Spektar i pseudospektar matrice

Majdenić, Dunja

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Dunja Majdenić

Spektar i pseudospektar matrice

Završni rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Dunja Majdenić

Spektar i pseudospektar matrice

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Ivana Kuzmanović Ivičić
Komentor: dr. sc. Matea Ugrica

Osijek, 2021.

Sažetak

U završnom radu definirat ćemo pojam svojstvenih vrijednosti matrice, svojstvene vektore, spektar matrice te svojstveni polinom. Također ćemo definirati algebarsku i geometrijsku kratnost svojstvenih vrijednosti te pokazati njihovu ulogu u utvrđivanju dijagonalizabilnosti matrice. Opisat ćemo spektar posebnih tipova matrica što ćemo potkrijepiti i primjerima. Definirat ćemo Jordanovu formu matrice i slijedom primjera prikazati njeno određivanje. Uvodimo pojam pseudospektra koje je zapravo poopćenje pojma spektra matrice. Ustanovit ćemo da pseudospektar ovisi o normi i da je presjek svih pseudospektara matrice upravo spektar matrice. Prikazat ćemo svojstva pseudospektra.

Ključne riječi

svojstvene vrijednosti, svojstveni vektori, spektar, Jordanova forma matrice, pseudospektar

Summary

In this final paper we will define the concept of eigenvalues and eigenvectors of the matrix, the spectrum of the matrix and characteristic polynomial of the matrix. We will also define the algebraic and geometric multiplicity of eigenvalues and show their role in determining the diagonalizable of a matrix. We will describe a spectrum of special types of matrices what we will substantiate with examples. We will define Jordan form of the matrix and show its computation by example. We introduce the concept of a pseudospectrum which is actually generalization of the concept of a matrix spectrum. The pseudospectrum depends on the norm and the intersection of all pseudospectra of the matrix is the spectrum of the matrix. The properties of the pseudospectrum are given.

Key words

eigenvalues, eigenvectors, spectrum, Jordan form of a matrix, pseudospectrum

Sadržaj

1 Uvod

Linearna algebra je grana matematike koja proučava vektorske prostore, matrice, linearne operatore te sustave linearnih jednadžbi. Ima široku primjenu u prirodnim i društvenim znanostima, danas posebno u numeričkoj matematici i računarstvu. U ovom radu bavit ćemo se jednim od najvažnijih pojmova linearne algebre, pojmom spektra matrice, kao i njegovim poopćenjem, pseudospektrom matrice.
U prvom dijelu, definiramo svojstvene vrijednosti matrice, svojstvene vektore te spektar matrice. Zaključujemo da su svojstvene vrijednosti nultočke svojstvenog polinoma, dok je spektar matrice upravo skup svojstvenih vrijednosti. Navedena je i Jordanova forma matrice, koja nam daje uvid u spektar kao i mogućnost dijagonalizacije matrice, te neke specijalne vrste matrica čiji spektar ima posebna svojstva.
U drugom dijelu uvodimo pojam pseudospektra matrice. Matematičar John von Neumann je početkom 20. stoljeće vidio potrebu za proučavanjem pseudospektra matrice. Međutim, zbog težine složenih računskih operacija, proučavanje pseudospektra je zaživjelo tek krajem 20. stoljeća. Sam naziv pseudospektra ovisit će o normi. Spektar i pseudospektar su usko povezani, naime vrijedi da je presjek svih pseudospektara matrice upravo spektar matrice. Teoremi vezani za pseudospektar nam daju preciznije informacije o matrici. Danas se pseudospektar matrice koristi primjerice pri računanju rezonance te u teoriji operatora.

2 Spektar

Za $A \in L(V)$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V nad poljem $\mathbb{F}$, cilj nam je pronaći bazu prostora V u kojoj će matrica operatora A biti najjednostavnija. Najjednostavniji slučaj je kada u nekoj bazi $a = \{a_1, a_2, \dots\}$ prostora V operatoru A pripada dijagonalna matrica da bismo dobili što jednostavniji matrični prikaz operatora. Jedno od najznačanijih pitanja je kakvim operatorima i u kojoj bazi će se moći pridružiti dijagonalna matrica te koji brojevi se nalaze na dijagonali te pridružene matrice. Odgovor na ovo pitanje dat će nam spektralna teorija.

