Primjena reziduuma na računanje realnih integrala

Grgić, Sara

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Preddiplomski studij matematike

Sara Grgić

Primjene reziduuma u računanju realnih integrala

Završni rad

Osijek, 2021.

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Preddiplomski studij matematike

Sara Grgić

Primjene reziduuma u računanju realnih integrala

Završni rad

Mentor: prof. dr. sc. Krešimir Burazin
Komentor: dr. sc. Ivana Crnjac

Osijek, 2021.

Sažetak

U ovom radu upoznat ćemo se s pojmom reziduuma kompleksne funkcije kompleksne varijable te nekim njihovim primjenama. Kako bismo to mogli napraviti, proučit ćemo osnovno o Laurentovim redovima, singularitete funkcije te njihovu klasifikaciju. Nakon toga ćemo pokazati primjenu reziduuma na rješavanje realnih integrala specijalnih oblika.

Ključne riječi: izolirani singularitet, pol, reziduum, osnovni teorem o reziduumima, integral

Abstract

In this paper, we shall be acquainted with the concept of residues of a complex function of complex variable along with some of their applications. In order to do that, we shall consider basics about Laurent series, singularities of the function and their classification. In the following, the application of residues on solving special forms of real integrals will be shown.

Keywords: isolated singularities, pole, residue, Cauchy's residue theorem, integral

Sadržaj

1 Uvod **1**

2 Laurentov red funkcije **2**

3 Singulariteti **4**

3.1 Klasifikacija izoliranih singulariteta 5

4 Reziduum funkcije **7**

4.1 Računanje reziduuma 9

5 Primjene reziduuma na rješavanje realnih integrala **11**

5.1 Integrali oblika $\int\limits_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\, dx$ 11

5.2 Integrali oblika $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx,\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 13

5.3 Integrali oblika $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos{(ax)}\, dx, \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin{(ax)}\, dx$ 15

5.3.1 Zaobilaženje singulariteta na realnoj osi 17

5.4 Integrali oblika $\int\limits_0^{\infty} \frac{f(x)}{x^a}\, dx$ 19

5.5 Integrali oblika $\int\limits_0^{\infty} f(x) \ln x\, dx$ 22

1 Uvod

Glavni cilj ovog rada je razmotriti efikasne metode rješavanja nekih realnih integrala koji se inače teško rješavaju. One se većim dijelom zasnivaju na *Osnovnom teoremu o reziduumima* koji nam dolazi kao generalizacija Cauchyjeve integralne formule

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} \, dz.$$

Pojam reziduuma u kompleksnoj analizi uveo je Augustin Louis Cauchy(1789.-1857.) u nizu radova objavljenih između 1826. i 1829. godine (*Exercices de mathematiques, Paris. 1826., Exercices de mathematiques. Seconde Année. Paris. 1827., Leçons sur le calcul différentiel. Paris: De Bure frères. 1829.*). Ovaj francuski matematičar, profesor matematike i astronomije, smatra se osnivačem teorije funkcija jedne kompleksne varijable. Bio je član francuske Akademije znanosti i Londonskog Kraljevskog društva, te je po njemu nazvan i krater na Mjesecu (Cauchy). Njegovo ime nalazi se na listi 72 znanstvenika ugraviranih na Eiffelovom tornju.

Prije nego što krenemo u analizu spomenutog teorema i njegove primjene, potrebno je navesti neke osnovne pojmove potrebne za njegovo razumijevanje. U drugom poglavlju promatrat ćemo Laurentov red i razvoj funkcije u isti. Treće poglavlje bavi se pojmom singulariteta funkcije te njihovom klasifikacijom. *Osnovni teorem o reziduumima* te efikasni načini računanja reziduuma tema je četvrtog poglavlja, dok se u posljednjem poglavlju bavimo primjenom *Osnovnog teorema o reziduumima* u izračunavanju realnih integrala specijalnih oblika.

2 Laurentov red funkcije

Kako bismo mogli proučavati reziduume, te kasnije njihovu primjenu, moramo prvo uvesti pojam Laurentovog razvoja, što ćemo napraviti u ovom poglavlju. Pri proučavanju funkcija često je potreban uvjet da je promatrana funkcija analitička.

Definicija 1. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup. Za funkciju $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ kažemo da je ***analitička*** ako je derivabilna i derivacija f' je neprekidna na Ω. Za funkciju kažemo da je analitička u točki z_0 ako postoji neka okolina točke z_0 na kojoj je f analitička.

Analitičke funkcije imaju vrlo značajno svojstvo, naime svaka se takva funkcija u okolini svake točke iz područja analitičnosti može prikazati redom potencija [6].

Definicija 2. Red oblika

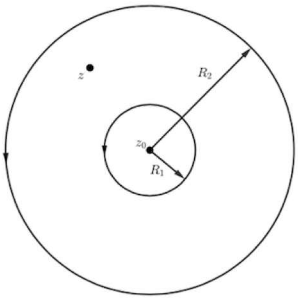
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

gdje su C_n, z_0 zadani kompleksni brojevi, naziva se ***red potencija*** oko točke $z = z_0$.

Posebno, red potencija kojemu je opći član C_n oblika

$$C_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

zovemo Taylorov red. U mnogim primjenama se susrećemo sa funkcijama koje nisu analitičke u jednoj ili više točaka, ili na nekim dijelovima kompleksne ravnine. Prema tome, ne možemo promatrati Taylorove redove u okolini takvih točaka. Međutim, možemo promatrati reprezentaciju funkcija u kojoj postoje i pozitivne i negativne potencije od $(z - z_0)$. Takve redove nazivamo Laurentovim redovima i oni su definirani za one funkcije koje su analitičke na kružnom vijencu, $K(z_0; R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 \leqslant\mid z - z_0 \mid\leqslant R_2\}$ kao na Slici 1.



Slika 1: Kružni vijenac

Teorem 2.1 (O Laurentovom[1] redu)**.** *Neka je funkcija f analitička na kružnom vijencu $K := K(z_0; R_1, R_2)$ oko točke z_0. Tada za svaki $z \in K$ vrijedi*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n, \tag{2.1}$$

gdje su koeficijenti C_n dani formulom

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta,$$

pri čemu je Γ pozitivno orjentirana kružnica oko z_0 proizvoljnog radijusa r, $R_1 < r < R_2$.

