuspjeh s negativnim brojevima i razlomcima postaje prepreka uspjehu u algebri. Razvijanje kapaciteta učenika da izvode osnovne operacije s algebarskim izrazima zahtjeva više od čestog vježbanja rutinskih zadataka. Da bi bili efektivni, razvoj vještina se mora prezentirati u značajnom kontekstu koji omogućuje učenicima da vide temeljnu svrhu onoga što rade.

Učenici bi trebali shvatiti:

- značenje algebarskih simbola i izraza
- važnost i razumijevanje aritmetičkih vještina, posebno s negativnim brojevima i razlomcima
- kako su algebarski rezultati povezani s numeričkim uzorcima i kalkulacijama
- načine za provjeravanje pogrešaka
- važnost tečnosti u mentalnoj algebri kroz jednostavne primjere kao bazom za razumijevanje kompleksnih algebarskih izraza
- ulogu algebre kao moćnog alata za objašnjavanje i rješavanje problema.

Stjecanje vještina sa supstitucijom, pojednostavljivanjem i pretvaranjem izraza u drugi oblik proširivanjem, faktoriziranjem i manipuliranjem algebarskim razlomcima su esencijalni zahtjevi kako bi učenici uspješno primjenili algebru na širokom području matematičkih situacija. Učenicima se često čini da je algebra koja se uči u školi jedino za učenje vještina i tehnika u kojima oni ne vide svrhu. Poboljšanu motivaciju i veći uspjeh je lakše postići ako učenici uče algebarske vještine kroz puno zanimljivih i moćnih zadataka u kojima algebrom možemo objasniti interesantne rezultate i riješiti zanimljive probleme.

Poglavlje 2

Slagalice i problemi: Stvaranje i rješavanje problema

2.1 Kreiranje i rješavanje linearnih jednadžbi

Jednostavne linearne jednadžbe možemo učenicima uvesti različitim mozgalicama i dijalozima poput ovoga:

Nastavnik: *Zamisli neki broj. Udvostruči ga i dodaj mu* 5*. Koji broj si dobio?*
Učenik A: *11.*
Nastavnik: *Učenik B, možeš li reći koji je broj Učenik A zamislio na početku?*
Učenik B: *3.*
Nastavnik: *Učenik A, je li to točno?*
Učenik A: *Da!*
Nastavnik: *Učenik B, kako si došao do rješenja?*
Učenik B: *Prvo sam oduzeo* 5 *od* 11 *i dobio* 6*. Onda sam* 6 *prepolovio!*

Učenici obično nemaju puno poteškoća s rješavanjem problema na ovaj način ako su brojevi jednostavni i operacije i njihovi inverzi poznati učeniku. Uglavnom je njihov postupak da jednostavno ponište te dvije operacije, prvo oduzmu 5, zatim dobiveni broj prepolovi. No, kad se učenicima jednadžbe predstave simbolima i formalnim metodama rješavanja, mnogi od njih imaju različitih teškoća koje su nastavnicima dobro poznate:

- učenicima je teško prevesti problemski zadatak u algebarski oblik,
- oslanjaju se na neformalne metode koje su korisne u jednostavnim situacijama, ali ne i u jednadžbama za čije je rješavanje potrebna formalna metoda,
- nedostatak fluentnosti u operacijama s negativnim brojevima i razlomcima,
- odabir pogrešne inverzne operacije,
- teškoće u odlučivanju kojim redom izvesti potrebne operacije,
- zbunjenost oko kompliciranog pisanog postupka.

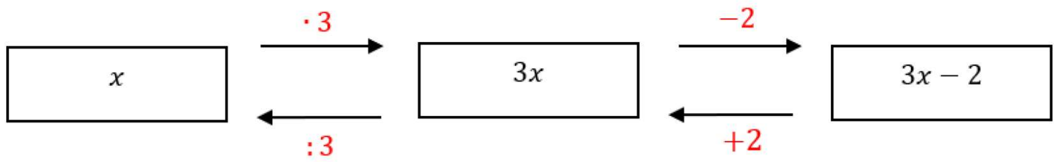
Često, najteži dio rješavanja nekog problema leži u prevođenju tog problema u odgovarajući oblik simbolima. Lako je zanemariti ovaj aspekt rješavanja problema i koncentrirati energiju učenika samo na učenje tehnika rješavanja. Tako učenici često ne uspiju razviti sposobnost prevođenja što je važan početni dio u rješavanju problema. I motivacija učenika slabi jer ne vide razlog za učenje rješavanja jednadžbi. Tehnike rješavanja se trebaju razvijati kroz probleme u kojima učenici vide svrhu onoga što rade. Ta svrha ne mora biti sofisticirana, recimo, učenike možemo motivirati rješavanjem slagalica. Učenici moraju naučiti konkretne situacije prevesti u algebarski oblik. Moraju znati što znače simboli i moraju lako vidjeti da je izjava riječima ”udvostruči broj i dodaj 5” u algebarskom obliku ”$2x + 5$”.

1984. godine **Booth** u svom djelu *Algebra: Dječje strategije i pogreške* raspravlja kako nastavnici često koriste jednadžbe kao $x + 5 = 8$ kako bi učenike uveli u formalne postupke rješavanja problema, ali naznačava da ”djeca obično dolaze do rješenja inspekcijom”, ”pogodi i testiraj” ili ”primjenom poznatih brojevnih veza”. Učenici ne moraju misliti u smislu oduzimanja 3 jer im je nepoznanica označena s x poznata jer misle ”Znam da je $3 + 5 = 8$”. Uvesti formalne metode da bi učenici napravili nešto što mogu napraviti i bez toga, ne čini se baš razumna taktika, jer mnogi učenici, posve opravdano, ignoriraju teže načine ako mogu nešto riješiti na jednostavniji način. Učenik će prepoznati da formalna metoda može biti korisna, jedino kada mu ruta do odgovora nije odmah očita i neformalne metode nisu dovoljne za rješavanje. U kontekstu ”Zamisli broj”, rješavanje jednadžbe $24x + 53 = 137$ je manje trivijalna od ”$2x + 5 = 11$”, iako jednostavniji problemi mogu biti korisni kako bi pristupili težem.

Mnoge teškoće na koje učenici nailaze u algebri nastaju jer učenici ne razumiju dovoljno bitne numeričke ideje i nisu tečni u korištenju istih što je očito i kod rješavanja jednadžbi. Stoga se čini prikladno u što ranijoj dobi ustanoviti principe i postupke koristeći samo one vrste brojeva u radu s kojima je učenik tečan. Problemi koji uključuju razlomke i negativne brojeve se trebaju obrađivati tek kada učenici imaju samopouzdanja koristiti ove zahtjevnije vrste brojeva i nakon što su usvojili algebarske postupke s jednostavnijim brojevima. S druge strane, probleme s velikim cijelim brojevima i decimalama učenici mogu lakše rješavati ako koriste kalkulator kako bi došli do rješenja.