Definicija 1. *(Vidjeti [1]). Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $A \in L(V)$. Kaže se da je skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ svojstvena vrijednost operatora A ako postoji vektor $x \in V$, $x \neq 0$, takav da je $Ax = \lambda x$.*
Vektor x se naziva svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora A naziva se spektar (operatora A) i označava sa $\sigma(A)$.

Istoznačnica za pojam svojstvene vrijednosti je karakteristična vrijednost. Koristi se još i termin vlastita vrijednost. Posebno treba istaknuti da je skalar λ svojstvena vrijednost operatora A tek ako postoji netrivijalan vektor x sa svojstvom $Ax = \lambda x$. Ovo ograničenje je zaista nužno jer za svaki skalar λ vrijedi

$$A0 = \lambda 0;$$

to jest, svaki skalar je rješenje jednadžbe, ako je $x = 0$. Svojstvene vrijednosti su, međutim, samo oni skalari za koje ta jednadžba ima i neko netrivijalno rješenje. Svojstveni vektor nije jedinstven: ako je x svojstveni vektor pridružen λ onda je i αx svojstveni vektor pridružen istoj svojstvenoj vrijednosti, i to vrijedi za svaki skalar α iz $\mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$. Zaista,

$$A(\alpha x) = \alpha A x = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x).$$

Osim što, prema prethodnome, jednoj svojstvenoj vrijednosti pripada beskonačno linearno zavisnih vektora, moguće je i da jednoj svojstvenoj vrijednosti operatora A pripada i više linearno nezavisnih svojstvenih vektora. Primjer je jedinični operator I: za njega su svi vektori prostora, osim nulvektora, svojstveni vektori za svojstvenu vrijednost 1 jer vrijedi

$$Ix = 1x, \forall x \in V.$$

Skup $V_A(\lambda) = \{x \in V : Ax = \lambda x\}$ se naziva svojstveni potprostor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Taj skup je za svaki skalar λ potprostor od V.

Ako je $\lambda \in \sigma(A)$, onda se dimenzija svojstvenog potprostora $V_A(\lambda)$ naziva geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti λ i označava sa $d(\lambda)$.

Pri određivanju svojstvenih vrijednosti operatora koristi se svojstvo da svojstvene vrijednosti operatora odgovaraju svojstvenim vrijednostima matrice tog operatora u bilo kojoj bazi. Za određivanje svojstvenog potprostora, morat ćemo definirati svojstveni polinom matrice A.

Definicija 2. *(Vidjeti [1]). Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Polinom*

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

se naziva svojstveni ili karakteristični polinom matrice A.

Kod određivanja nultočaka svojstvenog polinoma, potrebno je voditi računa o tome nad kojim je poljem definiran vektorski prostor. Svaki operator na konačnodimenzionalnom kompleksnom prostoru će imati svojstvenu vrijednost, upravo zbog toga što je polje kompleksnih brojeva algebarski zatvoreno što predstavlja da svaki polinom s kompleksnim koeficijentima ima nultočku u polju $\mathbb{C}$. Nasuprot tome, operatori na realnim prostorima ne moraju imati realnih svojstvenih vrijednosti, primjer takvog operatora je operator rotacije.

Pri računanju svojstvenih vrijednosti koristimo svojstvo da je svaka svojstvena vrijednost upravo nultočka pripadnog svojstvenog polinoma. Znamo da polinom može imati višestruke nultočke pa i svojstvena vrijednost onda može biti višestruka te stoga definiramo pojam algebarske kratnosti svojstvene vrijednosti.

Definicija 3. *(Vidjeti [1]). Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor te neka je $A \in L(V)$ i $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Neka je*

$$k_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^l p(\lambda), \quad p(\lambda_0) \neq 0, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Broj l zovemo algebarskom kratnošću svojstvene vrijednosti λ_0 i označavamo ga s $l(\lambda_0)$.

