Teorija redova čekanja

Crnobrnja, Tea

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij matematike; smjer: Financijska matematika i statistika

Tea Crnobrnja

Teorija redova čekanja

Diplomski rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij matematike; smjer: Financijska matematika i statistika

Tea Crnobrnja

Teorija redova čekanja

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Danijel Grahovac

Osijek, 2022.

Sadržaj

Uvod

U svakodnevnom životu susrećemo se s raznim oblicima čekanja u redu. Neki od primjera su čekanje u redu u banci ili trgovini, čekanje dolaska vlaka, da računalo izvrši zadatak, čekanje da predstavnik službe za korisnike odgovori na poziv itd. Većina redova čekanja radi na dobro poznatoj metodi, koja podrazumijeva da prvi bude poslužen klijent koji prvi dođe. Ta metoda funkcionira dobro dok se u redu nalaze dva ili tri klijenta. Duži redovi čekanja sa sobom donose gužvu, nervozu, nesuglasice te nezadovoljstvo klijenata koji čekaju na uslugu. Zbog ubrzanog načina života, klijenti često napuštaju red čak i prije nego su posluženi.

Teorija redova čekanja je grana matematike koja proučava kako se redovi formiraju, kako funkcioniraju te ima li problema u njihovom funkcioniranju. Ispituje svaku sastavnicu čekanja u redu, uključujući proces dolaska, proces usluge, broj poslužitelja, broj klijenata te broj mjesta u sustavu. Kao grana operacijskih istraživanja, teorija redova čekanja može pomoći u donošenju poslovnih odluka o tome kako izgraditi učinkovitije i isplativije sustave tijeka rada. Cilj teorije redova čekanja je dizajniranje uravnoteženih sustava koji služe korisnicima brzo i učinkovito, ali ne koštaju previše da bi bili održivi. Uključuje analizu dolazaka u objekt i analizu procesa koji se trenutno odvijaju za njihovo usluživanje. Konačni rezultat je skup zaključaka koji imaju za cilj identificirati sve nedostatke u sustavu i predložiti kako se oni mogu poboljšati.

U ovom radu proučavat ćemo klasu modela u kojima klijenti na slučajan način dolaze u određenu ustanovu gdje će im biti pružena potrebna usluga po koju su došli. Po dolasku su prisiljeni čekati u redu dok ne budu posluženi te nakon toga odlaze iz sustava. Za takve modele određivat ćemo očekivani broj klijenata u sustavu te očekivano vrijeme koje klijent provede čekajući u sustavu. Modelima takvog oblika bavi se teorija redova čekanja.

U prvom poglavlju ovog rada navedeni su i objašnjeni osnovni pojmovi potrebni za razumijevanje rada. Također su navedeni parametri i formule vezani uz teoriju redova čekanja. Opisane su glavne komponente od kojih se sustavi čekanja sastoje, uključujući proces dolaska, proces usluge i disciplinu redova čekanja.

U drugom poglavlju bavimo se sustavima čekanja koji za pretpostavku imaju da su dolasci i vremena čekanja eksponencijalno distribuirani. Obrađen je proces rađanja i umiranja. Kao posebna vrsta tog procesa, objašnjen je M/M/1 sustav čekanja. Bit će jasno da je to najjednostavniji od svih sustava čekanja jer vremena dolaska kao i vremena usluge imaju eksponencijalnu distribuciju te postoji samo jedan poslužitelj.

U trećem poglavlju objašnjen je koncept mreža redova čekanja. Navedena je podjela te je za svaku naveden primjer u obliku grafičkog prikaza. Najviše smo se pozabavili otvorenim sustavima jer je njihova primjena najčešća.

U četvrtom poglavlju obrađen je sustav M/G/1 čija vremena između uzastopnih dolazaka imaju eksponencijalnu distribuciju, dok vrijeme usluge ima proizvoljnu distribuciju G. Također ćemo izvesti formulu za izračunavanje očekivanog vremena tijekom kojeg je poslužitelj zauzet.

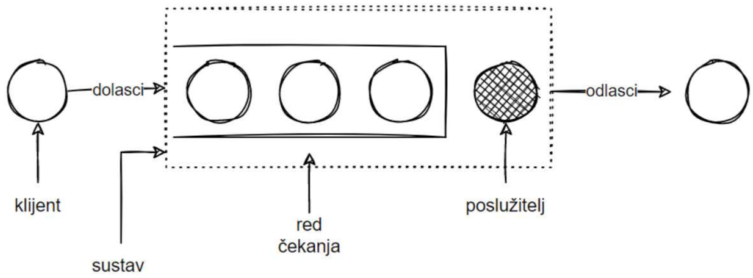
U petom poglavlju opisan je sustav G/M/1, odnosno sustav čija će vremena između uzastopnih dolazaka imati proizvoljnu distribuciju G, dok će vrijeme usluge imati eksponencijalnu distribuciju. Za ovaj model ćemo izvesti formulu za izračunavanje očekivane duljine razdoblja zauzetosti i mirovanja.

U zadnjem dijelu rada ćemo dio teorije koji je najsusretljiviji u svakodnevnom životu primijeniti na stvarne podatke uz pomoć R paketa "queueing" te "queuecomputer".

1 Osnovni pojmovi

1.1 Osnovni elementi sustava posluživanja

Sustav posluživanja čini red čekanja zajedno s poslužiteljem. Sastoji se od tri komponente, a to su: proces dolaska, mehanizam usluge te disciplina reda čekanja. Slika 1 prikazuje strukturu sustava posluživanja.



Slika 1: Struktura sustava posluživanja

- *Proces dolaska* opisuje kako klijenti dolaze u sustav te distribuciju dolaska klijenata.
- *Mehanizam usluge* određen je brojem poslužitelja, ima li svaki poslužitelj svoj red ili postoji jedan red kojeg poslužuju prisutni poslužitelji te distribucijom klijentovog vremena čekanja usluge.
- *Disciplina reda čekanja* odnosi se na pravilo koje poslužitelj koristi za odabir sljedećeg klijenta iz reda kada završi s posluživanjem trenutnog klijenta (npr. First In First Out, Last In First Out, na temelju prioriteta, slučajni odabir...).

1.2 Proces dolaska

U ovom poglavlju, prvo ćemo definirati osnovne pojmove potrebne za razumijevanje nastavka rada. Definicije su preuzete iz [8] i [9].

Definicija 1.1. *Slučajni proces $\{X_t, t \in T\}$ je familija slučajnih varijabli na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, pri čemu je t element parametarskog skupa ili skupa indeksta $T \subseteq \mathbb{R}$.*

Definicija 1.2. *Proces obnavljanja je slučajni proces $S = \{S_n, n \geq 0\}$ definiran sa*

$$S_n = Y_0 + Y_1 + \cdots + Y_n, \qquad n \geq 0,$$

pri čemu je $\{Y_n, n \geq 1\}$ niz nenegativnih nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli.

Nadalje definirajmo brojeći proces $\{N_t, t \geq 0\}$ na način:

$$N_t = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{[0,t]}(S_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_n \leq t\}}, \qquad t \geq 0. \tag{1.1}$$

Ukoliko pretpostavimo da su vremena između dolazaka nezavisna i jednako distribuirana tada je broj dolazaka $\{N(t), t \geq 0\}$ do trenutka t, proces obnavljanja. Dakle, proces dolaska je proces obnavljanja u kojem su vremena između dolazaka nenegativne, nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable.

Proces dolaska klijenata može se opisati na dva načina ([7, str. 386]):

1. Karakteriziranjem broja dolazaka u jedinici vremena (stopa dolazaka),
2. Karakteriziranjem vremena između uzastopnih dolazaka (vrijeme između dolazaka).

Varijabla λ označavat će očekivanu stopu dolazaka. U ovom slučaju, $\frac{1}{\lambda}$ označava očekivano vrijeme između dolazaka. Funkcija distribucije vremena između dolazaka klijenata označava se s $A(t)$ pri čemu je

$$A(t) = P\{\text{vrijeme između dolazaka } \leq t\}$$

te

$$\frac{1}{\lambda} = \int_0^\infty t dA(t).$$

Ovdje pretpostavljamo da su međudolazna vremena nezavisna i jednake duljine što znači da je samo $A(t)$ značajan. Ukoliko postoje različiti tipovi klijenata, što je čest slučaj, onda svaka klasa može imati vlastitu funkciju distribucije za opisivanje svog procesa dolaska. Način na koji se obrazac dolazaka mijenja u vremenu može biti važan (npr. broj kupaca koji stignu u trgovinu može biti veći kasno poslijepodne nego rano ujutro).

Za uzorak dolazaka koji se ne mijenja tijekom vremena kažemo da je proces dolaska homogen.

Ako je proces dolaska invarijantan na vremenske pomake naziva se stacionarnim procesom dolaska (za više vidi [8]).

Broj poslužitelja označen je s C. Ukoliko postoji više od jednog poslužitelja, postoje dvije mogućnosti:

1. Svaki poslužitelj ima svoj red. Npr. svaka blagajna u trgovini ima svoj red.
2. Ima manje redova nego poslužitelja. U većini slučajeva, postoji jedan red za sve poslužitelje. Npr. jedan red se obično formira ispred više šaltera u banci.

1.3 Proces usluge

Vremena usluge potrebna za posluživanje svakog klijenta su slučajne varijable, nezavisne i jednako distribuirane te neovisne o vremenu dolaska i poslužiteljima. Analogno kao u odjeljku 1.2 je broj posluženih $\{M(t), t \geq 0\}$ do trenutka t, proces obnavljanja.

Proces usluge se može opisati stopom, odnosno brojem klijenata posluženih po jedinici vremena ili vremenom potrebnim za posluživanje klijenta ([7, str. 387]). Parametar μ označava očekivanu brzinu usluge pa stoga $\frac{1}{\mu}$ označava očekivano vrijeme usluge. Za označavanje funkcije distribucije vremena usluge koristimo $B(x)$ i definiramo ga kao

$$B(x) = P\{\text{vrijeme usluge } \leq x\}$$

Dakle,

$$\frac{1}{\mu} = \int_{0}^{\infty} x dB(x).$$

Nadalje, stopa usluge uvjetovana je činjenicom da sustav nije prazan. Ako je sustav prazan, poslužitelj mora biti neaktivan. Iako je uobičajeno povezati distribuciju vremena usluge s poslužiteljem, vrijeme usluge je zapravo vrijeme koje je posvećeno klijentu prilikom pružanja usluge. Usluga može biti pojedinačna, što će općenito biti slučaj u radu, ili grupna kao npr. u odjeljku 4.2 ([7, str. 387]).