*Red (2.1) zovemo **Laurentovim redom** funkcije f oko točke z_0.*

Dokaz gornjeg teorema se može vidjeti u [1]. Koeficijent uz član $1/(z - z_0)$, odnosno C_{-1}, ima poseban značaj u kompleksnoj analizi, te mu je dodijeljeno posebno ime: reziduum funkcije u točki z_0 (više o ovome u poglavlju 4). Razvoj funkcije u Laurentov red je jedinstven, tj. ako za svaki $z \in K(z_0; R_1, R_2)$ vrijedi

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n,$$

onda je $a_n = b_n$ za sve $n \in \mathbb{Z}$. Nadalje, ako je funkcija f analitička na vijencu K, onda se f može zapisati kao suma dviju funkcija f_1 i f_2, pri čemu je f_2 analitička na krugu $K(z_0, R_2)$ a f_1 je analitička izvan zatvorenog kruga $\overline{K}(z_0, R_1)$. Štoviše, ako je $\lim\limits_{|z| \to \infty} f_1(z) = 0$, onda je rastav $f = f_1 + f_2$ jedinstven. Funkcija f_1 naziva se ***glavni*** ili ***singularni dio***, dok se funkcija f_2 naziva ***regularni dio*** funkcije f. Možemo primjetiti da je i ranije spomenuti Taylorov

[1]Pierre Alphonse Laurent (1813–1854), francuski inženjer

red, dakle red koji ima samo nenegativne potencije, također Laurentov red u kojemu su svi koeficijenti uz negativne potencije jednaki nuli. Ako, dakle, krenemo razviti funkciju f u Laurentov red oko točke u kojoj je ona analitička, za rezultat ćemo dobiti Taylorov red funkcije f.

Primjer 2.1. *Promotrimo Laurentov razvoj funkcije* $f(z) = \frac{1}{z+i}$ *oko točke* $z_0 = i$.
Uočimo da je domena funkcije $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$. *Tada su kružni vijenci* $K(i; 0, 2)$ *i* $K(i; 2, \infty)$ *sadržani u domeni funkcije* f *i možemo gledati Laurentove razvoje na svakom od njih.*
Promotrimo prvo razvoj na $K(i; 0, 2)$. *Tada je* $0 < |z - i| < 2$ *pa je*

$$f(z) = \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}} = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-i}{2i}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^{n+1}(z-i)^n.$$

Promotrimo sada razvoj na $K(i; 2, \infty)$. *Ovdje je* $|z - i| > 2$ *i sada je*

$$f(z) = \frac{1}{z+i} = \frac{1}{z-i}\frac{1}{1+\frac{2i}{z-i}} = \frac{1}{z-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2i}{z-i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2i)^n}{(z-1)^{n+1}}.$$

Uočimo da Laurentov razvoj funkcije ovisi na kojem kružnom vijencu razvijamo funkciju.

3 Singulariteti

Laurentovi redovi omogućuju proučavanje funkcija i u okolini točaka u kojima nisu analitičke, tj. u okolini singulariteta.

Definicija 3. Za kompleksnu funkciju kompleksne varijable f kažemo da ima singularitet u točki $z_0 \in \mathbb{C}$ (ili da joj je točka $z_0 \in \mathbb{C}$ singularitet) ako f u točki z_0 nije definirana ili nije analitička.

Definicija 4. Za singularitet funkcije f kažemo da je izoliran ukoliko postoji $\varphi > 0$ takav da je funkcija f analitička na skupu $K(z_0, \varphi) \setminus \{z_0\}$, a da f nije analitička na čitavom krugu $K(z_0, \varphi)$.

Drugim riječima, singularitet je izolirani ako na nekoj njegovoj okolini nema drugih singulariteta. Singularitet koji nije izolirani nazivamo neizoliranim singularitetom.

Primjer 3.1. *Pogledajmo sljedeće primjere:*

a) Promotrimo funkcije f i g:

$$f(z) = \frac{1}{1-z}, \quad g(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-z} & , z \neq 1 \\ 0 & , z = 1 \end{cases}.$$

Obje funkcije imaju izolirani singularitet u točki $z_0 = 1$. Vidimo da funkcija f nije definirana u $z_0 = 1$, dok je funkcija g u točki $z_0 = 1$ definirana, ali nije analitička. Funkcije su analitičke u svim ostalim točkama kompleksne ravnine.

b) Promotrimo funkciju $f(z) = \dfrac{1}{\sin \frac{\pi}{z}}$.

Ova funkcija ima singularitete u točki $z_0 = 0$, te u točkama $z_k = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$. Točke z_k su izolirani singulariteti funkcije f. Kako je $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$, u svakoj okolini točke $z_0 = 0$ će se naći barem još jedan singularitet funkcije f pa $z_0 = 0$ nije izolirani singularitet te funkcije.

3.1 Klasifikacija izoliranih singulariteta

Postoje tri vrste izoliranih singulariteta: uklonjivi singulariteti, polovi i bitni singulariteti.

Definicija 5. Za izoliran singularitet z_0 funkcije f kažemo da je ***uklonjiv***, ako u točki z_0 možemo funkciju f predefinirati ili, ako u z_0 nije bila definirana, dodefinirati, tako da postane analitička na nekom krugu $K(z_0, R)$ oko točke z_0.

Drugim riječima, singularitet je uklonjiv, ako ga možemo ukloniti. Sljedeći teorem nam daje nekoliko karakterizacija uklonjivih singulariteta [6].

Teorem 3.1 (Karakterizacija uklonjivih singulariteta). *Neka je funkcija f analitička na skupu $K(z_0, R) \setminus \{z_0\}$. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

(i) z_0 je uklonjiv singularitet funkcije f.

(ii) Postoji limes $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$.

(iii) f je omeđena na nekoj okolini točke z_0.

(iv) $\lim\limits_{z\to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$.

(v) U Laurentovom razvoju funkcije f oko točke z_0 nema negativnih potencija,tj. svi koeficijenti uz negativne potencije jednaki su nuli.

Primjer 3.2. *Funkcija* $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}, f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ *u* $z_0=0$ *ima uklonjiv singularitet. Zaista, ako funkciju* f *razvijemo u Laurentov red dobivamo*

$$f(z)=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-...$$

Vidimo da Laurentov razvoj funkcije f *u Laurentov red oko točke* $z_0=0$ *nema negativnih potencija. Dodatno, ako stavimo* $f(0)=1$*, dolazimo do analitičke funkcije* f*.*

Sljedeći tip izoliranih singulariteta su polovi.

Definicija 6. Za izoliran singularitet z_0 funkcije f kažemo da je ***pol***, ako u Laurentovom razvoju funkcije f oko točke z_0 ima konačno mnogo (ali barem jedan) članova s negativnim potencijama, tj. s potencijama od $\frac{1}{z-z_0}$.

Definicija 7. ***Red pola*** je red najveće potencije od $\frac{1}{z-z_0}$ koja se u tom Laurentovom razvoju pojavljuje s koeficijentom različitim od nule.