Odnos između algebarske i geometrijske kratnosti svojstvenih vrijednosti dat će nam uvid u dijagonalizabilnost matrice, odnosno operatora. Ako je za neku svojstvenu vrijednost λ_0 njena geometrijska kratnost strogo manja od algebarske, onda je nemoguće pronaći bazu u kojoj će dani operator imati dijagonalnu matricu.

Na primjeru želimo prikazati kako se računa spektar operatora A.

Primjer 1. *Neka je operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ u standardnoj bazi dan matricom*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Spektar matrice određujemo pomoću

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}.$$

Laplaceovim razvojem po zadnjem stupcu odmah dobivamo

$$k_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda).$$

Kako po definiciji znamo da se u spektru nalaze svojstvene vrijednosti operatora, a one su nultočke svojstvenog polinoma, slijedi da je $\sigma(A) = \{1, 2\}$.
Algebarska kratnost svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 1$, iznosi $l(\lambda_1) = 2$. Pripadne svojstvene vektore za svojstvenu vrijednost λ_1 računamo pomoću sustava $(A - \lambda_1 I)x = 0$.
Rješavajući sustav slijedi da je svojstveni vektor $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, koji čini svojstveni potprostor $V_A(\lambda_1) = \left\{ x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : x_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \right\}$, pri čemu je geometrijska kratnost $d(\lambda_1) = 1$.
Postupak ponovimo i za svojstvenu vrijednost $\lambda_2 = 2$.
Dakle, njena algebarska kratnost je $l(\lambda_2) = 1$. Iz sustava $(A - \lambda_2 I)x = 0$

slijedi da je svojstveni vektor $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_3 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Svojstveni potprostor je oblika $V_A(\lambda_2) = \left\{ x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : x_3 \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \right\}$ *te pripadna geometrijska kratnost iznosi* $d(\lambda_2) = 1$.

2.1 Spektar posebnih tipova matrica

Definicija 4. *(Vidjeti [1]). Za matricu* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *kažemo da je normalna ako vrijedi* $AA^* = A^*A$*, pri čemu je* A^* *adjungirana matrica matrice* A.

Normalne matrice, kao što ćemo vidjeti u sljedećem poglavlju, su matrice koje možda imaju višestruke svojstvene vrijednosti, a još uvijek se mogu dijagonalizirati.

Definicija 5. *(Vidjeti [1]). Za matricu* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *kažemo da je simetrična ako vrijedi* $A^T = A$*, pri čemu je* A^T *transponirana matrica matrice* A.

Simetrična matrica je normalna matrica i ima samo realne svojstvene vrijednosti.

Primjer 2. *Neka je dana simetrična matrica* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. *Njezin svojstveni polinom je oblika* $k_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 4)$ *pa su svojstvene vrijednosti* $\lambda_1 = 1$ *i* $\lambda_2 = 4$ *za koje vidimo da su realne.*

Definicija 6. *(Vidjeti [1]). Za matricu* $A \in M_n$ *kažemo da je antisimetrična ako vrijedi* $A = -A^T$.

Antisimetrične matrice su normalne matrice i imaju samo imaginarne svojstvene vrijednosti.

Primjer 3. *Neka je dana antisimetrična matrica* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$*, pri čemu je njezin svojstveni polinom* $k_A(\lambda) = -\lambda^3 - 21\lambda = \lambda(\lambda + \sqrt{21}i)(\lambda - \sqrt{21}i)$ *pa su svojstvene vrijednosti* $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = i\sqrt{21}$ *i* $\lambda_3 = -i\sqrt{21}$ *imaginarne.*

3 Dijagonalizabilne matrice

Teorem 1. *(Vidjeti [5]). Neka je $A \in M_n$. Tada postoji nesingularna matrica S, takva da je*

$$S^{-1}AS = J, \tag{1}$$

pri čemu se J naziva Jordanova forma, to jest J je blok dijagonalna,

$$J = \operatorname{diag}(J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \ldots, J_{n_k}(\lambda_k)), \tag{2}$$

gdje je J_{n_i} matrica reda n_i,

$$J_{n_i}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Matrica J je jedinstvena do na permutaciju blokova.