Česta pogreška u rješavanju jednadžbi kao npr. $3x - 2 = 7$ kada učenici odluče oduzimati 2 s obje strane kako bi se ”riješili dvojke na lijevoj strani” i stižu pogrešno do $3x = 5$. To proizlazi iz mnogih udžbenika i mnogih nastavnika koji kada kažu ”makni” ili ”riješi se” određenog broja kako bi se izolirao nepoznati element. Tako učenici misle da moraju nešto ”oduzeti”, a ne ”poništiti” računsku operaciju. Jasnoća pri odabiru odgovarajuće operacije se postiže razmišljanjem koje korake treba poduzeti da bi se postavila lijeva strana jednadžbe. Verbaliziranjem koraka predstavljenih izrazom $3x - 2$ ili prikazivanjem izraza kao dijagram toka, učenicima će biti lakše vidjeti što moraju učiniti da bi našli vrijednost od x. Iz dijagrama toka jasno je, da pošto je 2 oduzeto u posljednjem koraku, mora se prvo nadodati ponovno na 7 kada se traži nepoznati početni broj.

Dijagram toka se gradi na učenikovim intuitivnim idejama o tome kako riješiti ”zamisli broj” probleme i služi za preliminirano predstavljanje i rješavanje problema u algebar-



Slika 2.1: Poništavanje s dijagramom toka

skoj formi i kao pokazatelj na načine prevazilaženja nekih poteškoća koje učenici imaju s formalnim metodama rješavanja linearnih jednadžbi.

Razmišljajući o tome kako je jednadžba građena pomaže da se svladaju poteškoće s redoslijedom računskih operacija koje dovode do rješenja. Ideja koja kaže da se računska operacija koja je napravljena zadnja mora se poništiti prva, nije odmah očita ako učenik gleda u pisani oblik $3x - 2 = 7$. Kada se pročita taj izraz, "3 puta nešto" prvo upada u oko i to može odbaciti nerazmišljanje učenika da probaju podijeliti s 3 kao prvim korakom. Iako se takva greška možda ne može napraviti u jednostavnim slučajevima kao što je ovo, na nju obično nailazimo kada su uključene doslovne jednadžbe. Recimo, ako je a subjekt u izrazu $v = u+at$, često učenici za odgovor daju $a = \frac{v}{t} - u$ kao rješenje.

Zahtijevanje kompleksnih pisanih oblika rješenja, kao što je prikazano na Slici 12., gdje su svi koraci o kojima treba misliti zapisani, jednostavan postupak čini kompliciranim i može više zakomplicirati nego pomoći učeniku da shvati. Oblik pokazan desno trebao bi biti dostatan kao pisano rješenje, ali bi ga trebala pratiti diskusija koja naglašava postupak odlučivanja koji od dva koraka poništavanja je potreban - dodaj 2 i podijeli s 3. Dijagram toka je vrijedan način koji pomaže tom načinu razmišljanja i informalnom zapisivanju koraka koji su uključeni. Uporaba dijagrama toka pomaže da se ustanovi

$$\begin{aligned} 3x - 2 &= 7 \\ 3x - 2 + 2 &= 7 + 2 \\ 3x &= 9 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{9}{3} \\ x &= 3 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 3x - 2 &= 7 \\ 3x &= 9 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Slika 2.2: "Kompliciranje jednostavnog postupka"

važan princip prenošenja iste operacije s obje strane jednadžbe kako bi se održala jednakost i da bi redoslijed računskih operacija postao eksplicitan. No, dijagram toka nije odmah primjenjiv kada se nepoznanica pojavljuje na više mjesta odjednom jer se nepoznanica mora pojaviti samo na jednom mjestu u jednadžbi. Dodatni koraci potrebni da bi se to postiglo nisu teški kada učenici postanu tečni u rješavanju različitih linearnih jednadžbi gdje se nepoznanica ponavlja samo jednom.

Jednadžbe se ne bi trebale uvijek pojavljivati u rasčlanjenom obliku u vježbama u kojima se samo vježbaju tehnike rješavanja: formirati jednadžbe jednako je važno kao i riješiti ih. U sljedećem primjeru prikazan je problem s godinama, a iza njega slijedi dijalog u kojemu je fokus na formiranju jednadžbi koja se mora riješiti.

Primjer 2.1 *Ivana je 27 godina straija od svog sina Filipa i za 5 godina broj njenih godina će biti 4 puta veće od Filipovih. Koliko imaju godina Ivana i Filip?*

Primjer 2.2 *Dijalog:*
Nastavnik: *Što želimo saznati ovdje?*
Učenik A: *Ivanine i Filipove godine*
Nastavnik: *Što znamo o njihovim godinama?*
Učenik B: *Ivana je 27 godina starija od Filipa!*
Nastavnik: *Ako Filipove sadašnje godine označimo slovom x, kako možemo zapisati Ivanine godine?*
Učenik C: *Ivanine godine su $x + 27$!*
Nastavnik: *Znači, Filip ima x godina, a Ivana $x + 27$. Koliko će oni imati godina za 5 godina?*
Učenik D: *$x + 5$ ima Filip, a Ivana $x + 32$.*
Nastavnik: *Što ide dalje?*
Učenik A: *Znamo da će Ivanine godine biti 4 puta veće od Filipovih za 5*
Učenik B: *Da, pa možemo zapisati $4(x + 5) = x + 32$.*

Učenici tada mogu doprinijeti koracima koje treba poduzeti u svakoj fazi kako bi došli do rješenja:

$$4(x + 5) = x + 32$$

$$4x + 20 = x + 32$$

$$3x + 20 = 32$$

$$3x = 12$$

$$x = 4$$

Posljednja faza rješavanja problema je prezentiranje rješenja u traženom obliku i provjera točnosti. U ovom slučaju, Filip ima 4 godine, a Ivana 31 godinu, a za 5 godina njihova dob će biti 9 i 36 godina, što zadovoljava navedene zahtjeve. Lakše je potaknuti učenike da provjeravaju svoja rješenja prilikom rješavanja jednadžbe koja proizlazi iz problema, a ne kao raščlanjeni primjer u vježbi jer problem pruža jasan kontekst iako je možda donekle izmišljen. Jednadžbe se mogu riješiti naprednim kalkulatorom pomoću određenih naredbi. Ovo je očito korisno kada se tijekom matematičkog rada pojavi složena jednadžba. Međutim, studenti moraju razumjeti načela ručnog rješavanja niza standardnih vrsta jednadžbi i razviti znatnu tečnost jednostavnim primjerima. Korištenje mogućnosti rješavanja na kalkulatoru mora se koristiti razumno kako se ne bi narušio ovaj bitni zahtjev. Napredni kalkulator može se koristiti za pomoć učenicima kako bi brzo rješavali jednadžbe "ručno" fokusiranjem svoje pažnje na izbor operacija i da na taj način vide učinke pogrešnih izbora.