Teorem 3.2 (Karakterizacija polova)**.** *Neka je funkcija* f *analitička na skupu* $K(z_0,R)\setminus\{z_0\}$*. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

(i) z_0 *je pol funkcije* f *(reda* m*).*

(ii) z_0 *nije uklonjiv singularitet funkcije* f*, ali postoji prirodan broj* k *takav da je* z_0 *uklonjiv singularitet funkcije* $z\mapsto(z-z_0)^k f(z)$*. (Najmanji takav* k *upravo je* m*, odnosno red pola.)*

(iii) $\lim_{z\to z_0}|f(z)|=+\infty$*.*

Za dokaz prethodnog teorema vidjeti [6]. Red pola možemo odrediti i tražeći kratnost nultočke funkcije $g(z)=\frac{1}{f(z)}$. Za z_0 kažemo da je nultočka kratnosti n analitičke funkcije f, ako vrijedi

$$f(z_0)=0, f'(z_0)=0,\dots,f^{n-1}(z_0)=0, f^n(z_0)\neq 0.$$

Može se pokazati da je točka z_0 pol $m-$tog reda funkcije f ako i samo ako je z_0 nultočka kratnosti m funkcije g [1].

Primjer 3.3. *Promotrimo funkciju* $f(z)=\dfrac{1}{z^k}$*, za* $k\in\mathbb{N}$*.*
Ona ima singularitet u točki $z_0=0$*. Kako je*

$$\lim_{z\to z_0}|f(z)|=+\infty,$$

$z_0=0$ *je pol funkcije* f*. Nadalje, kratnost nultočke* $z_0=0$ *funkcije* $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}=z^k$ *jednaka je* k*, što implicira da je* $z_0=0$ *pol* $k-$*tog reda funkcije* f*.*

Ostaje nam još promotriti treći tip izoliranih singulariteta - bitne singularitete.

Definicija 8. Za izoliran singularitet z_0 kažemo da je ***bitan singularitet*** ako u Laurentovom razvoju funkcije f oko točke z_0 ima beskonačno mnogo članova s negativnim potencijama, tj. beskonačno mnogo koeficijenata uz negativne potencije je različito od nule.

Sljedeći teorem nam govori o ponašanju funkcije u okolini bitnog singulariteta [4].

Teorem 3.3 (Cassoratti-Weierstrass-Sohocki). *Neka je z_0 izolirani singularitet funkcije f. Sljedeća tri svojstva su međusobno ekvivalentna:*

(i) z_0 je bitni singularitet od f.

(ii) Za svaki $r > 0$ takav da je funkcija f definirana na $K(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, skup $f(K(z_0, r) \setminus \{z_0\}) = \{f(z) : z \in K(z_0, r) \setminus \{z_0\}\}$ je gust u $\mathbb{C}$(tj. zatvarač tog skupa je cijela kompleksna ravnina).

(iii) Ne postoji $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)|$, niti konačan, niti beskonačan.

Primjer 3.4. *Promotrimo funkcije $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ i $g(z) = \sin \frac{1}{z}$. Kako je*

$$\lim_{z \to 0^+} e^{\frac{1}{z}} = \infty \neq \lim_{z \to 0^-} e^{\frac{1}{z}} = 0$$

limes $\lim\limits_{z \to 0} e^{\frac{1}{z}}$ ne postoji. To znači da funkcija $f(z)$ ima bitan singularitet u točki $z_0 = 0$.
Kako je

$$\sin \frac{1}{z} = \frac{1}{2i} \left(e^{\frac{i}{z}} - e^{\frac{-i}{z}} \right)$$

slijedi da ni $\lim\limits_{z \to 0} \sin \dfrac{1}{z}$ ne postoji. Dakle, i funkcija g u točki $z_0 = 0$ ima bitan singularitet.

4 Reziduum funkcije

U ovom poglavlju ćemo definirati pojam reziduuma te iskazati i dokazati *Osnovni teorem o reziduumima*, koji nam je vrlo koristan pri rješavanju kako kompleksnih tako i nekih realnih integrala.

Definicija 9. Ostatak ili ***reziduum*** funkcije f u izoliranom singularitetu $z_0 \in \mathbb{C}$ je kompleksni broj jednak vrijednosti integrala

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^+} f(z)\, dz,$$

gdje je Γ zatvorena pozitivno orijentirana krivulja koja sadrži jedinstvenu singularnu točku z_0 i nalazi se u području regularnosti funkcije f.
Reziduum funkcije f u izoliranom singularitetu z_0 označavat ćemo s $Res(f(z), z_0)$.

Iz Teorema 2.1 možemo vidjeti da je reziduum funkcije f upravo koeficijent C_{-1} uz $\frac{1}{z-z_0}$ u Laurentovom razvoju funkcije f oko točke z_0,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

Primjer 4.1. *Neka je zadana funkcija* $f(z) = \dfrac{e^z}{z}$*. Odredimo reziduum ove funkcije u njenom izoliranom singularitetu* $z_0 = 0$*.*
Kada funkciju f *razvijemo u Laurentov red dobivamo*

$$f(z) = \frac{e^z}{z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}.$$

Koeficijent uz $\frac{1}{z-z_0}$*, odnosno* C_{-1}*, jednak je 1 pa slijedi da je* $Res(f, 0) = 1$*.*

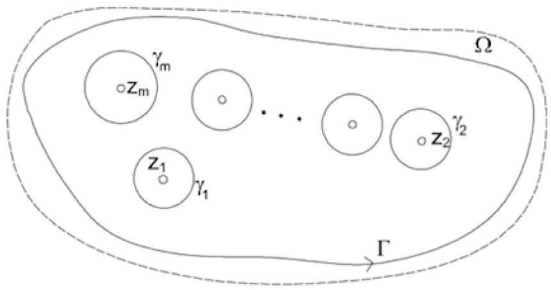
Prije iskazivanja Osnovnog teorema o reziduumima iskazat ćemo teorem koji koristimo u dokazu teorema o reziduumima [3].

Teorem 4.1 (Cauchyjev teorem). *Neka je* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *otvoren skup i* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *analitička funkcija. Tada za svaku konturu* $\Gamma^+ \subset \Omega$ *koja zajedno sa svojim unutarnjim područjem leži u* Ω *vrijedi*

$$\int\limits_{\Gamma^+} f(z)\, dz = 0.$$

Teorem 4.2 (Osnovni (Cauchyjev) teorem o reziduumima). *Neka je* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *analitička na području* Ω*, osim u konačno mnogo izoliranih singulariteta* $z_1, z_2, ..., z_m$ *i neka je* Γ^+ *pozitivno orijentirana kontura u* Ω *na kojoj ne leži niti jedan singularitet od* f *i čije unutarnje područje sadrži izolirane singularitete* $z_1, z_2, ..., z_m$ *funkcije* f*. Tada je*

$$\int\limits_{\Gamma^+} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} Res(f, z_k).$$



Slika 2: Područje analitičnosti funkcije f

Dokaz. Neka su $z_1, z_2, ..., z_m$ izolirani singulariteti funkcije f u području Ω, Γ pozitivno orijentirana krivulja koja obuhvaća sve singularitete funkcije f, $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$ redom kružnice oko singulariteta $z_1, z_2, ..., z_m$ proizvoljno malog polumjera (vidjeti Sliku 2), tako da pripadni krugovi leže u unutrašnjosti Γ i međusobno su disjunktni. Ovime smo dobili višestruko povezano područje omeđeno konturom Γ i kružnicama γ_k, $k = 1, ..., m$. Funkcija f je analitička na cijelom tom području pa prema Teoremu 4.1 slijedi

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k^-} f(z)\,dz = 0,$$

tj.