Primjer 4. *Neka je dana matrica $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. Pripadni svojstveni polinom je u obliku $k_A(\lambda) = (3-\lambda)^2$ te je odmah jasno da svojstvena vrijednost $\lambda_{1,2} = 3$ ima algebarsku kratnost $l(\lambda_{1,2}) = 2$. Iz sustava $(A - \lambda_{1,2}I)x = 0$ slijedi da je pripadni svojstveni vektor $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Pripadni svojstveni potprostor $V_A(\lambda_{1,2}) = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}\right]$ te je geometrijska kratnost manja od algebarske kratnosti $d(\lambda_{1,2}) = 1 < l(\lambda_{1,2}) = 2$. Dakle, imamo da je svojstveni vektor $x_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ pa sljedeći vektor u Jordanovu lancu računamo na sljedeći način $Ax_1{}^{(2)} = \lambda_1 x_1^{(2)} + x_1^{(1)}$, to jest, iz sustava $(A - \lambda_1 I)x_1^{(2)} = x_1^{(1)}$ proizlazi vektor $x_1^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Stoga, Jordanov lanac pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda_{1,2}$ čine vektori $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ koji tvore matricu S koju smo definirali u Teoremu 1. Koristeći izraz $S^{-1}AS = J$ Jordanova matrica izgleda $J = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.*

Svaki J_{n_i} se zove Jordanov blok te njegova svojstvena vrijednost λ_i ima algebarsku kratnost n_i. Ako su sve svojstvene vrijednosti u matrici J jednostruke, onda je J dijagonalna, to jest, A se može dijagonalizirati. Stoga iz

Jordanovog teorema je jasno da se mogu dijagonalizirati matrice koje imaju različite svojstvene vrijednosti.
Primjerom ćemo pokazati matricu koja ima navedena svojstva i njenu Jordanovu formu.

Primjer 5. *Neka je dana matrica* $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{bmatrix}$. *Svojstveni polinom je u obliku* $k_A(\lambda) = -\lambda(\lambda+2)(\lambda+3)$ *te su svojstvene vrijednosti* $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$ *i* $\lambda_3 = -3$. *Algebarske kratnosti su redom* $l(\lambda_1) = l(\lambda_2) = l(\lambda_3) = 1$, *to jest, postoje samo jednostruke svojstvene vrijednosti. Za svaku svojstvenu vrijednost tražimo svojstvene vektore iz sustava* $(A - \lambda I)x = 0$. *Nakon što riješimo sustav za svaku svojstvenu vrijednost, dani svojstveni vektori su redom* $x(\lambda_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_2(\lambda_2) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *i* $x_3(\lambda_3) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ *te je geometrijska kratnost* $d(\lambda_1) = d(\lambda_2) = d(\lambda_3) = 1$ *što je jednako algebarskim kratnostima pojedinih svojstvenih vrijednosti pa se matrica* A *može dijagonalizirati. Svojstveni vektori čine matricu* $S = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, *dok je njen inverz matrica* $S^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. *Sada imamo sve potrebno za računanje Jordanove matrice koristeći formulu* $S^{-1}AS = J$, *Jordanova matrica je oblika* $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ *te se na dijagonali nalaze svojstvene vrijednosti.*

Napomena 1. *U Jordanovoj formi na dijagonali se nalaze svojstvene vrijednosti pa se svaka svojstvena vrijednost ponavlja onoliko puta kolika je njena algebarska kratnost, dok je broj blokova jednak njenoj geometrijskoj kratnosti. Iz ovog svojstva jasno je da se sve matrice, kod kojih sve svojstvene vrijednosti imaju istu algebarsku i geometrijsku kratnost, mogu dijagonalizirati.*

Teorem 2. *(Vidjeti [3]). Neka je* X *konačnodimenzionalan kompleksan unitaran prostor i neka je* $A \in L(X)$. *Sljedeća dva svojstva su međusobno ekvivalentna:*

(a) Operator A *je normalan.*

(b) Postoji ortonormirana baza e takva da je matrica $A(e)$ dijagonalna.