Korištenje naprednih kalkulatora kao načina razvijanja učenikovog razumijevanja i vještina u izvršavanju zadataka neovisno o stroju je relativno neistraženo područje, s kojim je potrebno oprezno rukovati jer učenik može sve računati na kalkulatoru bez da razmišlja što se zapravo događa u zadatku. Međutim, sposobnost inteligentne uporabe jednadžbi i stvaranja algebarskih argumenata puno ovisi o poznavanju i tečnosti pravila i postupaka pisane algebre. Kalkulator ne rješava sve probleme!

Rješavanje doslovne jednadžbe, promjene nepoznanice u formuli i pronalaženje inverza funkcije su sve zadatci gdje je poteškoća u odabiru ispravnih operacija u svakoj fazi još veći izazov za učenike jer prisutnost dodatnih varijabli komplicira situaciju. Kada su dane vrijednosti za sve druge varijable, uvijek je jednostavnije zamijeniti prvo vrijednosti i onda riješiti jednadžbu.

Primjer 2.3 *Nađi vrijednost a iz formule* $v = u + at$ *ako je* $v = 25$, $u = 10$ *i* $t = 3$.

Iz ovog primjera jasno je da je jednostavnije supstituirati i riješiti jednadžbu $25 = 10+3t$ nego prvo izraziti nepoznanicu $a = \frac{v-u}{t}$ i onda supstituirati.

Kada je potrebno zadržati doslovni oblik jednadžbe, dijagrami toka ponovno su koristan alat za razmišljanje o koracima koje treba poduzeti. U sljedećem primjeru prikazano je kako izraziti nepoznanicu l iz formule $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Za neke učenike dijagram toka može biti pouzdan postupak koji će i nastaviti koristiti, no većini bi trebali biti samo pomoć pri razmišljanju na putu prema tečnom odabiru ispravne operacije pravilnim redoslijedom za konvencijalni postupak.

Primjer 2.4

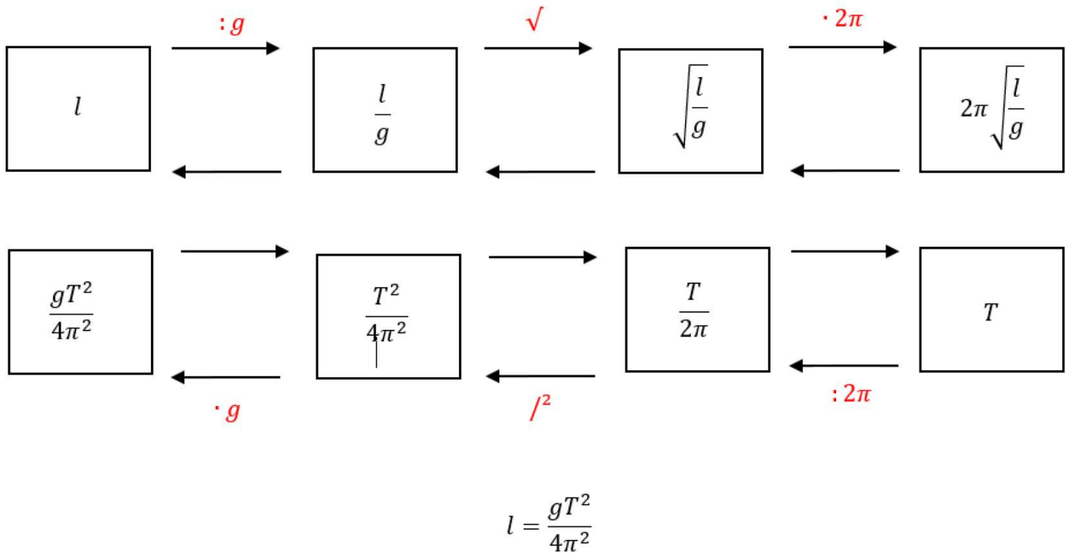
$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = T$$

$$\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{T}{2\pi}$$

$$\frac{l}{g} = \frac{T^2}{4\pi^2}$$

$$l = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

Izrazi na obje strane jednadžbe se svakim korakom pojavljuju u odgovarajućim "kutijama" u dijagramu toka što je korisno i jače naglašeno kada stavimo dva dijagrama jedan ispod drugoga.



Slika 2.3: Dijagram toka za transformiranje formule $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

2.2 Sustavi linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice

U svom djelu "Vizija u elemntarnoj matematici" iz 1964. godine Walter Warwick Sawyer predložio je da se algebra uvodi s problemima koji vode do sustava dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice jer se one čine manje trivijalnim od jednostavnih linearnih jednadžbi i pružaju veću motivaciju za algebarskim pristupom koji daje smisao simbolima i razvija važne postupke. Sawyerov inicijalni primjer je u obliku pitanja slagalice što možemo vidjeti na idućem primjeru jer učenicima je na taj način jasno vidljivo rješenje problema i spremno vodi algebarskom prikazu.

Primjer 2.5 *Neki čovjek ima dva sina. Sinovi su blizanci i iste su visine. Ako nadodamo očevu visinu visini jednog sina, dobit ćemo 10 stopa. Ukupna visina oca i oba sina je 14 stopa. Koliko su visoki otac i sinovi?*

U ovom primjeru sa m je označena visina oca, a sa s visina njegovih sinova. (Visina je označena u stopama.)
Ovu situaciju je jednostavno prikazati kao sustav linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice.

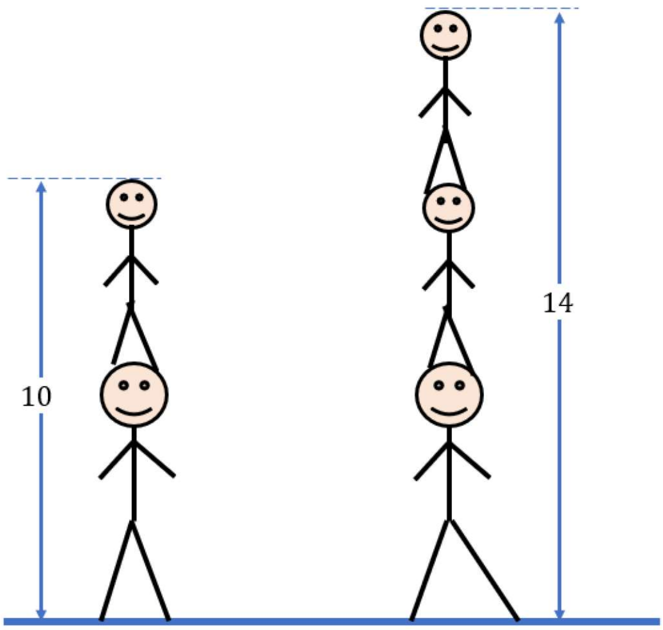
$$m + 2s = 14$$

$$m + s = 10$$

Dijagram jasno pokazuje da oduzimanjem dviju jednadžbi za rješenja dobijemo $s = 4$ i $m = 6$. Ova se ideja može primijeniti na mnoge druge parove jednadžbi koje uključuju različite brojeve očeva i sinova, žena i kćerki, ali možda ne sve četvero zajedno! Iz razlike visina oca i sinova proizlazi jednostavna jednadžba s oduzimanjem:

$$m + s = 8$$

$$m - s = 2$$



Slika 2.4: Problem s ocem i njegovim sinovima

Rezultat oduzimanja jednadžbi je $2s = 6$ iz čega slijedi $s = 3$. S druge strane ovakav par jednadžbi nastavnici mogu koristiti za uvođenje ideje da je zbrajanje jednadžbi često korisna taktika koja nam u ovom slučaju daje $2m = 10$, tj. $m = 5$.
Još jedan način uvođenja sustava jednadžbi nastavnici mogu koristiti dvije igraće kockice, jednu crvenu i jednu žutu, i zadati učenicima da bacaju kockice i bilježe rezultat.