1.4 Disciplina redova

Način na koji se klijenti biraju iz reda te poslužuju naziva se disciplina reda. Neke od najčešćih tipova discipline redova su([1, str. 63]):

- **FIFO** (First In, First Out) ili **FCFS** (First Come, First Served). Klijenti su posluženi redom kojim dolaze. Ovo je uobičajeni posupak u uređenom redu i stoga osnovna pretpostavka u radu, osim ako nije drugačije naznačeno.
- **LIFO** (Last In, First Out) ili **LCFS** (Last Come, First Served). Ova disciplina prednost daje klijentu koji je posljednji došao u red. Jedan od primjera su keksi u kutiji, odnosno ukoliko su keksi u kutiji poslagani jedan na drugi, prilikom uzimanja keksa prvo ćemo uzeti onaj koji je posljednji složen.
- **SIRO** (Service in Random Order), odnosi se na nasumičan odabir koji, neovisno o vremenu dolaska u red, svakom klijentu daje istu vjerojatnost posluživanja.
- **PS** (Processor Sharing) podrazumijeva da klijenti dijele poslužitelja, npr. kada je prisutno n klijenata, poslužitelj dodjeljuje $\frac{1}{n}$ svoga kapaciteta svakom klijentu. Ekvivalentno, klijenti dobivaju uslugu po stopi $\frac{1}{n}$ i napuštaju sustav kada posluga dosegne vrijeme posluživanja. Uzmimo za primjer računalo koje obavlja nekoliko zadataka istovremeno.
- **RR** (Round Robin) slučaj je u kojem poslužitelj radi na klijentima jedan po jedan u fiksnom vremenu, kvant δ. Klijent koji nije dobio potpunu uslugu tijekom tog vremena vraća se u red čekanja i prije nego može ponovno dobiti uslugu , drugi klijenti imaju pravo na svoje vrijeme (kvant) δ. Kako δ postaje beskonačno mali, PS se dobije kao granični slučaj od RR.
- **PRIOR** podrazumijeva prioritet posluživanja koji prednost posluživanja daje određenim klijentima. Najčešće je korišten u hitnoj pomoći za određivanje redosljeda kojim će pristigli pacijenti primiti liječničku pomoć.

1.5 Kendallov zapis

David George Kendall bio je engleski statističar i matematičar koji je definirao zapis za teoriju redova čekanja. Navedeni zapis koristi se pri karakterizaciji sustava redova čekanja. Ima oblik A/B/C/X/Y/Z pri čemu ([7, str. 396]):

- A označava distribuciju procesa dolaska,
- B označava distribuciju procesa usluge,
- C označava broj poslužitelja,
- X označava kapacitet sustava, odnosno maksimalni broj klijenata dozvoljen u sustavu čekanja
- Y označava veličinu populacije klijenata, a
- Z označava disciplinu redova čekanja.

Neke od mogućih distribucija za A i B su :

- M - označava da je proces dolaska Poissonov s eksponencijalnim vremenima međudolaska,
- E_k - Erlangova distribucija reda k ($k = 1, 2, \dots$) s parametrima k i θ (pri čemu θ poprima vrijednosti λ ili μ) s funkcijom distribucije ([1, str. 81]):

$$A(t) = 1 - e^{-k\theta t} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(k\theta t)^j}{j!},$$

- C_k - Koksijanska distribucija reda k ([7, str. 166]),
- G - općenita distribucija odnosno nepoznata,
- D - deterministička distribucija s fiksnim vremenima međudolaska i vremenima posluživanja.

Za broj poslužitelja (C) često se uzima vrijednost 1. Slova koja određuju kapacitet sustava, broj korisnika i disciplinu mogu biti izostavljena što bi značilo da su zadane vrijednosti kapaciteta i veličine populacije beskonačne te je zadana vrijednost za disciplinu raspoređivanja FCFS.

Primjer 1.3.

a) M/M/1 označava sustav sa sljedećim karakteristikama:

- *eksponencijalnom distribucijom međudolazaka klijenata*
- *eksponencijalnim vremenom posluživanja*
- *postoji jedan poslužitelj*
- *kapacitet sustava (broj mjesta) nije ograničen*
- *u sustav može ući neograničen broj klijenata*
- *redosljed posluživanja je FCFS*

b) M/G/5/10/100/FCFS označava sustav sa sljedećim karakteristikama:

- *eksponencijalnom distribucijom međudolazaka klijenata*

- *vremenom posluživanja s općenitom distribucijom*

- *postoji pet poslužitelja*

- *10 mjesta u sustavu (5 kod poslužitelja i 5 u redu)*

- *u sustav može ući 100 klijenata*

- *redosljed posluživanja je FCFS*

c) $G/G/1/\infty/\infty/FCFS$ označava sustav sa sljedećim karakteristikama:

- *općenitom distribucijom međudolazaka klijenata*

- *vremenom posluživanja s općenitom distribucijom*

- *postoji jedan poslužitelj*

- *kapacitet sustava (broj mjesta) nije ograničen*

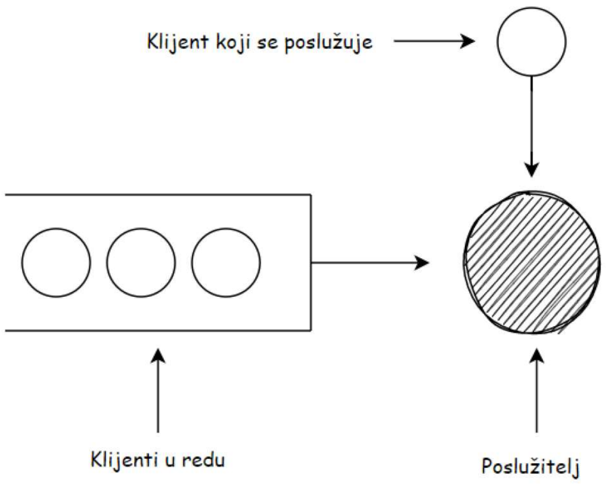
- *u sustav može ući neograničen broj klijenata*

- *redosljed posluživanja je FCFS*

Kao što je već navedeno, kada su posljednja tri parametra na primjer $\infty/\infty/FCFS$, dovoljno je pisati samo $G/G/1$.

1.6 Osnovni parametri i formule sustava posluživanja

U ovom dijelu rada pretpostavit ćemo da imamo sustav posluživanja s jednim poslužiteljem u kojem kljenti dolaze jedan po jedan kao na Slici 2 ([1, str. 62]). Numerirajmo klijente brojevima 0, 1, 2... te pretpostavimo da klijent 0 dolazi u trenutku 0. Nadalje, ukoliko T_n označava interval između dolazaka klijenata n i $n+1$, T_n su nezavisni i jednako distribuirani te su 0, T_0, $T_0 + T_1$... trenutci dolazaka. Nadalje, U_n će predstavljati vrijeme posluživanja n-tog klijenta. Također su U_0, U_1,... nezavisni i jednako distribuirani te nezavisni od T_n.



Slika 2: Red s jednim poslužiteljem u kojem čekaju tri klijenta i jedan koji se poslužuje

U vezi s danim sustavom posluživanja, nastaju raznovrsni slučajni procesi i funkcije. Osnovni koje ćemo proučavati su sljedeća tri ([1, str. 65]):

- Q_t: duljina reda u trenutku t (broj klijenata u sustavu u trenutku t)
- W_n: stvarno vrijeme čekanja n-tog klijenta, tj. vrijeme od dolaska klijenta u sustav do početka posluživanja
- V_t: radno opterećenje sustava u trenutku t, tj. ukupno vijeme koje m poslužitelja mora raditi dok sustav ne bude prazan.

Dakle, V_t je zbroj preostalih vremena posluživanja klijenata koji se trenutno poslužuju te klijenata koji čekaju uslugu. U slučaju jednog poslužitelja ($C = 1$), to je vrijeme potrebno poslužitelju da očisti sustav (tj. da sustav bude prazan), pod uvjetom da ne dolaze novi klijenti, tj. vrijeme čekanja hipotetskog klijenta koji dolazi neposredno nakon trenutka t. Iz tog razloga, V_t ponekad označava virtualno vrijeme čekanja u trenutku t za $C = 1$.

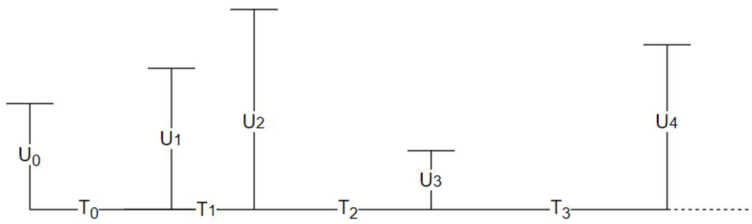
Veza između prethodnih veličina prikazana je na Slikama 3, 4, i 5 (detaljnije vidi [1, str. 65]).

Linearne kombinacije prethodnih veličina mogu dati neku novu pa je tako npr. $W_n + U_n$ vrijeme boravka n-tog klijenta, odnosno ukupno vrijeme koje provodi u sustavu.

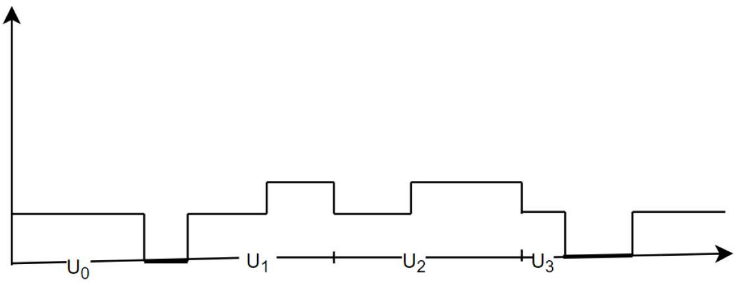
Također je važno spomenuti vremena zauzetosti i neaktivnosti, koja se u GI/G/1 sustavima mogu opisati vremenskim intervalima, gdje je $Q_t > 0$ (ili ekvivalentno $V_t > 0$) i $Q_t = V_t = 0$.