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k^+} f(z)\,dz.$$

Kako svaka krivulja γ_k sadrži točno jedan singularitet z_k, iz definicije reziduuma slijedi

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} Res(f, z_k).$$

□

4.1 Računanje reziduuma

Reziduum funkcije f u singularnoj točki z_0 uvijek se može izračunati na način da funkciju razvijemo u Laurentov red te mu odredimo koeficijent C_{-1}. Primjetimo da, ako je z_0 uklonjivi singularitet ili regularna točka funkcije, glavni dio Laurentovog razvoja funkcije oko z_0 ne postoji, pa je

$Res(f(z), z_0) = 0$. Ako je pak z_0 pol n-tog reda, Laurentov razvoj funkcije f oko točke $z_0 = 0$ je

$$f(z) = \frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n} + ... + \frac{C_{-1}}{(z-z_0)} + C_0 + C_1(z-z_0) + ...$$

i $C_n \neq 0$. Slijedi

$$(z-z_0)^n f(z) = C_{-n} + C_{-n+1}(z-z_0) + ... + C_{-1}(z-z_0)^{n-1} + C_0(z-z_0)^n + ...$$

Deriviranjem prethodnog izraza $n-1$ puta dobivamo

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)] = (n-1)!C_{-1} + \frac{n}{1!}C_0(z-z_0) + ...$$

odakle možemo izraziti C_{-1} pa je

$$Res(f, z_0) = C_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)]. \tag{4.1}$$

Posebno, za pol prvog reda vrijedi

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z).$$

Napomena 1. *Ako je funkcija f zadana u obliku $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, gdje je $\varphi(z_0) \neq 0$ i z_0 pol prvog reda od f, onda je:*

$$Res(f(z), z_0) = \frac{\varphi(z)}{\psi'(z_0)}.$$

Primjer 4.2. *Izračunajmo reziduume sljedećih funkcija:*

a) $f(z) = \dfrac{1}{z^4 - z^2}$

Zadana funkcija ima singularitete u nultočkama nazivnika, a to su $z_0 = 0$, $z_1 = 1$ i $z_2 = -1$. Kako je $z_0 = 0$ nultočka kratnosti 2 funkcije $\frac{1}{f}$, ona u $z_0 = 0$ ima pol drugog reda. Točke $z_1 = 1$ i $z_2 = -1$ su nultočke kratnosti 1, pa su to polovi prvog reda funkcije f. Prema tome reziduume računamo koristeći formulu (4.1)

$$Res(f, 0) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz}\left[z^2 \frac{1}{z^2(z-1)(z+1)}\right] = \lim_{z \to 0} \frac{-2z}{(z^2-1)^2} = 0,$$

$$Res(f, 1) = \lim_{z \to 1} (z-1) \frac{1}{z^2(z-1)(z+1)} = \frac{1}{2},$$

$$Res(f, -1) = \lim_{z \to -1} (z+1) \frac{1}{z^2(z-1)(z+1)} = -\frac{1}{2}.$$

b) $g(z) = \text{tg(z)} = \dfrac{\sin z}{\cos z}$

Funkcija g u $z_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ ima polove prvog reda. Kako je

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 0, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = (-1)^n \neq 0,$$

reziduum možemo izračunati kao

$$Res(g(z), z_n) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)}{\cos'\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)}{-\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)} = -1.$$

5 Primjene reziduuma na rješavanje realnih integrala

Teorem o reziduumima primjenjiv je na računanje svih vrsta kompleksnih integrala, a mi ćemo u ovom dijelu pokazati kako pomoću njega naći rješenje nekih realnih integrala kojima je teško naći rješenje drugim metodama. Oblici integrala koje promatramo u ovom poglavlju mogu se pronaći u [2], [3], [4] i [5].

5.1 Integrali oblika $\int\limits_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\, dx$

Neka je podintegralna funkcija R integrala

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\, dx \tag{5.1}$$

racionalna funkcija po argumentima $\sin x$ i $\cos x$ koja je definirana za svaki $x \in [0, 2\pi]$ i neka nazivnik nema nultočaka na jediničnoj kružnici sa središtem u (0,0).
Uvođenjem supstitucije

$$z = e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad x \in [0, 2\pi], \tag{5.2}$$

realni integral (5.1) prelazi u kompleksni integral po kružnici $|z| = 1$. Kako je, po definiciji,

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad i \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right),$$

integral (5.1) prelazi u integral

$$\oint_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} F(z)\,dz,$$

gdje je F nova racionalna funkcija u varijabli z, koja je analitička na $|z| \leqslant 1$, osim u konačno mnogo izoliranih singulariteta z_k, $k = 1, ..., n$, $n \in \mathbb{N}$.
Sada primjenom osnovnog teorema o reziduumima dobivamo :

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\,dx = \oint_{|z|=1} F(z)\,dz = 2\pi i \sum_{|z_k|<1} Res(F(z), z_k).$$

Primjer 5.1. *Izračunajmo integral*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1-2a\cos t + a^2)^2}, \quad 0 < a < 1.$$

Uvođenjem supstitucije $z = e^{it}$ dobivamo

$$I = \int_{|z=1|} \frac{1}{\left(1-2a\frac{z^2+1}{2z}+a^2\right)^2}\frac{dz}{iz} = \frac{1}{i}\int_{|z=1|} \frac{z\,dz}{(z-az^2-a+a^2)^2} =$$
$$= -i \int_{|z=1|} \frac{z}{(az^2-(a^2+1)z+a)^2}\,dz = \frac{-i}{a^2}\int_{|z=1|} \frac{z}{(z-a)^2\left(z-\frac{1}{a}\right)^2}\,dz.$$