Primjer 2.6 *Dijalog:*
Nastavnik: *Koliko iznosi ukupan rezultat na obje kockice?*
Učenik A: *8.*
Nastavnik: *Kako to možete zapisati?*
Učenik B: $c + z = 8$*!*
Nastavnik: *Što je c?*
Učenik C: *Crvena kockica.*
Nastavnik: *Dobro promisli što to znači.*
Učenik B: *Broj na crvenoj kockici.*
Nastavnik: *Tako je, slovo označava broj. A z označava broj na žutoj kockici. Nadalje, koliki je zbroj broja na crvenoj kockici i 3 puta većeg broja na žutoj kockici?*
Učenik A: *14.*
Nastavnik:Kako to možemo zapisati?*
Učenik B: $c + 3z = 14$.
Nastavnik:I kako možemo saznati koliko iznose c i z?*

Ponovno imamo zagonetku s parom jednadžbi u kojima učenike možemo izazvati da sugeriraju način kako naći rješenja:

$$c + 3z = 14$$

$$c + z = 8$$

I u ovom primjeru kao i primjeru s ocem i sinovima, učenici jasno vide da oduzimanjem jednadžbi možemo doći do rješenja. U oba primjera značenje jednadžbi je jasno i jasno je da se slova odnose brojeve. Nije teško dodati daljnja poboljšanja koja zahtijevaju zbrajanje i oduzimanje različitih višekratnika dviju jednadžbi. Zagonetke su osmišljene kako bi motivirale i zainteresirale učenike - njihovo rješavanje pruža jednostavnu svrhu za algebru. Štoviše, učenici mogu sami predložiti postupke rješavanja koji se mogu doraditi, uvježbati, proširiti i primijeniti na širok spektar primjera.

2.3 Kvadratne jednadžbe

Jednostavne kvadratne jednadžbe bez linearnog člana učenici mogu riješiti čim se upoznaju s korjenovanjem i korijenima. Proširujući metode korištene za linearne jednadžbe, učenici lagano mogu rješavati jednadžbe poput:

$$x^2 + 3 = 12, \qquad (x-5)^2 = 81 \qquad i \qquad 3x^2 - 8 = 40.$$

Veći izazov prije uvođenja formalnih postupaka bio bi pronaći broj koji je za 1 manji od njegova kvadrata rješavanjem jednadžbe $x^2 - x = 1$. U dolje navedenoj tablici vidimo kako se rješenje nalazi unutar intervala 1.61 i 1.62. Evaluacija funkcije za 1.615 pokazuje da rješenje leži između 1.615 i 1.62 i stoga je 1.62 točno rješenje zaokruženo na dvije decimale. Daljna evaluacija daje 1.618 kao rješenje zaokruženo na 3 decimale. Isprobavanje i poboljšanje je značajno jer učenicima daje osjećaj za rješenje kao broj

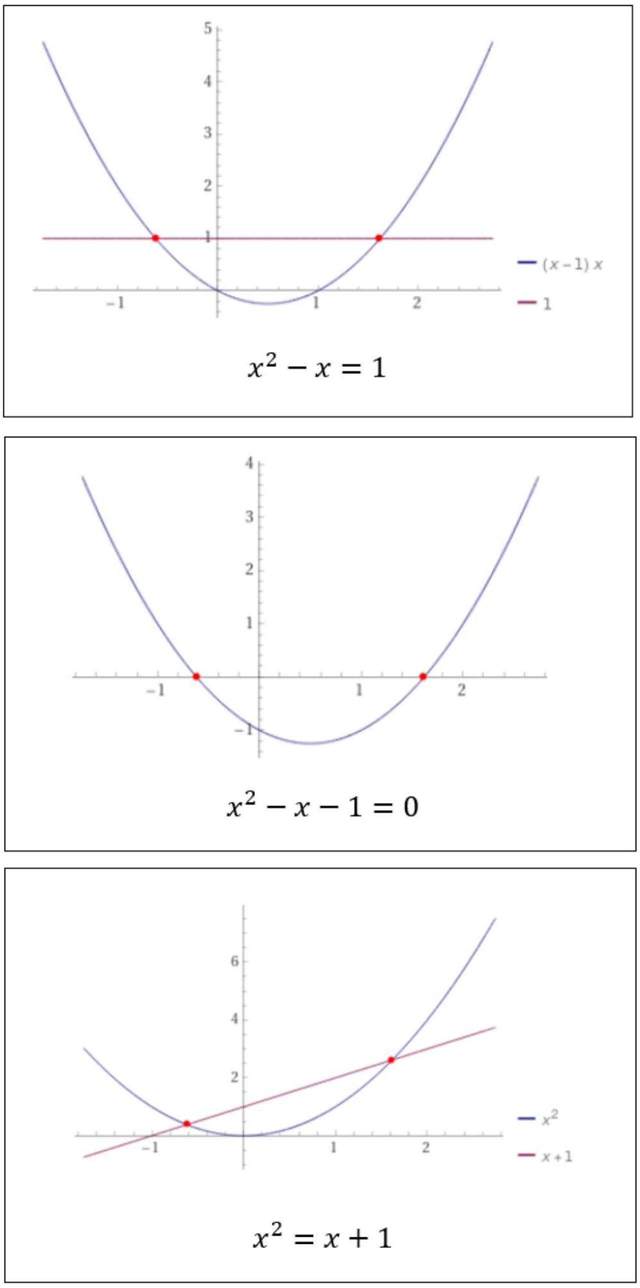
x	$x^2 - x$
1.6	0.96
1.62	1.0044
1.61	0.9821
1.615	0.993225
1.618	0.999924
1.619	1.002161
1.6185	1.00104225

Slika 2.5: Isprobavanje i poboljšanje za rješavanje $x^2 - x = 1$

koji zadovoljava jednadžbu jer je to direktna potraga za brojem koja je testirana na svakom koraku pokušaja. Također ima vrijednost u razvijanju razumijevanja decimalnog oblika brojeva i pitanju pronalaženja rješenja do odgovarajućeg stupnja točnosti. Također isprobavanje i poboljšanje pružaju metodu koja radi za sve jednadžbe, ali nije adekvatna kao jedina metoda za rješavanje jednadžbi jer višestruka rješenja nisu odmah identificirana i ne daje precizna rješenja.