Kod sustava čekanja pažnju je potrebno posvetiti i radnom opterećenju koje se stavlja na sam sustav te neugodnostima koje budu uzrokovane izuzetno dugim vremenima čekanja. Tipičan primjer bio bi problem dizajna za gotovinski sustav u trgovini: pretpostavimo radi jednostavnosti da imamo C identičnih poslužitelja i želimo odabrati najbolju vrijednost od C. Ako je C velik, očekujemo da će sustav biti u stanju mirovanja znatno vrijeme i time biti nedovoljno iskorišten. Ako je, pak, C mali, onda očekujemo da će vrijeme čekanja biti dugačko za klijente, što će ih potaknuti da umjesto toga koriste neku drugu trgovinu u blizini u kojoj je manja gužva.

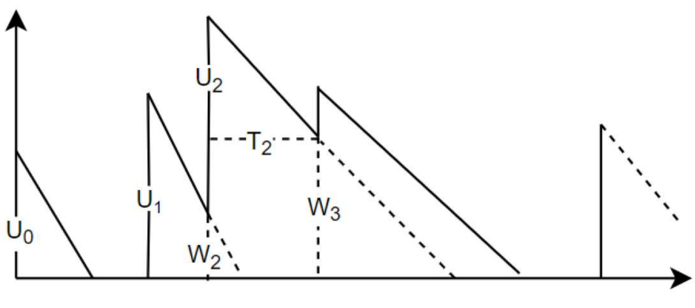
Slična situacija su i telefonske centrale s ograničenim brojem K linija, gdje redovi duljine $\geq K$ znače mogućnost gubitka poziva.



Slika 3: Vremena posluživanja i vremena između dolazaka



Slika 4: Odgovarajući proces duljine reda čekanja s jednim poslužiteljem



Slika 5: Proces radnog opterećenja jednog poslužitelja (virtualno vrijeme čekanja)

Velik broj zanimljivih i korisnih odnosa između prethodnih veličina može se dobiti iskorištavanjem sljedeće ideje. Zamislimo da su klijenti koji dolaze prisiljeni platiti novac sustavu, prema nekom pravilu. Tada bismo imali sljedeći osnovni identitet troškova (vidi [5, str. 495]):

$$\text{očekivana stopa po kojoj sustav zarađuje} = \lambda_a \times \text{očekivani iznos koji plaća klijent koji dolazi} \tag{1.2}$$

pri čemu je λ_a očekivana stopa dolazaka klijenata. Nadalje, ukoliko $N(t)$ označava broj klijenata koji dođu do trenutka t, tada je

$$\lambda_a = \lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t}.$$

Nadalje, u ovome dijelu rada važno je spomenuti Little-ovu formulu (vidi [5, str. 495.]) koja glasi

$$L = \lambda_a W, \tag{1.3}$$

pri čemu je L očekivani broj klijenata u sustavu, a W očekivano vrijeme koje klijent provede u sustavu.

Prethodno slijedi budući da je stopa po kojoj sustav zarađuje samo broj u sustavu, dok je iznos koji klijent plaća jednak njegovom vremenu provedenom u sustavu.

1.7 Vjerojatnosti stacionarnog stanja

U bilo kojem trenutku t, stanje reda u potpunosti se karakterizira brojem prisutnih klijenata. Koristit ćemo cijele brojeve $0, 1, 2, \ldots$ za predstavljanje ovih stanja pri čemu n označava stanje u kojem postoji n klijenata u sustavu, uključujući i onog koji se trenutno poslužuje. Propozicije u ovom dijelu rada preuzete su iz [5].

Ako s $X(t)$ označimo broj klijenata u sustavu u trenutku t onda je $\{X(t), t \geq 0\}$ proces obnavljanja. Definirajmo $P_n, n \geq 0$ kao

$$P_n = \lim_{t\to\infty} P\{X(t) = n\}$$

uz pretpostavku da prethodni limes postoji ([5, str. 496]). Dakle, P_n je granična ili dugoročna vjerojatnost da će u sustavu biti točno n klijenata, tj. $P_n(t)$ označava vjerojatnost da je u trentku t, u sustavu n klijenata. Ponekad se naziva vjerojatnost stacionarnog stanja za točno n klijenata u sustavu. Također se obično ispostavi da je P_n jednak proporciji vremena u kojem sustav sadrži točno n klijenata. Npr., ako je $P_0 = 0.3$, tada će sustav dugoročno biti prazan 30% vremena. Slično, $P_1 = 0.2$ implicira da će 20% vremena točno jedan klijent biti u sustavu.

Druga dva skupa graničnih vjerojatnosti su $\{a_n, n \geq 0\}$ i $\{d_n, n \geq 0\}$, pri čemu je

$$a_n = \text{proporcija klijenata koji pri dolasku zateknu } n \text{ drugih klijenata}$$
$$d_n = \text{proporcija klijenata nakon čijeg odlaska ostane } n \text{ drugih klijenata}$$

Sljedeći primjer (vidi [5, str. 497]) ilustrira da a_n, d_n i P_n ne moraju uvijek biti jednaki.

Primjer 1.4. *Razmotrimo model čekanja u redu u kojem svi klijenti imaju vremena usluge jednaka 1 i gdje su vremena između uzastopnih klijenata uvijek veća od 1 (npr. vremena međudolazaka mogu biti uniformno distribuirana na (1,2)). Dakle, kako svaki dolazak pronalazi prazan sustav i svaki odlazak ostavlja prazan sustav imamo* $a_0 = d_0 = 1$. *Međutim,* $P_0 \neq 1$ *budući da sustav nije uvijek prazan.*

Nadalje, nije bilo slučajno da je a_n jednak d_n u prethodnom primjeru. Da dolasci i odlasci uvijek imaju isti broj klijenata uvijek je točno kao što je prikazano u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 1.5. *U bilo kojem sustavu u kojem klijenti dolaze i odlaze jedan po jedan vrijedi*

$$\begin{aligned}&\textit{stopa po kojoj klijent zatekne } n \textit{ klijenata u sustavu} = \\ &\textit{stopa po kojoj odlazak ostavlja } n \textit{ klijenata u sustavu}\end{aligned}$$

i

$$a_n = d_n.$$

Dokaz vidi u [5, str. 498].

Dakle, u prosjeku dolasci uvijek zateknu isti broj klijenata koji odlasci ostave iza sebe.

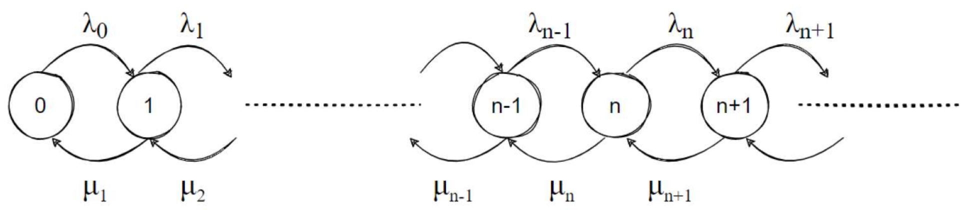
Propozicija 1.6. *Proporcija klijenata, čiji je ulazak u sustav modeliran Poissonovim procesom te koji pri dolasku zateknu sustav u stanju n jednaka je proporciji vremena tijekom kojeg je sustav u stanju n, odnosno vrijedi*

$$P_n = a_n.$$

Ishod dobiven u prethodnoj propoziciji zove se PASTA princip (Poisson Arrivals See Time Averages) (pogledati [5, str. 497]).

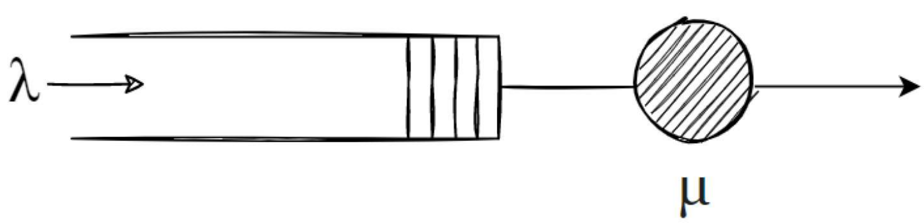
2 Proces rađanja i umiranja: Sustav čekanja M/M/1

Proces rađanja i umiranja je Markovljev lanac u neprekidnom vremenu s vrlo posebnom strukturom. Ukoliko stanja Markovljevog lanca indeksiramo cijelim brojevima 0, 1, 2, . . . , tada su prijelazi dopušteni samo iz stanja $i > 0$ u njegove najbliže susjede, odnosno stanja $i - 1$, $i + 1$. Što se tiče stanja $i = 0$, na izlasku iz ovog stanja, Markovljev lanac mora ući u stanje 1. Takvi procesi se također nazivaju procesi bez preskakanja jer da bi se iz bilo kojeg stanja i prešlo u bilo koje drugo stanje j, mora se posjetiti svako međustanje, odnosno ne postoji stanje između navedena dva koje se može preskočiti. Dijagram stanja procesa rađanja i umiranja prikazan je na Slici 6.



Slika 6: Dijagram stanja procesa rađanja i umiranja

Kao što ćemo vidjeti u ovom poglavlju, procesi rađanja i umiranja nastaju u raznim jednostavnim sustavima čekanja s jednim poslužiteljem, a posebna struktura čini njihove stacionarne distribucije relativno lakim za izračunavanje. Dolazak u sustav čekanja rezultira još jednom jedinicom u sustavu te se identificira kao rođenje dok odlazak uklanja jedinicu iz sustava što se naziva smrću. Dakle, rođenje se može dogoditi kada je sustav prazan. Proces rađanja i umiranja može se promatrati kao generalizacija M/M/1 sustava čekanja. Točnije rečeno, M/M/1 sustav je posebna vrsta procesa rađanja i umiranja. To je red s jednim poslužiteljem i FCFS disiplinom rasporeda, procesom dolaska koji je Poissonov i vremenom usluge koja ima eksponencijalnu distribuciju. Grafički je prikazan na Slici 7 gdje je λ parametar procesa Poissonovog dolaska, a μ eksponencijalna stopa usluge. Očekivano vrijeme između dolazaka (koje ima eksponencijalnu distribuciju) je $\frac{1}{\lambda}$, a očekivano vrijeme usluge je $\frac{1}{\mu}$.



Slika 7: Proces rađanja i umiranja: generalizacija M/M/1 sustava

Razmotrimo sustav čije stanje u bilo kojem trenutku predstavlja broj ljudi u sustavu u tom trenutku. Pretpostavimo da kad god postoji n ljudi u sustavu, tada ([5, str. 368])

a) klijenti ulaze u sustav eksponencijalnom brzinom λ_n

b) klijenti napuštaju sustav eksponencijalnom brzinom μ_n

Drugim riječima, kad god postoji n osoba u sustavu, tada vrijeme do sljedećeg dolaska ima eksponencijalnu distribuciju s očekivanjem $\frac{1}{\lambda_n}$ te je neovisno o vremenu do sljedećeg odlaska koji ima eksponencijalnu distribuciju s očekivanjem $\frac{1}{\mu_n}$. Takav sustav se naziva proces rađanja i umiranja.