Dokaz: Vidi [3].

Svi normalni operatori zadovoljavaju svojstvo da svojstvene vrijednosti imaju istu algebarsku i geometrijsku kratnost pa su dijagonalizabilni, slijedi iz Teorema 2.

Sada ćemo navesti primjer normalnog operatora s višestrukim svojstvenim vrijednostima te njegove Jordanove forme koja će biti dijagonalna matrica.

Primjer 6. *Odredimo Jordanovu formu za normalan operator kojemu je pridružena matrica*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Adjungiranu matricu A^* dobivamo transponirajući matricu A, $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Imamo $AA^* = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ i $A^*A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Uvjet $AA^* = A^*A$ je zadovoljen. Svojstveni polinom je oblika $k_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 2$. Svojstvene vrijednosti su $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ i $\lambda_3 = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$. Nakon što ponovimo postupak traženja svojstvenih vektora kao u Primjeru 5, svojstveni vektori čine matricu

$$S = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) & \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}) \\ 1 & \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}) & \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

te izračunamo S^{-1}. Iz izraza $S^{-1}AS = J$ slijedi Jordanova matrica

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) \end{bmatrix}.$$

4 Pseudospektar

Svojstvene vrijednosti često pružaju sjajne uvide u ponašanje matrica. Naravno, želimo što lakše pročitati svojstvene vrijednosti iz matrice. Najjednostavnije je imati dijagonalnu matricu. Kao što smo vidjeli u prethodnom poglavlju, ne mogu se sve matrice dijagonalizirati. Ostaje nam pronaći transformacije koje će matricu dovesti u trokutastu formu, ali tako da svojstvene vrijednosti ostanu nepromijenjene. Postoji mogućnost čak ako i napravimo transformacije, da ne možemo dobiti oblik koji želimo jer dobivamo matricu koja ima kompleksnih svojstvenih vrijednosti. Kada se to dogodi, informacije dobivamo iz kompleksne ravnine i iz pseudospektra matrice.
Za razliku od spektra matrice, pseudospektar se razlikuje ovisno o odabiru oblika, odnosno mora se voditi računa o odabiru norme. O tome nam nešto više govori sljedeća definicija.

Definicija 7. *(Vidjeti [6]). Neka je $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ i $\epsilon > 0$ proizvoljan. $\epsilon-$pseudospektar $\sigma_\epsilon(A)$ matrice A u normi $\|\cdot\|$ definiran je s*

$$\sigma_\epsilon = \{z \in \mathbb{C} : \|(zI - A)^{-1}\| > \epsilon^{-1}\}. \tag{3}$$

Očito definicija ovisi o izboru norme, te ovisno o normi možemo govoriti o $2-$pseudospektru, $1-$pseudospektru, ili $\infty-$pseudospektru, ako imamo $2-$normu, $1-$normu ili $\infty-$normu. U ovom radu, koristit ćemo se spektralnom $2-$normom.

Matrica $(zI - A)^{-1}$ je poznatija kao rezolventa matrice A. Uzet ćemo da vrijedi sljedeće

$$\|(zI - A)^{-1}\| = \infty, \quad \forall z \in \sigma(A), \tag{4}$$

gdje je $\sigma(A)$ spektar matrice A, to posebno znači da je spektar sadržan u svakom $\epsilon-$psedospektru za svaki $\epsilon > 0$.

Sljedeća definicija pseudospektra matrica nam daje informaciju o povezanosti između norme rezolvente matrice i svojstvenih vrijednosti perturbirane matrice.

Definicija 8. *(Vidjeti [6]). $\sigma_\epsilon(A)$ u normi $\|\cdot\|$ je skup svih $z \in \mathbb{C}$ takvih da vrijedi*

$$z \in \sigma(A + B) \tag{5}$$

za neki $B \in \mathbb{C}^{N\times N}$, pri čemu je $\|B\| < \epsilon$.