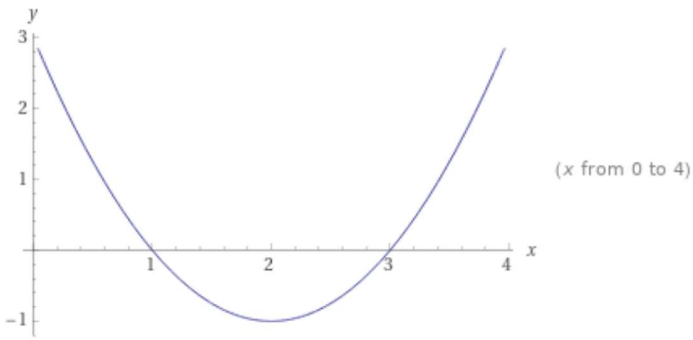
Grafičke metode daju važan uvid u rješavanje jednadžbi i kroz isticanje broja rješenja i pružanja rješenja s odgovarajućom točnošću ako se gledaju točke presjeka. Ručno nacrtana skica grafa može biti dovoljna za identificiranje broja rješenja, ali isprobavanjem i poboljšanjem kada zumiramo rješenje dobit ćemo približni odgovor. Kako bilo, grafički pristupi rješavanja jednadžbi su važni jer razvijaju opće razumijevanje grafova, posebno kao alternativni načini za rješavanje jednadžbi. Naći sjecište pravaca $y = x^2 - x$ i $y = 1$ je jedan od načina rješavanja $x^2 - x = 1$ grafički. Druge mogućnosti uključuju sjecište krivulje $y = x^2 - x - 1$ sa x-osi i sjecište krivulje $y = x^2$ s pravcem $y = x + 1$. U sljedećem primjeru sve tri mogućnosti su ilustrirane u programu Wolfram—Alpha: graphing.

Primjer 2.7



Slika 2.6: Tri grafičke metode za rješavanje jednadžbe $x^2 - x = 1$

Kvadratne funkcije se mogu razmatrati i u kontekstu proširivanja i pronalaska faktora. Crtanje grafa kvadratne funkcije kao npr. $y = x^2 - 4x + 3$ odmah postavlja pitanje gdje su sjecišta s x-osi što daje smisao izražavanju funkcije u obliku umnoška njezinih faktora $(x-1)(x-3)$. Rješavanje jednadžbi izražavanjem u obliku umnoška faktora je



Slika 2.7: Graf funkcije $y = x^2 - 4x + 3$

važna ideja sa širokim spektrom primjena. Osnovna ideja je da je jedan ili više faktora mora biti nula ako je umnožak jednak nuli: $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ ili $b = 0$ što vodi do standardnog načina rješavanja kvadratne jednadžbe:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ (x-1)(x-3) &= 0 \\ x - 1 = 0 \quad &\textit{ili} \quad x - 3 = 0 \\ x = 1 \quad &\textit{ili} \quad x = 3 \end{aligned}$$

Četiri teškoće su uobičajene za učenike u smislu odabira ovog postupka za rješavanje kvadratnih jednadžbi:

- Jednadžba skraćenog oblika kao npr. $x^2 - 4x = 0$ često se zapisuje kao $x^2 = 4x$ i učenici skraćuju zajednički faktor x i dobiju $x = 4$, a drugo rješenje, $x = 0$ se izgubi. Važno je naglasiti učenicima opasnosti neodgovarajućeg kraćenja i ohrabriti ih da u ovakvim jednadžbama izluče zajednički faktor kako bi dobili izraz $x(x-4) = 0$ kako se rješenja ne bi izgubila.

- Jednadžbu poput $x^2 - 3x - 4 = 0$ učenici će često zapisati poput $x^2 - 3x = 4$ i zatim rastaviti na faktore $x(x-3) = 4$ te reći da su rješenja $x = 4$ ili $x - 3 = 4$, odnosno koristeći pravilo kad je umnožak faktora 0. O ovakvim pogreškama mora se raspravljati, prvo da bi se razjasnilo kako predložena rješenja moraju zadovoljiti jednadžbu i drugo da bi pomoglo učenicima da vide da ne mogu koristiti navedeno pravilo ako umnožak nije jednak nula. Možda bi bilo i dobro naglasiti da se broj 4 može izraziti kao faktor dva cijela broja na četiri načina kao $1 \cdot 4$, $-1 \cdot -4$, $2 \cdot 2$ i $-2 \cdot 2$ i da jedino prva dva faktora vode do rješenja.

- Jednadžbu nije uvijek moguće riješiti pronalaskom faktora. Učenici ne razlikuju situacije kada jednadžba nema realna rješenja i kada se do rješenja teže dolazi jer su racionalna. I o ovakvim primjerima treba raspravljati. Jako su bitne grafička interpretacija i uloga diskriminante $b^2 - 4ac$.

- Nakon što je učenicima uvedena opća formula za rješavanje kvadratne jednadžbe, učenici će većinom sve jednadžbe rješavati pomoću formule bez obzira na to može li se ta jednadžba riješiti i na lakši način, kao što je jednostavna faktorizacija. Privlačnost formule je u tome "što uvijek radi" i kada postane poznata, učenici su sigurni da će na taj način doći do točnog rješenja. No, svakako bi im trebalo pomoći da razviju dovoljnu tečnost u faktoriziranju jednostavnog kvadratnog izraza tako da im to postane očiti prvi pristup, a ne formula, kada se radi o o jednostavnom primjeru.

Sličnost s općom metodom rješavanja kvadratnih jednadžbi je važna jer je korisna kao praktična metoda nalaženja oba točna i približna rješenja i kao način diskriminiranja između situacija kada su 0, 1 ili 2 rješenja. Ideja svođenja na potpuni kvadrat je isto važna jer njome dolazimo da formule za kvadratnu jednadžbu i jednostavan je način skiciranja grafa bilo koje kvadratne funckije.
Jednadžba $x^2-4x+1=0$ se rješava metodom svođenja na potpuni kvadrat na sljedeći način:

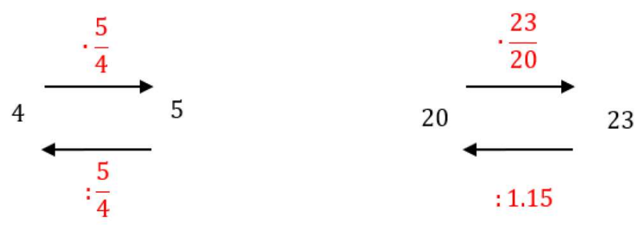
$$\begin{aligned} x^2-4x+1&=0\\ x^2-4x+4&=3\\ (x-2)^2&=3\\ x-2&=\pm\sqrt{3}\\ x&=2\pm\sqrt{3}\\ x&\approx 3.73 \quad \textit{ili} \quad 0.27. \end{aligned}$$

Učenici često imaju poteškoća već u prvom koraku jer zahtijeva poznavanje kvadrata zbroja i da je $(x-2)=x^2-4x+4$. Pomaže prvo pogledati primjere u kojima je koeficijent od x^2 jednak 1, a koeficijent uz x paran tako da se načelo iza postupka shvati prije nego se uvedu razlomci. Postupak ima veću važnost ako je povezan s grafom kvadratne funkcije jer oblik jednadžbe svedene na potpuni kvadrat daje jednostavan način skiciranja grafofa i određivanja tjemena, kao što i pokazuje važnost rješenja odgovarajuće kvadratne jednadžbe.