Kako bismo analizirali M/M/1 sustav, počet ćemo s određivanjem graničnih vjerojatnosti P_n za $n \in \{0, 1, \dots\}$ (vidi [5, str. 500]). Da bismo to učinili, razmislimo na sljedeći način. Pretpostavimo da imamo beskonačan broj soba s brojevima $0, 1, 2, \dots$ i pretpostavimo da pojedinca uputimo da uđe u sobu n kad god u sustavu ima n korisnika. Odnosno, on bi bio u prostoriji 2 kad god su u sustavu dva korisnika, a ako bi došao drugi, onda bi napustio sobu 2 i ušao u sobu 3. Slično, ako bi se obavila usluga, napustio bi sobu 2 i ušao u sobu 1 (kao što bi sada bio samo jedan klijent u sustavu). Pretpostavimo sada da se dugoročno vidi da je naš pojedinac ušao u sobu 1 deset puta u sat vremena. Koliko je onda puta u sat vremena morao napustiti sobu 1? Jasno, ovom istom brzinom od deset puta u sat vremena. To je iz razloga što ukupan broj puta koji uđe u sobu 1 mora biti jednak (ili za jedan veći) od ukupnog broja puta kojih izađe iz sobe 1. Ova vrsta argumenata tako daje opći princip koji će nam omogućiti da odredimo vjerojatnosti stanja. Naime, za svaki $n \geq 0$, stopa kojom proces ulazi u stanje n jednaka je stopi kojom napušta stanje n. Odredimo sada ove stope.

Razmotrimo prvo stanje 0. Proces stanje 0 može napustiti samo dolaskom jer očito ne može biti odlaska kada je sustav prazan. Budući da je stopa dolaska λ i udio vremena u kojem je proces u stanju 0 je P_0, slijedi da je brzina kojom proces izlazi iz stanja 0 jednaka λP_0. Nadalje, do stanja 0 može se doći samo iz stanja 1 putem odlaska. Tj., ukoliko u sustavu postoji jedan klijent te on dovrši uslugu, tada sustav postaje prazan. Budući da je stopa usluge μ i udio vremena koji sustav ima točno jednog klijenta je P_1, iz čega slijedi da je stopa po kojoj proces ulazi u stanje 0 jednaka μP_1. Dakle, pomoću principa jednakosti stopa dobivamo našu prvu jednadžbu

$$\lambda P_0 = \mu P_1. \tag{2.1}$$

Razmotrimo sada stanje 1. Proces može napustiti ovo stanje bilo kojim dolaskom (koji se događa po stopi λ) ili odlaskom (koji se događa po stopi μ). Dakle, kada je u stanju 1, proces će napustiti ovo stanje po stopi $\lambda + \mu$. Budući da je P_1 udio vremena u kojem se proces nalazi u stanju 1, stopa po kojoj proces odlazi iz stanja 1 jednaka je $(\lambda + \mu)P_1$. S druge strane, u stanje 1 može se doći ili iz stanja 0 putem dolaska ili iz stanja 2 putem odlaska. Drugim riječima, stopa po kojoj proces ulazi u stanje 1 jednaka je $\lambda P_0 + \mu P_2$. Budući da je obrazloženje za druga stanja slično, dobivamo sljedeći skup jednadžbi:

Stanje	**stopa po kojoj proces napušta stanje=stopa po kojoj proces ulazi u stanje**
0	$\lambda P_0 = \mu P_1$
n, $n \geq 1$	$(\lambda + \mu)P_n = \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1}$

Tablica 1: Sustav jednadžbi ravnoteže

Sustav jednadžbi u Tablici 1 koji uravnotežuje brzinu kojom proces ulazi u svako stanje i brzinu kojom napušta svako od stanja poznat je kao jednadžbe ravnoteže. Kako bismo riješili jednadžbe iz Tablice 1 prepisujemo ih i dobivamo:

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$$

$$P_{n+1} = \frac{\lambda}{\mu} P_n + \left(P_n - \frac{\lambda}{\mu} P_{n-1}\right), \ n \geq 1.$$

Izražavanjem u terminima P_0 imamo sljedeće:

$$P_0 = P_0$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda}{\mu} P_1 + \left(P_1 - \frac{\lambda}{\mu} P_0\right) = \frac{\lambda}{\mu} P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0$$

$$P_3 = \frac{\lambda}{\mu} P_2 + \left(P_2 - \frac{\lambda}{\mu} P_1\right) = \frac{\lambda}{\mu} P_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0$$

$$P_4 = \frac{\lambda}{\mu} P_3 + \left(P_3 - \frac{\lambda}{\mu} P_2\right) = \frac{\lambda}{\mu} P_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 P_0$$

$$\vdots$$

$$P_{n+1} = \frac{\lambda}{\mu} P_n + \left(P_n - \frac{\lambda}{\mu} P_{n-1}\right) = \frac{\lambda}{\mu} P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1} P_0.$$

Kako bismo odredili P_0 koristimo činjenicu da suma P_n -ova mora biti jednaka jedan tj.

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = \frac{P_0}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}$$

odnosno,

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right), \qquad n \geq 1.$$

Primijetimo da je za smislenost prethodnih jednadžbi potrebno da $\frac{\lambda}{\mu}$ bude manji od 1. U suprotnom bi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$ bila beskonačna te bi svi P_n bili jednaki 0. Iz tog razloga, pretpostavit ćemo da je $\frac{\lambda}{\mu} < 1$. Pogledajmo što bi bilo ako bismo pretpostavili suprotno, odnosno da je $\lambda > \mu$. Budući da kupci dolaze po Poissonovoj stopi λ, slijedi da je očekivani ukupan broj dolazaka do vremena t jednak λt. S druge strane, koliki je očekivani broj klijenata posluženih do vremena

t? Ako je uvijek bilo prisutnih klijenata, onda bi broj posluženih bio Poissonov proces koji ima stopu μ budući da bi vrijeme između uzastopnih usluga bile nezavisne eksponencijalne slučajne varijable koje imaju očekivanje $\frac{1}{\mu}$. Dakle, očekivani broj klijenata posluženih u vremenu t nije veći od μt. Stoga je očekivani broj u sustavu, u trenutku t barem

$$\lambda t - \mu t = (\lambda - \mu)t.$$

Nadalje, ako je $\lambda > \mu$, tada prethodni broj ide u beskonačnost kako t postaje velik. U slučaju kada je $\frac{\lambda}{\mu} > 1$, veličina reda se povećava bez ograničenja i nema graničnih vjerojatnosti. Također, uvjet $\frac{\lambda}{\mu} < 1$ ekvivalentan je uvjetu da očekivano vrijeme usluge bude manje od očekivanog vremena između uzastopnih dolazaka. Dakle, to je opći uvjet koji mora biti zadovoljen da bi postojale granične vjerojatnosti u većini sustava s jednim poslužiteljem.

Primjer 2.1. *Strojevi u tvornici kvare se eksponencijalnom brzinom od šest po satu. Postoji samo jedan serviser koji popravlja strojeve eksponencijalnom brzinom od osam na sat. Trošak koji nastaje zbog izgubljene proizvodnje kada strojevi nisu u funkciji iznosi 100 HRK po satu po stroju. Kolika je očekivana stopa troškova zbog neispravnih strojeva?*

Ovaj problem može se modelirati M/M/1 redom u kojemu je $\lambda = 6$ te $\mu = 8$. Očekivana stopa troškova bit će

$$\text{100 HRK po satu po stroju} \times \text{ očekivani broj pokvarenih strojeva}$$

Očekivani broj pokvarenih strojeva je L, što se može dobiti pomoću jednadžbe (3.2) iz [5]:

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{6}{2} = 3$$

Dakle, očekivana stopa troškova jednaka je 300 HRK/sat.

3 Mreže redova čekanja

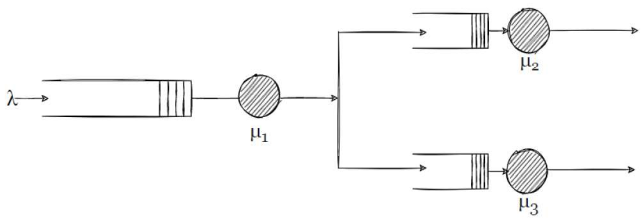
Kod sustava čekanja koji su do sada promatrani klijenti su dolazili u sustav, primili jednu uslugu te odlazili iz sustava i više se nisu vraćali. Navedena situacija se ponekad naziva sustavom "jednog čvora".

Sustav "više čvorova" je onaj u kojem klijent zahtijeva uslugu kod više od jednog poslužitelja. Za lakšu vizualizaciju uzmimo za primjer pacijente koji dolaze u dom zdravlja. Pacijenti stižu u dom zdravlja te trebaju ispuniti određenu dokumentaciju u svrhu pregleda, zatim idu kod medicinske sestre na mjerenje tlaka i nakon toga čekaju u redu da liječnik započne pregled. Nakon toga možda će biti potrebno napraviti dodatne pretrage (ultrazvuk, vađenje krvi itd.) nakon čega će pacijent opet doći kod liječnika na razgovor. Dakle, pacijent dolazi u dom zdravlja, prima nekoliko usluga na više različitih mjesta te nakon toga odlazi kući.

Mreže redova čekanja klasificiramo kao:

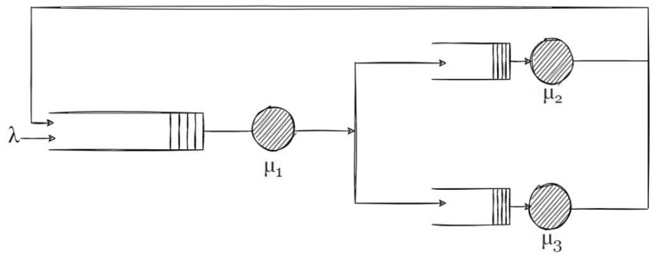
- otvorene sustave,
- zatvorene sustave,
- mješovite sustave.