Stoga, prema Definiciji 8. pseudospektar matrice je skup skalara koji su svojstvene vrijednosti svih perturbiranih matrica A za perturbacije koje su po normi manje od ϵ. Također, iz prethodne definicije proizlazi da za pseudospektre vezane za različiti ϵ vrijedi

$$\sigma_{\epsilon_1}(A) \subseteq \sigma_{\epsilon_2}(A), \quad 0 < \epsilon_1 \leq \epsilon_2, \tag{6}$$

i da je presjek svih pseudospektara matrice upravo spektar matrice A,

$$\bigcap_{\epsilon>0} \sigma_\epsilon(A) = \sigma(A). \tag{7}$$

Definicija 9. *(Vidjeti [6]). $\sigma_\epsilon(A)$ je skup svih $z \in \mathbb{C}$ tako da vrijedi*

$$||(zI - A)v|| < \epsilon \tag{8}$$

za neki $v \in \mathbb{C}^N$ pri čemu je $\|v\|$=1.

Broj z u prethodnoj definiciji zovemo $\epsilon-$pseudo svojstvena vrijednost matrice A, dok je vektor v $\epsilon-$pseudo svojstveni vektor. Dakle, $\epsilon-$pseudospektar je skup svih $\epsilon-$pseudo svojstvenih vrijednosti.

Sljedeći teorem nam pokazuje da su navedene definicije vezane za pseudospektar matrice međusobno ekvivalentne.

Teorem 3. ***Ekvivalencija definicija pseudospektra*** *(Vidjeti [6]).*
Za prozvoljnu matricu $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$, definicije 7, 8 i 9 su ekvivalentne.

Dokaz: (Vidjeti [6]). Ekvivalencija je trivijalna za svaki $z \in \sigma(A)$, stoga pretpostavimo da z $\notin \sigma(A)$, što povlači da postoji $(zI - A)^{-1}$. Kako bi dokazali (5) $\Rightarrow$ (8), pretpostavimo da vrijedi $(A + B)v = zv$ za neki B $\in \mathbb{C}^{N\times N}$ gdje je $\|B\| < \epsilon$ i neki nenul vektor $v \in \mathbb{C}^N$, koji je normiran i vrijedi $\|v\|$=1. Tada vrijedi $\|(zI - A)v\| = \|Bv\| \leq \|B\|\|v\| < \epsilon$.
Kako bi pokazali (8) $\Rightarrow$ (3), pretpostavimo $(zI - A)v = su$ za neki $v, u \in \mathbb{C}^N$ gdje je $\|v\| = \|u\| = 1$ i $s < \epsilon$. Nadalje, $(zI - A)^{-1}u = s^{-1}v$, iz čega slijedi $\|(zI - A)^{-1}\| \geq s^{-1} > \epsilon^{-1}$.
Ostaje nam pokazati (3) $\Rightarrow$ (5) te pretpostavimo $\|(zI - A)^{-1}\| > \epsilon^{-1}$. Tada je $(zI - A)^{-1}u = s^{-1}v$, iz čega slijedi $zIv - Av = su$ za neki $v, u \in \mathbb{C}^N$ gdje su $\|v\| = \|u\| = 1$ i $s < \epsilon$. Dovoljno je pokazati da postoji matrica $B \in \mathbb{C}^{N\times N}$ gdje je $\|B\| = s$ i vrijedi jednakost $Bv = su$, pri čemu će v biti svojstveni

vektor matrice $A + B$, sa svojstvenom vrijednošću z. Za B možemo uzeti matricu ranga 1 oblika $B = suw^*$ za neki $w \in \mathbb{C}^N$ tako da vijedi $w^*v = 1$. Ako je $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ tvrdnja je očita uzimanjem $w = v$. U slučaju neke druge norme, postojanje vektora w koji zadovoljava tražene uvjete može se protumačiti kao postojanje linearnog funkcionala L na $\mathbb{C}^N$ koji zadovoljava $\|Lv\| = 1$ i $\|L\| = 1$, što garantira Hahn-Banachov teorem. [1] ■

Navest ćemo još jednu definiciju pseudospektra vezanu za spektralnu normu matrice.