Poglavlje 3

Proporcionalnost

Proporcionalnost je osnovna ideja koja se temelji na širokom rasponu situacija koje uključuju dva skupa brojeva. Proizlazi iz problema s količinama i troškovima, vrijednosti novca, pretvorbi mjernih jedinica, konverzije valuta, postotcima, brzina i drugih promjenjivih stopa, mjerila za karte i dijagrame, duljina u sličnim likovima i iz trigonometrije. Osnovna ideja glasi da je omjer između parova brojeva konstantan i da među njima postoji multiplikativna veza među dva skupa brojeva. Mogućnost učenika da rješava probleme s proporcijama je usko vezana s njihovim razumijevanjem množenja i dijeljenja s njihovom inverznom vezom i razlomcima. Ova izjava sumira dvije ključne ideje: omjer između dva broja određuje faktor proporcionalnosti i da je dijeljenje inverzna operacija kojom poništavamo množenje kao što se vidi na sljedećem primjeru. Sljedeća slika pokazuje tipičan primjer pogrešaka koje učenici čine



Slika 3.1: Inverzne računske operacije

u rješavanju problema koji uključuju proporcionalnost. Trinaestogodišnji učenik je za zadatak dobio tablicu na lijevoj strani gdje je trebao pretvoriti milje na sat u kilometre na sat. Druga tablica pokazuje učenikove odgovore. 60 se može dobiti ako oduzmemo

Brzina (milja/h)	Brzina (km/h)
50	80
30	
0	

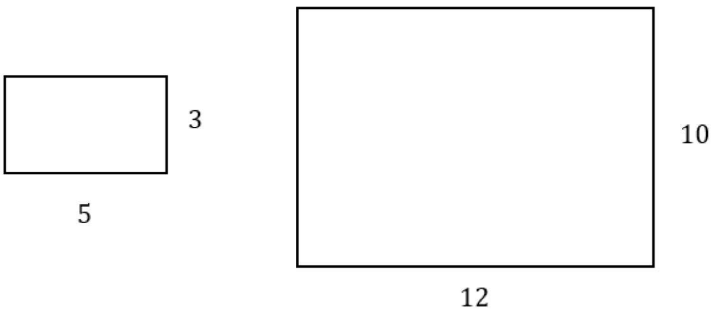
Brzina (milja/h)	Brzina (km/h)
50	80
30	**60**
0	**30**

Slika 3.2: Učenikove greške u pretvorbi brzina

20 od 80 jer je 50 manje 30 isto 20 ili ako 30 dodamo 30 jer 80 manje 50 jednako

30. U oba slučaja učenik vidi vezu zbrajanja ili po retcima ili po stupcima. U drugoj tablici učenik je dobio 30 na sličan način koristeći strategiju zbrajanja. Izjaviti da je 30 kilometara na sat ekvivalentno 0 milja na sat je očito apsurdno i upozirava na način u kojem učenici često ne prepoznaju da ono što pišu nema smisla. Bitna zabluda je neuspjeh da se prepozna multiplikativna veza između dva skupa brojeva. Još jedan primjer u kojem veliki broj učenika koristi strategiju zbrajanja kada ih se pita da povećaju pravokutnik s osnovicom 5 cm i visinom 3 cm, kako bi dobili pravokutnik s osnovicom 12 cm. Uobičajni odgovor je da će visina biti 10 cm jer oduzimaju 2 od 12 ili nadodaju 7 na 3 za visinu. Sa slike ispod odmah je vidljivo da dimenzija povećanog pravokutnika ne može biti točno rješenje, no teško je vidjeti je pravokutnik povećan faktorom $\frac{12}{5}$ ili 2.4 što dovodi do točne visine 7.2 cm. Pogrešna upotreba strategija

Osnovica (cm)	Visina (cm)
5	3
12	**10**



Slika 3.3: Greške u povećavanju pravokutnika

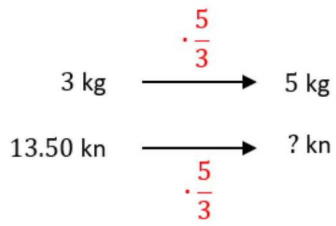
zbrajanja u proporcijskim problemima je široko raširena. U istraživanju iz 1976. Hart uvidjela je da je samo 20 učenika od njih 2257 proporcijske probleme pokušalo riješiti zapisujući i rješavajući jednadžbu oblika

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

temeljenu na ideji jednakih omjera gdje je jedan element nepoznat. Udžbenici obično pristupaju proporcijskim problemima na jedan ili na više od tri različita načina, ovisno o tipu problema i brojevima o kojima se radi. U sljedećem primjeru prikazana su sva tri pristupa u zadatcima koji uključuju troškove.

Primjer 3.1 *Tri kilograma krumpira koštaju* 13.50 *kn. Koliko košta* 5 *kg krumpira?*

1. **Jedinična metoda:**
   3 kg krumpira koštaju 13.50 kuna.
   1 kg krumpira košta $\frac{13.50}{3} = 4.50$ kn.
   5 kg krumpira koštaju: $5 \cdot 4.50 = 22.50$ kn.