Kada se radi o otvorenom sustavu, klijenti pristupaju redu čekanja ispred jednog poslužitelja te nakon što dobiju uslugu pristupaju redu ispred drugog poslužitelja i tako sve dok ne dobiju potpunu uslugu. Nakon toga odlaze iz sustava. Primjer ovakvog sustava nalazi se na Slici 8.



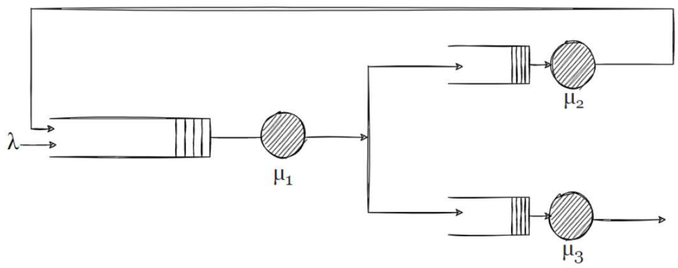
Slika 8: Otvoreni sustav

Kod zatvorenih sustava je broj klijenata u sustavu stalan. Nakon što je klijent poslužen kod jednog poslužitelja ne napušta sustav, nego ide kod sljedećeg poslužitelja, zatim kod sljedećeg itd.. Primjer zatvorenog sustava nalazi se na Slici 9.



Slika 9: Zatvoreni sustav

Mješoviti sustavi u sebi sadrže i otvorene i zatvorene sustave. Primjer ovakvog sustava nalazi se na Slici 10.



Slika 10: Mješoviti sustav

3.1 Otvoreni sustavi

Razmotrimo sustav s dva poslužitelja u kojem korisnici dolaze po Poissonovoj stopi λ kod poslužitelja 1. Nakon što im poslužitelj 1 pruži uslugu, pridružuju se redu ispred poslužitelja 2. Pretpostavimo da na oba poslužitelja postoji beskonačan prostor za čekanje. Svaki poslužitelj poslužuje jednog po jednog klijenta pri čemu poslužitelj i ima eksponencijalno vrijeme sa stopom μ_i za uslugu, $i = 1, 2$. Takav se sustav naziva tandem ili sekvencijalni sustav ([5]). Za analizu ovakvih sustava potrebno je pratiti broj klijenata na poslužitelju 1 te broj klijenata na poslužitelju 2. Iz tog razloga definiramo stanje uređenim parom (n, m) što bi značilo da na poslužitelju 1 ima n klijenata te na poslužitelju 2 m klijenata. Jednadžbe ravnoteže su ([5, str. 518]):

Stanje	**stopa po kojoj proces napušta stanje=stopa po kojoj proces ulazi u stanje**
0,0	$\lambda P_{0,0}=\mu_2 P_{0,1}$
n,0;$n > 0$	$(\lambda + \mu_1)P_{n,0}=\mu_2 P_{n,1} + \lambda P_{n-1,0}$
0,m;$m > 0$	$(\lambda + \mu_2)P_{0,m}=\mu_2 P_{0,m+1} + \mu_1 P_{1,m-1}$
n,m;$n, m > 0$	$(\lambda + \mu_1 + \mu_2)P_{n,m}=\mu_2 P_{n,m+1} + \mu_1 P_{n+1,m-1} + \lambda P_{n-1,m}$

Tablica 2: Sustav jednadžbi ravnoteže

Kako bismo izbjegli rješavanje ovog sustava, uvrstit ćemo u sustav pretpostavljeno rješenje, a zatim provjeriti zadovoljava li ga ono. Može se uočiti kako je situacija kod prvog poslužitelja identična kao i kod M/M/1 sustava. Premda je u M/M/1 sustavu i proces odlazaka modeliran Poissonovim procesom s parametrom λ , slijedi da je i kod drugog poslužitelja ista situacija kao i u M/M/1 sustavu. Nadalje, vjerojatnost da je u redu kod prvog poslužitelja n klijenata jednaka je

$$P(n \textit{ klijenata kod P1}) = \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1}\right).$$

Slično, za drugog poslužitelja imamo

$$P(n \textit{ klijenata kod P2}) = \left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_2}\right).$$

Nadalje, ukoliko su brojevi klijenata ispred poslužitelja 1 i 2 nezavisne slučajne varijable, slijedi

$$P_{n,m} = \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_2}\right).$$

Za provjeru je li $P_{n,m}$ uistinu rješenje sustava jednadžbi ravnoteže (a time i jesu li brojevi klijenata ispred prvog te drugog poslužitelja nezavisni), potrebno je vidjeti zadovoljavaju li prethodno dobivene vrijednosti sustava jednadžbe ravnoteže (to je dovoljno jer je poznato da su $P_{n,m}$ jedinstveno rješenje jednadžbi iz Tablice 2. Dakle, na primjer, ukoliko razmotrimo prvu jednadžbu iz Tablice 2 trebamo pokazati da je

$$\lambda \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_2}\right) = \mu_2 \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_2}\right).$$

Ako uzmemo prvu jednadžbu ravnoteže

$$\lambda P_{0,0} = \mu_2 P_{0,1}$$

te u nju uvrstimo $P_{0,0}$ i $P_{0,1}$ dobivamo

$$\lambda \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_2}\right) = \mu_2 \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_2}\right)$$

odnosno

$$\lambda \mu_2 = \lambda \mu_2.$$

Da $P_{n,m}$ zadovoljava i preostale jednadžbe ravnoteže može se vidjeti na sličan način, čime smo pokazali da je $P_{n,m}$ doista rješenje sustava jednadžbi ravnoteže. Nadalje, uočavamo da je očekivani broj klijenata u sustavu, odnosno L, dan izrazom

$$L = \sum_{n,m} (n+m) P_{n,m} = \sum_n n \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1}\right) + m \left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_2}\right) = \frac{\lambda}{\mu_1 - \lambda} + \frac{\lambda}{\mu_2 - \lambda}.$$

Iz prethodnih jednakosti vidimo da očekivano vrijeme koje klijent provede čekajući u sustavu iznosi

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu_1 - \lambda} + \frac{1}{\mu_2 - \lambda}.$$

4 Sustav M/G/1

Za proizvoljan sustav čekanja definirajmo rad u sustavu u bilo kojem trenutku t kao zbroj preostalih vremena posluživanja svih klijenata u sustavu u trenutku t. Primjerice, ukoliko pretpostavimo da u sustavu postoje četiri klijenta: jedan u službi koji je tamo bio tri od njegovih pet potrebnih jedinica te ostala tri koji su tamo bili po pet jedinica svaki. U tom slučaju je rad u to vrijeme jednak $3 + 5 + 5 + 5 = 18$. Neka V označava očekivani rad sustava (tj. ukupno vrijeme posluživanja) ([5, str. 528]). Prisjetimo se sada jednadžbe troškova koja kaže da je

$$\text{očekivana stopa po kojoj sustav zarađuje} = \lambda_a \times \text{očekivani iznos koji klijent plaća} \tag{4.1}$$

te obratimo pažnju na sljedeće pravilo troškova: Svaki klijent plaća po tarifi y/jedinica vremena ako mu je preostalo vrijeme posluživanja jednako y, neovisno o tome poslužuje li se trenutno ili čeka u redu. Tako je stopa po kojoj sustav zarađuje samo rad u sustavu pa iz osnovnog identiteta (4.1) slijedi

$$V = \lambda_a E[\text{iznos koji je platio klijent}].$$

Neka sada S i W_Q^* redom označavaju vrijeme usluge i vrijeme koje dani klijent provede čekajući u redu. Nadalje, zbog činjenice da klijent plaća konstanto stopom S po jedinici vremena kada čeka u redu te po stopi $S - x$ nakon provedenog x vremena u usluzi, imamo ([5, str.528]):

$$E[\text{iznos koji je platio klijent}] = E\left[SW_Q^* + \int_0^S (S-x)dx\right].$$

Zbog toga imamo

$$V = \lambda_a E[SW_Q^*] + \frac{\lambda_a E[S^2]}{2}. \tag{4.2}$$

Važno je istaknuti da je jednadžba (4.2) temeljna jednadžba teorije redova čekanja te vrijedi praktički u svim sustavima čekanja. Pored toga, ukoliko vrijeme usluge klijenta ne ovisi o čekanju u redu (što je uglavnom slučaj, ali ne nužno uvijek[1]), onda jednadžba (4.2) dobiva oblik

$$V = \lambda_a E[S] W_Q + \frac{\lambda_a E[S^2]}{2}. \tag{4.3}$$

Zbog činjenice da se radi o sustavu s jednim poslužiteljem može se pretpostaviti da je

$$\text{klijentovo čekanje u redu} = \text{rad u sustavu prilikom njegovog dolaska},$$

odnosno

$$W_Q^* = \text{rad u sustavu prilikom pristizanja klijenta}.$$

Primjenom očekivanja na obje strane jednakosti dobivamo:

$$W_Q = \text{očekivani rad u sustavu prilikom pristizanja klijenta}.$$

Premda je proces dolazaka Poissonov, slijedi činjenica da je očekivani rad sustava prilikom pristizanja klijenta jednak očekivanom radu u sustavu, odnosno V pa vrijedi

$$W_Q = V,$$

[1] za primjer gdje ovisi pogledati [5, poglavlje 8.6.2]

a iz toga te jednadžbe

$$V = \lambda E[S]W_Q + \frac{\lambda E[S^2]}{2} \tag{4.4}$$

slijedi takozvana Pollaczek-Knitchine jednakost (više vidi u [7, str. 515])

$$W_Q = \frac{\lambda E[S^2]}{2(1 - \lambda E[S])} \tag{4.5}$$

pri čemu su $E[S]$ i $E[S^2]$ prva dva momenta opće distribucije posluživanja. Iz jednadžbe (4.5) dobiju se veličine L, L_Q i W na sljedeći način:

$$L_Q = \lambda W_Q = \frac{\lambda^2 E[S^2]}{2(1 - \lambda E[S])},$$

$$W = W_Q + E[S] = \frac{\lambda E[S^2]}{2(1 - \lambda E[S])} + E[S],$$

$$L = \lambda W = \frac{\lambda^2 E[S^2]}{2(1 - \lambda E[S])} + \lambda E[S].$$

Za valjanost ovih jednadžbi, uvjet $\lambda E[S] < 1$ trebao bi biti ispunjen. Ukoliko je poslužitelj zauzet u svim trenutcima, tada je stopa odlaska klijenata jednaka $\frac{1}{E[S]}$, no ona mora biti veća od stope dolaska λ jer kada ne bi bila jednadžbe ne bi vrijedile.