Singulariteti podintegralne funkcije su $z_1 = a$, $z_2 = \frac{1}{a}$ i to su polovi drugog reda. Zbog uvjeta $0 < a < 1$ samo z_1 leži unutar jediničnog kruga $z = |1|$ pa računamo reziduum funkcije $f(z) = \dfrac{z}{(z-a)^2\left(z-\frac{1}{a}\right)^2}$ u singularitetu $z_1 = a$.
Iz (4.1) slijedi

$$Res(f(z), a) = \lim_{z\to a}\frac{d}{dz}\left[(z-a)^2\frac{z}{(z-a)^2\left(z-\frac{1}{a}\right)^2}\right] =$$
$$= \lim_{z\to a}\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{\left(z-\frac{1}{a}\right)^2}\right] = \lim_{z\to a}\frac{z-\frac{1}{a}-2z}{\left(z-\frac{1}{a}\right)^3} = \frac{-a^2(1+a^2)}{(1-a^2)^3}$$

pa je sada

$$I = \frac{-i}{a^2}2\pi i \cdot \frac{-a^2(1+a^2)}{(1-a^2)^3} = \frac{2\pi i(1+a^2)}{(1-a^2)^3}.$$

5.2 Integrali oblika $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

U ovom poglavlju promatrat ćemo nepravi integral

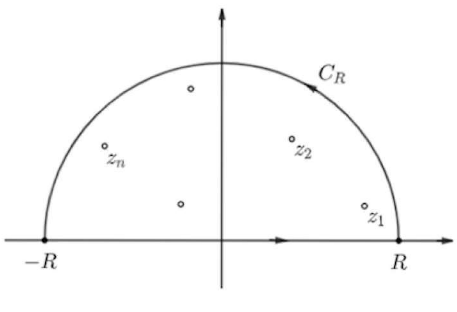
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx, \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \tag{5.3}$$

gdje je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ racionalna funkcija oblika

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

pri čemu su P_n i Q_m polinomi stupnja n i m redom, s kompleksnim koeficijentima koji nemaju zajedničkih nultočaka, te Q_m nema realnih nultočaka. Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da su polinomi P_n i Q_m normirani. Ukoliko je, dodatno, $m \geqslant n + 2$, onda integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ apsolutno konvergira i u tom slučaju ćemo potražiti njegovo rješenje.

Proširimo funkciju f na gornju poluravninu (Im$z > 0$). Neka je Γ pozitivno orijentirana kontura koja se sastoji od segmenta $[-R, R]$ i orijentirane gornje polukružnice C_R koja u svojoj nutrini obuhvaća sve singularitete $z_k, k = 1, \ldots, n$ funkcije f (Slika 3).



Slika 3: Polukružnica C_R obuhvaća sve singularitete z_k

Primjenom *Osnovnog teorema o reziduumima* slijedi

$$\int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int\limits_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{Imz_k<0} Res(f; z_k). \tag{5.4}$$

Puštajući limes kad $R \to \infty$ u gornjoj jednadžbi, prvi integral s lijeve strane postaje naš traženi integral, te još treba izračunati $\int\limits_{C_R} f(z)\,dz$. Funkciju $f(z)$ možemo zapisati u obliku

$$f(z) = \frac{1}{x^{m-n}} \cdot \frac{1+\varphi(z)}{1+\psi(z)},$$

gdje su

$$\varphi(z) = \frac{a_1}{z} + ... + \frac{a_n}{z^n}, \quad \psi(z) = \frac{b_1}{z} + ... + \frac{b_m}{z^m}.$$

Kako za $|z| \to \infty$ vrijedi $\varphi(z) \to 0$ i $\psi(z) \to 0$, te je $m \geqslant n+2$, možemo odabrati realne brojeve r_0 i M takve da su u krugu $|z| < r_0$ sadržani svi singulariteti funkcije f te da

$$|z| > r = 0 \Rightarrow |f(z)| \leqslant \frac{M}{|z|^2}.$$

Odavde, za $R > r_0$ vrijedi

$$\left| \int\limits_{C_R} f(z)\,dz \right| \leqslant \int\limits_{C_R} \frac{M}{|z^2|} \cdot |dz| = \frac{M\pi}{R},$$

a iz toga, zbog $R \to \infty$, slijedi

$$\int\limits_{C_R} f(z)\,dz = 0.$$

Prema tome, za $R \to \infty$ iz (5.4) dobivamo

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{Imz_k>0} Res(f; z_k). \tag{5.5}$$

Primjer 5.2. *Izračunajmo integral*

$$I = \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Podintegralna funkcija $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$ *je parna pa integral* I *možemo zapisati kao*

$$I = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Ovaj integral je oblika (5.3) i stupanj nazivnika je za 2 veći od stupnja brojnika pa ga možemo riješiti koristeći formulu (5.5). Promotrimo funkciju $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2}$. *Ona ima singularitete u* $z_1 = i$ *i* $z_2 = -i$ *i oni su polovi drugog reda. Slijedi*

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \pi i Res(f,i) =$$
$$= \pi i \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\big((z-i)^2 \frac{1}{(z^2+1)^2}\big) = \pi i \lim_{z\to i} \frac{-2}{(z+i)^3} = \frac{-2\pi i}{8i^3} = \frac{\pi}{4}.$$

5.3 Integrali oblika $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(ax)\,dx, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(ax)\,dx$

Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ racionalna i $a > 0$. Promotrimo integrale oblika

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(ax)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(ax)\,dx. \tag{5.6}$$

Ukoliko definiramo pomoćnu funkciju

$$F(z) = f(z)e^{iaz} = f(z)(\cos(az) + i\sin(az)),$$

nepravi integral funkcije $F(z)$ možemo prikazati kao

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\cos az\,dz + i\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\sin az\,dz. \tag{5.7}$$

Prema tome, integrale oblika (5.6) možemo odrediti računajući integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{iaz}\,dz,$$

jer iz (5.7) slijedi da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(ax)\,dx = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} F(z)\,dz,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(ax)\, dx = \mathrm{Im} \int_{-\infty}^{\infty} F(z)\, dz.$$

Kao i u prethodnom dijelu, tražimo analitičko proširenje funkcije F na gornju poluravninu ($\mathrm{Im} z > 0$). U računanju ovog tipa nepravih integrala pomaže nam tzv. *Jordanova lema* [4].

Teorem 5.1. *(Jordanova lema) Neka je f analitička na području Ω koje sadrži realnu os i gornju pouravninu $\mathrm{Im} z > 0$, osim možda u konačno mnogo izoliranih singulariteta $z_1, ..., z_n$, te neka funkcija $M(R) = \max\{|f(z)| : |z| = R, \mathrm{Im} z \geqslant 0\}$ $(R > |z_j|, j = 1, ..., n)$ teži ka nuli kada $R \to \infty$. Tada za $a > 0$ vrijedi:*

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz}\, dz = 0.$$

Primjer funkcija koje zadovoljavaju uvjete Jordanove leme su racionalne funkcije $f(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, $m \geqslant n + 2$, koje smo spominjali u potpoglavlju 5.2. Sada je određivanje integrala $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax}\, dx$ dano sljedećim teoremom.