2. **Metoda faktora proporcionalnosti:** 5 kg krumpira košta $\frac{5}{3} \cdot 13.50 = 22.50$ kn

3. **Metoda jednakih omjera**
   Neka je x cijena 5 kg krumpira u lipama.

$$Ili \quad \frac{x}{1350} = \frac{5}{3} \quad \Rightarrow x = \frac{5}{3} \cdot 1350 \quad ili \quad \frac{x}{5} = \frac{1350}{3} \Rightarrow x = 5 \cdot \frac{1350}{3}.$$

Jedinična metoda uključuje pronalazak cijene jedne jedinice kao međukorak i najjednostavnija je metoda. Ovaj pristup je jednostavan jer jasno doći do jedinične cijene koja se dalje može koristiti za izračun bilo koje količine. Ova metoda je i prilagodljiva jer jedinica ne mora nužno biti jedan. Recimo, za odrediti koliko košta 250 g nečega, ako znamo koliko košta 150 g tog istog, bolje je izračunati koliko košta 50 g nego 1 g kao međukorak. Pristup temeljen na faktoru proporcionalnosti uključuje prepoznavanje da se masa povećala za faktor $\frac{5}{3}$ pa se onda i cijena mora povećati istim faktorom. Uključeni brojevi mogu se zapisati u obliku dijagrama sa strelicama kako bi učenici vidjeli kako su brojevi povezani s faktorom proporcionalnosti. Ovaj pristup je posebno prigodan za geometrijske probleme kao što skaliranje planova i karti. Dvije alternative koje koriste jednake omjere odražavaju druge dvije metode, s omjerom koji odgovara ili jediničnoj cijeni ili faktoru proporcionalnosti. Algebarski pristup koji uključuje jednadžbu je apstraktniji zato što interpretacija omjera nije učeniku nužno očita i formalnost postavljanja i rješavanja jednadžbi može stvoriti prepreku u rješavanju problema koji je u biti numerički. Međutim, postoje problemi u kojima je algebarski pristup neophodan. Poznavanje i tečnost s prva dva pristupa, koja zahtijevaju razumijevanje multiplikativnog principa i korištenje razlomaka, nužni su zahtjevi za rješavanje problema.

Poglavlje 4

Poveznica s geometrijom

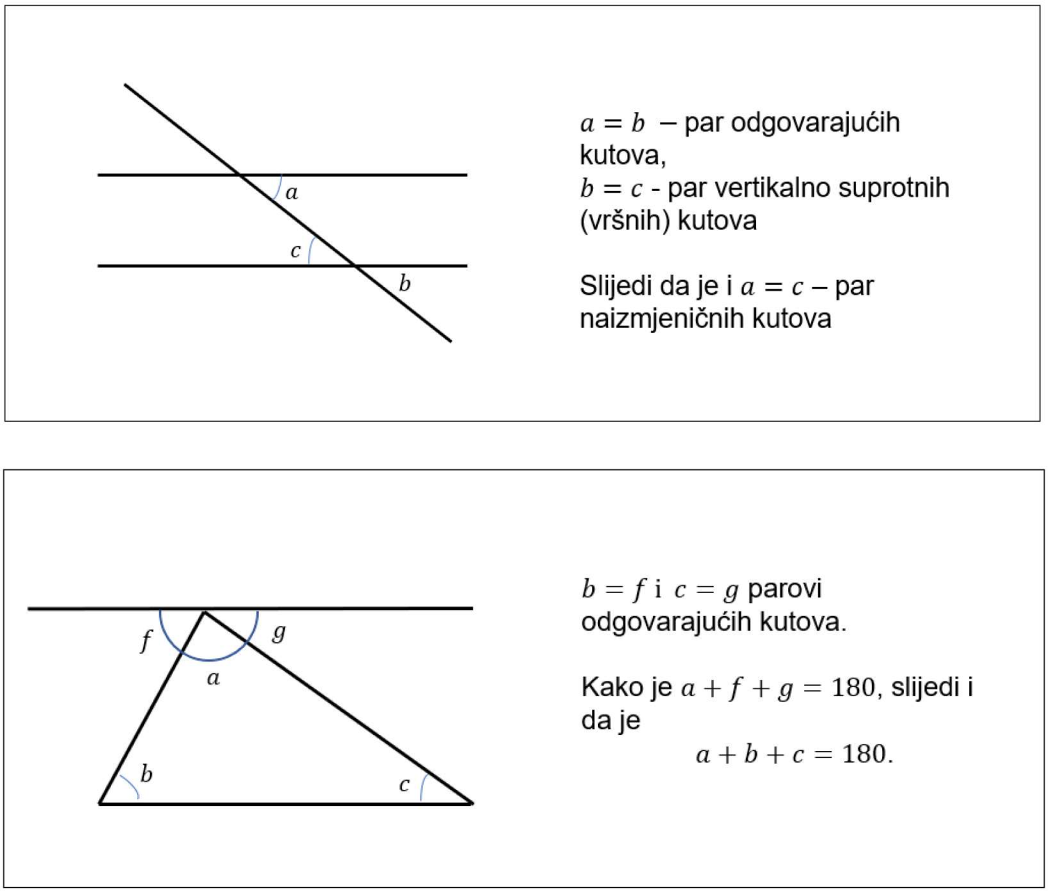
”Slika vrijedi više od tisuću riječi.”
Anon

4.1 Veze između algebre i geometrije

Poveznice između algebre i geometrije su bliske, pošto se geometrija bavi vezama između varijabli kao što su kut, duljina, površina i obujam i pridonosi jeziku algebre kroz riječi kao što su kvadratni i kubni. Geometrijski dijagrami su bogat izvor uvida u algebarske ideje, dok su algebarske metode moćan alat za rješavanje geometrijskih problema i za predstavljanje geometrijskih dokaza. Grafovi su posebno značajni kao ideja koja povezuje geometriju i algebru, sažimanjem svojstava funkcija u slikovnom obliku i mogućnošću da se geometrijska svojstva zapisuju simbolima.

Slikovni prikazi su odmah privlačni i zanimljivi učenicima i na taj način su potencijalno vrijedni kao način kojima dajemo veće značenje algebarskim idejama pružanjem različitih upečatljivih prikaza, Ideja o varijabli je jasnija kada se poveže s kutom i duljinom koji se mogu stalno mijenjati, kao suprotnost često dominantnom naglasku u ranim fazama učenja algebre na varijablama koje uzimaju samo diskretne vrijednosti cijelih brojeva. Mnogi ključni algebarski odnosi poput razlike kvadrata imaju geometrijsko podrijetlo i slikovito su sažeti na nezaboravan način. Geometrijski problemi i dokazi važna su primjena algebarskih ideja i kao takvei daju veću svrhu za učenje algebre.