4.1 Razdoblja zauzetosti

U sustavima čekanja, izmjenjuju se razdoblja mirovanja (kada je poslužitelj neaktivan jer nema klijenata u sustavu) i razdoblja zauzetosti (kada je poslužitelj zauzet jer postoji barem jedan klijent u sustavu). Označimo s I_n duljinu n-tog perioda mirovanja i B_n duljinu n-tog perioda zauzetosti, pri čemu je $n \geq 1$. Dakle, u prvih $\sum_{j=1}^{n}(I_j + B_j)$ vremenskih jedinica poslužitelj će biti u stanju mirovanja na $\sum_{j=1}^{n} I_j$ vremena. Označimo li sa P_0 proporciju vremena tijekom kojeg poslužitelj miruje možemo ga izraziti na sljedeći način ([5, str. 530]):

$$P_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{I_1 + \cdots + I_n}{I_1 + \cdots + I_n + B_1 + \cdots + B_n}$$

Sada je lako vidjeti da su $I_1, I_2, \ldots$ nezavisni i jednako distribuirani kao i $B_1, B_2, \ldots$. Dakle, dijeljenjem brojnika i nazivnika prethodnog razlomka s n, a zatim primjenom jakog zakona velikih brojeva (vidi [5, str. 78]), dobivamo:

$$P_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{(I_1 + \cdots + I_n)/n}{(I_1 + \cdots + I_n)/n + (B_1 + \cdots + B_n)/n} = \frac{E[I]}{E[I] + E[B]} \tag{4.6}$$

pri čemu I i B predstavljaju slučajne varijable vremena mirovanja i zauzetosti. Sada I predstavlja trenutak u kojemu klijent odlazi i ostavlja prazan sustav do sljedećeg dolaska. Dakle, iz Poissonovih dolazaka slijedi da je I eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom λ pa je stoga očekivanje slučajne varijable I jednako

$$E[I] = \frac{1}{\lambda}. \tag{4.7}$$

Da bismo izračunali P_0 primjećujemo iz jednadžbe (8.4) u [5] (dobivene iz temeljne jednadžbe troška uz pretpostavku da klijent plaća po stopi od jedan po jedinici vremena dok je u sustavu usluge) da je

$$\textit{očekivani broj zauzetih poslužitelja} = \lambda E[S].$$

Međutim, budući da je lijeva strana prethodne jednakosti jednaka $1 - P_0$, vrijedi da je

$$P_0 = 1 - \lambda E[S] \tag{4.8}$$

te iz jednadžbi (4.6) i (4.7) slijedi

$$1 - \lambda E[S] = \frac{1/\lambda}{1/\lambda + E[B]},$$

odnosno

$$E[B] = \frac{E[S]}{1 - \lambda E[S]}.$$

Nadalje nas zanima C odnosno broj klijenata posluženih u razdoblju zauzetosti. Očekivanje od C može se odrediti primjećivanjem da za svakih $E[C]$ dolazaka postoji točno jedan klijent koji će zateći prazan sustav, a to je prvi klijent u zauzetom razdoblju. Stoga,

$$a_0 = \frac{1}{E[C]},$$

a budući da je $a_0 = P_0 = 1 - \lambda E[S]$ zbog PASTA principa, vrijedi

$$E[C] = \frac{1}{1 - \lambda E[S]}$$

4.2 Sustav M/G/1 s grupnim dolascima klijenata

U ovom odlomku pretpostavit ćemo da se dolasci klijenata ne odvijaju pojedinačno nego u skupini, odnosno da umjesto dolaska jednog klijenta imamo dolazak nasumičnog broja klijenata. Kao i ranije, proces dolaska je Poissonov proces sa stopom λ, dok vremena posluživanja imaju proizvoljnu distribuciju G. Također, postoji samo jedan poslužitelj. Neka α_j, $j \geq 1$ predstavlja vjerojatnost da se neka skupina sastoji od j klijenata te neka N predstavlja slučajnu varijablu koja označava veličinu skupine. Odnosno, $P\{N = j\} = \alpha_j$. Budući da je $\lambda_a = \lambda E(N)$, osnovna formula za rad (jednadžba (4.3)) postaje ([5, str. 531])

$$V = \lambda E[N] \left[E(S) W_Q + \frac{E(S^2)}{2} \right]. \tag{4.9}$$

Za dobivanje druge jednadžbe koja povezuje V i W_Q, razmatramo prosječnog klijenta. Imamo da je njegovo čekanje u redu = rad u sustavu kada on stigne + njegovo vrijeme čekanja zbog onih u njegovoj skupini.

Uzimajući očekivanja te koristeći PASTA princip slijedi

$$W_Q = V + E[\text{vrijeme čekanja zbog onih u njegovoj skupini}] = V + E[W_B]. \tag{4.10}$$

Sada se $E[W_B]$ može izračunati uvjetovanjem na broj klijenata u skupini ([5, str. 532]), ali moramo biti oprezni jer vjerojatnost da prosječni klijent dolazi iz skupine veličine j nije α_j. Budući da je α_j proporcija skupina koje su veličine j, a ako nasumično odaberemo klijenta, vjerojatnije je da dolazi iz veće skupine nego manje (npr. ako pretpostavimo $\alpha_1 = \alpha_{100} = \frac{1}{2}$, onda je pola skupina veličine 1, ali 100 od 101 klijenata će doći iz skupine veličine 100).

Za određivanje vjerojatnosti da je prosječni klijent došao iz skupine veličine j, razmišljamo na sljedeći način ([5, str. 532]). Pretpostavimo da je M veliki broj. Tada će od prvih M skupina otprilike $M\alpha_j$ biti veličine j, $j \geq 1$ pa bi tako otprilike bilo $jM\alpha_j$ klijenata koji su stigli u skupini veličine j. Drugim riječima, proporcija dolazaka u prvih M skupina koje su bile iz skupina veličine j je otprilike $jM\alpha_j / \sum_j jM\alpha_j$. Prethodni omjer postaje točan ukoliko $M \to \infty$ pa vidimo da je

$$\text{proporcija klijenata iz skupine veličine } j = \frac{j\alpha_j}{\sum\limits_j j\alpha_j} = \frac{j\alpha_j}{E[N]}.$$

Sada možemo izračunati $E[W_B]$, očekivano čekanje u redu zbog drugih u skupini:

$$E[W_B] = \sum_j E[W_B|\text{skupina veličine } j]\frac{j\alpha_j}{E[N]}. \tag{4.11}$$

Nadalje, ako je j klijenata u njegovoj skupini, onda bi naš klijent morao čekati da $i-1$ njih budu posluženi ako je on i-ti u redu među svojim članovima skupine. Budući da je jednako vjerojatno da on bude prvi, drugi, ... ili j-ti u redu vidimo da je

$$E[W_B|\text{skupina je veličine } j] = \sum_{i=1}^{j}(i-1)E(S)\frac{1}{j} = \frac{j-1}{2}E[S].$$

Supstitucijom prethodnog u jednadžbu (4.11) slijedi

$$E[W_B] = \frac{E[S]}{2E[N]}\sum_j (j-1)j\alpha_j = \frac{E[S](E[N^2]-E[N])}{2E[N]},$$

a iz jednadžbi (4.9) i (4.10) dobivamo

$$W_Q = \frac{E[S](E[N^2]-E[N])/2E[N] + \lambda E[N]E[S^2]/2}{1-\lambda E[N]E[S]}.$$

5 Sustav G/M/1

Sustav G/M/1 temelji se na pretpostavci da vremena između uzastopnih dolazaka imaju proizvoljnu distribuciju G. Vremena posluživanja imaju eksponencijalnu distribuciju s parametrom μ te postoji jedan poslužitelj. Dakle, proces dolaska više nije Markovljev tj. ne vrijedi Markovljevo svojstvo koje kaže da vjerojatnosno ponašanje procesa u budućnosti ovisi samo o stanju u sadašnjosti, a ne o stanjima u prošlosti. Stoga se u ovome dijelu nećemo se brinuti o tome koliko je vremena osoba koju se poslužuje već potrošila u službi nego ćemo sustav promatrati tek kada klijent stigne. Definirajmo stoga X_n, $n \geq 1$ kao ([5, str 544])

$$X_n \equiv \textit{broj klijenata u sustavu koje n-ti klijent zatekne pri dolasku.}$$

Proces $\{X_n, n \geq 1\}$ je Markovljev lanac [5]. Za izračunavanje prijelaznih vjerojatnosti P_{ij} za navedeni Markovljev lanac, prvo treba primijetiti da je, sve dok postoje klijenti koje treba poslužiti, broj usluga u bilo kojem vremenskom intervalu duljine t Poissonova slučajna varijabla s očekivanjem μt. To je točno jer je vrijeme između uzastopnih usluga eksponencijalno što implicira da broj usluga čini Poissonov proces. Stoga,

$$P_{i,i+1-j} = \int_0^\infty e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^j}{j!} dG(t), \qquad j = 0, 1 \ldots, i$$

što slijedi budući da ako klijent koji dođe zatekne i drugih klijenata u sustavu, onda će sljedeći dolazak pronaći $i + 1$ minus broj posluženih, a vjerojatnost da će j biti poslužen jednaka je desnoj strani prethodnog (uvjetovanjem na vrijeme između uzastopnih dolazaka) [5].