Teorem 5.2. *Neka se funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ može analitčki proširiti na područje gornje poluravnine $\mathrm{Im} z \geqslant 0$ tako da proširenje f zadovoljava uvjete Jordanove leme i nema singulatiteta na realnoj osi. Tada integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax}\, dx$ konvergira za $a > 0$ i vrijedi*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax}\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f(x) e^{iax}; z_k),$$

gdje su $z_k = 1, \ldots, n$ singularne točke od $f(z)$ u gornjoj poluravnini.

Dokaz. Pretpostavimo da singulariteti z_k funkcije $f(z)$ u gornjoj poluravnini zadovoljavaju uvjet $|z| < R_0$. Razmotrimo u gornjoj poluravnini zatvorenu konturu koja se sastoji od segmenta $[-R, R]$, $R < R_0$ i polukružnice $|z| = R$, C_R. Prema osnovnom teoremu o reziduumima imamo

$$\int_{-R}^{R} f(x) e^{iax}\, dx + \int_{C_R} f(z) e^{iaz} = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f(x) e^{iax}; z_k). \tag{5.8}$$

Puštajući limes $R \to \infty$ u jednadžbi (5.8), po Jordanovoj lemi, $\int\limits_{C_R} f(z)e^{iaz}$ teži u nula, te je time teorem dokazan. $\square$

Primjer 5.3. *Izračunajmo*

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1}\, dx.$$

Primjetimo da je

$$I = \mathrm{Im} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+1}\, dx,$$

pa ga možemo riješiti koristeći Teorem 5.2. Neka je $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$*. Jedini singularitet ove funkcije u gornjoj poluravnini je točka* $z_1 = i$ *i ona je pol prvog reda. Vrijedi*

$$\max_{|z|=R} |f(z)| = \max_{|z|=R} \frac{|z|}{|z^2+1|} \leqslant \frac{R}{R^2-1} \to 0$$

kada $R \to \infty$*, pa su zadovoljeni uvjeti Jordanove leme (a time i Teorema 5.2) i imamo*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+1}\, dx = 2\pi i Res\left(\frac{ze^{iz}}{z^2+1}, i\right) = 2\pi i \frac{ze^{iz}}{(z^2+1)'}\bigg|_{z=i} = \pi i e^{-1}.$$

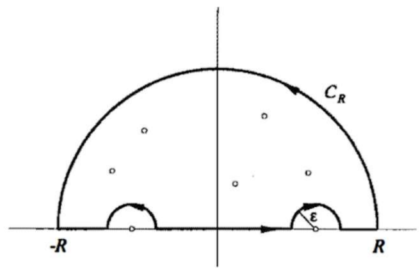
U gornjem računu, za računanje reziduuma funkcije f *u* $z_1 = i$ *koristili smo Napomenu 1. Konačno je*

$$I = \mathrm{Im} \frac{\pi i}{e} = \frac{\pi}{e}.$$

5.3.1 Zaobilaženje singulariteta na realnoj osi

Integrale oblika (5.6) možemo riješiti i ako dozvolimo da funkcija f, osim singulariteta $z_k, k = 1, ..., n$ u gornjoj poluravnini ($\mathrm{Im} z > 0$), na realnoj osi ima singularitete $z_l = x_l$, $l = 1, ..., m$ te su oni svi polovi prvog reda. U tom slučaju za integral (5.7) vrijedi

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x)dx = 2\pi i \sum_{Imz_k>0} Res(F(x), z_k) + \pi i \sum_{Imz_l=0} Res(F(x), x_l). \tag{5.9}$$



Slika 4: Nova krivulja integracije

Do ovog rezultata dolazimo kada krivulju integracije odaberemo kao na Slici 4. Singularitete na realnoj osi zaobilazimo integriranjem po polukružnicama γ_ϵ proizvoljno malog polumjera ϵ. Za dovoljno velik R vrijedi

$$\int_{\Gamma} F(z)\,dz = 2\pi i \sum_{Imz_k>0} Res(F, z_k),$$

gdje je Γ krivulja integracije koja se sastoji od polukružnice C_R, dijelova realne osi unutar intervala $[-R, R]$ i polukružnica koje zaobilaze singularitete na realnoj osi. Neka je z_0 pol prvog reda funkcije F koji se nalazi na realnoj osi. Da bismo pokazali (5.9) dovoljno je pokazati

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\gamma_\epsilon} F(z)\,dz = -\pi i Res(F, z_0).$$

Funkciju F možemo razviti u Laurentov red oko točke z_0, pa slijedi

$$F(z) = \frac{C_{-1}}{z - z_0} + C_0 + C_1(z - z_0) + ... = \frac{C_{-1}}{z - z_0} + \varphi(z),$$

gdje je φ analitička funkcija u okolini točke z_0. Sada je

$$\int_{\gamma_\epsilon} F(z)\,dz = C_{-1} \int_{\gamma_\epsilon} \frac{dz}{z - z_0} + \int_{\gamma_\epsilon} \varphi(z)\,dz.$$

Kako je

$$\left| \int_{\gamma_\epsilon} \varphi(z)\,dz \right| \leqslant \max_{z\in\gamma_\epsilon} |\varphi(z)| \cdot \int_{\gamma_\epsilon} ds = \max_{|z|=\epsilon} |\varphi(z)| \cdot \pi\epsilon \to 0$$

kad $\epsilon \to 0$,

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\gamma_\epsilon} \frac{dz}{z - z_0} = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\pi}^{0} \frac{\epsilon i e^{i\varphi} d\varphi}{\epsilon e^{i\varphi}} = -i\pi,$$

te je

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{\gamma_\epsilon} F(z)\,dz = -C_{-1}i\pi = -i\pi Res(F; z_0).$$

Time smo pokazali da vrijedi (5.9)

Primjer 5.4. *Izračunajmo integral*

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Možemo primijetiti da je

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x}\,dx,$$

kako je podintegralna funkcija parna, pa možemo iskoristiti formulu (5.9). Neka je $f(z) = \frac{1}{z}$. *Jedini singularitet ove funkcije je točka* $z_0 = 0$ *i ona je pol prvog reda. Vrijedi*

$$\max_{|z|=R}|f(z)| = \max_{|z|=R}\frac{1}{|z|} \leqslant \frac{1}{R} \to 0$$

kada $R\to\infty$. *Sada je prema Jordanovoj lemi* $\int\limits_{C_R} f(z)\,dz \to 0$ *i imamo*

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x}\,dx = \pi i Res\left(\frac{e^{iz}}{z}, 0\right) = \pi i\cdot 1 = \pi i$$

jer je

$$Res(f(z)e^{iz}, 0) = \lim_{z\to 0}\left[(z-0)\frac{e^{iz}}{z}\right] = \lim_{z\to 0} e^{iz} = 1.$$