Geometrijske tvrdnje i problemi koji uključuju kutove su jedan od najranijih načina korištenja slova u kontekstu u kojem je veza s brojem očita. Npr., sljedeća slika pokazuje jednostavnu tvrdnju koja povezuje kutove i paralele. Osim što pruža uporabu algebarskih zapisa, ovo je i dobar primjer neke vrste jednostavne deduktivne tvrdnje s kojom se učenici trebaju konstantno sretati u algebarskom i geometrijskom kontekstu kako bi se razvile njihove moći rasuđivanja. Nadalje, ideja jednakih kutova pridonosi jednostavnom načinu dokazivanja da je zbroj kutova u trokutu jednak 180^o. Iako će se učenici susresti s ovom ključnom činjenicom o trokutu na ekspermentalan način kroz mjerenje. Predstavljanje tvrdnje u algebarskom obliku osnažuje ideju o slovima koja predstavljaju varijable. Pošto su razna geometrijska svojstva o kutovima već utvrđena, ona se koriste u ”lov na kutove” problemima u kojima su činjenice o kutovima u ne-

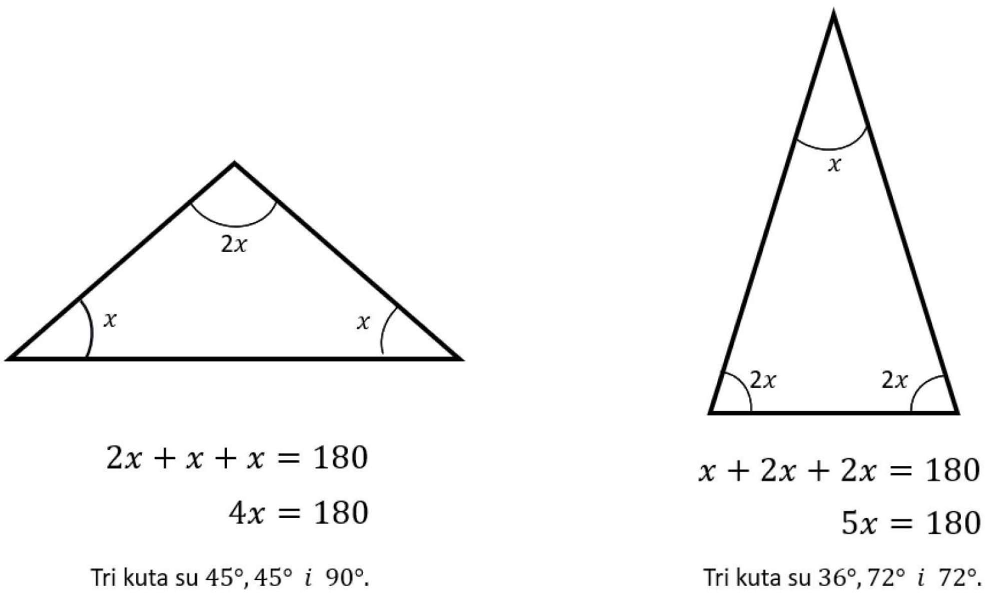


Slika 4.1: Zbroj kutova u trokutu

kom liku korištene kako bi utvrdili daljnje činjenice. Takvi problemi nekada vode do jednostavnijih jednadžbi kao u sljedećem zanimljivom primjeru gdje su moguća dva rješenja.

Primjer 4.1 *Koliko iznose kutovi u jednakokračnom trokutu ako je jedan kut dvostruko veći od drugog? Neka kutovi budu označeni s x i $2x$ stupnjeva i koristi činjenicu da je zbroj kutova u trokutu 180^o.*

Dvije su osnovne značajke o korištenju simbola u geometrijskom kontekstu. Prva se, ilustrirana na sljedećem primjeru, tiče pitanja o jedinicama. Uobičajeno je da se u matematici radije koriste slova za predstavljanje brojeva nego količina, što su zapravo brojevi uz koje idu mjerne jedinice. To je prikladno i za označavanje dijagrama i postavljanju algebarskih tvrdnji bez spominjanja jedinica, bilo pod pretpostavkom da se brojevi odnose na neki dosljedan opći sustav jedinica ili upućivanjem na jedinice samo u početnim i završnim komentarima. Do zabune može doći kada se jedinice kombiniraju s algebarskim simbolima jer učeniku razlika između dviju uloga koja slova imaju nije nužno jasna. Jedino kontekst daje razliku između mg - umnoška mase i ubrzanja sile teže i mg - mase m mjerene u gramima ili empham - duljina a u metrima i am, *ante meridiem*, što znači prijepodne. Primjeri poput ovih mogu se činiti banalnima, pa čak i šašavima, ali učeniku u ranom stadiju učenja algebre, konvencije nisu nužno očite ili dosljedne, sve dok učenik u potpunosti ne razumije ove ideje i njihove primjene.



Slika 4.2: Traženje kutova u jednakokračnom trokutu

Druga poteškoća oko označavanja proizlazi iz upotrebe velikih tiskanih slova za označavanje točki i malih tiskanih slova koja označavaju većinu algebarskih varijabli. Ponovno je bitan kontekst koji bi trebao razjasniti što slova označavaju. No, nekome tko tek počinje učiti algebru izrazi ab^2 i AB^2 izgledaju isto i ne razlikuju se u govornom obliku. Supstitucija vrijednosti u izraz ab^2 često uzrokuje probleme jer se točan redoslijed operacija razlikuje od redoslijeda kojim su napisane. Stoga je važno često jasno objasniti učenicima što neki izraz znači i obratiti im pažnju kada je potrebno kako vrlo slični oblici mogu imati potpuno različito značenje u različitim kontekstima.

Sažetak

Iako većina učenika, ali i odraslih ljudi, algebru vidi kao "slova" u matematici, algebra je neophodna u matematičkom obrazovanju i važno je još u ranom osnovnoškolskom uzrastu krenuti postavljati temelje koji se onda s godinama nadograđuju. Nastavnicima je veliki izazov poučavati algebru i ključno je uspješno motivirati učenike što se može postići motivacijskim životnim primjerima, mozgalicama, slagalicama itd. No, prevesti životne situacije i probleme na matematički jezik predstavlja problem učenicima. Stoga je bitno s učenicima vježbati algebru od malena tako da se potaknu tečnost i razumijavanje algebre i kako bi kasnije imali što manje problema shvatiti algebru.

Ključne riječi: algebra, tečnost, razumijevanje, jednadžbe, proporcionalnost

Summary: Algebra in Elementary school and Highschool

Although most students, as well as adults, see algebra as “letters” in mathematics, algebra is essential in math education and it is important to begin laying the groundwork at an early elementary school age, which is then upgraded over the years. It is a great challenge for teachers to teach algebra, and it is crucial to successfully motivate students, which can be achieved by motivational life examples, puzzles, riddles, etc. But translating life situations and problems into mathematical language is a problem for students. Therefore, it is important to practice algebra with students from an early age in order to encourage fluency and understanding of algebra and to have as few problems with understanding algebra as possible later.

Key words: algebra, fluency, understanding, equations, proportionality

Literatura

[1] D. French, *Teaching and learning algebra*, Continuum international publishing group, London, 2002.

[2] *Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet matematika za osnovne i srednje škole*, Narodne novine, 2019.

Životopis

Zovem se Goran Pahanić. Rođen sam 10. svibnja 1989. godine u Đakovu. U rodnom sam gradu završio i osnovnu školu 2004. godine kada sam upisao i Srednju strukovnu školu Braće Radića u Đakovu, smjer: računalni tehničar u strojarstvu. 2007. godine sam upisao sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Preko 10 godina iskustva, stekao sam radom u Edukosu, centru za instrukcije i savjetovanje. Od prošle godine zaposlen sam u Osnovnoj školi Čakovci u Čakovcima kao nastavnik matematike.