Formula za vjerojatnost da se barem $i + 1$ Poissonov događaj dogodi u slučajnom razdoblju s distribucijom G, tj. P_{i0}, malo je drugačija, a može se dobiti iz [5, str. 544]:

$$P_{i0} = 1 - \sum_{j=0}^{i} P_{i,i+1-j}.$$

Granične vjerojatnosti π_k, $k = 0, 1, \ldots$ dobiju se kao jedinstveno rješenje od ([5])

$$\pi_k = \sum_i \pi_i P_{ik}, \qquad k \geq 0,$$

$$\sum_i \pi_k = 1$$

što se u ovom slučaju svodi na

$$\pi_k = \sum_{i=k-1}^{\infty} \pi_i \int_0^\infty e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^{i+1-k}}{(i+1-k)!} dG(t), \qquad k \geq 1, \tag{5.1}$$

$$\sum_0^\infty \pi_k = 1.$$

Jednadžbu $\pi_0 = \sum \pi_i P_{i0}$ nismo uključili jer je jedna od jednadžbi uvijek suvišna. Da bismo riješili prethodno, pokušajmo s rješenjem oblika $\pi_k = c\beta^k$. Supstitucija u jednadžbu (5.1) dovodi do

$$c\beta^k = c\sum_{i=k-1}^{\infty} \beta^i \int_0^{\infty} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^{i+1-k}}{(i+1-k)!} dG(t) \tag{5.2}$$

$$= c\int_0^{\infty} e^{-\mu t} \beta^{k-1} \sum_{i=k-1}^{\infty} \frac{(\beta\mu t)^{i+1-k}}{(i+1-k)!} dG(t) \tag{5.3}$$

Međutim,

$$\sum_{i=k-1}^{\infty} \frac{(\beta\mu t)^{i+1-k}}{(i+1-k)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\beta\mu t)^j}{j!} = e^{\beta\mu t}$$

te se zbog toga jednadžba (5.3) svodi na

$$\beta^k = \beta^{k-1} \int_0^{\infty} e^{-\mu t(1-\beta)} dG(t),$$

odnosno

$$\beta = \int_0^{\infty} e^{-\mu t(1-\beta)} dG(t). \tag{5.4}$$

Konstantu c moguće je dobiti iz izraza $\sum_k \pi_k = 1$, što implicira da je $c\sum_0^{\infty} \beta^k = 1$ ili $c = 1-\beta$. Budući da je π_k jedinstveno rješenje jednadžbe (5.1) te ju $\pi_k = (1-\beta)\beta^k$ zadovoljava, slijedi

$$\pi_k = (1-\beta)\beta^k, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

pri čemu je β rješenje jednadžbe (5.4). Može se pokazati da ako je očekivanje od G veće od očekivanja vremena rada $\frac{1}{\mu}$, tada postoji jedinstvena vrijednost od β koja zadovoljava jednadžbu (5.4) i nalazi se u intervalu $[0,1]$. Točna vrijednost parametra β obično se može dobiti samo numeričkim metodama ([5]). Premda je π_k granična vjerojatnost da klijent svojim dolaskom zatekne k drugih klijenata u sustavu, to je ustvari a_k definiran kao u poglavlju 1.7. Međutim,

$$\alpha_k = (1-\beta)\beta^k, \qquad k \geq 0. \tag{5.5}$$

W možemo dobiti uvjetovanjem na broj klijenata u sustavu kada određeni klijent stigne i to na način ([5, str. 546]):

$$W = \sum_k E[\text{vrijeme u sustavu}|\text{klijent prilikom dolaska zatekne } k \text{ drugih klijenata}](1-\beta)\beta^k$$

Zbog činjenice da klijent ulaskom u sustav zatiče k drugih klijenata, on će provesti u sustavu vrijeme koje je potrebno da poslužitelj posluži svih $k+1$ klijenata. Zato slijedi:

$$W = \sum_k \frac{k+1}{\mu}(1-\beta)\beta^k.$$

Zbog $\sum\limits_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$ slijedi

$$W = \frac{1}{\mu(1-\beta)}.$$

Također se, nakon izračuna W, mogu dobiti i ostale veličine:

$$W_Q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{\beta}{\mu(1-\beta)},$$

$$L = \lambda W = \frac{\lambda}{\mu(1-\beta)},$$

$$L_Q = \lambda W_Q = \frac{\lambda\beta}{\mu(1-\beta)},$$

pri čemu je λ jednaka recipročnoj vrijednosti od očekivanja vremena između uzastopnih dolazaka, tj.

$$\frac{1}{\lambda} = \int_0^{\infty} x dG(x).$$

Slično se može pokazati [5, str. 546] i da je W^* eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom $\mu(1-\beta)$,

$$W_Q^* = \begin{cases} 0 & \text{, s vjerojatnošću } 1-\beta \\ \text{eksponencijalna s parametrom } \mu(1-\beta) & \text{, s vjerojatnošću } \beta \end{cases}$$

pri čemu su W^* i W_Q^* redom, količine vremena koje klijent provede u sustavu i redu (njihova očekivanja su W i W_Q).

5.1 G/M/1 razdoblja zauzetosti i mirovanja

Pretpostavimo da se dolazak dogodio u trenutku kada je sustav bio prazan i tako pokrenuto razdoblje zauzetosti. Neka N označava broj klijenata posluženih u tom razdoblju zauzetosti. Budući da će N-ti dolazak (nakon pokretača razdoblja zauzetosti) također zateći prazan sustav, slijedi da je N broj prijelaza od stanja 0 do stanja 0 u Markovljevom lancu. Dakle, $\frac{1}{E[N]}$ je proporcija prijelaza koji Markovljev lanac dovode u stanje 0, ili ekvivalentno, to je proporcija klijenata koji pronalaze prazan sustav. Stoga je ([5, str. 548]),

$$E[N] = \frac{1}{a_0} = \frac{1}{1-\beta}.$$

Između ostalog, budući da iduće razdoblje zauzetosti počinje poslije N-tog međudolaska, slijedi da je vrijeme ciklusa (tj. zbroj razdoblja zauzetosti i mirovanja) jednako vremenu do N-tog međudolaska. Dakle, zbroj razdoblja zauzetosti i mirovanja može se iskazati kao zbroj N međudolaznih vremena. Stoga, ukoliko je T_i i-to vrijeme dolaska nakon početka razdoblja zauzetosti, onda je

$$E[zauzetost] + E[mirovanje]$$

$$
\begin{aligned}
&= E\left[\sum_{i=1}^{N} T_i\right] \\
&= E[N]E[T] \\
&= \frac{1}{\lambda(1-\beta)}. \qquad (5.6)
\end{aligned}
$$

Za drugu relaciju između E[zauzetost] i E[mirovanje] možemo koristiti isti argument kao u odjeljku 4.1 kako bismo zaključili da je

$$
1 - P_0 = \frac{E[zauzetost]}{E[zauzetost] + E[mirovanje]}
$$

i budući da je $P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$, kombinirajući ovo sa (5.6), dobivamo

$$
E[zauzetost] = \frac{1}{\mu(1-\beta)}
$$

$$
E[mirovanje] = \frac{\mu - \lambda}{\lambda\mu(1-\beta)}.
$$

6 Analiza redova čekanja

U ovom dijelu diplomskog rada koristit ćemo R pakete "queue" i "queuecomputer". Za potrebe ove analize korištene su literature [3] i [6]. U odjeljku 6.3 koristit ćemo paket "queueing" dok ćemo paket "queuecomputer" koristiti u odjeljcima 6.1 i 6.2. Paket "queuecomputer" pomoći će pri simulaciji reda čekanja u pozivnom centru. Vrijeme dolaska za svakog klijenta je vrijeme u koje je nazvao, a vrijeme usluge je vrijeme potrebno za rješavanje problema od trenutka kada dođu do dostupnog predstavnika korisničke službe. Pretpostavimo da kupci dolaze po homogenom Poissonovom procesu tijekom dana. Najprije ćemo generirati vektor od 20 nasumičnih brojeva koji imaju eksponencijalnu distribuciju. Oni će predstavljati međudolaske. Dolasci će biti kumulativna suma vremena međudolazaka. Nadalje generiramo vremena posluživanja, odnosno 20 brojeva koji imaju eksponencijalnu distribuciju. Od njih ćemo uzeti 6 koji će predstavljati vrijeme provedeno u sustavu odnosno vrijeme između poziva i prekida poziva.

6.1 M/M/1 sustav

Najprije pretpostavimo da u pozivnom centru radi samo 1 djelatnik. To je najjednostavniji primjer jer će u tom slučaju svakom klijentu ista osoba odgovarati na pozive.

oznake	**dolasci**	**vrijeme posluživanja**	**odlasci**	**čekanje**	**vrijeme provedeno u sustavu**	**poslužitelj**
Ana	0.755	0.893	1.65	0	0.893	1
Katarina	1.94	0.421	2.36	0	0.421	1
Ivan	2.08	0.265	2.62	0.276	0.541	1
Andrea	2.22	0.698	3.32	0.401	1.10	1
Marko	2.66	3.80	7.12	0.663	4.46	1
Julija	5.55	1.03	8.15	1.57	2.60	1

Tablica 3: Karakteristike reda s jednim poslužiteljem

Iz Tablice 3 vidljivo je da je Ana nazvala prva. Poslužitelj je u tom trenutku bio slobodan (jer je do tada sustav bio prazan) stoga je Ana odmah bila poslužena, odnosno nije morala čekati. Katarina je nazvala tek nakon što je Ana prekinula poziv (odnosno nakon što je Ana napustila sustav), stoga je Katarina, kao i Ana bila odmah poslužena. S druge strane, Ivan je nazvao prije nego je Katarina završila poziv, stoga je morao čekati dok Katarina ne napusti sustav. Na isti način je sustav funkcionirao i s Andreom, Markom i Julijom. U nastavku ćemo na istom primjeru vidjeti što se događa u slučaju kada imamo 2 poslužitelja.

6.2 M/M/2 sustav

Ukoliko u pozivnom centru rade 2 djelatnika, tada će klijent koji je idući na redu ići kod prvog slobodnog djelatnika.

oznake	**dolasci**	**vrijeme posluživanja**	**odlasci**	**čekanje**	**vrijeme provedeno u sustavu**	**poslužitelj**
Ana	0.755	0.893	1.65	0	0.893	1
Katarina	1.94	0.421	2.36	0	0.4210	2
Ivan	2.08	0.265	2.35	0	0.265	1
Andrea	2.22	0.698	3.05	1.125	0.823	1
Marko	2.66	3.80	6.46	0	3.80	2
Julija	5.55	1.03	6.59	0	1.03	1