Konačno je

$$I = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(\pi i) = \frac{\pi}{2}.$$

5.4 Integrali oblika $\int\limits_0^\infty \frac{f(x)}{x^a}\,dx$

U ovom dijelu promatrat ćemo neprave integrale oblika

$$\int\limits_0^\infty \frac{f(x)}{x^a}\,dx, \quad 0 < a < 1, \tag{5.10}$$

gdje je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, racionalna funkcija koja nema singularitete na pozitivnom dijelu realne osi. Kako bi ovaj integral postojao, potrebno je pretpostaviti da je stupanj polinoma brojnika manji od stupnja polinoma nazivnika funkcije f. Ako je taj uvjet ispunjen, tada postoji konstanta $M > 0$ takva da za dovoljno veliki $|z|$ vrijedi

$$|f(z)| \leqslant \frac{M}{|z|^m}, \quad m \geqslant 1.$$

Proširimo podintegralnu funkciju iz (5.10) na funkciju F, danu s

$$F(z) = \frac{f(z)}{z^a}$$

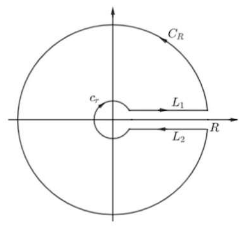
koja ima konačan broj izoliranih singulariteta $z_1, ..., z_n$ koji su svi polovi od kojih niti jedan ne leži na pozitivnom dijelu realne osi. Promatrat ćemo granu funkcije F koja je jednoznačna na području $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < 2\pi\}$ (kompleksna ravnina bez pozitivnog dijela realne osi). Primjetimo da vrijedi

$$z^a = |z|^a e^{ia(\arg z + 2k\pi)}, k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

pa ćemo odabrati granu funkcije $z \mapsto z^a$, za koju je $k = 0$, tj.

$$z^a = |z|^a e^{ia \arg z}.$$

Funkciju F integrirat ćemo po krivulji Γ koju ćemo odabrati kao na Slici 5. Preciznije $\Gamma = C_R \cup L_1 \cup L_2 \cup c_r$,



Slika 5: Put integracije

pri čemu je krivulja C_R je kružnica $z = Re^{i\varphi}, 0 < \varphi < 2\pi$, koja obuhvaća sve singularitete $z_1, ..., z_n$, c_r kružnica $z = re^{i\varphi}, 0 < \varphi < 2\pi$ dovoljno malog polumjera da ne sadrži niti jedan singularitet, dok L_1 predstavlja interval $[r, R]$ paralelan s realnom osi u gornjoj poluravnini, a L_2 interval $[R, r]$, paralelan s realnom osi u donjoj poluravnini.
Ako $z \to x, x \in [r, R]$, za Im$z > 0$, tada $\arg z \to 0$ i vrijedi

$$z^a = |z|^a e^{ia \cdot \arg z} \to x^a.$$

Ako $z \to x, x \in [R, r]$, za $\mathrm{Im} z < 0$, tada $\arg z \to 2\pi$ i vrijedi

$$z^a = |z|^a e^{ia \cdot \arg z} \to x^a e^{ia2\pi}.$$

Sada, prema osnovnom teoremu o reziduumima imamo

$$\int_\Gamma F(z)\, dz = 2\pi i \sum_{z_i \in D} Res(F(z), z_k),$$

tj.

$$\begin{aligned} \int_r^R \frac{f(x)}{x^a}\, dx + \int_{C_R} \frac{f(z)}{z^a}\, dz + \int_R^r \frac{f(x)}{x^a e^{2ai\pi}}\, dx + \int_{c_r} \frac{f(z)}{z^a}\, dz = \\ = 2\pi i \sum_{z_i \in D} Res\Big(\frac{f(z)}{z^a}, z_i\Big). \end{aligned} \tag{5.11}$$

Ocijenimo integrale po kružnici C_R:

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{f(z)}{z^a}\, dz \right| \leqslant \int_{C_R} \frac{|f(z)|}{|z^a|} |\, dz| \leqslant \int_{C_R} \frac{M}{|z|^m} \cdot \frac{1}{|z|^a}\, ds = \\ = \int_0^{2\pi} \frac{M}{R^m} \cdot \frac{1}{R^a} R\, d\varphi = \frac{2M\pi}{R^{m+a-1}} \to 0, \quad R \to \infty. \end{aligned}$$

Za integral po kružnici c_r iskoristit ćemo činjenicu da je funkcija f omeđena, konstantom K na okolini točke 0 pa je

$$\left| \int_{c_r} \frac{f(z)}{z^a}\, dz \right| \leqslant \int_{c_r} \frac{|f(z)|}{|z^a|} |\, dz| \leqslant \int_{c_r} \frac{K}{r^a} r\, d\varphi = Kr^{1-a} 2\pi \to 0, r \to 0.$$

Ako sada u (5.11) pustimo $r \to 0$ i $R \to \infty$ pa dobivamo

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x^a}\, dx + \frac{1}{e^{2\pi ia}} \int_\infty^0 \frac{f(x)}{x^a}\, dx = 2\pi i \sum_{z_i \in D} Res\Big(\frac{f(z)}{z^a}, z_i\Big),$$

iz čega slijedi formula

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x^a}\, dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi ia}} \sum_{z_i \in D} Res\Big(\frac{f(z)}{z^a}, z_i\Big). \tag{5.12}$$

Primjer 5.5. *Izračunajmo integral*

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(x^2+4)}.$$

Neka je $F(z) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{z}(z^2+4)}$ *i* $f(z) = \dfrac{1}{z^2+4}$. *Funkcija* f *nema singularitete na pozitivnom dijelu realne osi te joj je stupanj polinoma u nazivniku za dva veći od stupnja polinoma u brojniku. Nadalje funkcija* $F(z)$ *je analitička na području* $D = \{z \in \mathbb{C} \colon 0 < \arg z < 2\pi\}$ *osim u izoliranim singularitetima* $z_1 = 2i$, $z_2 = -2i$, *koji su polovi prvog reda. Koristeći formlu (5.12) za* $a = \frac{1}{3}$ *vrijedi*

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i \cdot \frac{1}{3}}}[Res(F, 2i) + Res(F, -2i)].$$