Definicija 10. *(Vidjeti [4]). Spektralna norma matrice je njezina najveća singularna vrijednost, dok je spektralna norma inverzne matrice jednaka njezinoj najmanjoj singularnoj vrijednosti, odnosno*

$$\|(zI - A)^{-1}\|_2 = [s_{min}(zI - A)]^{-1}, \tag{9}$$

gdje je $s_{min}(zI - A)$ označava najmanju singularnu vrijednost od $zI - A$.

Nešto više o najmanjoj singularnoj vrijednosti matrice $zI - A$ nam govori sljedeća definicija.

Definicija 11. *(Vidjeti [4]). Za $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, $\sigma_\epsilon(A)$ je skup svih $z \in \mathbb{C}$ takvih da vrijedi*

$$s_{min}(zI - A) < \epsilon. \tag{10}$$

Iz (9) je jasno da je (10) ekvivalentno (3), a na kraju i sa svim definicijama pseudospektra. Ukoliko je matrica U unitarna matrica ($U^* = U^{-1}$), tada je

$$(zI - UAU^*)^{-1} = [U(zI - A)U^*]^{-1} = U(zI - A)^{-1}U^*, \tag{11}$$

i stoga,

$$\|(zI - UAU^*)^{-1}\|_2 = \|(zI - A)^{-1}\|_2, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{12}$$

Iz (12) slijedi da je norma rezolvente invarijantna na unitarno slične transformacije, što implicira da isto vrijedi i za pseudospektar, uz pretpostavku $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$:

$$\sigma_\epsilon(A) = \sigma_\epsilon(UAU^*), \quad \forall \epsilon \geq 0. \tag{13}$$

[1] Hann - Banachov teorem. Neka je X normirani prostor i Y potprostor od X. Za svaki f iz Y' postoji F iz X' takav da vrijedi $\|F\| = \|f\|$ i $F(y) = f(y)$, za svaki $y \in Y$.

U prethodnom poglavlju već smo vidjeli da normalne matrice imaju svojstvo da su unitarno dijagonalizabilne, odnosno da postoji unitarna matrica U i dijagonalna matrica Λ tako da je

$$A = U\Lambda U^*. \tag{14}$$

Za normalnu matricu, $\epsilon-$ pseudospektar je zapravo unija otvorenih $\epsilon-$ kugli oko točaka spektra. Tada norma rezolvente zadovoljava sljedeće

$$\|(zI - A)^{-1}\|_2 = \frac{1}{\mathrm{dist}(z, \sigma(A))}, \tag{15}$$

gdje $\mathrm{dist}(z, \sigma(A))$ predstavlja udaljenost točke z do skupa $\sigma(A)$ u kompleksnoj ravnini.

U sljedećem teoremu bit će nam potrebna $\epsilon-$kugla, koja je oblika

$$\Delta_\epsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \epsilon\}. \tag{16}$$

Sumu dvaju skupova zapisujemo na sljedeći način:

$$\sigma(A) + \Delta_\epsilon = \{z : z = z_1 + z_2, z_1 \in \sigma(A), z_2 \in \Delta_\epsilon\} = \{z : \mathrm{dist}(z, \sigma(A)) < \epsilon\} \tag{17}$$

Teorem 4. ***Pseudospektar normalnih matrica*** *(Vidjeti [6]).*
Za proizvoljnu matricu $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$,

$$\sigma_\epsilon(A) \supseteq \sigma(A) + \Delta_\epsilon, \forall \epsilon > 0, \tag{18}$$

i ako je A normalna matrica te je $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, tada

$$\sigma_\epsilon(A) = \sigma(A) + \Delta_\epsilon, \forall \epsilon > 0. \tag{19}$$

Obratno, ako je $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, tada (19) povlači da je A normalna matrica.

Dokaz: Vidi [6].