Tablica 4: Karakteristike reda s dva poslužitelja

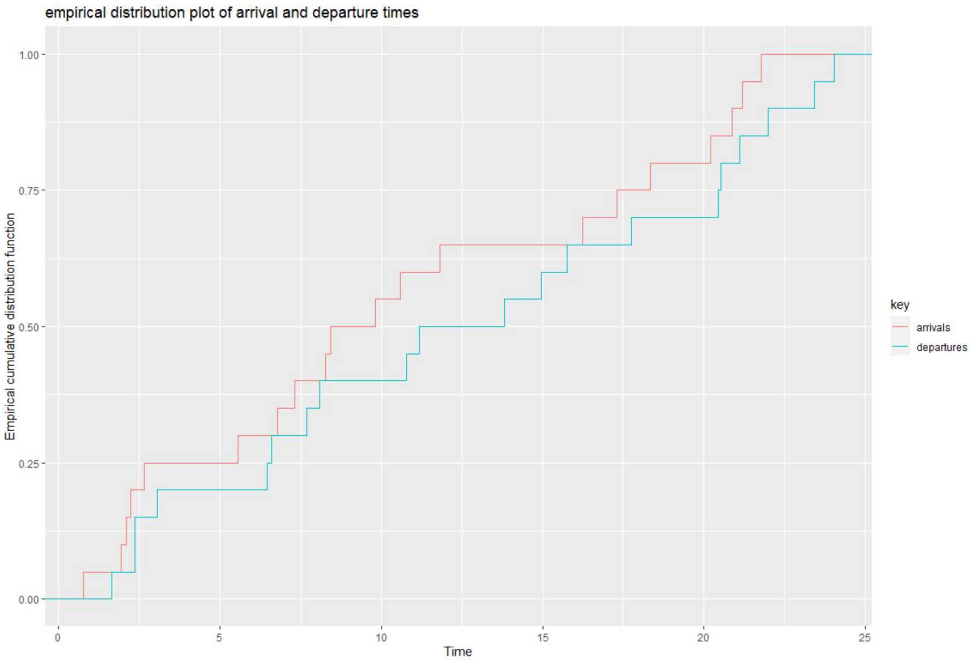
Iz Tablice 4 možemo vidjeti da je Ana nazvala prva. Katarina je nazvala prije Ivana, no Ivan je završio poziv prije Katarine. To je moguće jer postoje dva poslužitelja. Ana i Katarina bile su prvi klijenti za svaki poslužitelj, stoga njihovo vrijeme odlaska možemo izračunati tako da dodamo njihova vremena usluge na vrijeme dolaska. Ivan je morao čekati slobodnog poslužitelja budući da je stigao u trenutku kada su oba poslužitelja bila zauzeta. Dakle, morao je čekati da Ana ili Katarina napuste sustav kako bi bio poslužen. Vrijeme odlaska prvog klijenta pri poslužitelju 2 (Katarina) dodajemo njegovom vremenu usluge kako bismo izračunali vrijeme odlaska. Dakle, prva dva klijenta nisu imala vrijeme čekanja, dok je Ivan morao čekati slobodnog poslužitelja. Vrijeme čekanja za svakog možemo izračunati tako da od odlaska oduzmemo dolazak i vrijeme posluživanja.

Nadalje dobivamo

ukupan broj klijenata	**propuštene mušterije**	**prosječno vrijeme čekanja**	**prosječno vrijeme odgovora**	**faktor iskorištenja**	**prosječna duljina reda**	**prosječan broj klijenata u sustavu**
20	0	0.206	1.99	0.743008248227883	0.187	1.66

Tablica 5: Obilježja sustava

Iz Tablice 5 vidimo da je koeficijent iskorištenja jednak 0.743, odnosno da su kapaciteti iskorišteni 74.3% promatranog vremena.



Slika 11: Empirijske funkcije distribucija vremena dolazaka i odlazaka

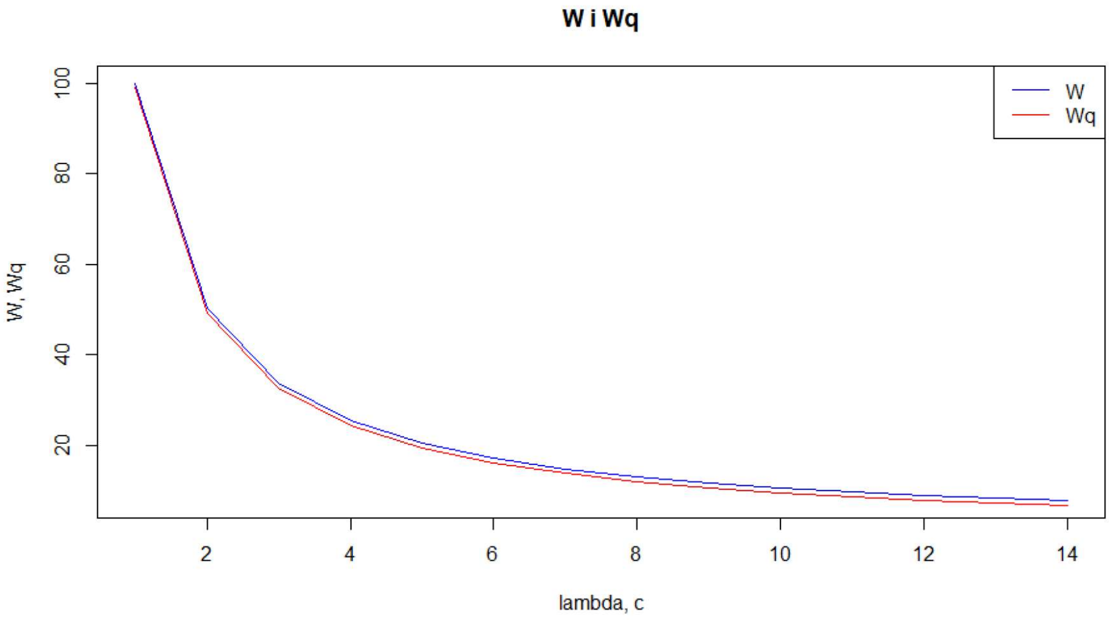
Na Slici 11 prikazane su empirijske kumulativne funkcije distribucije za vremena dolaska i odlaska. U svakom trenutku je jedna od funkcija jednaka broju klijenata koji su trenutno u sustavu (oni koji su u redu i koji se poslužuju).

6.3 M/M/C sustav

U ovom dijelu ćemo simulirati M/M/C sustav pomoću R paketa "queue". Sustav M/M/C s očekivanom stopom dolazaka $\lambda = 2$ i očekivanom stopom usluge $\mu = 4$ imat će sljedeća obilježja:

- $\rho = 0.5$, odnosno vjerojatnost da je poslužitelj zauzet jednaka je 0.5
- $W = 0.25$, prosječno vrijeme čekanja u sustavu jednako je 0.25
- $W_Q = 0$, prosječno vrijeme čekanja u redu jednako je 0
- $L = 0.5$, prosječan broj klijenata u sustavu jednak je 0.5
- $L_Q = 0$, prosječan broj klijenata u redu jednak je 0

Na Slici 12 pogledat ćemo što se događa ukoliko bismo za proizvoljan sustav M/M/C, s parametrom $\mu = 1.01$ pretpostavili da broj poslužitelja (C) i očekivana stopa dolazaka (λ) rastu jednakom brzinom.



Slika 12: Funkcije distribucija očekivanog vremena čekanja u sustavu te očekivanog vremena čekanja u redu

Sa Slike 12 vidljivo je da iako λ i C rastu istom brzinom, kako se broj poslužitelja povećava, vrijeme teži nuli. To bi značilo da se kapacitet sustava povećava brže od posla koji će biti potrebno obaviti.

Popis slika

Popis tablica

Literatura

[1] Soren Asmussen, *Applied Probability and Queues*, Second Edition, Springer-Verlag, New York, Inc., 2003.

[2] Pedro Canadilla, *Analysis of Queueing Networks and Models, Package 'queueing'*, 2019.

[3] Anthony Ebert, Kerrie Mengersen, Fabrizio Ruggeri, Paul Wu, *Computationally Efficient Simulation of Queues: The R Package queuecomputer*, Queensland University of Technology ACEMS, 2020.

[4] Linda Green, *Queueing theory and modeling*, Graduate School of Business, Columbia University, New York, 2011.

[5] Sheldon M. Ross, *Introduction to Probability Models*, Ninth Edition, University of California, Berkeley, California, 2007.

[6] Roberto Salazar, *Queueing Models with R*, Towards Data Science, 2020.

[7] William J. Stewart, *Probability, Markov Chains, Queues, and simulation*, Princeton University Press, 2009.,

[8] N. Šuvak, *Slučajni procesi (web materijali)*, Odjel za matematiku, Osijek

[9] Z. Vondraček, *Slučajni procesi (web materijali), Procesi obnavljanja*, PMF-Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, 2018.

[10] Wikipedija, Queueing theory, *https://en.wikipedia.org/wiki/Queueing_theory*

Sažetak

U svakodnevnom životu susrećemo se s raznim oblicima čekanja u redu. Teorija redova čekanja je grana matematike koja proučava kako se redovi formiraju, kako funkcioniraju te ima li problema u njihovom funkcioniranju. Cilj teorije redova čekanja je dizajniranje uravnoteženih sustava koji služe korisnicima brzo i učinkovito, ali ne koštaju previše da bi bili održivi. Na početku rada upoznali smo se s osnovnim pojmovima i oznakama potrebnim za razumijevanje rada. Bavili smo se sustavima oblika M/M/1 koje je karakterizirala činjenica da vremena dolaska i vremena usluge imaju eksponencijalnu distribuciju. Također smo se pozabavili i malo složenijim sustavima, odnosno sustavima M/G/1 i G/M/1. Teorijski dio smo, uz pomoć R paketa "queueing" i "queuecomputer", primijenili na stvarne podatke.

Ključne riječi: teorija redova čekanja, redovi, očekivana stopa usluge, očekivana stopa dolaska, proces dolaska, proces usluge, Poissonov proces

Queueing theory

Summary

In everyday life we encounter various forms of queues. Queueing theory is a branch of mathematics that studies how queues are formed, how they function, and are there problems in their functioning. The goal of queueing theory is to design balanced systems that serve customers quickly and efficiently, but do not cost too much to be sustainable. At the beginning of this paper, we were introduced to the basic concepts and notations needed to understand the paper. We dealt with M/ M/1 systems characterized by the fact that arrival times and service times have an exponential distribution. We also dealt with slightly more complex systems, namely M/ G/1 and G/M/1 systems. We applied the theoretical part, with the help of the R packages "queueing" and "queuecomputer", to the actual data.

Keywords: queueing theory, queues, mean arrival rate, mean service rate, arrival process, service process, Poisson process

Životopis

Rođena sam 23. srpnja 1997. godine u Slavonskom Brodu gdje sam završila osnovnu školu "Bogoslav Šulek". Nakon osnovne škole upisujem Ekonomsko-birotehničku školu u Slavonskom Brodu koju završavam 2016. godine. Iste godine obrazovanje nastavljam na Odjelu za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku na preddiplomskom studiju matematike kojeg završavam 2019. godine i stječem naziv prvostupnice matematike s temom završnog rada *Nenegativne i M-matrice* pod mentorstvom izv.prof.dr.sc. Darije Marković. U jesen 2019. godine upisujem diplomski studij matematike, smjer Financijska matematika i statistika.