Iz (4.1) je

$$Res(F, 2i) = \lim_{z \to 2i}(z - 2i)F(z) = \lim_{z \to 2i} \frac{1}{\sqrt[3]{z}(z+2i)} = \frac{1}{\sqrt[3]{2i} \cdot 4i} = \frac{1}{4\sqrt[3]{2}e^{\frac{2\pi i}{3}}},$$

$$Res(F, -2i) = \lim_{z \to -2i}(z+2i)F(z) = \lim_{z \to -2i} \frac{1}{\sqrt[3]{z}(z-2i)} = \frac{1}{\sqrt[3]{-2i} \cdot (-4i)} = \frac{1}{4\sqrt[3]{2}},$$

pa imamo

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i \cdot \frac{1}{3}}} \frac{1}{4\sqrt[3]{2}} \left(\frac{1}{e^{\frac{2\pi i}{3}}} + 1 \right) = \frac{\pi i}{2\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{1 + e^{\frac{2\pi i}{3}}}{e^{\frac{2\pi i}{3}} - 1} = \frac{\pi i}{2\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}i}{-3 + \sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6\sqrt[3]{2}}.$$

5.5 Integrali oblika $\int_0^\infty f(x) \ln x \, dx$

Promotrimo integral oblika

$$\int_0^\infty f(x) \ln x \, dx. \tag{5.13}$$

Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ racionalna funkcija koja nema singularitete na pozitivnom dijelu realne osi, te neka je stupanj polinoma Q barem za dva veći od stupnja polinoma P. Ako je taj uvjet ispunjen, tada postoji konstatnta $M > 0$ takva da vrijedi

$$|f(z)| \leqslant \frac{M}{|z|^m}, \quad m \geqslant 2.$$

Uvedimo pomoćnu funkciju

$$F(z) = f(z) \ln^2 z,$$

te neka je $\ln z$ glavna grana logaritamske funkcije, tj. $\ln z = \ln |z| + i \arg z$. Funkcija F analitička je na području $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \pi\}$, osim eventualno u konačno mnogo polova $z_1, ..., z_n$ koji ne leže na pozitivnom dijelu realne osi. Područje integracije funkcije F odaberemo kao na Slici 5 uz iste oznake. Ako $z \to x, x \in [r, R]$, za $\mathrm{Im} z > 0$, tada $\arg z \to 0$ i vrijedi

$$\ln z \to \ln x.$$

Ako $z \to x, x \in [R, r]$, za $\mathrm{Im} z < 0$, tada $\arg z \to 2\pi$ i vrijedi

$$\ln z \to \ln x + 2\pi i.$$

Uzmemo li dovoljno velik R i dovoljno mali r da krivulja integracije obuhvaća sve singularitete $z_1, ..., z_n$, po *Osnovnom reoremu o reziduumima* vrijedi

$$\int_r^R f(x) \ln^2 x \, dx + \int_{C_R} F(z)\, dz + \int_R^r f(x)(\ln x + 2\pi i)^2 \, dx + \int_{c_r} F(z)\, dz =$$

$$= 2\pi i \sum_{z_j \in D} Res(F(z); z_j).$$

Ocijenimo integral po kružnici C_R:

$$\left| \int_{C_R} f(z) \ln^2 z \, dz \right| \leqslant \int_{C_R} \left| f(z) \ln^2 z \right| |\, dz| \leqslant \int_{C_R} \frac{M}{|z|^m} \ln^2 z \, dz$$

Kako je

$$|\ln z| \leqslant \ln R + 2\pi,$$

slijedi

$$\left| \int_{C_R} f(z) \ln^2 z \, dz \right| \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{M}{R^m} (\ln R + 2\pi)^2 \, d\varphi = \frac{2M\pi}{R^{m-1}} (\ln R + 2\pi)^2 \to 0, R \to \infty$$

Za ocjenu integrala po kružnici c_r iskoristit ćemo činjenicu da je funkcija f omeđena konstantom K na okolini točke 0.

$$\left|\int\limits_{c_r} f(z)\ln^2 z\, dz\right| \leqslant \int\limits_{c_r} \left|f(z)\ln^2 z\right| |\,dz| \leqslant \int\limits_0^{2\pi} K(\ln r + 2\pi)^2 r\, d\varphi =$$
$$= 2\pi K r(\ln r + 2\pi)^2 \to 0, r \to 0.$$

Ako pustimo $R \to \infty$ i $r \to 0$, integrali po kružnicama će iščeznuti pa imamo

$$\int\limits_0^\infty f(x)\ln^2 x\, dx + \int\limits_\infty^0 f(x)(\ln x + 2\pi i)^2\, dx = 2\pi i \sum_{z_j \in D} Res(F(z); z_j)$$

$$-4\pi i \int\limits_0^\infty f(x)\ln x\, dx + 4\pi^2 \int\limits_0^\infty f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{z_j \in D} Res(F(z); z_j),$$

odnosno

$$\int\limits_0^\infty f(x)\ln x\, dx = -\pi i \int\limits_0^\infty f(x)\, dx - \frac{1}{2} \sum_{z_j \in D} Res(F(z); z_j).$$

Ako izjednačimo realne dijelove u gornjoj jednakosti dobivamo formulu za računanje nepravih integrala oblika $\int\limits_0^\infty f(x)\ln x\, dx$:

$$\int\limits_0^\infty f(x)\ln x\, dx = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\sum_{z_j \in D} Res(F(z); z_j)\right]. \tag{5.14}$$

Primjer 5.6. *Izračunajmo integral*

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^3}\, dx.$$

Funkcija $f(z) = \dfrac{1}{(1+z)^3}$ *ima samo jedan singularitet* $z_1 = -1$ *i on je pol trećeg reda, te su ispunjeni svi uvjeti da bismo mogli iskoristiti formulu (5.14) pa imamo*

$$I = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[Res\left(\frac{(\ln z)^2}{(1+z)^3}, -1\right)\right].$$

Kako je

$$\begin{aligned} Res\left(\frac{(\ln z)^2}{(1+z)^3}, -1\right) &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{(\ln z)^2}{(1+z)^3}(1+z)^3\right) = \\ &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left(2\ln z\cdot\frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to -1}\left(\frac{1}{z^2}\ln z\cdot\frac{1}{z^2}\right) = 1-\pi i \end{aligned}$$

dobivamo

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^3}\,dx = -\frac{1}{2}Re(1-\pi i) = -\frac{1}{2}.$$

Literatura

[1] Mark J. Ablowitz, Athanassios S. Fokas, Complex Variables - Introduction and Applications, Cambridge University Press, 2003

[2] Harold Cohen, Complex Analysis with Applications in Science and Engineering, Second edition, Springer, 2007

[3] N. Elezović, D. Petrizio, Funkcije kompleksne varijable, Element, Zagreb, 1994

[4] H. Kraljević, S. Kurepa, Matematička analiza 4/I, Funkcije kompleksne varijable, Tehnička knjiga, Zagreb, 1986

[5] A. G. Sveshnikov, A. N. Tikhonov, The Theory Of Functions Of A Complex Variable, Mir Publishers 1982

[6] Šime Ungar, Kompleksna analiza, Skripta, PMF - matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, 2009