Neka je matrica A dijagonalizabilna, ali ne nužno normalna. Uzmimo da je $V \in \mathbb{C}^{N\times N}$ matrica svojstvenih vektora matrice A. Definirat ćemo uvjetovanost svojstvenih vektora na sljedeći način

$$\kappa(V) \equiv \|V\|_2\|V^{-1}\|_2 = \frac{s_{max}(V)}{s_{min}(V)}, \tag{20}$$

gdje su $s_{max}(V)$ i $s_{min}(V)$ najveće i najmanje svojstvene vrijednosti, dok se $\kappa(V)$ nalazi u intervalu $[1, \infty\rangle$. Uvjetovanost svojstvenih vektora nam daje gornju granicu za svaku od svojstvenih vrijednosti matrice A. Nešto više o tome nam govori sljedeći teorem.

Teorem 5. ***Bauer-Fike teorem*** *(Vidjeti [2]).*
Pretpostavimo da je $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ dijagonalizabilna, $A = V\Lambda V^{-1}$. Tada $\forall\epsilon > 0$, uz pretpostavku $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ vrijedi

$$\sigma(A) + \Lambda_\epsilon \subseteq \sigma_\epsilon(A) \subseteq \sigma(A) + \Lambda_{\epsilon\kappa(V)}. \tag{21}$$

Dokaz: (Vidjeti [2]). Prva inkluzija je uspostavljena u (18), dok ćemo za sljedeću inkuziju izračunati.
$(zI - A)^{-1} = (zI - V\Lambda V^{-1})^{-1} = [V(zI - \Lambda)V^{-1}]^{-1} = V(zI - \Lambda)^{-1}V^{-1}$,
što povlači

$$\|(zI - A)^{-1}\|_2 \leq \kappa(V)\|(zI - \Lambda)^{-1}\|_2 = \frac{\kappa(V)}{\operatorname{dist}(z, \sigma(A))},$$

gdje $\kappa(V)$ predstavlja uvjetovanost svojstvenih vektora. ■

4.1 Svojstva pseudospektra

Neka od osnovnih svojstava pseudospekra, navest ćemo u sljedećem teoremu.

Teorem 6. *(Vidjeti [6]). Neka je $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ i $\epsilon > 0$ proizvoljan.*

1. *$\sigma_\epsilon(A)$ je neprazan, otvoren i ograničen skup, s najviše N komponenti povezanosti od kojih svaka komponenta sadržava jednu ili više svojstvenih vrijednosti.*

2. *Ako je $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, tada $\sigma_\epsilon(A^*) = \overline{\sigma_\epsilon(A)}$.*

3. *Ako je* $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$*, tada* $\sigma_\epsilon(A_1 \oplus A_2) = \sigma_\epsilon(A_1) \cup \sigma_\epsilon(A_2)$*.*

4. *Za proizvoljan* $c \in \mathbb{C}$ *vrijedi* $\sigma_\epsilon(A + c) = c + \sigma_\epsilon(A)$*.*

5. *Za proizvoljan* $c \in \mathbb{C}$*,* $c \neq 0$ *vrijedi* $\sigma_{|c|\epsilon}(cA) = c\sigma_\epsilon(A)$*.*

Napomena 2. *U dijelu pod 3. u prethodnom teoremu,* $A_1 \oplus A_2$ *predstavlja direktnu sumu dviju kvadratnih matrica, pri čemu matrice ne moraju biti istih dimenzija, dok je njihova direktna suma blok dijagonalna matrica*

$$A_1 \oplus A_2 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

Dokaz: Dokaze prethodnih svojstava moguće je vidjeti u [6].

Literatura

[1] D. Bakić: Linearna Algebra, Školska knjiga, 2008.

[2] L. Hogben: Handbook of Linear Algebra, Second Edition, CRC Press, 2013.

[3] H. Kraljević: Vektorski prostori, skripta.

[4] I. Nakić, M. Petrić: Pseudosepektar matrica, math.e.

[5] S. Singer: Matematika 4, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, skripta.

[6] L. N. Trefethen, M. Embree, Spektra and Psedospectra: The Behavior of Nonnormal Matrices and Operators, Princeton University Press, 2005.